arXiv:2601.00399v1 [math.NA] 1 Jan 2026

一种用于非散度形式线性对流方程的弱Galerkin最小二乘有限元方法

CHUNMEI WANG 和 SHANGYOU ZHANG

Abstract. 本文针对非散度形式的一阶线性对流方程，提出了一种弱Galerkin最小二乘（WG–LS）有限元方法。该方法采用间断有限元函数进行构造，不要求对流向量或反应系数满足任何强制性假设。所得离散问题对应一个对称正定线性系统，并适用于一般的多边形和多面体网格。在系数仅满足最低正则性假设的条件下，本文在适当的能量范数下建立了WG–LS近似的最优阶误差估计。数值实验验证了理论收敛结果，并展示了所提出方法的精度和效率。

1. Introduction

本文致力于利用间断有限元函数，针对非散度形式的一阶线性对流方程，构造一种新的数值方法。为简便起见，我们考虑如下模型问题：求未知函数 u，使其满足

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla u + c(x)u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{on } \Gamma_-, \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中，Ω 是 $\mathbb{R}^d$ $(d=2,\ 3)$ 中具有Lipschitz连续边界 $\Gamma=\partial\Omega$ 的开、有界且连通的区域。流入边界 $\Gamma_-\subset\Gamma$ 由条件 $\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n}<0$定义，其中$\mathbf{n}$表示 Γ上的单位外法向量。我们假设对流向量 $\boldsymbol{\beta}\in[L^\infty(\Omega)]^d$、反应系数 $c\in L^\infty(\Omega)$、源项 $f\in L^2(\Omega)$以及流入边界数据 $g\in L^2(\Gamma_-)$。

双曲型的一阶线性偏微分方程（PDE），也称为输运方程或线性对流方程，广泛应用于科学和工程的诸多领域，包括流体动力学和中子输运。过去几十年来，研究人员投入了大量精力，致力于开发适用于双曲问题的精确、高效数值方法。由于

Department of Mathematics, University of Florida, Gainesville, FL 32611, USA. Department of Mathematical Sciences, University of Delaware, Newark, DE 19716, USA*E-mail addresses*: chunmei.wang@ufl.edu, szhang@udel.edu。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 65N30, 65N15, 65N12, 65N20。

Key words and phrases. 弱Galerkin、有限元方法、最小二乘、线性对流、弱梯度、多边形或多面体网格。

传播间断和尖锐过渡层等局部现象的存在，双曲方程的数值逼近仍然颇具挑战。尤其是，由于线性双曲型偏微分方程在边界数据不光滑时通常存在间断解，因此很难设计出既能在光滑区域实现高阶精度、又能精确捕捉间断，同时避免在不光滑特征附近产生伪振荡的数值方法 [4]。此外，线性双曲方程是更一般双曲系统的原型模型，包括非线性守恒律 [27] 和相空间中的输运方程 [28]。因此，针对线性对流方程的有效数值方法可作为求解复杂双曲型偏微分方程的重要基础 [27]。

针对线性输运方程，已有多种数值方法，包括流线迎风 Petrov–Galerkin 方法 [20], 残差分布方法 [25, 20, 2], 最小二乘有限元方法 [12, 5, 22, 41, 3],稳定化有限元方法 [6], 以及各种间断 Galerkin 方法
[40, 26, 13, 14, 23, 24, 21, 9, 7, 8, 10, 11]。现有关于线性输运方程（1.1）的研究大多依赖于对流向量 $\boldsymbol{\beta}$ 和反应系数 c 满足如下形式的强制性条件

$$c + \tfrac{1}{2}\nabla \cdot \boldsymbol{\beta} \geq \alpha_0,$$

其中某个正常数为 α_0，或满足类似假设。这些条件在实际应用中往往限制较多，可能会排除一些重要的物理模型，包括可压缩流和放热反应过程 [6]。一个值得注意的例外是 Burman [6], 提出的稳定化有限元方法，该方法假设 $\boldsymbol{\beta} \in [W^{2,\infty}(\Omega)]^d$ 且 $c \in W^{1,\infty}(\Omega)$。

弱 Galerkin（WG）有限元方法最初由 [60] 引入，并在
[30, 31, 57, 61, 32, 33, 34, 35, 59, 63, 18, 56, 39, 29, 42,
65, 51, 55, 52, 53, 54, 58, 62, 1], 中得到进一步发展。该方法基于弱导数和弱连续性，形成的数值格式对于一般多边形和多面体网格具有稳定性和高度灵活性。WG 框架的一项重要扩展是原始-对偶弱 Galerkin（PDWG）方法 [36, 37, 15,
16, 17, 38, 43, 44, 64, 19, 46, 47, 45, 48, 49]。在 PDWG 方法中，数值逼近被表述为约束极小化问题，其中控制方程通过弱约束施加。由此得到的 Euler–Lagrange 系统涉及原始变量和对偶变量，并具有良好的对称性和稳定性。PDWG 方法也已用于线性输运方程；例如，参见 [50, 36, 38, 47]。

本文旨在为线性对流问题 (1.1) 开发一种新的数值方法，其中对流向量 $\boldsymbol{\beta}$ 和反应系数 c 仅假设分片光滑，而不施加任何额外的强制性条件，例如上述条件。为此，我们提出了一种弱*Galerkin*最小二乘（*WG–LS*）有限元方法，该方法易于实现，并导出一个对称正定的离散线性系统，这使其区别于许多现有的弱 Galerkin公式；例如参见 [50, 36, 38, 47]。我们对所提出的 WG–LS 方法的稳定性和

收敛性进行了严格分析。此外，相关理论分析仅依赖于线性对流问题的最小假设，即连续解的唯一性和系数的分片光滑性。

本文其余部分安排如下。第 2 节简要回顾弱梯度及其离散对应形式。第 3 节给出非散度形式的一阶线性对流问题的 WG–LS算法。第 4 节证明数值解的存在性和唯一性。第 5 节推导 WG–LS有限元逼近的误差方程。第 6 节证明离散 Sobolev范数下的最优阶误差估计。最后，第 7 节报告数值结果，以展示所提出的 WG–LS 方法的稳定性、精度和效率。

全文采用 Sobolev空间及范数的标准记号。对于任意具有 Lipschitz连续边界的有界开区域 $D \subset \mathbb{R}^d$ 以及 $\|\cdot\|_{s,D}$ 与 $|\cdot|_{s,D}$ 分别表示 Sobolev空间 $H^s(D)$（$s \geq 0$）的范数和半范数，而 $(\cdot,\cdot)_{s,D}$ 表示相应的内积。特别地，$H^0(D) = L^2(D)$，其范数为 $\|\cdot\|_D$，内积为 $(\cdot,\cdot)_D$。当 $D = \Omega$，或者上下文已明确区域时，省略下标 D。

