arXiv:2601.00403v1 [math.FA] 1 Jan 2026

幺模约束下的非线性确定与相位恢复

LUKAS LIEHR 和 TOMASZ SZCZEPANSKI

Abstract. 我们研究希尔伯特空间中的非线性确定问题，其中观测到的内积在复平面中仅确定到预先指定的旋转。给定希尔伯特空间 H 以及单位圆 $\mathbb{T}$的子集 Θ，若对所有 $f,h\in H$，条件是对于每个 $g\in\mathbf{G}$都存在 $\theta_g\in\Theta$，使得 $\langle f,g\rangle=\theta_g\langle h,g\rangle$，并且该条件能够推出存在某个 $\theta\in\Theta$使得 $f=\theta h$，则称系统 $\mathbf{G}\subseteq H$ 具有 Θ-*phase retrieval*（Θ-相位恢复）性质。该框架统一了经典相位恢复（$\Theta=\mathbb{T}$）和符号恢复（$\Theta=\{1,-1\}$）。对于任意可数的 Θ，我们从 $\mathbf{G}$ 的覆盖以及相应正交补中向量之间的几何关系出发，对 Θ-相位恢复给出完整刻画，从而推广了 Cahill、Casazza 和 Daubechies 的补性质刻画。对于循环相位集，我们证明 Θ-相位恢复等价于存在特定的二阶递推关系。我们运用这一结果，得到指数系统 Θ-相位恢复的锐格点密度判据。对于不可数的 Θ，在傅里叶确定情形下，我们得到一种拓扑二分性，表明Θ-相位恢复可由 Θ的连通性刻画。我们还进一步建立了一个莫比乌斯不变框架，证明 Θ-相位恢复在圆自同构下保持不变，并由交比等射影不变量所决定。最后，在 $\mathbb{C}^d$ 中，我们确定了锐不可能性阈值，并证明对于可数的 Θ，一旦超出失效区域，该性质便是一般性的，从而得出 Θ-相位恢复所需的最少向量数。

1. Introduction and main results

设 H 为一个复希尔伯特空间，其内积为 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 并设 $\mathbf{G}\subseteq H$ 为一个向量系统。给定 $f,\ h\in H$，假设对每个 $g\in\mathbf{G}$，都有

$$\langle f,g\rangle=\langle h,g\rangle. \tag{1.1}$$

若$\mathbf{G}$ 在 H中完备，即$\mathbf{G}$ 的线性张成空间在 H中稠密，则条件 (1.1) 蕴含 $f=h$。换言之，标量积集合 $\{\langle f,g\rangle:\ g\in\mathbf{G}\}$能够唯一确定向量 f。现在考虑这样一种情况：这些标量积并非精确观测到，而是仅能确定到复平面内预先指定的旋转。具体而言，假设对于每个 $g\in\mathbf{G}$，内积 $\langle f,g\rangle$和 $\langle h,g\rangle$ 允许相差一个旋转因子 θ_g，该因子属于单位圆 $\mathbb{T}:=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|=1\}$的固定子集$\Theta$。因此，线性约束 (1.1) 被以下非线性条件取代：对于每个 $g\in\mathbf{G}$，存在 $\theta_g\in\Theta$使得

$$\langle f,g\rangle=\theta_g\langle h,g\rangle.$$

Date：2026 年 1 月，星期一。2020 *Mathematics Subject Classification.* 42C15,42C30,46C05,46T99。*Key words and phrases.* 相位恢复、非线性泛函分析、指数系统、莫比乌斯变换、代数集。

与之前一样，我们希望这组约束能够确定 f。一般而言，我们不再能断定 f 与 h 重合；最多只能期望存在 $\theta \in \Theta$ 使得 $f = \theta h$。此外，正如我们将看到的，如果 Θ 至少包含两个元素，那么系统$\mathbf{G}$的完备性本身并不能推出$f = \theta h$ ，因此必须对$\mathbf{G}$施加特定的冗余性。

两个经典的特殊情形都属于这一框架。若 $\Theta = \mathbb{T}$，则对每个$\mathbf{G}$，存在某个 $\theta_g \in \mathbb{T}$ 使得 $\langle f, g\rangle = \theta_g \langle h, g\rangle$，等价于幅值相等

$$|\langle f, g\rangle| = |\langle h, g\rangle|. \tag{1.2}$$

在此情形下，判断等式族 (1.2) 是否蕴含对某个 $\theta \in \mathbb{T}$ 有 $f = \theta h$的问题，称为相位恢复（PR）中的唯一性问题（例如参见综述 [25]及其中的参考文献）。这一问题最初以泡利问题的形式得到研究，其关注的是能否根据一个函数的绝对值及其傅里叶变换的绝对值确定该函数 [41, 44]。

若 H 是实希尔伯特空间，则条件 1.2 可化简为

$$\langle f, g\rangle = \pm\langle h, g\rangle$$

这时称之为符号恢复问题，我们也将其称为实相位恢复（实 PR）。相位恢复及其对应的实数类比自然地出现在各种相位信息丢失或无法观测的应用中。突出的例子包括X射线晶体学 [22, 51],、衍射成像 [39, 46],和量子力学 [40, 45]。除这些应用之外，相位恢复在信号处理和数据分析中也日益重要 [38]。从数学角度看，这些应用推动了相关数学理论的蓬勃发展，旨在探究唯一性和稳定性等基本问题。这些问题已从多种视角得到研究，例如泛函分析视角 [5, 7, 19, 23, 24], 、凸几何 [14],、复分析 [29, 33, 53],、采样理论 [2, 28, 35, 44],、有限维与代数视角 [8, 13], 、群论框架 [12] 以及算法方法 [16, 17, 49]。

本文考虑这些问题的一个统一版本，允许任意的旋转集 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$。由此引出以下定义。

定义 1.1. 设 H 是一个希尔伯特空间，设 $\mathbf{G} \subseteq H$，且设 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$。若对每个 f、$h \in H$，只要对每个 $g \in \mathbf{G}$，都存在 $\theta_g \in \Theta$ 使得，则称$\mathbf{G}$ 具有 Θ-相位恢复（在 H 中）：

$$\langle f, g\rangle = \theta_g \langle h, g\rangle,$$

那么 $f = \theta h$ 对某个 $\theta \in \Theta$ 成立。

经典张成性质与 Θ-相位恢复相关，但这些性质单独都无法完整描述能够实现 Θ-相位恢复的系统 $\mathbf{G}$ 。一方面，任何能够实现 Θ-相位恢复的系统都必须是完备的。另一方面，对于有限集Θ，施加足够强的冗余（如过完备性），可将非线性确定问题化为线性问题，并意味着系统能够实现Θ-相位恢复。然而，过完备性既不是 Θ-相位恢复的必要条件，也不是其内在属性。关于 Θ-相位恢复与经典张成性质的详细比较，请参见第 2.1 节。

当恰好允许两个相位时，即 $|\Theta| = 2$，其中 $|X|$ 表示集合 X的基数，情况就更加明朗。在这种情况下， Θ-相位恢复由一种加强形式的完备性决定，即所谓的补性质：$\mathbf{G} \subseteq H$具有补性质，当且仅当对每个 $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{G}$ ，$\mathbf{S}$ 在 H中是完备的，或者 $\mathbf{G} \setminus \mathbf{S}$ 在 H中是完备的。我们证明如下结论。

命题 1.2. 设 $\mathbf{G} \subseteq H$ ，且 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$ 满足 $|\Theta| = 2$。那么，$\mathbf{G}$ 具有 Θ-相位恢复，当且仅当$\mathbf{G}$ 具有补性质。

对于实希尔伯特空间中的系统进行实相位恢复的情形（即相对于 $\Theta = \{-1, 1\}$ 的 Θ-相位恢复），后一个命题是文献中的经典结果。在有限维情形下，这一点已在 [10], 中证明；对于一般的希尔伯特空间，证明见 [15], ；而巴拿赫空间的情形则在 [4]中讨论。此外，这些文献还表明，对于复希尔伯特空间，补性质只是系统进行相位恢复的必要条件（即具有 $\Theta = \mathbb{T}$的Θ-相位恢复）。在我们更广泛的 Θ-相位恢复框架中，实相位恢复与复相位恢复之间的区别不复存在。特别地，命题 1.2 表明，只要 $|\Theta| = 2$，系统进行 Θ-相位恢复这一性质就不依赖于 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$。

