arXiv:2601.00401v1 [math.LO] 1 Jan 2026

施密特博弈与维塔利集

JAMES ATCHLEY、LIOR FISHMAN、STEPHEN JACKSON、DAOZHENG LIU 和 EMILY YAO

Abstract. 虽然许多类型的不可测集在施密特博弈意义下从来都不是（α，β）-获胜的，但我们证明，某些维塔利集并非如此。我们的主要定理表明，对于某些 α，β 值，可以构造一个（α，β）-获胜的维塔利集；而对于另一些 α，β值，每个维塔利集都是（α，β）-失败的。我们还考察了其他几类病态集在（α，β）-施密特博弈中的表现，并着重指出它们与维塔利集的差异。

1. 引言

回顾一下，维塔利集是 $\mathbb{R}$ 的一个子集，它对 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ 中的每个元素都恰好包含一个代表元，是不可列梅斯测度的经典例子。维塔利集以及伯恩斯坦集、谢尔宾斯基集、卢津集等其他病态集，都是利用选择公理构造的。近年来，人们开始关注这些集合的性质以及它们之间的关系。例如， [2] 中的定理1.3表明，在 ZF集合论中，伯恩斯坦集的存在并不意味着维塔利集的存在。因此，从某种意义上说，维塔利集比伯恩斯坦集或卢津集更“病态”。

1966年，W. M. Schmidt [3] 引入了一种双人博弈，后来称为施密特博弈。这种博弈与著名的巴拿赫–马祖尔博弈（见[5]）一样，属于交集博弈。Schmidt 发明这种博弈，主要是为了研究数论和丢番图逼近理论中出现的某些集合。这些集合通常是零测集和贫集，也就是说，它们在测度和范畴方面都是例外的。

施密特（α，β）博弈以预先指定的目标集 T为对象，是一种双人博弈，进行方式如下：给定两个严格介于 0 和 1 之间的实数 α 和 β 以及一个集合 $T \subset \mathbb{R}$，一号玩家（名为 Bob）先行，初始操作为任意一个具有正直径 ρ的闭区间 B_0 。接着，二号玩家（名为 Alice）以一个闭区间 $A_0 \subset B_0$ 回应，其直径为（α）ρ。随后 Bob 进行下一步操作 $B_1 \subset A_0$ ，其直径为（$\alpha\beta$）ρ。Alice 再以 $A_1 \subset B_1$ 回应，其直径为α（$\alpha\beta$）ρ，如此继续。Alice 获胜，当且仅当 $\{x\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq T$。

博弈中一方玩家的策略 是一个函数，它根据另一方玩家的有限步序列，为该玩家给出一步行动；只要之前的行动符合博弈规则，策略给出的行动就会遵循博弈规则（施密特博弈的规则是对行动的直径和嵌套要求）。一方玩家的获胜策略是指该玩家的一种策略，

2020 *Mathematics Subject Classification.* 03E05, 03E15.

Key words and phrases. 维塔利集、Schmidt 博弈、确定性。第三位作者感谢美国国家科学基金会通过 DMS 1800323 项目提供的资助。

使得在任何一局博弈中，只要该玩家每一步都遵循此策略，最终就会获胜。

定义 1. $T \subseteq \mathbb{R}$ 称为(α, β)-获胜的，当 *Alice* 在 T 作为目标集时拥有获胜策略。如果 *Bob* 拥有获胜策略，则称T 为(α, β)-失败的。在这两种情况下，称 T 是确定的。否则，称其为不确定的，或更准确地说，称为(α, β) 不确定。

定义 2. 若实数集 T 对于固定的 α 而言，对所有 β均为(α, β)-获胜的，则称其为 α-获胜的。

注 1. 对于某些(α, β) 的取值，每个稠密目标集都是 α, β获胜的（尤其是在 $\alpha < 2 - \frac{1}{\beta}$ 时）。另一方面，也存在一些取值，使得只有整个空间是(α, β)-获胜的（尤其是在 $\beta < 2 - \frac{1}{\alpha}$时）。我们将这些情形称为平凡情形，并在某些定理中排除它们。有关这些情形的更清晰描述，请参见 [1]。

[3] 所确立的性质之一是， α-获胜集的性质在可数交下封闭。因此， α-获胜集的集合构成一个可数可加滤子，这与巴拿赫–马祖尔博弈中的余瘦集类似。

本文的主要结果是证明：尽管不存在 α-获胜的维塔利集（定理 1 和定理 2），但对于 α 和 β 的某些取值，确实存在一个 α， β-获胜的维塔利集（定理 4）。注意，并非所有维塔利集都是确定的。由 Michalski 的一个结果 [4] 可知，存在一个维塔利集，使得施密特博弈不具有确定性（见第 4 节）。本文的最后一部分专门讨论其他病态集（例如卢津集、西尔平斯基集和伯恩斯坦集）的施密特博弈确定性结果。