2. Discrete Weak Gradient

设 T 是一个边界为 ∂T 的多边形（二维情形）或多面体（三维情形）区域。T 上的一个 弱函数 定义为有序对 $v = \{v_0, v_b\}$，其中 $v_0 \in L^2(T)$ 表示 T 内部的 v 值，而 $v_b \in L^2(\partial T)$ 表示边界 ∂T 上的 v 值。一般而言，不要求 v_b 是 ∂T 上 v_0 的迹，但这一选择是允许的。

我们用 $\mathcal{W}(T)$ 表示 T 上所有弱函数组成的空间，定义为

$$\mathcal{W}(T) = \big\{v = \{v_0, v_b\} : v_0 \in L^2(T),\ v_b \in L^2(\partial T)\big\}. \tag{2.1}$$

函数 $v \in \mathcal{W}(T)$ 的 弱梯度 记为 $\nabla_w v$，其定义为作用于 $[H^1(T)]^d$ 的线性泛函，使得

$$(\nabla_w v, \boldsymbol{\psi})_T := -(v_0, \nabla\cdot\boldsymbol{\psi})_T + \langle v_b, \boldsymbol{\psi}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial T}, \qquad \forall \boldsymbol{\psi} \in [H^1(T)]^d, \tag{2.2}$$

其中，$\mathbf{n}$ 表示 ∂T 上的外单位法向量。

设 $P_r(T)$ 是 T 上次数至多为 r 的多项式空间。$v \in \mathcal{W}(T)$ 的 离散弱梯度 记为 $\nabla_{w,r,T} v$，定义为 $[P_r(T)]^d$ 中满足以下条件的唯一向量值多项式

$$(\nabla_{w,r,T} v, \boldsymbol{\psi})_T = -(v_0, \nabla\cdot\boldsymbol{\psi})_T + \langle v_b, \boldsymbol{\psi}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial T}, \qquad \forall \boldsymbol{\psi} \in [P_r(T)]^d. \tag{2.3}$$

若 $v_0 \in H^1(T)$，则通过分部积分，(2.3) 可等价地写为

$$(\nabla_{w,r,T} v, \boldsymbol{\psi})_T = (\nabla v_0, \boldsymbol{\psi})_T - \langle v_0 - v_b, \boldsymbol{\psi}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial T}, \qquad \forall \boldsymbol{\psi} \in [P_r(T)]^d. \tag{2.4}$$

3. WG–LS Algorithm

设 $\mathcal{T}_h$ 是区域 Ω 的一个形状正则剖分，该剖分按照 [1] 的定义将区域划分为多边形（二维）或多面体（三维）单元。令 $\mathcal{E}_h$ 表示 $\mathcal{T}_h$ 中所有边/面的集合，并令 $\mathcal{E}_h^0 = \mathcal{E}_h \setminus \partial\Omega$ 表示所有内部边/面的集合。对于每个 $T \in \mathcal{T}_h$，用 h_T 表示 T 的直径，并定义网格尺寸 $h = \max_{T\in\mathcal{T}_h} h_T$。

对于给定的整数 $k \geq 1$，定义局部弱有限元空间

$$W_k(T) = \big\{\{\sigma_0, \sigma_b\} : \sigma_0 \in P_k(T),\ \sigma_b \in P_k(e),\ e \subset \partial T\big\}.$$

将这些局部空间拼接起来，并要求内部边/面上的边界分量取单值，即可得到全局弱有限元空间 W_h。令 W_h^0为 W_h 的子空间，该空间由在流入边界 Γ_-上边界值为零的函数组成，即

$$W_h^0 = \big\{\{\sigma_0, \sigma_b\} \in W_h :\ \sigma_b|_e = 0,\ e \subset \Gamma_-\big\}.$$

为简化记号，对于任意 $\sigma \in W_h$，我们用 $\nabla_w\sigma$ 表示逐单元定义的离散弱梯度

$$(\nabla_w\sigma)|_T = \nabla_{w,k,T}(\sigma|_T), \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

定义以下双线性形式：

$$s(u,v) = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial T} h_T^{-1}(u_0 - u_b)(v_0 - v_b)\, ds,$$

$$a(u,v) = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \big(\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla_w u + cu_0,\ \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla_w v + cv_0\big)_T,$$

对所有 $u,\ v \in W_h$。

现在我们可以陈述一阶线性对流问题（1.1）的 WG–LS有限元格式。

WG-LS算法3.1。 求 $u_h \in W_h$，使得在 Γ_- 上满足 $u_b = Q_b g$，其中

$$a(u_h, v_h) + s(u_h, v_h) = (f, \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla_w v_h + cv_0), \qquad \forall v_h \in W_h^0, \tag{3.1}$$

其中，Q_b 表示投影到 $P_k(e)$ 上的局部 L^2 投影，该投影定义在每个边/面 e 上。

4. Solution Existence and Uniqueness

在每个单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 上，令 Q_0 表示投影到 $P_k(T)$ 上的 L^2 投影，其中 $k \geq 1$ 是一个固定整数。在每个边/面 $e \subset \partial T$ 上，令 Q_b 表示投影到 $P_k(e)$ 上的 L^2 投影。对于任意 $w \in H^1(\Omega)$，定义局部 L^2 投影 $Q_h w \in W_h$ 为

$$(Q_h w)|_T := \{Q_0(w|_T),\, Q_b(w|_{\partial T})\}, \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

引理 4.1。 L^2 投影算子 Q_h 和 Q_0 满足以下交换性质：

$$\nabla_w(Q_h w) = Q_0(\nabla w), \qquad \forall w \in H^1(T). \tag{4.1}$$

证明。 对于任意 $\boldsymbol{\psi} \in [P_k(T)]^d$，利用（2.3）可得

$$\begin{aligned}(\nabla_w Q_h w, \boldsymbol{\psi})_T &= -(Q_0 w, \nabla \cdot \boldsymbol{\psi})_T + \langle Q_b w, \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial T} \\ &= -(w, \nabla \cdot \boldsymbol{\psi})_T + \langle w, \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial T} \\ &= (\nabla w, \boldsymbol{\psi})_T = (Q_0 \nabla w, \boldsymbol{\psi})_T,\end{aligned}$$