用失败的语言来表述，命题 1.2 使我们能够推导出以下等价说法：给定 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$ with $|\Theta| = 2$，系统 G 当且仅当存在 G_1,$\mathsf{G}_2 \subseteq \mathsf{G}$，使得 $\mathsf{G}_1 \cup \mathsf{G}_2 = \mathsf{G}$，且 G_1 和 G_2 都在 H 中不完备时，才不满足 Θ- 相位恢复。对于更大的旋转集 Θ，Θ-相位恢复的失败体现为更精细的几何结构。特别是，障碍不再能仅凭划分的完备性来检测，而是源于 G 的多个子集之间的协同作用。下一个定理通过刻画可数集 Θ不满足 Θ-相位恢复的情形，使这一现象变得明确；刻画依据的是 G 的覆盖，以及相关正交补中向量之间的代数关系。它可以视为对 Cahill、Casazza 和 Daubechies [15,定理 1.2]所得刻画的重大拓展；后者是在希尔伯特空间中基于补性质建立的。我们称 $\{\mathsf{G}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是 G 的一个覆盖，若对每个 $j \in \mathbb{N}$ ，都有 $\mathsf{G}_j \subseteq \mathsf{G}$ 且 $\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathsf{G}_j = \mathsf{G}$。此外，我们用 $X^{\perp}$表示集合 $X \subseteq H$ 的正交补。

定理 1.3. 设 H 是一个希尔伯特空间，且假设 $\Theta = \{\theta_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{T}$满足 $\theta_1 \neq \theta_2$。那么 $\mathbf{G} \subseteq H$ 不满足 Θ-相位恢复，当且仅当存在一个覆盖$\{\mathbf{G}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 的$\mathbf{G}$ 以及一个满足以下条件的序列 $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq H$

(1) $0 \neq x_j \in \mathbf{G}_j^{\perp}$对每个 $j \in \mathbb{N}$都成立，

(2) x_1 和 x_2 线性无关，*(3)* 对每个 $j \geq 3$ ，

都有

$$x_j = \frac{\theta_j - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} x_2 - \frac{\theta_j - \theta_2}{\theta_2 - \theta_1} x_1.$$

仔细考察定理 1.3，我们可以推导出：当 $|\Theta| = 3$ 时，与 $|\Theta| = 2$ 的情形类似，系统具有 Θ-相位恢复的性质与 Θ 的选择无关（见推论 3.1）。此外，当旋转集 Θ由单个元素生成时，定理 1.3 给出了格外清晰的描述。在这种情况下，定理 1.3 中出现的关系使我们能够从存在递推关系的角度来看待 Θ-相位恢复的失败。

命题 1.4. 设 H 是一个希尔伯特空间，且 $\Theta = \{\theta_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{T}$ 由某个 $\omega \in \mathbb{T}\setminus\{1\}$ 按 $\theta_j = \omega^j$ 定义。则$\mathbf{G} \subseteq H$ 不具有 Θ-相位恢复，当且仅当存在$\mathbf{G}$ 的一个覆盖 $\{\mathbf{G}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 以及一个满足以下条件的序列 $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq H$

(1) $0 \neq x_j \in \mathbf{G}_j^{\perp}$对每个 $j \in \mathbb{N}$，*(2)* x_1 和 x_2 线性无关，*(3)* 对每个 $j \geq 3$，向量 x_j 由二阶递推关系 $x_j = (1+\omega)x_{j-1} - \omega x_{j-2}$给出。

命题 1.4 证明了其在研究非线性约束下的傅里叶唯一性问题中是一项特别有用的工具。这类问题通常在 Paley–Wiener 空间 $[1,2,3,34,36,43,50,53]$中以相位恢复和符号恢复之名进行研究。

为讨论这一设定，对 $\lambda \in \mathbb{C}$定义指数函数 $e_\lambda(x) = e^{2\pi i\lambda x}$。给定 $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$，我们将具有 Λ中频率的相关指数系统记为 $E(\Lambda) = \{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$。对于满足 $a > 0$的函数 $f \in L^2[0,a]$，令 $c_n(f)$表示其傅里叶系数，

$$c_n(f) \coloneqq \int_0^a f(t)e^{-2\pi i\frac{n}{a}t}\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

根据经典傅里叶唯一性定理，若对所有 $n \in \mathbb{Z}$，$c_n(f) = 0$，则$f = 0$。等价地，指数系统 $E(\frac{1}{a}\mathbb{Z})$ 在 $L^2[0,a]$ 中是完备的。更一般地，对于格 $\Lambda = \alpha\mathbb{Z}$，系统 $E(\Lambda)$ 在 $L^2[0,a]$ 中完备，当且仅当其（渐近）密度

$$D(\Lambda) = \lim_{r\to\infty} \frac{|\Lambda \cap [-r,r]|}{2r} = \frac{1}{\alpha}$$

满足 $D(\Lambda) \geq a$ [55]。这一经典的完备性条件可以改述如下：对于格 Λ，蕴含关系

$$\int_0^a f(t)e^{-2\pi i\lambda t}\,dt = \int_0^a h(t)e^{-2\pi i\lambda t}\,dt, \quad \lambda \in \Lambda \implies f = h \tag{1.3}$$

对所有 $f, h \in L^2[0,a]$ 成立，当且仅当 $D(\Lambda) \geq a$。如果我们转而询问$E(\Lambda)$ 是否具有 Θ-相位恢复性质，那么 (1.3) 左侧的线性条件就会被以下非线性约束取代：

$$\int_0^a f(t)e^{-2\pi i\lambda t}\,dt = \theta_\lambda \int_0^a h(t)e^{-2\pi i\lambda t}\,dt, \quad \lambda \in \Lambda, \quad \theta_\lambda \in \Theta.$$

当 Θ由单位根组成时，命题 1.4 给出了关于 Λ 密度条件的 Θ-相位恢复性质的简洁刻画。该结果可视为经典傅里叶唯一性定理的非线性类比。此外，它还推广了 Alaifari、Daubechies、Grohs 和 Thakur 对情形 $\Theta = \{1,-1\}$ $[3,50]$ 的研究结果。

定理 1.5。设 $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ 是一个格，且 $\Theta = \{e^{2\pi ik/n} : \quad k = 0, \ldots, n-1\}$. 那么 $E(\Lambda)$ 在 $L^2[0,a]$ 中满足 Θ-相位恢复，当且仅当 $D(\Lambda) \geq na$。

前一个定理特别蕴含，对于由 n 次单位根组成的任意集合 Θ，完整指数系统$E(\mathbb{R})$ 在 $L^2[0,a]$ 中具有 Θ-相位恢复性质。在特殊情形 $\Theta = \{1,-1\}$ 下，这一结果已在 $[50]$ 中得到。另一方面，已知当 $\Theta = \mathbb{T}$ 时，系统 $E(\mathbb{R})$ 不具有相位恢复性质，因为可以利用所谓的零点翻转技术 $[1]$ 构造反例。那

么，如果 Θ 是一般集合，既不是单位根集合，也不是整个环面 $\mathbb{T}$，情况又如何？在下面的陈述中，我们给出所有使（完整）指数系统 $E(\mathbb{R})$ 具有 Θ-相位恢复性质的 Θ 的拓扑刻画。

定理 1.6. 指数系统 $E(\mathbb{R})$ 在 $L^2[0,a]$ 中具有 Θ-相位恢复性质，当且仅当Θ 是全不连通的。

接下来，我们建立一个对 Möbius 变换不变的 Θ-相位恢复框架。具体而言，下面的结论表明，在保持单位圆 $\mathbb{T}$不变的 Möbius 变换下，Θ-相位恢复性质是不变的。事实证明，这种对 Möbius 变换的不变性是研究 Θ-相位恢复的有力工具。我们用 Aut($\mathbb{T}$)表示 $\mathbb{T}$ 上的双射群，并用 $M(\Theta)$表示 Θ 在 $M \in$ Aut($\mathbb{T}$)作用下的像。

定理 1.7. 设 H 是一个希尔伯特空间。那么，对任意的$\mathbf{G} \subseteq H$ 和任意的 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$，以下陈述等价：

(1) $\mathbf{G}$具有 Θ-相位恢复性质。*(2)* 存在一个 *Möbius* 变换 $M \in \mathrm{Aut}(\mathbb{T})$，使得$\mathbf{G}$ 具有 $M(\Theta)$-相位恢复性质。*(3)* 对每个 *Möbius* 变换 $M \in \mathrm{Aut}(\mathbb{T})$，都有$\mathbf{G}$ 具有 $M(\Theta)$-相位恢复性质。