2. Vitali Sets are Not α-winning

本节将证明，对于任意维塔利集以及 $\alpha > 0$的任意取值，都存在一个 β，使得该维塔利集不是（α， β）-获胜的。特别地，我们将证明，如果$\beta < \alpha$，则维塔利集不是（α， β）-获胜的。

我们首先给出一个简单的非构造性证明，说明没有任何维塔利集是 α-获胜的。

定理 1. 没有任何维塔利集是 α-获胜的。

证明. 设 V是一个维塔利集，且 $V_q = V + q$ 满足 $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$。反设 V 是 α-获胜的。显然， V_q 也必定是 α-获胜的，因为我们可以将 Bob 在 V_q 上的走法转移到 V，再将 Alice 随后在 V 上的获胜走法转移到 V_q。于是 Alice 在 V_q上获胜，这意味着 $V \cap V_q$ 非空，因为它是 α-获胜的。然而，对所有 $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$，都有 $V_q \cap V = \emptyset$，这与 α-获胜集的可数交性质矛盾。□

现在我们给出一个更具构造性的证明：对于 $\beta < \alpha$，没有任何维塔利集是 (α， β)-获胜的；这也为后续结果提供了动机。

定理 2. 如果 $\beta < \alpha$，那么没有任何维塔利集是(α, β)-获胜的。

证明。 反设 Alice 确实拥有一个获胜策略，我们将其称为 τ。我们将证明，Bob 总能找到办法“挫败”Alice 的策略。

固定一个维塔利集 V。让 Bob 和 Alice 在 V 上进行两场博弈。开始这两场博弈时，Bob 选择两个互不相交的区间 B_0 and B_0'，其中 B_0 是第一场博弈的第一步，B_0' 是第二场博弈的第一步，并且满足

$$\beta|B_0| \leq |B_0'| \leq \alpha|B_0|$$

并且 $|B_0| = \rho$、$|B_0'| = \rho'$ 分别表示 B_0 和 B_0' 的长度。

随后，Alice 使用她的获胜策略 τ 轮到她行动，在每个博弈中分别选择 A_0 和 A_0'。根据上述不等式，存在 $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ 使得$A_0' = \tau(B_0') \subseteq A_0 + q = \tau(B_0) + q$。由于 $\rho' \leq \alpha\rho$，$|A_0'| = \alpha\rho' \leq \alpha^2\rho < \alpha\rho$。

现在又轮到 Bob 行动了。先让他选择 B_1。我们可以看到 $|B_1| = \alpha\beta\rho < \alpha\rho' = |A_0'|$。因此，Bob 可以选择 B_1，使得 $B_1 + q \subseteq A_0'$。随后 Alice 选择$A_1 = \tau(B_0, B_1)$。注意 $A_1 + q \subseteq A_0'$。由于$|B_1'| = \alpha\beta\rho' \leq \alpha^2\beta\rho = |A_1| = |A_1 + q|$，Bob 接着可以选择 $B_1' \subseteq A_1 + q$。然后 $A_1' \subseteq A_1 + q$。



一般而言，鉴于 $A_n' \subseteq A_n + q$，由同样的论证可知，Bob 可以选取 B_{n+1}和 B_{n+1}'，使得 $A_{n+1}' \subseteq A_{n+1} + q$。因此，$\bigcap_{n=\mathbb{N}} A_n' = \bigcap_{n=\mathbb{N}} A_n + q$根据嵌套区间性质，第一场博弈最终落在一点 $\{x\} = \bigcap_{n=\mathbb{N}} A_n$，第二场博弈最终落在一点 $\{x'\} = \bigcap_{n=\mathbb{N}} A_n'$。于是，$\{x'\} = \bigcap_{n=\mathbb{N}} A_n' = \bigcap_{n=\mathbb{N}} A_n + q = \{x + q\}$。

由于 τ 是获胜策略，x 和 x' 必定属于同一个维塔利集 V。然而，它们相差某个 $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$，因此必定属于同一个等价类，这就导致了矛盾。□

3. (α, β)-WINNING VITALI SETS

在本节中，我们将证明，对于任意 $\beta > 0$，只要 α 足够小，就存在一个（α, β）-获胜的维塔利集。我们的证明是构造性的，并且无需使用选择公理，就能构造出一个（α, β）-获胜的部分维塔利集。我们分阶段进行。首先，我们证明，对于任意固定的初始移动 I，存在一个（α, β, I）-获胜的维塔利集（也就是说，当 Bob 以 I 作为其第一步时，Alice 拥有获胜策略）。这里我们只需要 $\alpha < \min\{\frac{1}{12}, \beta\}$。然后，我们扩展这一论证，证明（定理 3）：对于任意固定的 ρ，存在一个（α, β, ρ）-获胜的维塔利集（也就是说，当 Bob 的第一步是任意一个直径为 $\rho > 0$ 的球时，Alice 拥有获胜策略）。最后，我们进一步扩展该论证，并要求$\beta > \frac{\alpha}{(1-5\alpha)^2}$，从而证明存在一个（$\alpha$, β）-获胜的维塔利集。