这证明了（4.1）。 □

引理 4.2。 假设一阶线性对流问题 （1.1）存在唯一解。则弱伽辽金最小二乘格式 （3.1）存在唯一解。

证明。 只需证明与（3.1）相关的齐次问题仅有平凡解。为此，假设 $f = 0$ 和 $g = 0$。因此， $u_h \in W_h^0$满足

$$a(u_h, v_h) + s(u_h, v_h) = 0, \qquad \forall v_h \in W_h^0.$$

取 $v_h = u_h$ ，可得

$$a(u_h, u_h) + s(u_h, u_h) = 0,$$

这意味着

$$u_0 = u_b \quad \text{on } \partial T, \qquad \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla_w u_h + c u_0 = 0 \quad \text{on } T, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

利用 (2.4) 以及 $u_0 = u_b$ on ∂T 上的恒等式，可得

$$(\nabla_w u_h, \boldsymbol{\psi})_T = (\nabla u_0, \boldsymbol{\psi})_T, \qquad \forall \boldsymbol{\psi} \in [P_k(T)]^d,$$

这意味着 $\nabla_w u_h = \nabla u_0$ on 每个单元 T 上成立。因此，

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u_0 + c u_0 = 0 \quad \text{in } T, \ \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

由于对所有 T， $u_0 = u_b$ on ∂T 上成立，因此可得 $u_0 \in C^0(\Omega)$。此外，流入边界 Γ_- 上的边界条件 $u_b = 0$ on 意味着 $u_0 = 0$ on Γ_-。根据连续问题 (1.1) 的唯一性，我们得出 $u_0 \equiv 0$ in Ω，进而有 $u_b \equiv 0$。因此， $u_h \equiv 0$，证明完毕。□

我们在 W_h 上定义一个半范数:

$$|\!|\!| v |\!|\!|^2 := a(v, v).$$

通过与引理 4.2 类似的论证，可以证明 $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ 在 W_h^0 上定义了一个范数。

5. Error Equations

设 u 为式 (1.1) 的精确解， $u_h \in W_h$ 为式 (3.1) 定义的 WG–LS 近似。定义误差函数

$$e_h := u_h - Q_h u. \tag{5.1}$$

为简化表述，以下分析中假设 $\boldsymbol{\beta}$ 和 c 为分片常数。推广到分片光滑系数的情形是类似的。

引理 5.1. 误差函数 e_h 满足以下误差方程:

$$a(e_h, v_h) + s(e_h, v_h) = -s(Q_h u, v_h), \qquad \forall v_h \in W_h^0. \tag{5.2}$$

证明. 将连续问题 (1.1) 与 $\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla_w v_h + cv_0$ 进行测试，得到

$$(\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla u + cu,\ \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla_w v_h + cv_0) = (f,\ \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla_w v_h + cv_0).$$

由于每个单元 T 上的 $\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla_w v_h + cv_0 \in P_k(T)$，应用交换性质 (4.1) 可得

$$(\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla_w Q_h u + cQ_0 u,\ \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla_w v_h + cv_0) = (f,\ \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla_w v_h + cv_0).$$

将上述恒等式减去离散格式 (3.1)，得到

$$a(e_h, v_h) + s(u_h, v_h) = 0,$$

这意味着

$$a(e_h, v_h) + s(e_h, v_h) = -s(Q_h u, v_h),$$

证明完毕。 □

6. Error Estimates

回顾一下，$\mathcal{T}_h$ 是区域 Ω 的形状正则有限元剖分。因此，对于任意单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 和任意函数 $\phi \in H^1(T)$，以下迹不等式成立 [1]:

$$\|\phi\|_{\partial T}^2 \le C\big(h_T^{-1}\|\phi\|_T^2 + h_T\|\nabla\phi\|_T^2\big). \tag{6.1}$$

此外，若 ϕ 是定义在 T上的多项式，则有更精确的估计

$$\|\phi\|_{\partial T}^2 \le Ch_T^{-1}\|\phi\|_T^2 \tag{6.2}$$

成立 [1]。

引理 6.1. [1]设 $\mathcal{T}_h$ 是Ω的形状正则有限元剖分。对于任意$0 \le s \le 1$ 和 $0 \le n \le k$，存在一个常数 $C > 0$，使得

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{2s}\|u - Q_0 u\|_{s,T}^2 \le Ch^{2n+2}\|u\|_{n+1}^2. \tag{6.3}$$

引理 6.2. 假设线性对流问题(1.1) 的精确解 u满足 $u \in H^{k+1}(\Omega)$。则存在一个与 h 无关的常数 $C > 0$，使得

$$|\!|\!|e_h|\!|\!| \le Ch^k\|u\|_{k+1}. \tag{6.4}$$

证明. 在误差方程 (5.2) 中取 $v_h = e_h$，得到

$$|\!|\!|e_h|\!|\!|^2 = -s(Q_h u, e_h).$$

应用柯西–施瓦茨不等式及稳定化项的定义，可得

$$|\!|\!|e_h|\!|\!|^2 \le \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{-1}\|Q_0 u - Q_b u\|_{\partial T}^2\right)^{1/2} |\!|\!|e_h|\!|\!|.$$

结合迹不等式 (6.1) 和逼近估计 (6.3)（其中 $n = k$ 和 $s = 0,\ 1$），我们得到

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{-1}\|Q_0 u - Q_b u\|_{\partial T}^2 \le C\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\big(h_T^{-2}\|u - Q_0 u\|_T^2 + \|u - Q_0 u\|_{1,T}^2\big) \le Ch^{2k}\|u\|_{k+1}^2.$$

结合上述估计并消去等式两边的 $|||e_h|||$，得到

$$|||e_h||| \le Ch^k \|u\|_{k+1},$$

从而完成证明。 □

7. Numerical experiments

在第一个测试中，我们在正方形区域 $\Omega = (-1,\ 1) \times (-1,\ 1)$ 上求解对流方程 (1.1)，其中

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c(x,y) = \lambda(x - \frac{1}{2})(y - \frac{1}{2}). \tag{7.1}$$