如前所述，只要满足 $|\Theta| \leq 3$，系统 $\mathbf{G}$ 执行 Θ-PR 的性质就不依赖于 Θ。上述定理揭示了支配这一性质的基本原理：一个经典事实是，对于任意两个 Θ, $\Theta' \subseteq \mathbb{T}$ 满足$|\Theta| = |\Theta'| \leq 3$ 的对象，存在一个 M¨obius 变换 $M \in$ Aut($\mathbb{T}$)，使得 $M(\Theta) = \Theta'$。对于由四个元素组成的集合 Θ，执行 Θ-PR 的性质由交比等射影不变量决定。回顾一下，两两不同的 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ 的交比定义为

$$\mathrm{CR}(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}.$$

借助定理 1.7，我们可以推导出：如果 $\Theta, \Theta' \subseteq \mathbb{T}$ 满足$|\Theta| = |\Theta'| = 4$，且 CR(Θ) = CR(Θ')，那么系统 $\mathbf{G}$ 执行 Θ-PR 当且仅当其执行 Θ'-PR （见推论 4.1 ）。另一方面，我们将在第 5.1 节中证明，一般而言，只要满足 $|\Theta| \geq 4$，系统执行 Θ-PR 的性质取决于 Θ 的选择。特别地，存在 Θ、Θ' 和 $\mathbf{G}$，满足 $|\Theta| = |\Theta'| = 4$ 且 CR(Θ) $\neq$CR(Θ')，使得 $\mathbf{G}$ 执行 Θ-PR，但不执行 Θ'-PR。

其余结果聚焦于有限维情形 $H = \mathbb{C}^d$，这是相位恢复领域中一个活跃且受到广泛研究的方向 [9,10,21,54]。这一情形中的一个核心问题是极小性问题：确定最小的 m，使得存在一个系统$\mathbf{G} = \{g_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{C}^d$，能够在 $\mathbb{C}^d$ 中实现相位恢复（或类似地，在 $\mathbb{R}^d$中实现实相位恢复）。受此问题启发，我们通过以下方式定义极小性量 $\mathcal{N}(\mathbb{C}^d, \Theta)$：

$$\mathcal{N}(\mathbb{C}^d, \Theta) = \min\left\{m \in \mathbb{N} : \exists \mathbf{G} \subseteq \mathbb{C}^d \text{ with } |\mathbf{G}| = m \text{ that does } \Theta\text{-PR in } \mathbb{C}^d\right\}.$$

一个密切相关的研究方向探讨一般性：对于固定的 m，能够实现相位恢复的系统 $\{g_j\}_{j=1}^m$ 构成的集合有多大？随机选择或一般性选择是否就能保证这一性质？本节将针对 Θ-相位恢复探讨这些问题。我们首先给出必要条件，说明在低于某些阈值时，Θ-相位恢复无法成立。

定理 1.8。设 $d \geq 2$ 且设 $\mathbf{G} = \{g_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{C}^d$。

(1) 如果 $m \leq 2d - 2$，那么 $\mathbf{G}$ 对所有满足 $|\Theta| \geq 2$. 的 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$ 均不满足 Θ-相位恢复

(2) 若 $m = 2d-1$，则 $\mathbf{G}$ 对所有满足 $|\Theta| \geq 3$ 的 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$ 都不具有 Θ-相位恢复性质。

定理 1.8 指出了一种使 Θ-相位恢复不可能实现的情形，无论如何选择向量 $\{g_j\}_{j=1}^m$ 都是如此。超出这一情形后，情况便有显著变化。例如，由命题 1.2 可知，若 $|\Theta| = 2$ 且 $m \geq 2d-1$，则每个满火花系统$\{g_j\}_{j=1}^m$ 都能在 $\mathbb{C}^d$ 中实现 Θ-相位恢复。回顾一下，若一个系统中每个由 d 个向量组成的子集都线性无关，则称该系统为满火花系统。已知，对于固定的 d 和 $m \geq 2d-1$，满火花系统的集合在代数意义下是一般的：它构成 $\mathbb{C}^{d\times m} \simeq \mathbb{C}^{dm}$ [6] 的一个非空 Zariski开子集（关于 Zariski拓扑的细节，参见第 5.3 节）。这意味着 $\mathcal{N}(\mathbb{C}^d, \Theta) = 2d-1$。

对应于经典相位恢复的情形 $\Theta = \mathbb{T}$ 要微妙得多。已知，具有 $m \geq 4d-4$ 且能够进行相位恢复的系统 $\{g_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{C}^d$ 的集合包含一个非空扎里斯基开集 [21]，，尽管对于一般的 $d \in \mathbb{N}$，确切的最小数量 $\mathcal{N}(\mathbb{C}^d, \mathbb{T})$ 仍然未知。利用复射影空间的嵌入结果，已证明该界$4d-4$ 在维数 d [31] 上仅差一个对数项即可达到最优。然而，这个界并不紧，即存在 d，使得 $\mathcal{N}(\mathbb{C}^d, \mathbb{T}) < 4d-4$ [52]。

下述定理表明，一旦超出定理 1.8 的失效区域， Θ-相位恢复便成为一种普遍现象。更确切地说，对于有限的Θ ，该性质在一个非空扎里斯基开集上成立；而对于可数无限的Θ ，该性质在一个稠密（相对于欧几里得拓扑）的 G_δ集上成立，且该集合具有满勒贝格测度。这表明，在有限和可数两种情形下，能够进行Θ-相位恢复的系统构成一个丰富的类别。特别是，当向量取自任意连续概率分布时，这类系统以概率 1 出现。

定理 1.9。设 $d \geq 2$，设 $m \geq 2d$，并设 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$。此外，令 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}^{d\times m}$表示所有在 $\mathbb{C}^d$ 中满足 Θ-相位恢复的系统 $\{g_j\}_{j=1}^m \simeq (g_1, \ldots, g_m) \in \mathbb{C}^{d\times m}$。

(1) 若 Θ 是有限集，则 $\mathcal{C}$ 包含一个非空扎里斯基开集。*(2)* 若 Θ 是可数集，则 $\mathcal{C}$ 包含一个具有满勒贝格测度的稠密 G_δ-集。

我们注意到，在文献中，定理 1.9 中类似第一条的陈述通常被描述为 Θ-相位恢复一般成立，或者更确切地说，扎里斯基一般地成立，这意味着它在 $\mathbb{C}^{d\times m}$ 的一个非空扎里斯基开子集上成立。定理 1.8 和定理 1.9 推出以下结果。

推论 1.10。设 $d \geq 2$，且 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$ 可数。那么

$$\mathcal{N}(\mathbb{C}^d, \Theta) = \begin{cases} d, & |\Theta| = 1 \\ 2d-1, & |\Theta| = 2 \\ 2d, & |\Theta| \geq 3 \end{cases}.$$

这就彻底解决了所有可数集 Θ 的极小性问题。此外，对于每个 $m \geq \mathcal{N}(\mathbb{C}^d, \Theta)$，满足 m 个元素进行 Θ-相位恢复的系统集合 $\mathcal{C}$ 在 $\mathbb{C}^{d\times m}$ 中稠密。因此， $\mathcal{C}$ 要么为空集（当 $m < \mathcal{N}(\mathbb{C}^d, \Theta)$ 时），要么稠密。在 $\Theta = \mathbb{T}$ 的情形下是否也会出现类似的尖锐转变，仍是文献中的一个开放问题（例如参见 [15, 第 2] 节）。

请注意，推论 1.10 适用于每个可数集 Θ，包括在 $\mathbb{T}$ 中稠密的集合。然而，当 Θ 不可数时，情况就不同了。例如，考虑 Θ 包含形如 $\{e^{it}$ 的非平凡弧的情形：$t \in [a,b]\}$，其中 $a < b$。在这种情况下，有限维中的 Θ-相位恢复最终等价于

相位恢复。特别是，极小性量 $\mathcal{N}(\mathbb{C}^d,\ \Theta)$ 从可数情形下的 $2d$ 跃升至约 $4d$。

命题 1.11。 假设 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$ 包含一个非平凡弧。那么，$\mathbf{G} \subseteq \mathbb{C}^d$进行 Θ-相位恢复，当且仅当它进行相位恢复。特别地，

$$\mathcal{N}(\mathbb{C}^d, \Theta) \geq 4d - 4 - 2\log_2(d).$$

概要。 在第 2 节中，我们重新讨论完备性和过完备性，并解释它们如何与 Θ-相位恢复相互作用。我们还讨论双相位情形 $|\Theta| = 2$，证明 Θ-相位恢复等价于补性质（命题 1.2）。