定义 3. 部分维塔利集是指对 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ 中的每个元素至多包含一个代表元的集合。

注记 1. 我们将构造一个(α, β) 制胜的部分维塔利集。如上所述，这不需要选择公理。将此集合扩展为完整的维塔利集，是我们唯一使用选择公理的地方。

引理 1. 如果 α 足够小($\alpha < \frac{1}{12}$) 且 $\alpha < \beta$,—那么对于任意固定的第一步 I，都存在一个维塔利集 V_I，使得 V_I 是(α, β, I)-制胜的。

证明。 枚举 $\mathbb{Q}$ 并考虑 q_0。考虑 Bob 的第一步 B_0 并令 $|B_0| = \rho$。然后让 Alice 在 B_0 的中间（或接近中间）位置落下她的棋子 A_0 。令 $\omega_1^1, \cdots, \omega_m^1$ 为一组长度为 $4\alpha(\alpha\beta)\rho$ 的区间，这些区间彼此间隔大于 $4\alpha(\alpha\beta)\rho$ ，且 Bob 的任何潜在走法都必须包含至少一个区间。若 A_0 是从 0 到 $\beta\rho$的区间，则将 ω_l^1 的左端点置于$l\alpha\beta\rho(1-4\alpha)$，右端点置于 $l\alpha\beta\rho(1-4\alpha) + 4\alpha(\alpha\beta)\rho$。注意，若 $\alpha < \frac{1}{12}$，则 ω_l 与 ω_{l+1} 之间的距离至少为 ω_l的长度。

若 $4\alpha(\alpha\beta)\rho > q_0$，则取每个 ω^1 的中点作为 Alice 可能的行动 A^1，并对每个 A^1，按照构造 ω^1 的相同过程构造 ω_1^2，$\cdots$，$\omega_{m^2}^2$。注意，这些区间的长度为 $4\alpha(\alpha\beta)^2\rho$。继续这一过程，取每个 ω^n 的中点作为 A^n，直到 $4\alpha(\alpha\beta)^n\rho < q_0$。令 n_0 为最小的此类 n。

我们断言，将任意一个 ω^n 平移 q_0 后，至多与另一个 ω^n相交。考虑某个 $\omega_1^n + q_0$。为导出矛盾，假设存在m_1，m_2，使得 $\omega_{m_1}^n \cap \omega_1^n + q_0 \neq \emptyset$ 且 $\omega_{m_2}^n \cap \omega_1^n + q_0 \neq \emptyset$。那么 $|\omega_1^n| > ((\alpha\beta)^n - 8\alpha(\alpha\beta)^n)\rho > 4\alpha(\alpha\beta)^n\rho$ （由构造可知，这是区间之间间隙的长度），这与 $|\omega_1^n| = 4\alpha(\alpha\beta)^n\rho$矛盾。因此， $\omega_1^n + q_0$ 至多与另一个 ω^n 相交。类似地，对任意 ω_i^n，至多存在另一个 ω_m^n，使得若我们平移 ω_m^n，就会与 ω_i^n 相交。

我们构造一系列链，其中每条链由一系列 ω^n 组成；将它们平移 q_0 后，每个 ω^n 都与下一个 ω^n 相交。考虑由关系 $\omega_i^n \sim \omega_j^n$（若 $\omega_i^n + q_0$ 与 ω_j^n 相交）生成的等价关系。令每条链为一个等价类。根据上一段，每个等价类都是由这些 ω_n 组成的链，其中每个区间平移 q_0 后都与下一个区间相交。

对于每个 ω_i^n，我们现在定义 Alice 的潜在着法 $A_i^n \subset \omega_i^n$。考虑一条链，并令 $\omega_{i_0}^n$ 为该链的首个元素。令 $A_{i_0}^n \subset \omega_{i_0}^n$ 为一个任意的、大小合适的区间。令链中的下一个元素为 $\omega_{i_1}^n$，并令 $A_{i_1}^n \subset \omega_{i_1}^n$ 满足 $A_{i_0}^n + q_0$ 与 $A_{i_1}^n$ 不相交（这是可行的，因为 $|\omega_{i_1}^n| > 3|A_{i_1}^n|$）。我们以类似的方式继续，为链中的每个 ω_i^n 定义 A_i^n，并对所有链重复这一过程。

现在考虑我们的第二个有理数 q_1。在每个 ω^n 的中间选择对局，按上述方式进行构造，直到到达一个 n_1，使得 $4\alpha(\alpha\beta)^{n_1} < q_1$ ($n_1 > n_0$)，然后对这个 n_1 重复上述构造，以定义 $A_i^{n_1}$。