在 (1.1) 中取 f 和 g，精确解为

$$u = \sin x \sin y. \tag{7.2}$$

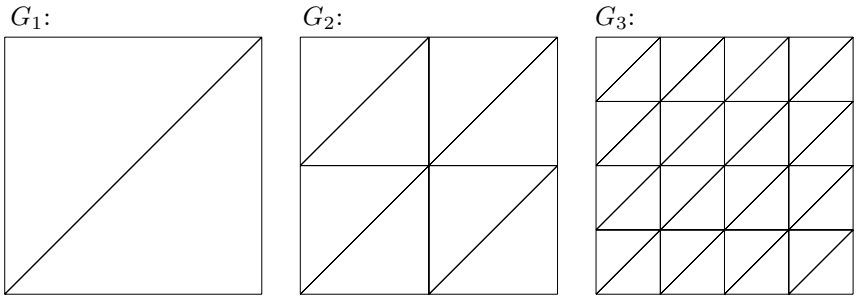


Figure 1. 表 1–4 中计算所用的三角网格。

采用弱 Galerkin 有限元 P_k-P_k/P_{k+1}（针对 $\{u_0, u_b\}$/∇_w），$k = 1$，2、3、4，在图 1 所示的三角网格上对 (7.2) 中的解进行近似。误差和计算得到的收敛阶列于表 1–4 中。所有情况下均达到最优收敛阶。

Table 1. 在图 1 网格上，采用 P_1-P_1/P_2 单元求解 (7.2)。

G_i	$\|Q_h u - u_h\|$	$O(h^r)$	$\|\nabla_w(Q_h u - u_h)\|$	$O(h^r)$	$\|\|\|Q_h u - u_h\|\|\|$	$O(h^r)$
	$\lambda = 1$ 见 (7.1)					
5	0.649E-4	2.0	0.126E-1	1.0	0.168E-2	1.0
6	0.162E-4	2.0	0.630E-2	1.0	0.842E-3	1.0
7	0.406E-5	2.0	0.315E-2	1.0	0.421E-3	1.0
	$\lambda = 100$ 在 (7.1) 中					
5	0.442E-3	1.2	0.138E-1	1.0	0.174E-2	1.1
6	0.153E-3	1.5	0.666E-2	1.1	0.852E-3	1.0
7	0.443E-4	1.8	0.322E-2	1.0	0.423E-3	1.0

TABLE 2. 图 1 网格上，(7.2) 的 P_2-P_2/P_3 单元。

G_i	$\|Q_hu-u_h\|$	$O(h^r)$	$\|\nabla_w(Q_hu-u_h)\|$	$O(h^r)$	$\|\|\|Q_hu-u_h\|\|\|$	$O(h^r)$
	$\lambda=1$ 在 (7.1) 中					
3	0.227E-4	2.7	0.924E-3	1.8	0.340E-3	2.0
4	0.374E-5	2.6	0.309E-3	1.6	0.844E-4	2.0
5	0.718E-6	2.4	0.122E-3	1.3	0.210E-4	2.0
	$\lambda=100$ （7.1）					
3	0.167E-3	1.8	0.319E-2	1.3	0.354E-3	3.5
4	0.158E-4	3.4	0.726E-3	2.1	0.811E-4	2.1
5	0.224E-5	2.8	0.360E-3	1.0	0.207E-4	2.0

TABLE 3. 采用图 1 网格上的 P_3-P_3/P_4 单元求解 (7.2)。

G_i	$\|Q_hu-u_h\|$	$O(h^r)$	$\|\nabla_w(Q_hu-u_h)\|$	$O(h^r)$	$\|\|\|Q_hu-u_h\|\|\|$	$O\ (h^r)$
	$\lambda=1$ 见（7.1）					
3	0.366E-6	4.0	0.403E-4	3.0	0.696E-5	3.0
4	0.227E-7	4.0	0.503E-5	3.0	0.866E-6	3.0
5	0.141E-8	4.0	0.629E-6	3.0	0.108E-6	3.0
	$\lambda=100$ 在 (7.1) 中					
3	0.143E-5	4.4	0.537E-4	3.4	0.100E-4	4.2
4	0.375E-7	5.3	0.529E-5	3.3	0.947E-6	3.4
5	0.254E-8	3.9	0.679E-6	3.0	0.111E-6	3.1

TABLE 4. 对于图 1 网格上的 (7.2)，采用 P_4-P_4/P_5 单元。

G_i	$\|Q_hu-u_h\|$	$O(h^r)$	$\|\nabla_w(Q_hu-u_h)\|$	$O(h^r)$	$\|\|\|Q_hu-u_h\|\|\|$	$O(h^r)$
	$\lambda=1$ 在（7.1）中					
2	0.200E-6	5.2	0.579E-5	4.2	0.355E-5	4.2
3	0.636E-8	5.0	0.375E-6	3.9	0.216E-6	4.0
4	0.211E-9	4.9	0.274E-7	3.8	0.134E-7	4.0
	$\lambda=100$ 在（7.1）中					
2	0.813E-6	6.4	0.209E-4	5.2	0.929E-5	6.5
3	0.210E-7	5.3	0.121E-5	4.1	0.201E-6	5.5
4	0.421E-9	5.6	0.786E-7	3.9	0.127E-7	4.0

采用弱 Galerkin 有限元 P_k-P_k/P_{k+2}（针对 $\{u_0,u_b\}/\nabla_w$），$k=1$，2、3、4，在图 2 所示的非凸多边形网格上重新计算 (7.2) 中的解。误差和计算得到的收敛阶列于表 5– 8 中。所有情况下、所有范数下均获得最优收敛阶。大多数结果略逊于三角网格上的结果。但由于某些未知原因，P_2 单元的结果要好得多。

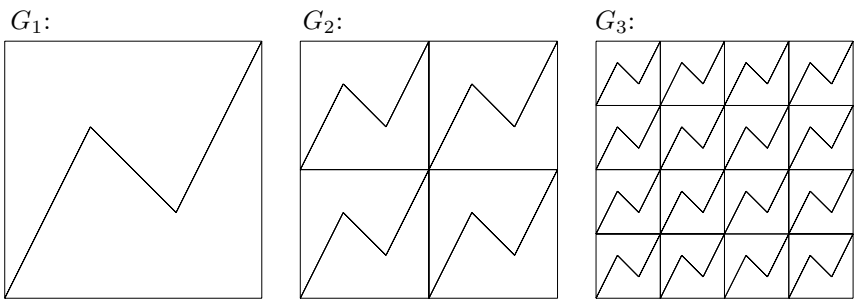


FIGURE 2. 表 5–8 中计算所用的非凸多边形网格。

TABLE 5. 在图 2 网格上，用 P_1-P_1/P_3 单元求解 (7.2)。

G_i	$\|Q_hu-u_h\|$	$O(h^r)$	$\|\nabla_w(Q_hu-u_h)\|$	$O(h^r)$	$\|\|\|Q_hu-u_h\|\|\|$	$O(h^r)$
	$\lambda=1$ 见 (7.1)					
5	0.702E-4	1.9	0.715E-2	1.0	0.190E-2	1.0
6	0.185E-4	1.9	0.357E-2	1.0	0.949E-3	1.0
7	0.489E-5	1.9	0.178E-2	1.0	0.474E-3	1.0
	$\lambda=100$ 在 (7.1) 中					
5	0.386E-3	1.3	0.831E-2	1.0	0.194E-2	1.1
6	0.143E-3	1.4	0.397E-2	1.1	0.956E-3	1.0
7	0.439E-4	1.7	0.188E-2	1.1	0.475E-3	1.0