第 3 节建立了可数相位集 Θ 的理论：我们通过覆盖和正交关系证明了 Θ-相位恢复失效的一般刻画（定理 1.3），并推导出处理循环相位集的命题 1.4。随后，我们将这一框架应用于指数系统，并获得 $L^2[0,a]$ 中 Θ-相位恢复的精确格点密度判据（定理 1.5）。此外，我们还给出了定理 1.6 的证明。

在第 4 节中，我们引入莫比乌斯不变的视角。我们证明， Θ-相位恢复在将 $\mathbb{T}$ 映射到自身的莫比乌斯变换下保持不变（定理 1.7），并将 Θ 的变化与交比等射影不变量联系起来。

最后，第 5 节聚焦于有限维情形 $H = \mathbb{C}^d$。我们首先从明确的代数和几何条件出发，分析 $\mathbb{C}^2$ 中的 Θ-相位恢复。随后，我们探讨高维情形下的极小性与一般性：证明了精确的不可能性阈值（定理 1.8），表明对于有限和可数的 Θ，一旦$m \geq 2d$， Θ-相位恢复便成为一般情形（定理 1.9）；最后讨论不可数 Θ的情形，包括 Θ-相位恢复退化为标准相位恢复的弧情形（命题 1.11）。

2. Completeness、 overcompleteness与 and complement property

2.1. 完备性与过完备性。 除非另有说明， H 表示一个复希尔伯特空间，其维数 $\dim(H) \geq 2$，并配备标量积$\langle \cdot,\ \cdot \rangle$ 该标量积对第一个变量线性，对第二个变量共轭线性。此外，每当我们写下 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$ 和$\mathbf{G} \subseteq H$ 时，分别假设$\Theta \neq \varnothing$和$\mathbf{G} \neq \emptyset$。对于子集$\mathbf{G} \subseteq H$，记 span(G) 为$\mathbf{G}$的线性张成空间，它由$\mathbf{G}$中元素的所有有限线性组合构成。回顾一下，若$\mathbf{G}$ 在 H 中完备，则称其为完备的；这意味着 span(G)的闭包与H重合。根据哈恩–巴拿赫定理，$\mathbf{G}$ 在 H 中完备，当且仅当对于每个 $f \in H$，若条件 $\langle f,\ g \rangle = 0$ 对所有 $g \in \mathbf{G}$ 成立，则必有 $f = 0$；等价地，$\mathbf{G}^{\perp} = \{0\}$，其中$\mathbf{G}^{\perp}$ 表示集合$\mathbf{G}$的正交补。完备性与 Θ-相位恢复之间的联系概述如下。

引理 2.1. 设 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$。若 $\mathbf{G} \subseteq H$ 具有 Θ-相位恢复性质，则$\mathbf{G}$ 是完备的。此外，若$\mathbf{G}$是完备的，且 Θ 是单元素集，则$\mathbf{G}$ 具有 Θ-相位恢复性质。

证明。 若 $f \in H$ 满足 $\langle f,\ g \rangle = 0$ 对于每个 $g \in \mathbf{G}$ 都成立，那么特别地，

$$\langle f, g \rangle = \theta_g \langle 0, g \rangle$$

对所有 $g \in \mathbf{G}$ 以及任意 $\theta_g \in \Theta$。由于 $\mathbf{G}$ 具有 Θ-相位恢复性质，我们得到 $f = \theta \cdot 0 = 0$。由于 f 是任意的，因此 $\mathbf{G}$是完备的。

现在，设 $\mathbf{G}$ 是完备的，并假设对于某个 $\theta \in \mathbb{T}$有 $\Theta = \{\theta\}$ 。固定任意$f, h \in H$, 并假设对于每个 $g \in \mathbf{G}$ ，都有

$$\langle f, g\rangle = \theta_g \langle h, g\rangle$$

满足 $\theta_g \in \Theta$。根据关于 Θ 的假设，对于所有 $g \in \mathbf{G}$，我们有 $\theta_g = \theta$ 。因此，$\langle f - \theta h,\ g\rangle = 0$ 对所有 $g \in \mathbf{G}$ 均成立，而完备性推出 $f = \theta h$。□

利用上述陈述，我们可以轻松推出以下引理，本文将反复用到它。

引理 2.2。 设 $\Theta, \Theta' \subseteq \mathbb{T}$ 满足 $\Theta' \subseteq \Theta$。若 $\mathbf{G} \subseteq H$ 满足 Θ-相位恢复，则 $\mathbf{G}$ 满足Θ'-相位恢复。

证明。 假设 $\mathbf{G}$ 满足 Θ-相位恢复。为了证明 $\mathbf{G}$ 满足 Θ'-相位恢复，我们固定 f, $h \in H$，并假设对于每个 $g \in \mathbf{G}$ ，都存在 $\theta_g \in \Theta'$ 使得

$$\langle f, g\rangle = \theta_g \langle h, g\rangle. \tag{2.1}$$

由于 $\Theta' \subseteq \Theta$，且 $\mathbf{G}$ 满足 Θ-相位恢复，因此对于某个 $\theta \in \Theta$，有 $f = \theta h$ 。接下来只需证明 $\theta \in \Theta'$。假设对于某个 $\theta \in \Theta \setminus \Theta'$，有 $f = \theta h$ 。结合方程（2.1）以及对所有 $g \in \mathbf{G}$ 均成立的性质 $\theta - \theta_g \neq 0$ ，我们得到$h \in \mathbf{G}^\perp$。根据引理 2.1，由于 $\mathbf{G}$ 是完备的，我们得到 $h = 0$ ，因而也有 $f = 0$，这表明对于任意 $\theta \in \Theta'$， $f = \theta h$ ，从而产生矛盾。□

我们在全文中将反复用到下面这个有用的观察。

引理 2.3. 设 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$ ，且设 $\mathbf{G} \subseteq H$。那么，$\mathbf{G}$ 不满足 Θ-相位恢复，当且仅当存在能证明这一点的线性无关的 f、$h \in H$ 。

证明。 只需证明正向命题，因为逆命题显然成立。我们分两种情况讨论。

情况 1：$\mathbf{G}$ 是完备的。由于 $\mathbf{G}$ 不满足 Θ-相位恢复，因此可以找到 $f, h \in H$, 使得对每个 $g \in \mathbf{G}$ ，都存在 $\theta_g \in \Theta$ ，满足

$$\langle f, g\rangle = \theta_g \langle h, g\rangle,$$

然而，对任意 $\theta \in \Theta$，都有 $f \neq \theta h$ 。特别地，注意到这意味着 $f, h \neq 0$。假设对于某个 $c \in \mathbb{C} \setminus \Theta$，有 $f = ch$。那么对每个 $g \in \mathbf{G}$

$$c\langle h, g\rangle = \langle f, g\rangle = \theta_g \langle h, g\rangle.$$

由于 $h \neq 0$ ，且 $\mathbf{G}$ 是完备的，我们可以找到 $g \in \mathbf{G}$ ，使得 $\langle h, g\rangle \neq 0$。这就得到 $c = \theta_g \in \Theta$，矛盾。

情况 2： $\mathbf{G}$ 不完备。若$\mathbf{G} = \{0\}$，则任意线性无关的 $f, h \in H$都能证明这一点。假设$\mathbf{G} \neq \{0\}$。我们任取一个非零的 $f \in \mathbf{G}^\perp$、 $h \in \mathbf{G}$以及任意一个 $\theta \in \Theta$。首先注意到， $x = f + \theta h$ 和 h 线性无关。事实上，若对某个 $c \in \mathbb{C}$有 $f + \theta h = ch$ ，则 $f + (\theta - c)h = 0$。若 $c = \theta$ ，则 $f = 0$，这就产生了矛盾。若 $c \neq \theta$，则 $f = (c - \theta)h$，因此 $f \in \mathbf{G}^\perp \cap \mathbf{G}$，从而 $f = 0$，同样导致矛盾。最后注意，对每个 $g \in \mathbf{G}$ ，我们都有

$$\langle x, g\rangle = \langle f + \theta h, g\rangle = \theta \langle h, g\rangle,$$

这表明，线性无关的向量 x和 h 证明了Θ-相位恢复不成立。□

我们还用到了以下初等事实。

引理 2.4. 设 H_1、H_2 为希尔伯特空间，设 $\mathbf{G} \subseteq H_1$，并设 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$。