最终，我们会对每个有理数 q_j 都这样做，也就是说，我们为所有 j定义 $A_i^{n_j}$。由此得到的这些$A_i^{n_j}$ 构成一棵树，它给出一个完美集 P_I，同时也是一个部分维塔利集。从每个缺失的维塔利等价类中选取一个元素，就得到一个完整的维塔利集；这样我们便构造出了一个 (α，β，I)-获胜的维塔利集。□

引理 2。 如果 $\alpha < \frac{1}{12}$、$\alpha < \beta$ 和 $\rho > 0$，且 I_1 和 I_2 是两个长度为 ρ 的不同区间，那么存在一个维塔利集，它既是(α, β, I_1)-获胜的，也是(α, β, I_2)-获胜的。

证明。 固定区间 I_1 和 I_2，二者长度均为 ρ。我们将分别为这两个区间定义 Alice 的行动$A_i^{n_j}$ (I_1) 和 $A_i^{n_j}$ (I_2)。我们将像之前一样定义 P_{I_1} 和 P_{I_2}，但也会确保 $P_{I_1} \cup P_{I_2}$ 是一个部分维塔利集。

在构造的偶数阶段 $2j$，我们对有理数 q_j 重复引理 1 的构造。这将确保每个 P_{I_1} 和 P_{I_2} 都是部分维塔利集。在奇数阶段 $2j+1$，我们将确保每个 $A_i^{n_j}$ （I_1） $+ q_j$ 都与每个

$A_{i'}^{n_j}$（I_2）不相交。如果我们这样做，$P_{I_1} \cup P_{I_2}$ 将是部分维塔利集。对构造两侧的 I_1 和 I_2、$\omega^{n_{2j+1}}$，进入下一层。考虑构造两侧的区间 $\omega_i^{n_{2j+1}}$（I_1）和 $\omega_{i'}^{n_{2j+1}}$（I_2）。注意，根据与引理 1 相同的论证，每个 $\omega_i^{n_{2j+1}}$（I_1）$+ q_j$ 至多与一个 $\omega_{i'}^{n_{2j+1}}$（I_2）相交。对于每一对这样的 i，i'，选取 $A_i^{n_{2j+1}}$（I_1）$\subset \omega_i^{n_{2j+1}}$（$I_1$）和 $A_{i'}^{n_{2j+1}}$（I_2）$\subset \omega_{i'}^{n_{2j+1}}$（$I_2$），使得 $A_i^{n_{2j+1}}$（I_1）$+q_j$ 与 $A_{i'}^{n_{2j+1}}$（I_2）不相交。那么对任意 $x \in P_{I_1}$ 和 $y \in P_{I_2}$，$x+q_j \neq y$。由于 $-q_j$ 也在某个阶段被考虑，$y+q_j \neq x$。因此，$|x-y| \neq q_j$，所以 $P_{I_1} \cup P_{I_2}$ 是部分维塔利集。□

推论 1. 如果 $\alpha < \frac{1}{12}$、~~α~~ $< \beta$ 和 $\rho > 0$，并且有可数多个区间I_1、I_2、$\cdots$，长度均为 ρ，那么存在一个维塔利集，对所有 n 都是(α, β, I_n)-获胜的。

证明。枚举所有三元组 q_j, k_j, l_j，其中 q_j 是有理数，k_j 和 l_j 是整数。在构造的第 j 步，对 I_{k_j} 和 I_{l_j} 重复引理 2，以得到 q_j。然后，P_{I_n} 的并集是一个部分维塔利集。□

我们稍微修改引理 2 的构造，得到以下引理。

引理 3. 固定 α、β、I_1和 I_2，其中 I_1 和 I_2 是长度为 ρ的区间。则存在一个维塔利集和一个 $\epsilon > 0$，使得如果 I 是一个长度为 ρ 的区间，其端点与 ϵ 或 I_2 相距不超过 I_1，那么该维塔利集就是(α, β, I)-获胜的。

证明。重复引理 2 中的构造，但要确保对于每个 I（即 ϵ 接近的情形），ω 区间都是有效的（包含于任意鲍勃的移动中）；也就是说，其端点与 I_1 或 I_2 的端点之间的距离至多为 ϵ。现在，对于构造的第一个层级，我们有长度为 $(4-2\epsilon)(\alpha(\alpha\beta)\rho)$ 的 ω 个区间；对于任意端点 ϵ 接近 I 的区间，这些区间都包含于初始的鲍勃的移动中。注意，在初始移动之后，由于我们可以使用相同的 Alice 的行动，ω 区间可以像之前一样构造。因此，对于任何 I与 I_1 或 I_2 ϵ 接近的情形，部分维塔利集 $P_{I_1} \cup P_{I_2}$是 (α, β, I)-获胜的。□