TABLE 6. 在图 2 网格上，采用用于 (7.2) 的 P_2-P_2/P_4 单元。

G_i	$\|Q_hu-u_h\|$	$O(h^r)$	$\|\nabla_w(Q_hu-u_h)\|$	$O(h^r)$	$\|\|\|Q_hu-u_h\|\|\|$	$O(h^r)$
	$\lambda=1$ 在 (7.1) 中					
3	0.344E-4	2.9	0.132E-2	2.1	0.377E-3	2.9
4	0.442E-5	3.0	0.339E-3	2.0	0.854E-4	2.1
5	0.555E-6	3.0	0.854E-4	2.0	0.212E-4	2.0
	$\lambda=100$ 在（7.1）中					
3	0.832E-4	4.4	0.219E-2	4.2	0.101E-2	4.9
4	0.105E-4	3.0	0.388E-3	2.5	0.885E-4	3.5
5	0.965E-6	3.4	0.872E-4	2.2	0.210E-4	2.1

TABLE 7. 图 2 网格上的式 (7.2) 的 P_3-P_3/P_5 单元。

G_i	$\|Q_h u - u_h\|$	$O(h^r)$	$\|\nabla_w(Q_h u - u_h)\|$	$O(h^r)$	$\|\|\|Q_h u - u_h\|\|\|$	$O(h^r)$
	$\lambda = 1$ 在（7.1）中					
3	0.178E-5	3.5	0.753E-4	2.7	0.114E-4	4.3
4	0.134E-6	3.7	0.111E-4	2.8	0.113E-5	3.3
5	0.922E-8	3.9	0.151E-5	2.9	0.134E-6	3.1
	$\lambda = 100$ in (7.1)					
3	0.134E-4	5.2	0.161E-3	5.2	0.660E-4	6.0
4	0.245E-6	5.8	0.109E-4	3.9	0.156E-5	5.4
5	0.907E-8	4.8	0.145E-5	2.9	0.138E-6	3.5

TABLE 8. 采用图 2 网格上的 P_4-P_4/P_6 单元求解 (7.2)。

G_i	$\|Q_h u - u_h\|$	$O(h^r)$	$\|\nabla_w(Q_h u - u_h)\|$	$O(h^r)$	$\|\|\|Q_h u - u_h\|\|\|$	$O(h^r)$
	$\lambda = 1$ 在 (7.1) 中					
2	0.120E-5	7.2	0.648E-4	5.7	0.396E-4	5.4
3	0.244E-7	5.6	0.236E-5	4.8	0.668E-6	5.9
4	0.406E-8	—	0.163E-6	3.9	0.165E-7	5.3
	$\lambda = 100$ 在 (7.1) 中					
2	0.156E-3	5.4	0.186E-2	5.5	0.673E-3	7.0
3	0.659E-6	7.9	0.146E-4	7.0	0.543E-5	7.0
4	0.897E-8	6.2	0.219E-6	6.1	0.460E-7	6.9

接下来，我们在立方体区域 $\Omega = (-1,\ 1) \times (-1,\ 1) \times (-1,\ 1)$ 上求解三维对流方程 (1.1)，其中

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c(x,y) = -3\lambda, \quad f = 0.$$

这是一个更符合实际的问题，即 $f = 0$，通常流动中的不良行为无法通过人工源项消除。在 (1.1) 中取 g，精确解为

$$u = \mathrm{e}^{\lambda(x+y+z)}. \tag{7.3}$$

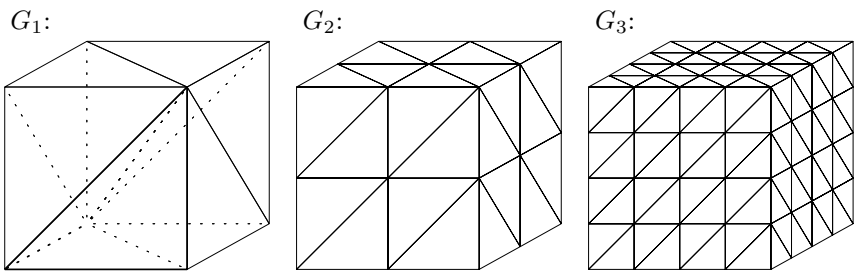


FIGURE 3. 表 9–11 中计算所用的四面体网格。

在图 3 所示的四面体网格上，采用弱 Galerkin 有限元 P_k-P_k/P_{k+1}（对于 $\{u_0, u_b\}/\nabla_w$），$k = 1$，2，3，计算 (7.3) 中的解。误差及计算得到的收敛阶列于表 9–11。所有情形下，各种范数均达到最优收敛阶。

TABLE 9. 在图 3 网格上，采用 P_1-P_1/P_2 单元求解 (7.3)。

G_i	$\|Q_h u - u_h\|$	$O(h^r)$	$\|\nabla_w(Q_h u - u_h)\|$	$O(h^r)$	$\|\|\|Q_h u - u_h\|\|\|$	$O(h^r)$
	$\lambda = 1$ 在（7.3）中					
3	0.916E-2	2.37	0.594E+0	1.02	0.576E+0	0.98
4	0.199E-2	2.20	0.296E+0	1.01	0.287E+0	1.00
5	0.469E-3	2.08	0.148E+0	1.00	0.143E+0	1.01
	$\lambda = 2$ 在 (7.3) 中					
3	0.396E+0	2.54	0.209E+2	1.08	0.199E+2	0.99
4	0.768E-1	2.37	0.103E+2	1.03	0.996E+1	1.00
5	0.171E-1	2.17	0.509E+1	1.01	0.495E+1	1.01