(1) 若 $T\colon\ H_1 \to H_2$ 是可逆有界线性算子，则 $\mathbf{G}$ 在 H_1 中具有 Θ-相位恢复，当且仅当 $T(\mathbf{G}) = \{Tg\colon\ g \in \mathbf{G}\}$ 在 H_2中具有 Θ-相位恢复。*(2)* 若 $\{c_g\}_{g\in\mathbf{G}} \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0\}$，则 $\mathbf{G}$在 H_1 中具有 Θ-相位恢复，当且仅当 $\{c_g g\colon\ g \in \mathbf{G}\}$在 H_1中具有 Θ-相位恢复。

证明。 命题的第 (2) 部分直接由系统具有 Θ-相位恢复的定义得出。为证明第 (1) 部分，假设 $\mathbf{G}$ 在 H_1 中具有 Θ-相位恢复，并令 $f,\ h \in H_2$满足

$$\langle f, Tg\rangle_{H_2} = \theta_g \langle h, Tg\rangle_{H_2}$$

对所有 $g \in \mathbf{G}$ 以及某个 $\theta_g \in \Theta$均成立。后者等价于伴随算子 $T^*\colon H_2 \to H_1$ 满足 T 的条件

$$\langle T^* f, g\rangle_{H_1} = \theta_g \langle T^* h, g\rangle_{H_1}$$

对所有 $g \in \mathbf{G}$，这意味着 $T^* f = \theta T^* h$ 对某个 $\theta \in \Theta$成立。由于 T^*是线性且可逆的，我们有 $f = \theta h$，这意味着 $T(\mathbf{G})$ 在 H_2 中不具有 Θ-PR。逆命题类似可得。□

引理 2.1 表明，一个系统的完备性足以对单元素集进行 Θ-PR。如果 Θ 包含多于一个元素，那么可以用过完备性的概念替代完备性来实现 Θ-PR。回顾一下，如果可数系统 $\mathbf{G} = \{g_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq H$ 的每个子序列 $\{g_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 都满足 $\mathbf{G}$ 的完备性 [48]，则称该系统为过完备（或超完备，或稠密闭）系统。这里我们采用巴拿赫空间文献中常见的经典过完备性概念；在框架理论中还出现了其他定义 [20, 30]。一个过完备系统的具体例子由指数系统 $E(\Lambda)$ 给出，其中Λ 满足某种拓扑性质，如下所述。回顾一下，对于$\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ，指数系统 $E(\Lambda)$ 由所有指数函数 $e_\lambda(x) = e^{2\pi i \lambda x}$ 组成，其中 $\lambda \in \Lambda$。由 [18, 定理 4.3], 可知，对于 $a > 0$，指数系统 $E(\Lambda)$ 在 $L^2[0, a]$ 中是过完备的，当且仅当 Λ 具有一个聚点。我们的下一个结果将比较过完备性与 Θ-PR。

引理 2.5。 如果$\mathbf{G} \subseteq H$ 是过完备的，那么$\mathbf{G}$ 对每个有限的 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$都具有 Θ-相位恢复性质。

证明。 设$\mathbf{G} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是过完备的，并令 Θ 为有限集，且满足 $\Theta =\{\theta_1, \ldots, \theta_N\}$。为证明$\mathbf{G}$ 具有 Θ-相位恢复性质，令 $f,\ h \in H$ 满足

$$\langle f, g_n\rangle = \theta_{g_n} \langle h, g_n\rangle$$

其中 $\theta_{g_n} \in \Theta$。通过下式定义指标集 I_j：

$$I_j = \{n \in \mathbb{N} : \langle f, g_n\rangle = \theta_j \langle h, g_n\rangle\}.$$

则 $\mathbb{N} = I_1 \cup \cdots \cup I_N$，并且指标集 I_j中至少有一个是无限的。将该集合记为 I_ℓ。由于$\mathbf{G}$ 是过完备的，因此 $\{g_n\}_{n\in I_\ell}$ 是完备的，并满足

$$\langle f - \theta_\ell h, g_n\rangle = 0$$

对所有 $n \in I_\ell$均成立。因此 $f - \theta_\ell h = 0$。 □

后一陈述的逆命题一般并不成立，如下例所示。

例2.6。 考虑指数系统 $\mathbf{G} = E(-i\mathbb{N}) = \{e^{2\pi nx}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在$H = L^2[0,1]$中。根据 *[18],*$\mathbf{G}$ 在 $L^2[0,1]$中不是过完备的。另一方面，对于任意有限 Θ，$\mathbf{G}$ 确实满足 Θ-相位恢复：令 $\Theta = \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$和 $f, h \in H$满足

$$\langle f, e^{2\pi nx}\rangle = \theta_n \langle f, e^{2\pi nx}\rangle$$

对于某个 $\theta_n \in \Theta$。令

$$I_j = \{n \in \mathbb{N} : \langle f, e^{2\pi nx}\rangle = \gamma_j \langle h, e^{2\pi nx}\rangle\}.$$

由于

$$\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{n\in I_j} \frac{1}{n}$$

存在 ℓ 使得 $\sum_{n\in I_\ell} \frac{1}{n} = \infty$。通过变量替换并应用 *M ̈untz-Szasz* 定理 *[55]*，可知 $\{e^{2\pi nx}\}_{n\in I_\ell}$ 在 $L^2[0,1]$ 中是完备的。由于

$$\langle f - \theta_\ell h, e^{2\pi nx}\rangle = 0$$

对于所有 $n \in I_\ell$，由 $\{e^{2\pi nx}\}_{n\in I_\ell}$ 的完备性可得 $f = \theta_\ell h$。因此，$\{e^{2\pi nx}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 不具有 Θ- 相位恢复性质。由于 Θ 是任意有限集，结论得证。

最后，我们指出，过完备性通常与相位恢复性质不可比较。

例2.7。 *(1)* 考虑希尔伯特空间 $H = L^2[0,1]$ 以及集合

$$S = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

此外，考虑完整指数系统 $E(\mathbb{R})$。众所周知，$E(\mathbb{R})$在 $L^2[0,1]$中不满足相位恢复。由于 $E(S) \subseteq E(\mathbb{R})$，我们得到 $E(S)$ 在$L^2[0,1]$中也不满足相位恢复。另一方面，由 *[18]* 可知，$E(S)$ 在$L^2[0,1]$中过完备。因此，过完备性并不意味着相位恢复。

(2) 考虑希尔伯特空间 $H = L^2(\mathbb{R})$ 以及集合

$$S = \left\{(\pm\sqrt{n}, \pm\sqrt{k}) : (n,k) \in \mathbb{N}^2\right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

在 *[26]* 中已证明，存在 $g \in L^2(\mathbb{R})$ 使得*Gabor*系统

$$\mathbf{G} = \{e^{2\pi i\omega x} g(x-t) : (t,\omega) \in S\}$$

在 $L^2(\mathbb{R})$中满足相位恢复。注意，平移系

$$\mathbf{G}' = \{g(x-n) : n \in \mathbb{Z}\}$$

构成<*G*>中的一个不完备子集。这是因为一个众所周知的事实：函数 $g \in L^2(\mathbb{R})$ 的整数平移系在 $L^2(\mathbb{R})$中永远不完备。将$\mathbf{G}$ 视为 $L^2(\mathbb{R})$ 中的一个序列，并将$\mathbf{G}'$ 视为$\mathbf{G}$的一个子序列，可知$\mathbf{G}$ 并不过完备，但满足相位恢复。

2.2. **补性质**。 引理 2.1 和引理 2.5 表明，完备性和过完备性分别为单元素集和有限集的 Θ-相位恢复提供了充分条件。然而，这两个条件都无法给出 Θ-相位恢复的刻画。因此，要获得真正的刻画，就必须用一个更强的条件取代完备性——但该条件仍需严格弱于过完备性。我们将在第 3 节中为每个可数集 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$ 获得这样的刻画。在本节中，我们将重点讨论 Θ 由两个元素组成的特殊情形。

对于实希尔伯特空间，符号恢复问题的一个刻画已通过所谓的补性质建立起来。该性质可以被视为完备性的强化形式：完备性要求 span(G) 的闭包为整个 H，而补性质则对 $\mathbf{G}$ 的每个二元划分施加了更为稳健的张成条件。

定义 2.8. 若对每个$\mathbf{S} \subseteq \mathbf{G}$，都有$\mathbf{S}$ 在 H 中完备，或$\mathbf{G} \setminus \mathbf{S}$ 在 H中完备，则称$\mathbf{G} \subseteq H$ 具有补性质。