推论 2。如果 $\alpha < \frac{1}{12}$、~~α~~ $\prec \beta$ 和 $\rho > 0$，并且我们固定可数多个区间I_1、I_2、$\cdots$，其长度均为 ρ，那么存在一个维塔利集和一个 $\epsilon > 0$，使得如果 I是一个长度为 ρ的区间，且其端点与 I_1、I_2、$\cdots$ 中的某一个 ϵ接近，则该维塔利集是 $(\alpha$、β、$I)$-获胜的。

证明。重复引理 3 的论证，但像推论 1 中那样对 I_n 进行对角化。□

定理 3。若 $\alpha < \frac{1}{12}$、~~α~~ $< \beta$ 和 $\rho > 0$，则存在一个维塔利集 V，它是(α, β, ρ)-获胜的。

证明。令 $I_1, I_2, \cdots$ 为长度为 ρ 且左端点为有理数的区间。令ϵ，并取维塔利集 V，如推论 2 中所述。于是，每个长度为 ρ 的区间 I 都与某个 I_n 相距不超过 ϵ。因此，根据推论 2，V 是 (α, β, ρ)-获胜的。□

引理 4。令 $\alpha < \frac{1}{12}$, $\beta >$ $\frac{\alpha}{(1-8\alpha)^2}$，并设 I_1, I_2 是分别长度为 ρ_1 和 ρ_2 的区间。那么存在一个维塔利集 V，它既是(α, β, I_1)-获胜的，也是(α, β, I_2)-获胜的。

证明。经过 I_1 博弈的第 m 轮后，Alice 的区间长度为 $\alpha(\alpha\beta)^m\rho_1$；同样，经过 I_2 博弈的第 n 轮后，Alice 的区间长度为 $\alpha(\alpha\beta)^n\rho_2$。选取 m 和 n，使得 $\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\rho_2}{\rho_1}(\alpha\beta)^{n-m} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}$。将有理数枚举为，

$q_1, q_2, \cdots \in \mathbb{Q}$，如前所述。不妨设两步$\alpha(\alpha\beta)^m\rho_1$ 和 $\alpha(\alpha\beta)^n\rho_2$ 的长度都小于 q_j，其中 q_j是某个有理数。在偶数轮次 $2j$，我们将完全按照引理 2 的证明进行。在奇数轮次 $2j+1$，我们将修改引理 2 中的论证。首先选取 m_{2j+1} 和 n_{2j+1}，使得$\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\rho_2}{\rho_1}(\alpha\beta)^{n_{2j+1}-m_{2j+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}$。不妨设 $\alpha(\alpha\beta)^{n_{2j+1}}\rho_2 < \alpha(\alpha\beta)^{m_{2j+1}}\rho_1$。如前所述，定义 $\omega_i^{m_{2j+1}}$ 和 $\omega_i^{n_{2j+1}}$ 区间。考虑其中一个 $\omega_i^{m_{2j+1}}$。如前所述，我们有 $|\omega_i^{m_{2j+1}}| = 4\alpha(\alpha\beta)^{m_{2j+1}}\rho_1$。在右侧博弈中，让 Alice 在每个 $\omega_i^{n_{2j+1}}$ 的中点处行动。Alice 任意两步之间的间隙至少为 $\rho_2\alpha(\alpha\beta)^{n_{2j+1}}(\beta - 8\alpha\beta)$。Alice 在左侧博弈中的行动长度必须为 $\alpha(\alpha\beta)^{m_{2j+1}}\rho_1$。我们要求 $\alpha(\alpha\beta)^{m_{2j+1}}\rho_1 < \rho_2\alpha(\alpha\beta)^{n_{2j+1}}(\beta - 8\alpha\beta)$，这对所有 $\beta > \frac{\alpha}{(1-8\alpha)^2}$都成立。这保证了 Alice 在右侧的行动之间的间隙大于她在左侧的行动长度。还要注意，Alice 两步左侧行动和一步右侧行动的长度之和仍小于 $\omega_i^{m_{2j+1}}$ 的长度，因此我们可以选取 Alice 在左侧的行动，使其对所有 i都与 $A_{i'}^{n_{2j+1}} - q_j$ 不相交。这就定义了 Alice 的行动$A_i^{m_{2j+1}}$。因此，我们确保了对所有 i'，$A_i^{m_{2j+1}} + q_j$ 与 $A_{i'}^{n_{2j+1}}$ 不相交。由此构造出一个部分维塔利集，它既是(α, β, I_1)-获胜的，也是(α, β, I_2)-获胜的。□

