arXiv:2601.00392v1 [cs.CG] 1 Jan 2026

†特拉维夫大学数学科学学院，以色列特拉维夫 69978；sariel@math.tau.ac.il。
‡于 2026年1月5日使用 ReLaTEX 排版。

给定两个向量 u，$u' \in \mathcal{L}$，其中 u' 的坐标互质，令 $r = ray(u,\ u')$ 为从 u 出发、方向为 u' 的射线。令 $p(r,\ i) = u + iu'$ 为该射线上的第 i 个格点，其中 $i \geq 0$。对于 $i \geq 0$，我们将 $r[i]$ 记为 r 上连接 $p(r,\ i)$ 与 $p(r,\ i+1)$ 的闭线段。我们记

引理 3.2。设 D 为一个　平面中半径为 $r > 1$ 的圆盘。那么 $|\mathcal{L} \cap \partial$离散凸包$(D)| = O(r^{2/3})$　　.

证明：令 $D^0 =$ 离散凸包(D)。对于 $e = \overrightarrow{pq}$ 的 D^0的一条边，我们将其权重定义为 $w(e) = |\mathcal{L} \cap e| - 1$。我们假设将 e 定向，使得 $\operatorname{int} D^0$ 位于 e的左侧。令 $v = v(e)$ 为 e的方向向量；

引理3.5. 给定一个三角形 T，其中两个顶点属于 $\mathcal{L}$，则 $\underline{T}$的离散凸包的顶点数至多为 $2\lceil$对数$_\phi\,\delta(T)\rceil+7$，其中 $\phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$是黄金比例。

遗憾的是，当体以隐式形式给出或不是多边形时，这些方法都会失效。我们对上述技术进行了扩展：通过在给定的体上依次进行射线投射，计算所需边方向的渐近分数。

引理 3.7。令 $\rho = (a, b)$ 为格点 $\mathcal{L}$ 上的一个点，使得 $a, b > 0$ 和 $gcd(a, b) = 1$。令$\rho_0, \ldots, \rho_n = \rho$ 为 ρ 的收敛分数序列。

那么线段 $s = \rho_i \rho_i'$ 必须与线段 op 相交，其中 o 表示原点，且 $\rho_i' = \rho_i + \rho_{i-1}$，对于 $i = 0, \ldots, n$。

证明：设 l 为经过 o 和 ρ的直线。根据定义， $\rho_i = q_i \rho_{i-1} + \rho_{i-2}$ 和 q_i 是满足 ρ_i 与 ρ_{i-2}位于 l 同一侧的最大值。因此， $\rho_i \rho_i'$ 必定与 l相交，否则 q_i 就不是最大值。M

此外， $\rho_i \rho_i^{'}$ 必须 i与 $o\rho$相交，或者 e lse th向量 ρ_{i+1} 将会 ld be l onger t h$_{\text{w}}^{\text{an}}{}_{\rho,}$ hich is i$_{\text{mposs}}$ ible.

令 p_0、……、p_n 为 e的渐近分数。 FindEdgeDirection 正确性的依据是：截至第（$n-1$）个阶段，它执行的射线投射与 GeomGCD（e）执行的完全相同，并且从这些射线上选取正确的点作为 e的渐近分数。容易验证，如果

定义 3.9（格点连通集）。令 $\hat{}G = (\mathcal{L},\ E)$ 为格点图，其边连接距离为 1 的每一对格点。若 S 是 $\mathcal{L}$ 的子集，且其诱导子图 G_S 连通，则称其为格点连通集。

引理 3.10。给定平面中的紧凸体 C，满足 $C \cap \mathcal{L}$ 格点连通，且给定一点 $v \in C \cap \mathcal{L}$，则可在 $O(\log \delta(C))$ 时间内计算出 C 的离散凸包上的一个点。

证明：思路是对 C 的离散凸包最低的顶点进行无界搜索。我们将 C 与经过 $v + (0,\ -2^i)$ 的水平线 l_i 相交，其中 $i = 1,\ 2,\ \ldots$，一旦遇到一条不与 $C \cap \mathcal{L}$ 相交的水平线 l_k，就停止。接着，在经过 v 和 l_k 的水平线之间，对与 C 相交的网格底部水平线进行二分搜索。$C \cap \mathcal{L}$ 的格点连通性保证了该过程的正确性。

由于 $k \leq 1 \lceil \log \delta(C) \rceil$，因此二分搜索是在大小为 $O(\delta(C))$ 的区间上进行的。给定这条直线，我们可以通过执行一次射线投射来计算离散凸包的一个顶点。

因此，我们得到了本文的主要结果：

定理 3.11. 给定平面上的一个紧凸形状 C，其与 C 的任意直线的交点都可以在 $O(1)$ 时间内求出，且 $C \cap \mathcal{L}$ 是格点连通的，并且已知 $C \cap \mathcal{L}$ 中的一个点，则可以在 $O(|C^0| \log\ \delta(C))$ 时间和 $O(1)$空间内计算 C 的离散凸包 C^0，其中 $|C^0|$ 表示 C^0 的顶点数。

作为一种具有竞争力的朴素算法，我们实现了 Graham 凸包算法的一种变体