下面的命题确立了相位恢复与补性质 [15]之间的基本联系。

命题2.9. 若$\mathbf{G} \subseteq H$ 具有相位恢复性质，则$\mathbf{G}$ 具有补性质。若H 是实希尔伯特空间，且$\mathbf{G} \subseteq H$ 具有补性质，则$\mathbf{G}$ 具有（实）相位恢复性质。

根据后一结果，补性质仅在实希尔伯特空间的情形下刻画相位恢复。命题 1.2 表明，事实上，只要 Θ 恰好由两个元素构成，补性质就总能刻画 Θ-相位恢复。在这一更广泛的框架中，实相位恢复与复相位恢复之间的区别不复存在，因此命题2.9也就成为一个直接推论。

命题 *1.2* 的证明。 **必要性**。假设 $\mathbf{G}$ 具有 $\{\theta_1, \theta_2\}$-相位恢复，而 $\mathbf{G}$不具有补性质。那么存在 $\mathbf{S} \subseteq\mathbf{G}$，使得$\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{G} \setminus \mathbf{S}$ 都不完备。因此，我们可以找到非零的 $f, h \in H$，使得$\langle f, g\rangle = 0$ 对所有 $g \in \mathbf{S}$ 成立，且 $\langle h, g\rangle = 0$ 对所有 $g \in \mathbf{G} \setminus \mathbf{S}$成立。因此，

$$\langle \theta_1 f + \theta_2 h, g\rangle = \begin{cases} \theta_1\langle f, g\rangle, & g \in \mathbf{G} \setminus \mathbf{S} \\ \theta_2\langle h, g\rangle, & g \in \mathbf{S} \end{cases}.$$

后者意味着，对于每个 $g \in \mathbf{G}$，都存在 $\theta_g \in \{\theta_1, \theta_2\}$，使得

$$\langle \theta_1 f + \theta_2 h, g\rangle = \theta_g\langle f + h, g\rangle.$$

由于根据假设，$\mathbf{G}$ 具有 $\{\theta_1, \theta_2\}$-相位恢复，因此存在 $\theta \in \{\theta_1, \theta_2\}$，使得 $\theta_1 f + \theta_2 h = \theta(f + h)$，或者等价地，$(\theta_1 - \theta)f + (\theta_2 - \theta)h = 0$。若 $\theta = \theta_1$，则由 $h \neq 0$ 可得 $\theta_2 = \theta$，这与假设 $\theta_1 \neq \theta_2$矛盾。$\theta = \theta_2$ 的情形也会导致类似的矛盾。

充分性。假设$\mathbf{G}$ 具有补性质，但不满足 $\{\theta_1, \theta_2\}$-相位恢复。那么我们可以找到 f, $h \in H$，其中 $f \neq \theta_1 h$ 且 $f \neq \theta_2 h$，使得对于每个$g \in \mathbf{G}$，都存在 $\theta_g \in \{\theta_1, \theta_2\}$，使得

$$\langle f, g\rangle = \theta_g\langle h, g\rangle$$

定义$\mathbf{S} := \{g \in \mathbf{G} : \langle f, g\rangle = \theta_1\langle h, g\rangle\}$。根据补性质，$\mathbf{S}$ 和$\mathbf{G} \setminus \mathbf{S}$ 中至少有一个是完备的。假设前者完备。于是，由于对于所有 $g \in \mathbf{S}$，$\langle f - \theta_1 h, g\rangle = 0$，我们得到 $f - \theta_1 h = 0$，从而产生矛盾。若$\mathbf{G} \setminus \mathbf{S}$完备，也可类似地推出矛盾。□

请注意，后一个命题意味着：如果 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$ 和 $\Theta' \subseteq \mathbb{T}$ 满足$|\Theta| = |\Theta'| = 2$，那么 $\mathbf{G} \subseteq H$ 满足 Θ-相位恢复，当且仅当它满足 Θ'-相位恢复。这一观察引出了以下定义。

定义 2.10. 我们称$\mathbf{G} \subseteq H$ 具有2-相位恢复，若对任意（因而对所有） $\Theta \subseteq \mathbb{T}$，当 $|\Theta| = 2$时，它都具有 Θ-相位恢复。

接下来，我们探讨将希尔伯特空间复化后，实相位恢复如何纳入 2-相位恢复的框架。回顾一下，给定一个实希尔伯特空间 H ，我们将其复化定义为复希尔伯特空间 $H_{\mathbb{C}}$ ，由 $H_{\mathbb{C}} = H \oplus iH$给出，其加法为

$$(f_1 + if_2) + (h_1 + ih_2) := (f_1 + h_1) + i(f_2 + h_2)$$

以及乘以复数标量 $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$

$$(\lambda_1 + i\lambda_2)(f_1 + if_2) := (\lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2) + i(\lambda_2 f_1 + \lambda_1 f_2).$$

$H_{\mathbb{C}}$ 上的内积按自然方式定义

$$\langle f_1 + if_2, h_1 + ih_2\rangle := \langle f_1, h_1\rangle - \langle f_2, h_2\rangle + i(\langle f_2, h_1\rangle + \langle f_1, h_2\rangle).$$

尽管实相位恢复与复相位恢复通常表现不同，但两个相位的情形颇为特殊：两个相位的歧义恰好体现了实相位恢复中固有的符号歧义。下一条陈述将精确说明这一联系。

推论 2.11. 设 H 是实希尔伯特空间，且 $\mathbf{G} \subseteq H$。当且仅当 $\mathbf{G}$ 在 $H_{\mathbb{C}}$ 中具有2-相位恢复性质时，$\mathbf{G}$ 在 H 中具有（实）相位恢复性质。

证明。 由于实相位恢复和 2-PR 分别等价于（实和复）补性质，只需证明$\mathbf{G}$ 在 H 中具有补性质，当且仅当它在 $H_{\mathbb{C}}$ 中具有补性质。固定$\mathbf{S} \subseteq \mathbf{G}$。在两个蕴含中，我们还假设$\mathbf{S}$ 是完备的，因为$\mathbf{G} \setminus \mathbf{S}$完备的第二种情形可用同样的方法证明。

必要性。假设$\mathbf{S}$ 在 H 中完备。为了证明$\mathbf{S}$ 在 $H_{\mathbb{C}}$ 中完备，任取向量 $f \in H_{\mathbb{C}}$ ，使得对每个 $g \in \mathbf{S}$ ，都有 $\langle f, g\rangle = 0.$ 。我们写作$f = f_1 + if_2$，其中 $f_1, f_2 \in H$。那么对每个 $g \in \mathbf{S}$，都有

$$0 = \langle f, g\rangle = \langle f_1, g\rangle + i\langle f_2, g\rangle.$$

由于 $\langle f_j, g\rangle \in \mathbb{R}$ 对于 $j = 1, 2$ 成立，这迫使 $\langle f_j, g\rangle = 0$ 对于 $j = 1,2$ 成立。由 $\mathbf{S}$ 在 H 中的完备性可得 $f_1, f_2 = 0$。因此 $f = 0$，这说明$\mathbf{S}$ 在$H_{\mathbb{C}}$中完备。

充分性。假设$\mathbf{S}$ 在 $H_{\mathbb{C}}$ 中完备。任取 $f \in H$，使得对每个 $g \in\mathbf{S}$，都有 $\langle f, g\rangle = 0$。由于 $\mathbf{S}$ 在 $H_{\mathbb{C}}$ 中完备，且 f 可视为 $H_{\mathbb{C}}$ 的一个元素，因此我们得到 $f = 0$，这说明$\mathbf{S}$ 在 H 中完备。□

3. Characterization of Θ-PR

3.1. 可数集的刻画 Θ. 本节将具体刻画希尔伯特空间中所有对可数集$\Theta \subseteq \mathbb{T}$满足 Θ-相位恢复（PR）的系统 Θ。当 $|\Theta| = 2$时，第 2.2 节已通过补性质给出了这样的刻画。定理 1.3 将这一判据大幅推广至任意可数相位集 Θ。

定理 *1.3* 的证明。 **必要性**。 假设$\mathbf{G}$ 不满足 Θ-相位恢复。我们需要构造一个覆盖 $\{\mathbf{G}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 和一个满足性质 (1)、(2) 和 (3) 的序列 $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq H$ s。根据引理 2.3，我们可以选取线性无关的 $f, h \in H$ ，使得对于每个 $g \in\mathbf{G}$ ，都存在 $\theta_g \in \Theta$ ，满足

$$\langle f, g\rangle = \theta_g\langle h, g\rangle.$$

对于每个 $j \in \mathbb{N}$，定义 $\mathbf{G}_j \subseteq \mathbf{G}$ 如下

$$\mathbf{G}_j \coloneqq \{g \in \mathbf{G} : \langle f, g\rangle = \theta_j \langle h, g\rangle\}.$$