TABLE 10. 基于图 3 网格上的（7.3） P_2-P_2/P_3 单元。

G_i	$\|Q_h u - u_h\|$	$O(h^r)$	$\|\nabla_w(Q_h u - u_h)\|$	$O(h^r)$	$\|\|\|Q_h u - u_h\|\|\|$	$O(h^r)$
	$\lambda = 1$ 在 (7.3) 中					
2	0.171E-2	4.39	0.298E-1	3.28	0.215E-1	2.91
3	0.102E-3	4.07	0.345E-2	3.11	0.273E-2	2.98
4	0.636E-5	4.00	0.417E-3	3.05	0.343E-3	2.99
	$\lambda = 2$ 在（7.3）中					
2	0.381E+0	2.81	0.473E+1	2.41	0.277E+1	2.64
3	0.102E+0	1.90	0.152E+1	1.64	0.370E+0	2.90
4	0.113E-1	3.17	0.279E+0	2.44	0.470E-1	2.98

TABLE 11. 通过 P_3-P_3/P_4 单元在图 3 网格上求解 (7.3)。

G_i	$\|Q_h u - u_h\|$	$O(h^r)$	$\|\nabla_w(Q_h u - u_h)\|$	$O(h^r)$	$\|\|\|Q_h u - u_h\|\|\|$	$O(h^r)$
	$\lambda = 1$ 在（7.3）中					
2	0.171E-2	4.39	0.298E-1	3.28	0.215E-1	2.91
3	0.102E-3	4.07	0.345E-2	3.11	0.273E-2	2.98
4	0.636E-5	4.00	0.417E-3	3.05	0.343E-3	2.99
	$\lambda = 2$ 在（7.3）中					
2	0.381E+0	2.81	0.473E+1	2.41	0.277E+1	2.64
3	0.102E+0	1.90	0.152E+1	1.64	0.370E+0	2.90
4	0.113E-1	3.17	0.279E+0	2.44	0.470E-1	2.98

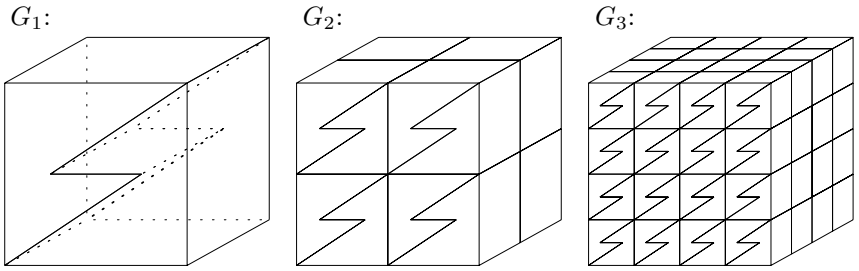


FIGURE 4. 表12–14中计算所用的非凸多面体网格。

采用弱Galerkin有限元P_k-P_k/P_{k+2}（针对 $\{u_0, u_b\}$/∇_w），$k = 1$，2，3，对图4所示的非凸多面体网格上的（7.3）中的解再次进行计算。误差和计算得到的收敛阶列于表12–14中。所有情况及所有范数下均达到最优收敛阶。非凸多面体网格上的结果要好得多，因为未知量少得多。

TABLE 12. 在图4网格上，针对（7.3）的 P_1-P_1/P_3 单元。

G_i	$\|Q_h u - u_h\|$	$O(h^r)$	$\|\nabla_w(Q_h u - u_h)\|$	$O(h^r)$	$\|\|\|Q_h u - u_h\|\|\|$	$O(h^r)$
	$\lambda = 1$ 见（7.3）					
4	0.256E-2	2.39	0.286E+0	1.08	0.303E+0	1.13
5	0.597E-3	2.10	0.141E+0	1.03	0.147E+0	1.05
6	0.149E-3	2.00	0.699E-1	1.01	0.725E-1	1.02
	$\lambda = 2$ 在（7.3）中					
4	0.294E+0	2.74	0.106E+2	1.24	0.115E+2	1.39
5	0.437E-1	2.75	0.494E+1	1.10	0.521E+1	1.15
6	0.734E-2	2.57	0.242E+1	1.03	0.252E+1	1.05

TABLE 13. 基于 P_2-P_2/P_4 单元求解式 (7.3)，网格见图4。

G_i	$\|Q_hu-u_h\|$	$O(h^r)$	$\|\nabla_w(Q_hu-u_h)\|$	$O(h^r)$	$\|\|\|Q_hu-u_h\|\|\|$	$O(h^r)$
	$\lambda=1$ 在（7.3）中					
2	0.692E-2	3.21	0.123E+0	2.45	0.146E+0	2.55
3	0.481E-3	3.85	0.170E-1	2.85	0.193E-1	2.92
4	0.316E-4	3.93	0.219E-2	2.96	0.238E-2	3.02
	$\lambda=2$ 见式（7.3）					
2	0.347E+1	1.66	0.174E+2	1.06	0.147E+2	1.69
3	0.467E+0	2.90	0.332E+1	2.39	0.246E+1	2.58
4	0.407E-1	3.52	0.433E+0	2.94	0.327E+0	2.91

TABLE 14. 在图4网格上，针对式（7.3）采用 P_3-P_3/P_5 单元。

G_i	$\|Q_hu-u_h\|$	$O(h^r)$	$\|\nabla_w(Q_hu-u_h)\|$	$O(h^r)$	$\|\|\|Q_hu-u_h\|\|\|$	$O(h^r)$
	$\lambda=1$ 在 (7.3) 中					
2	0.137E-2	4.88	0.260E-1	3.35	0.294E-1	3.33
3	0.494E-4	4.79	0.208E-2	3.64	0.222E-2	3.73
4	0.167E-5	4.89	0.148E-3	3.81	0.150E-3	3.88
	$\lambda=2$ 在 (7.3) 中					
2	0.120E+0	3.58	0.166E+1	2.48	0.700E+0	3.51
3	0.865E-2	3.79	0.255E+0	2.70	0.483E-1	3.86
4	0.252E-3	5.10	0.201E-1	3.66	0.310E-2	3.96

REFERENCES

[1] J. WANG AND X. YE, *A weak Galerkin mixed finite element method for second-order elliptic problems* 83 2014 2101 2126 ,《数学计算》,