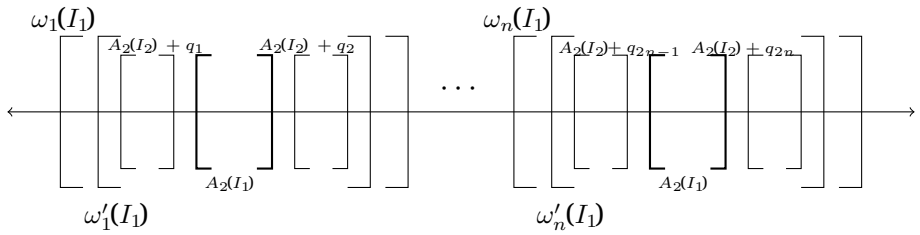
定义 4. 给定区间 $I = [a, b]$，I 的 δ-加厚是区间$[a - \delta(b - a),\ b + \delta(b - a)]$。

引理 5. 若 $\alpha < \frac{1}{12}$, $\beta > \frac{\alpha}{(1-5\alpha)^2}$，则存在一个 $\delta = \delta(\alpha, \beta)$，使得给定 I_1, I_2 后，存在一个部分维塔利集，对任意小于 I_1 或 I_2 的 δ-加厚的 I，它都是(α, β, I)-获胜的

证明。对于 I_1 和 I_2，按之前的方法定义 ω 区间。定义 ω' 区间，使它们与 ω 区间具有相同的中心，但长度为 $\frac{7}{2}\alpha(\alpha\beta)^n$，而非$4\alpha(\alpha\beta)^n$。与引理 4 中一样，我们可以在两个博弈中任意进行，直到 Alice 在两个博弈中的着法之比介于 $\sqrt{\alpha\beta}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}$ 之间。令 Alice 在 I_2 博弈中的着法为较小的着法。为简化记号，令 Alice 的第一步分别为$A_1(I_1)$ 和 $A_1(I_2)$。于是 $1 \leq \frac{A_1(I_1)}{A_1(I_2)} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}$。

设 $\delta \leq \frac{1}{4}\alpha\frac{\beta}{1-2\beta}$。我们声称，对于任意不大于 I 的 δ-加厚 I_1，每个 $\omega_i(I)$ 区间都包含该 $\omega_i'(I_1)$ 区间。考虑区间 $\omega_1(I)$。若将 I_1 的左端点取为 0，则 $\omega_1(I)$ 的右端点为 $(1 + 2\delta)\alpha\beta|\alpha I_1| - \delta\alpha|\alpha I_1|$，这大于 $\omega_1'(I_1)$ 的右端点，$\alpha\beta|\alpha I_1| - \frac{1}{4}\alpha^2\beta|\alpha I_1|$（由 δ 的值可知）。对于最右侧的 ω，也有类似的不等式。对于所有其他 ω 区间，该断言显然成立，因为对于所有 i，$|\omega_i(I)| \geq |\omega_i(I_1)|$。

和之前一样，我们可以在每个 ω' 区间内选取下一步 Alice 的行动。对于每个$\omega_i'(I_2)$，将 Alice 的行动 A_2 放在 $\omega_i'(I_2)$的中心。对于每个 $\omega_i'(I_1)$，现在定义 $A_2(I_1)$。如果 I 是 I_1 的 δ加厚，那么 I_1 的 A_2 将与 I的 A_2具有相同的中心；对于 I_2是 δ加厚的情形，同理。回想一下，$\omega'(I_1)$的长度为$\frac{7}{2}\alpha(\alpha\beta)|I_1|$。再次考虑 $q_0 \in \mathbb{Q}$，并令 C_2 为 $A_2(I_2)$各步行动的中心点。注意，C_2 中任意两个不同点之间的距离至少为 $d = |I_2|\alpha\beta - 4|I_2|\alpha(\alpha\beta)$。如果 $\omega'(I_1)$的左端点与区间 $\omega'(I_1)$内 C_2 的最小点（若存在）之间的距离至少为 $|I_1|\alpha(\alpha\beta)\cdot(1+2\delta)+|I_2|\alpha(\alpha\beta)\cdot(1+2\delta)$，那么 $A_2(I_1)$的左端点将与 $\omega'(I_1)$的左端点相同。否则，$A_2(I_1)$ 将以 $|I_1|\alpha(\alpha\beta)\cdot(1+2\delta)+|I_2|\alpha(\alpha\beta)\cdot(1+2\delta)+\frac{1}{2}|I_1|\alpha(\alpha\beta)\cdot(1+2\delta)$为中心。



我们首先声称，对于 I_1的任意可能扩张 I， $A_2(I)$的右端点位于 $\omega'(I_1)$的右端点左侧。也就是说，必须有 $\frac{|I_2|}{|I_1|}(1+2\delta) \leq \frac{3}{2}-4\delta$。由于 $\frac{|I_2|}{|I_1|} \leq 1$，只需满足 $(1+2\delta) \leq \frac{3}{2}-4\delta$，即 $\delta \leq \frac{1}{12}$。在这种情况下， $A_2(I)$将是 Alice 的有效一步行动，也就是说，它位于 $\omega'(I_1)$区间内。