由于对于每个 $g \in \mathbf{G}$，都存在 $j \in \mathbb{N}$ 使得 $\langle f,\ g\rangle = \theta_j\langle h,\ g\rangle$，因此可知 $\{\mathbf{G}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbf{G}$ 的覆盖。此外，定义 $x_j \in H$ 为

$$x_j \coloneqq f - \theta_j h.$$

由于 $f,\ h$ 线性无关，因此对于所有 $j \in \mathbb{N}$ 都有 $x_j \neq 0$。此外，对于每个 $g \in \mathbf{G}^j$，都有

$$\langle x_j, g\rangle = 0$$

这意味着 $x_j \in \mathbf{G}_j^{\perp}$。接下来，我们证明 $x_1,\ x_2$ 线性无关：反设 $x_1,\ x_2$ 线性相关。则存在 $\alpha \in \mathbb{C}$ 使得 $x_1 = \alpha x_2$，这等价于

$$f - \theta_1 h = \alpha(f - \theta_2 h).$$

重新整理可得

$$(1-\alpha)f + (-\theta_1 + \alpha\theta_2)h = 0.$$

由于 $f,\ h$ 线性无关，因此有

$$1 - \alpha = -\theta_1 + \alpha\theta_2 = 0.$$

后者意味着 $\theta_1 = \theta_2$，这与假设 $\theta_1 \neq \theta_2$ 矛盾。

还需证明性质 (3)。为此，我们注意到，对于每个 $z \in \mathbb{C}$，都有如下向量恒等式

$$(\theta_2 - \theta_1)(f - zh) = (z - \theta_1)(f - \theta_2 h) - (z - \theta_2)(f - \theta_1 h). \tag{3.1}$$

令 $z = \theta_j$，除以 $\theta_2 - \theta_1 \neq 0$，并利用 x_j 的定义，可得

$$x_j = \frac{\theta_j - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} x_2 - \frac{\theta_j - \theta_2}{\theta_2 - \theta_1} x_1.$$

充分性。假设 $\{\mathbf{G}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 和 $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 存在，且满足 (1)、(2) 和 (3)。我们需要证明 $\mathbf{G}$ 不满足 Θ-相位恢复。为此，令 f 和 h 为下列系统的唯一解：

$$f - \theta_1 h = x_1,\quad f - \theta_2 h = x_2.$$

注意，由于矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -\theta_1 \\ 1 & -\theta_2 \end{pmatrix}$ 可逆，这样的唯一解存在。此外，x_1 和 x_2 线性无关，因此 f 和 h 也线性无关。因此，要证明 $\mathbf{G}$ 在 f 和 h 上不满足 Θ-相位恢复，只需证明对于每个 $g \in \mathbf{G}$，都存在某个 $\theta \in \Theta$，使得 $\langle f,\ g\rangle = \theta_g\langle h,\ g\rangle$。

首先，根据 x_1 和 x_2 的定义以及性质 (1)，若 $g \in \mathbf{G}^j$ 对于 $j = 1,2$ 成立，则 $\langle x_j, g\rangle = 0$，由此得到 $\langle f, g\rangle = \theta_j\langle h, g\rangle$。接下来，固定 $j \geq 3$。利用 $z = \theta_j$ 和性质 (3)，将向量恒等式 (3.1)代入可得

$$f - \theta_j h = \frac{\theta_j - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} x_2 - \frac{\theta_j - \theta_2}{\theta_2 - \theta_1} x_1 = x_j.$$

由于根据假设 $x_j \in \mathbf{G}_j^{\perp}$，我们有 $\langle f - \theta_j h,\ g\rangle = \langle x_j,\ g\rangle = 0$ 对所有 $g \in \mathbf{G}^j$ 都成立，或者等价地，$\langle f,\ g\rangle = \theta_j\langle h,\ g\rangle$。□

3.2. 循环 Θ。 如果集合 Θ 具有代数结构，即由单个相位 $\omega \in \Theta$ 生成，那么定理 1.3 可以改写为一种特别简单的形式。在这种情况下， Θ-相位恢复的失效判据可以用一个二阶递推关系来表示。

命题 *1.4* 的证明。 由于 $\omega \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$，有 $\omega \neq \omega^2$。根据定理 1.3，只需证明

$$x_j = \frac{\omega^j - \omega}{\omega^2 - \omega} x_2 - \frac{\omega^j - \omega^2}{\omega^2 - \omega} x_1, \quad j \geq 3, \tag{3.2}$$

等价于递推关系

$$x_j = (1+\omega)x_{j-1} - \omega x_{j-2}, \quad j \geq 3.$$

为此，注意到关系式 (3.2) 等价于

$$x_j = \frac{\omega^{j-1} - 1}{\omega - 1}\, x_2 - \frac{\omega^{j-1} - \omega}{\omega - 1}\, x_1.$$

对于 $j \geq 3$，令 $A_j = \sum_{k=0}^{j-2} \omega^k$ 和 $B_j = \omega \sum_{k=0}^{j-3} \omega^k$。利用恒等式

$$\frac{\omega^{j-1} - 1}{\omega - 1} = \sum_{k=0}^{j-2} \omega^k, \quad \frac{\omega^{j-1} - \omega}{\omega - 1} = \sum_{k=1}^{j-2} \omega^k,$$

我们可以将 x_j 重写为

$$x_j = A_j x_2 - B_j x_1.$$

直接计算可得

$$A_j = (1+\omega)A_{j-1} - \omega A_{j-2}, \quad j \geq 3.$$

事实上，由于 $A_j = A_{j-1} + \omega^{j-2}$ 和 $A_{j-1} = A_{j-2} + \omega^{j-3}$，我们有

$$(1+\omega)A_{j-1} - \omega A_{j-2} = (1+\omega)A_{j-1} - \omega(A_{j-1} - \omega^{j-3}) = A_j.$$

类似的计算可得

$$B_j = (1+\omega)B_{j-1} - \omega B_{j-2}, \quad j \geq 3.$$

因此，对于每个 $j \geq 3$，我们有

$$\begin{aligned} x_j &= A_j x_2 - B_j x_1 \\ &= (1+\omega)(A_{j-1}x_2 + B_{j-1}x_1) - \omega(A_{j-2}x_2 + B_{j-2}x_1) \\ &= (1+\omega)x_{j-1} - \omega x_{j-2}. \end{aligned}$$

□

如果 Θ 由三个元素构成，那么由定理 1.3 还可推出，系统进行 Θ-相位恢复的能力与 Θ中的具体元素无关，只取决于集合的基数。在这一特殊情形下，我们得到以下刻画，它将在第 5.2 节中用于研究 $\mathbb{C}^d$中的系统无法进行 Θ-相位恢复的情形

推论 3.1. 设 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\} \subseteq \mathbb{T}$ 由两两不同的元素构成。那么$\mathbf{G} \subseteq H$无法进行 Θ-相位恢复，当且仅当存在$\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3 \subseteq \mathbf{G}$ 满足$\mathbf{G}_1 \cup \mathbf{G}_2 \cup \mathbf{G}_3 = \mathbf{G}$ 且 x_1、 x_3、 $x_3 \in H$ 使得

(1) $0 \neq x_j \in \mathbf{G}_j^{\perp}$对于 $j = 1$、2、3，*(2)* x_1 和 x_2 线性无关，*(3)* $x_3 \in$ 张成空间 $\{x_1, x_2\}$。

证明。 正向蕴含是定理 1.3 的直接推论，其中Θ 由三个元素组成。因此，只需证明逆命题。

为此，假设存在一个覆盖 $\{\mathbf{G}_1,\mathbf{G}_2,\mathbf{G}_3\}$ 的$\mathbf{G}$ ，以及满足条件 (1)、(2) 和 (3) 的 $x_1, x_2, x_3 \in H$。

若 $x_3 = ax_1$ 对某个 $a \neq 0$成立，则$\mathbf{G}$ 不满足补性质，因为$\mathbf{S} = \mathbf{G}_2$和$\mathbf{G} \setminus \mathbf{S} = \mathbf{G}_1 \cup \mathbf{G}_3$ 都不完备。因此，根据命题 1.2，$\mathbf{G}$ 不满足 2-PR，进而根据引理 2.2，它也不满足 Θ-PR。