( ), 第 - 页。[2] R. ABGRALL, *Toward the ultimate conservative scheme: following the quest*,《计算物理学杂志》, 167 (2001), 第 277-315 页。[3] T. BARTH, *Numerical methods for gasdynamic systems on unstructured meshes, in An Introduction to Recent Developments in Theory and Numerics for Conservation Laws*（弗赖堡/利滕韦勒，1997），《计算机科学与工程讲义》5，施普林格出版社，柏林，1999，第 195-285 页。[4] T. BARTH, AND H. DECONINCK, EDS., *High-order methods for computational physics*,《计算机科学与工程讲义》9，施普林格出版社，柏林，1999。[5] P. BOCHEV, AND J. CHOI, *Improved least-squares error estimates for scalar hyperbolic problems* 1 2001 115 124 ,《计算方法与应用数学》, ( ), 第 - 页。[6] E. BURMAN, *Stabilized finite element methods for nonsymmetric noncoercive and ill-posed problems. Part II: hyperbolic equations* 36, 4, 1911 , , ,《SIAM数值分析杂志》, 卷号 ( ), ( )。[8] E. BURMAN, AND A. ERN, *Continuous interior penalty hp-finite element methods for advection and advection diffusion equations* 76, 1119 1140 2007 ,《数学计算》, - ( )。[9] E. BURMAN, AND P. HANSBO, *Edge stabilization for Galerkin approximations of convection-diffusionreaction problems* 193 15 16 1437 1453 ,《计算方法与应用力学工程》 (–), - (2004)。[10] E. BURMAN, AND B. STAMM, *Discontinuous and continuous finite element methods with interior penalty for hyperbolic problems* 17 2005 , 技术报告, EPFL-IACS 报告 ( )。

[11] E. Burman, and B. Stamm, *Minimal Stabilization for Discontinuous Galerkin Finite Element Methods for Hyperbolic Problems* 2007 33 183 208 ,《科学计算杂志》

（）：-。[12] G. Carey, and B. Jiang, *Least-squares finite elements for first-order hyperbolic systems*,《国际数值方法与工程杂志》，26（1988），第81-93页。[13] B. Cockburn, *Discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems*。载于：《计算物理高阶方法》。《计算机科学与工程讲义》，第9卷，第69-224页。Springer，柏林（1999）。[14] B. Cockburn, and C. Shu, *Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems* 16 3 173 261 2001 ,《科学计算杂志》

（），-（）。[15] W. Cao, C. Wang, and J. Wang, *An L^2-Primal-Dual Weak Galerkin Method for div-curl Systems* 422, 114881, 2023 ,《计算与应用数学杂志》，第 卷。[16] W. Cao, C. Wang, and J. Wang, *An L^2 Primal-Dual Weak Galerkin Method for Convection-Diffusion Equations* 419, 114698, ,《计算与应用数学杂志》，第2023卷。[17] W. Cao, C. Wang, and J. Wang, *A New Primal-Dual Weak Galerkin Method for Elliptic Interface Problems with Low Regularity Assumptions* ,《计算物理学杂志》，第470卷，111538，2022年。[18] S. Cao, C. Wang, and J. Wang, *A new numerical method for div-curl Systems with Low Regularity Assumptions* 144, 47 59, ,《计算机与应用数学》，第 卷，第 - 页，2022年。[19] W. Cao, and C. Wang, *New Primal-Dual Weak Galerkin Finite Element Methods for Convection-Diffusion Problems* 162, 171 191, 2021 ,《应用数值数学》，第 卷，第 - 页。[20] K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, and C. Johnson, *Computational Differential Equations* 1996 ,剑桥大学出版社，英国剑桥，。[21] A. Ern, and J. Guermond *Discontinuous Galerkin methods for Friedrichs' systems. i. General theory* 44 2 753 778 2006 ,,《SIAM数值分析杂志》（），-（）。[22] P. Houston, M. Jensen, and E. Suli, *hp-discontinuous Galerkin finite element methods with least-squares stabilization* 17 2002 3 25 ,《科学计算杂志》，（），第 - 页。[23] P. Houston, C. Schwab, and E. Suli, *Discontinuous hp-finite element methods for advection-diffusionreaction problems* 39 6 2133 2163 2002 ,《SIAM数值分析杂志》

（），-（）。[24] M. Jensen, *Discontinuous Galerkin methods for Friedrichs' systems with irregular solutions*。博士论文，牛津大学（2004）。[25] C. Johnson, U. Navert, and J. Pitkaranta, *Finite element methods for linear hyperbolic problems* 45 1984 285 312 ,《计算方法与应用力学工程》，（），第 - 页。[26] P. Lesaint, and P. Raviart, *On a finite element method for solving the neutron transport equation* ,《偏微分方程中有限元的数学方面》，威斯康星大学麦迪逊分校数学研究中心研讨会论文集，威斯康星州麦迪逊，1974年。威斯康星大学麦迪逊分校数学研究中心，第33卷，第89-123页。Academic，纽约（1974）。[27] R. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws*,第2版，《苏黎世联邦理工学院数学讲义》，Birkhauser 出版社，巴塞尔，1992年。[28] E. Lewis, and J. Miller, *Computational Methods of Neutron Transport*,美国核学会，拉格兰奇公园，伊利诺伊州，1993年。[29] D. Li, Y. Nie, and C. Wang, *Superconvergence of Numerical Gradient for Weak Galerkin Finite Element Methods on Nonuniform Cartesian Partitions in Three Dimensions*,《计算机与应用数学》，第78卷第3期，第905-928页，2019年。[30] D. Li, C. Wang, and J. Wang, *An Extension of the Morley Element on General Polytopal Partitions Using Weak Galerkin Methods* 100, 27, 2024 ,《科学计算杂志》，第 卷。[31] D. Li, C. Wang and S. Zhang, *Weak Galerkin methods for elliptic interface problems on curved polygonal partitions* ,《计算与应用数学杂志》，第115995页，2024年。[32] D. Li, C. Wang, J. Wang and X. Ye, *Generalized weak Galerkin finite element methods for second order elliptic problems* ,《计算与应用数学杂志》，第445卷，第115833页，2024年。[33] D. Li, C. Wang, J. Wang and S. Zhang, *High Order Morley Elements for BiharmonicEquations on Polytopal Partitions*,《计算与应用数学杂志》，第443卷，第115757页，2024年。[34] D. Li, C. Wang and J. Wang, *Curved Elements in Weak Galerkin Finite Element Methods*,《计算机与应用数学》，第153卷，第20-32页，2024年。