现在我们检查 $A_2(I)$ 不会与 $A_2(I')+q_0$ 相交，其中 I 和 I' 分别是 I_1 和 I_2 的扩张。要么这一点显而易见，要么 $A_2(I)$ 的中心位于 ω' 的 C_2 中两个连续元素的中点。在这种情况下， $A_2(I')$ 中对应的两个元素之间的区间长度至少为 $d-|I_2|\alpha(\alpha\beta)(1+2\delta)$，而 $A_2(I)$ 的长度至多为 $|I_1|\alpha(\alpha\beta)(1+2\delta)$。因此，只需检查 $d-|I_2|\alpha(\alpha\beta)(1+2\delta) \geq |I_1|\alpha(\alpha\beta)(1+2\delta)$，即 $|I_2|\alpha\beta-4|I_2|\alpha(\alpha\beta) \geq |I_1+I_2|\alpha(\alpha\beta)(1+2\delta)$。这可化简为 $\frac{|I_2|}{|I_1|} \geq \frac{\alpha(1+2\delta)}{1-4\alpha-\alpha(1+2\delta)}$。由于 $\frac{|I_2|}{|I_1|} \geq \sqrt{\alpha\beta}$，只需检查 $\sqrt{\alpha\beta} \geq \frac{\alpha(1+2\delta)}{1-4\alpha-\alpha(1+2\delta)}$，化简后得到 $\beta \geq \alpha \cdot (\frac{\alpha(1+2\delta)}{1-4\alpha-\alpha(1+2\delta)})^2$。由于 $\beta > \frac{\alpha}{(1-5\alpha)^2}$，我们可以选取 δ，使其仅取决于 α 和 β，且足够小，从而满足该不等式。因此， $A_2(I)$ 不会与 $A_2(I')+q_0$ 相交。至此，Alice 的着法 $A_2(I_1)$ 和 $A_2(I_2)$ 定义完毕，因此，对于任意扩张 I 和 I'， $A_2(I)$ 和 $A_2(I')$ 也随之定义完毕。接下来的着法完全以相同方式定义：从 $A_2(I_1)$ 和 $A_2(I_2)$ 开始，而不是从 $A_1(I_1)$ 和 $A_1(I_2)$ 开始，并使用层级 $2i+2$ 上的有理数 q_i（在奇数层级，我们按引理 1 的方式构造 A_i）。因此，我们构造出了一个部分维塔利集，在其上，任何给定的、比 I_1 或 I_2 的 δ 加厚还小的 I 都是 (α,β,I)-获胜的。

□

定理 4。 如果 $\alpha < \frac{1}{12}$ 且 $\beta > \frac{\alpha}{(1-5\alpha)^2}$，那么存在一个 $(\alpha,\ \beta)$-获胜的维塔利集。

证明。 令 $\delta = \delta(\alpha,\ \beta)$ 如引理 5 所述。枚举所有具有有理端点的区间 I_n。如推论 2 的证明中那样，但改用引理 5，我们可以构造一个 $(\alpha,\ \beta,\ I)$-获胜的部分维塔利集，其中 I 是任意 δ 的任意加厚，并因而是 $(\alpha,\ \beta)$-获胜的。□

4. Bernstein, Luzin, and Sierpinski sets

我们回顾以下各类集合的定义。

定义 5。 伯恩斯坦集 是满足以下条件的集合 $B \subseteq \mathbb{R}$：对于每个非空完美集 $P \subseteq \mathbb{R}$，都有 $B \cap P \neq \emptyset$ 和 $B^c \cap P \neq \emptyset$。卢津 集 $L \subseteq \mathbb{R}$ 是满足以下条件的集合：对于每个贫集 $A \subseteq \mathbb{R}$，都有 $L \cap A$ 是可数的。谢尔宾斯基集$S \subseteq \mathbb{R}$ 是满足以下条件的集合：对于每个测度为0 的集合 $A \subseteq \mathbb{R}$，都有 $S \cap A$ 是可数的。

我们先对这些其他病态集的获胜性质作几点观察。

定理 5. 在任何非平凡情形下，伯恩斯坦集都不是(α, β)-可判定的。

这在 [1] 中得到了证明。证明的思路是说明，在任何非平凡情形下，一个 (α, β)-可判定集要么包含一个完美集，要么其补集包含一个完美集，因此伯恩斯坦集不可能是可判定的。

定理 6。 对于 α 和 β 的每个非平凡取值，*Alice* 在 *Luzin* 集或谢尔宾斯基集上都没有获胜策略。

证明。 根据 Alice 的一个获胜策略，如 [1], 中的定理 3 所示，我们构造出一个包含于目标集中的完美集。容易看出，这个完美集同时具有零测度且无处稠密。□

定理 7。 如果 $\beta < \frac{1}{3}$，那么对于任意 *Luzin* 集或谢尔宾斯基集，*Bob* 在 (α, β) 施密特博弈中都有获胜策略。

证明。 令 Bob 的第一步为单位区间，并令 S 为一个谢尔宾斯基集。在该区间内构造长度为 $\alpha\beta$ 的互不相交的区间。这些区间之间将由 $\frac{\alpha - 3\alpha\beta}{3}$ 隔开；只要第一个区间与 Bob 第一步的左端点共享左端点，这便是可行的。我们以这种方式继续构造，得到一个类康托集 P；具体而言，在每个阶段 n ，我们都有一个由有限个大小为 $(\alpha\beta)^n$ 的互不相交区间组成的集合。在这些区间中的每一个内，放入长度为 $(\alpha\beta)^{n+1}$ 、彼此由 $(\alpha\beta)^n(\frac{\alpha - 3\alpha\beta}{3})$ 隔开的互不相交区间。显然可以看出， P 的测度为零。由于 S 是一个谢尔宾斯基集， $S \cap P = \{a_0, a_1, \cdots\}$ 是可数的。

现在定义 Bob 的获胜策略。在第 n 轮，Alice 已经走了一步 A_n，其长度为 $(\alpha\beta)^{n-1}\alpha$。这一步必须包含至少两个长度为 $(\alpha\beta)^n$ 的区间，它们是 P 的第 n 阶段构造中的区间。Bob 选取其中一个不包含 a_n 的区间。这就定义了 Bob 的一种策略，使得按照该策略进行的每一局都会落在 $P \setminus S \subseteq S^C$ 中。

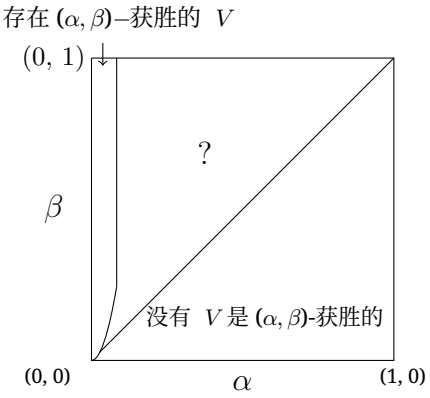
如果 A 是卢津集，我们构造相同的 P，并只需注意到 P 是贫集，因此策略的定义方式完全相同。□

定理 4 表明，对于 α， β 的某些取值，维塔利集的施密特博弈可以判定。相比之下，我们有如下结果。

定理 8。对于任意非平凡的 α， β 都存在一个维塔利集，它不是$(\alpha$， $\beta)$可判定的。

证明。由 [4], 中的定理 2.2 可知，存在一个同时也是伯恩斯坦集的维塔利集。根据 [1], 中的定理 3，由于它是伯恩斯坦集，对于 α 和 β的任意非平凡取值，该集合都不是（α， β）可判定的。□

下图展示了在给定 α 和 β 的取值时，关于维塔利集的（α， β）施密特博弈的确定性。定理 2 和定理 4 引出了几个问题。



问题。 对于处于？区域的 α、β，是否存在获胜的维塔利集?

References

[1] James Atchley、Lior Fishman、Saisneha Ghatti *Intersection Games and Bernstein Sets* Involve: A Journal of Mathematics 第18卷（2025年），第5期，813–820页[2] Mariam Beriashvili、Ralph Schindler（2017年，预印本） *Some Pathological Sets in Special Models of Set Theory* `http://ivv5hpp.uni-muenster.de/u/rds/preprint_mariam_ralf.pdf`[3] Wolfgang M. Schmidt,《关于劣可逼近数与某些博弈》，美国数学会汇刊 123（1966年），27–50页。[4] Marcin Michalski（2019年） *A note on sets avoiding rational distances* arXiv版本: https://arxiv.org/abs/1907 09385 。John Oxtoby [5] *Measure and Category* 2版，数学研究生教材第2卷，施普林格出版社（1980年）

James Atchley, Midland College, Department of Mathematics, 3600 North Garfield,Midland TX 79705 *Email address*: `jatchley@midland.edu`Lior Fishman, University of North Texas, Department of Mathematics, 1155 UnionCircle #311430, Denton, TX 76203-5017, USA *Email address*: `lior.fishman@unt.edu`Stephen Jackson, University of North Texas, Department of Mathematics, 1155Union Circle #311430, Denton, TX 76203-5017, USA *Email address*: `stephen.jackson@unt.edu`Daozheng Liu, University of North Texas, Department of Mathematics, 1155 UnionCircle #311430, Denton, TX 76203-5017, USA *Email address*: `daozheng.liu@unt.edu`Emily Yao, Princeton University, Washington Rd., Princeton, NJ 08544, USA*Email address*: `ey7643@princeton.edu`