[35] D. Li, C. Wang and J. Wang, *Generalized Weak Galerkin Finite Element Methods for Biharmonic Equations* 434, 115353, ,《计算与应用数学杂志》，第2023卷。[36] D. Li, C. Wang and J. Wang, *An L primal-dual finite element method for first-order transport problems* 434, 115345, ,《计算与应用数学杂志》，第2023卷。[37] D. Li and C. Wang, *A simplified primal-dual weak Galerkin finite element method forFokker-Planck type equations*,《偏微分方程数值方法杂志》，第39卷，第3942-3963页，2023年。[38] D. Li, C. Wang and J. Wang, *Primal-Dual Weak Galerkin Finite Element Methods forTransport Equations in Non-Divergence Form*,《计算与应用数学杂志》，第412卷，114313，2022年。[39] D. Li, C. Wang, and J. Wang, *Superconvergence of the Gradient Approximation for Weak Galerkin Finite Element Methods on Rectangular Partitions*,《应用数值数学》，第150卷，第396-417页，2020年。[40] W. Reed, and T. Hill, *Triangular mesh methods for the neutron transport equation*,技术报告LAUR-73-479，洛斯阿拉莫斯科学实验室（1973）。[41] H. Sterck, T. Manteuffel, S. Mccormick, and L. Olson, *Least-squares finite element methods and algebraic multigrid solvers for linear hyperbolic PDEs* ,《SIAM科学计算杂志》，第26卷第1期，第31-54页。[42] C. Wang, *New Discretization Schemes for Time-Harmonic Maxwell Equations by Weak Galerkin Finite Element Methods* ,《计算与应用数学杂志》，第341卷，第127-143页，2018年。[43] C. Wang, *Boot-Regularized Primal-Dual Weak Galerkin Finite Element Methods for Ill-Posed Elliptic Cauchy Problems* 19 1 33 51, 2022 ,《数值分析与建模国际期刊》，第（）卷，第 - 页。[44] C. Wang, *A Modified Primal-Dual Weak Galerkin Finite Element Method for Second Order Elliptic Equations in Non-Divergence Form* 18 4 500 ,《数值分析与建模国际期刊》，第（）卷，第 -523页，2021年。[45] C. Wang, *A New Primal-Dual Weak Galerkin Finite Element Method for Ill-posed Elliptic Cauchy Problems* 371, 112629, ,《计算与应用数学杂志》，第 卷。[46] C. Wang and J. Wang, *A Primal-Dual Weak Galerkin Finite Element Method for Fokker-Planck Type Equations* 58 5 2632 2661, 2020 ,SIAM数值分析，第（）卷，第 - 页。[47] C. Wang and J. Wang, *A Primal-Dual Finite Element Method for First-Order Transport Problems* ,《计算物理学杂志》，第417卷，109571，2020年。[48] C. Wang and J. Wang, *Primal-Dual Weak Galerkin Finite Element Methods for Elliptic Cauchy Problems* 79 3 746 ,《计算机与应用数学》，第（）卷，第 -763页，2020年。[49] C. Wang and J. Wang, *A Primal-Dual Weak Galerkin Finite Element Method for Second Order Elliptic Equations in Non-Divergence form* 87, ,《数学计算》，第 卷，第515-545页，2018年。[50] C. Wang and J. Wang, *A PRIMAL-DUAL FINITE ELEMENT METHOD FOR FIRST-ORDER TRANSPORT PROBLEMS* 1906 07336 ,arxiv。。[51] C. Wang and J. Wang, *Discretization of Div-Curl Systems by Weak Galerkin Finite Element Methods on Polyhedral Partitions* 68, 1144 1171, ,《科学计算杂志》，第 卷，第 - 页，2016年。[52] C. Wang and J. Wang, *A Hybridized Formulation for Weak Galerkin Finite Element Methods for Biharmonic Equation on Polygonal or Polyhedral Meshes*,《数值分析与建模国际期刊》，第12卷，第302-317页，2015年。[53] J. Wang and C. Wang, *Weak Galerkin Finite Element Methods for Elliptic PDEs*,《中国科学》，第45卷，第1061-1092页，2015年。[54] C. Wang and J. Wang, *An Efficient Numerical Scheme for the Biharmonic Equation by Weak Galerkin Finite Element Methods on Polygonal or Polyhedral Meshes*,《计算机与应用数学》，第68卷第12期，第2314-2330页，2014年。[55] C. Wang, J. Wang, R. Wang and R. Zhang, *A Locking-Free Weak Galerkin Finite ElementMethod for Elasticity Problems in the Primal Formulation*,《计算与应用数学杂志》，第307卷，第346-366页，2016年。

[56] C. Wang, J. Wang, X. Ye and S. Zhang, *De Rham Complexes for Weak Galerkin Finite Element Spaces* 397, 113645, , 计算与应用数学杂志，第 卷，第 页，2021年。[57] C. Wang, J. Wang and S. Zhang, *Weak Galerkin Finite Element Methods for Optimal Control Problems Governed by Second Order Elliptic Partial Differential Equations*, 计算与应用数学杂志，即将出版，2024年。[58] C. Wang, J. Wang and S. Zhang, *A parallel iterative procedure for weak Galerkin methodsfor second order elliptic problems*, 《国际数值分析与建模杂志》，第21卷第1期，第1-19页，2023年。[59] C. Wang, J. Wang and S. Zhang, *Weak Galerkin Finite Element Methods for Quad-Curl Problems* , 计算与应用数学杂志，第428卷，第115186页，2023年。[60] J. Wang and X. Ye, *A weak Galerkin finite element method for second-order elliptic problems* 241, 103 115, 2013 , J. Comput. Appl. Math.，第 卷，第 - 页。[61] C. Wang, X. Ye and S. Zhang, *A Modified weak Galerkin finite element method for theMaxwell equations on polyhedral meshes*, 计算与应用数学杂志，第448卷，第115918页，2024年。[62] C. Wang and S. Zhang, *A Weak Galerkin Method for Elasticity Interface Problems*, 计算与应用数学杂志，第419卷，114726，2023年。[63] C. Wang and S. Zhang, *A Weak Galerkin Method for Elasticity Interface Problems*, 计算与应用数学杂志，第419卷，114726，2023年。[64] C. Wang and L. Zikatanov, *Low Regularity Primal-Dual Weak Galerkin Finite ElementMethods for Convection-Diffusion Equations*, 计算与应用数学杂志，第394卷，113543，2021年。[65] C. Wang and H. Zhou, *A Weak Galerkin Finite Element Method for a Type of Fourth Order Problem arising from Fluorescence Tomography* 71 3 , 科学计算杂志，第（ ）卷，第897-918页，2017年。