与前面类似的论证表明，若 $x_3 = ax_2$ 对某个 $a \neq 0$成立，则$\mathbf{G}$不满足 Θ-PR。

剩下需要考虑的是 $x_3 = ax_1 + bx_2$ 对某个 $a, b \neq 0$成立的情形。在这种情况下，通过以下方式定义辅助向量 x_1', x_2', x_3'

$$x_1' = -a\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_3 - \theta_1}x_1, \quad x_2' = b\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_3 - \theta_2}x_2, \quad x_3' = x_3.$$

那么，对于每个 $j \in \{1, 2, 3\}$，都有 $0 \neq x_j' \in \mathbf{G}_j^{\perp}$。此外， x_1' 和 x_2' 线性无关。最后

$$\frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1}x_2' - \frac{\theta_3 - \theta_2}{\theta_2 - \theta_1}x_1' = ax_1 + bx_2 = x_3'.$$

因此，定理 1.3 表明 $\mathbf{G}$ 不满足 Θ-相位恢复。 □

由于后一个推论表明，对于三元素集合 Θ ，系统进行 Θ-相位恢复这一性质与 Θ 中元素的选择无关，这启发了下面的定义；该定义可以看作是定义 2.10 的自然扩展。

定义 3.2。 我们称 $\mathbf{G} \subseteq H$ 满足 3-相位恢复，如果对于任意（从而对于所有）$\Theta \subseteq \mathbb{T}$（满足 $|\Theta| = 3$），它都满足 Θ-相位恢复。

一个自然的问题是：对于所有有限的 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$，这一趋势是否会继续。在第 4 节中，我们将证明，给定 Θ，$\Theta' \subseteq \mathbb{T}$ 满足 $|\Theta| = |\Theta'| = 4$ 时，只要 Θ 和 Θ' 具有相同的交比，满足 Θ-相位恢复与满足 Θ'-相位恢复这两个性质就是等价的。然而，在第 5.1 节中我们将看到，在不对 Θ 和 Θ' 作额外假设的情况下，这种等价性通常并不成立。

3.3. **指数系统**。本小节旨在证明定理 1.5 和定理 1.6。为了证明这些结论，我们先给出一些预备定义和观察。

我们将函数 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 的傅里叶变换 $\mathcal{F}f$ 定义为 $\cap L^2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}f(s) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi ist}\,dt.$$

傅里叶变换 $\mathcal{F}$ 以通常的方式从 $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 延拓为 $L^2(\mathbb{R})$ 上的酉算子。对于 $a > 0$，我们令 PW_a 表示由满足以下条件的函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 构成的 Paley-Wiener 空间：f 的傅里叶变换的支撑包含于 $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$,

$$PW_a := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \operatorname{supp}(f) \subseteq \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \right\}.$$

我们还定义缩写 $PW := PW_1$。 f， g的卷积定义为 y

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)\,dy,$$

只要该表达式有定义即可。回顾一下，卷积的支撑满足以下关系

$$\mathrm{supp}(f * g) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g))$$

其中 cl(X) 表示集合 X的闭包。

为了证明定理 1.5，我们先对命题 1.4 作一个便于处理的改述。命题 1.4 指出，对指数系统的 Θ-相位恢复问题，可归结为研究 Paley-Wiener 空间中函数的零点集。

推论 3.3。设 $\Theta = \{e^{2\pi i k/n} : \ k = 0, \dots, n-1\}$，设 $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$，并设 $a > 0$。那么 $E(\Lambda)$ 在 $L^2[0,a]$ 中不满足 Θ- 相位恢复，当且仅当存在 Λ 的一个覆盖 $\{\Lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 以及满足下列条件的函数 $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq PW_a \setminus \{0\}$

(1) x_j 在 Λ_j上为零；*(2)* x_1 和 x_2 线性无关；*(3)* 对每个 $j \geq 3$，都有 $x_j = (1 + e^{\frac{2\pi i}{n}})x_{j-1} - e^{\frac{2\pi i}{n}} x_{j-2}$。

证明。只需考虑 $a = 1$ 的情形，因为一般情形可由缩放得到。

我们首先注意到，$E(\Lambda)$ 在 $L^2[0,1]$ 中具有 Θ-相位恢复性质，当且仅当 $E(\Lambda)$ 在 $L^2[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 中具有 Θ-相位恢复性质。根据命题 1.4，只需证明存在 Λ 的一个覆盖 $\{\Lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 及满足 (1)、(2) 和 (3) 的函数 $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq PW \setminus \{0\}$，等价于存在 $E(\Lambda)$ 的一个覆盖 $\{\mathbf{G}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 及一个序列$\{y_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq L^2[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$满足

(1) 对每个 $j \in \mathbb{N}$，$0 \neq y_j \in \mathbf{G}_j^{\perp}$；(2) y_1 和 y_2 线性无关；(3) 对每个 $j \geq 3$，向量 y_j 由二阶递推关系 $y_j = (1+\omega)y_{j-1} - \omega y_{j-2}$ 给出，其中 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$。

为此，我们注意到函数 $x_j \in PW$ 对每个 $\lambda \in \Lambda$ 都满足关系

$$x_j(\lambda) = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}x_j(\lambda) = \langle \mathcal{F}^{-1}x_j, e_\lambda \rangle. \tag{3.3}$$

由于 $\mathcal{F}$ 是酉的，我们有：$x_j \neq 0$ 当且仅当 $\mathcal{F}^{-1}x_j \neq 0$。定义$y_j$: $= \mathcal{F}^{-1}x_j$，并且$\mathbf{G}j := E(\Lambda_j)$ 蕴含 x_j 在 Λ_j 上消失，当且仅当$y_j \in \mathbf{G}_j^{\perp}$。此外，supp($y_j$) $\subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$，因此每个 y_j 都可以与 $L^2[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 中的一个元素等同。关于 Λ 的覆盖语言中的性质 (2) 和 (3) 等价于关于$E(\Lambda)$ 的覆盖语言中的性质 (2) 和 (3)，这一事实直接由y_j 和$\mathbf{G}j$的定义得出。□

我们现在可以推导定理 1.5

定理 *1.5* 的证明。不失一般性，我们可以假设 $a = 1$。一般结果可通过缩放得到。此外，我们可以假设 $n \geq 2$，因为情形$n = 1$ 是经典傅里叶唯一性定理的推论。

充分性。对于 $\lambda \in \Lambda$，按通常方式定义 $e_\lambda(x) = e^{2\pi i \lambda x}$。令 $f,\ h \in L^2[0,1]$，并假设对于每个 $\lambda \in \Lambda$，都存在 $\theta_\lambda \in \Theta$ 使得

$$\langle f, e_\lambda \rangle = \theta_\lambda \langle h, e_\lambda \rangle. \tag{3.4}$$

根据傅里叶变换的定义可知，对于 $\lambda \in \Lambda$，恒等式 (3.4) 等价于以下性质：

$$\mathcal{F}(f - \theta_\lambda h)(\lambda) = 0.$$

现在令 $\omega_j = e^{2\pi ij/n}$，并为 $j \in \{0,\dots,n-1\}$ 定义函数 $p_j \in L^2[0,1]$ 如下：

$$p_j \coloneqq f - \omega_j h.$$

将每个 p_j 视为 $L^2(\mathbb{R})$ 中的函数，其支撑包含于 $[0,1]$。根据我们对 f，h 的假设，我们有

$$\prod_{j=0}^{n-1} \mathcal{F}(p_j)(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \Lambda.$$

利用傅里叶变换的卷积定理，后一个关系等价于以下性质：n重卷积

$$p \coloneqq p_1 * \cdots * p_n$$

满足

$$\mathcal{F}p(\lambda) = \langle p, e_\lambda \rangle = 0, \quad \lambda \in \Lambda.$$

注意到 p 的支撑包含于

$$[0,1] + [0,1] + \cdots + [0,1] = [0,n],$$

此外，根据杨氏卷积定理，$p \in L^2[0,n]$。由于 $D(\Lambda) \geq n$，由傅里叶唯一性可得 $p = 0$。应用傅里叶变换可知，$\mathcal{F}p = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{F}p_j$恒等于零。由于 p_j具有紧支撑，每个因子 $\mathcal{F}p_j$ 都是解析函数。因此，其中一个因子必恒等于零，这意味着存在 $k \in \{0,\dots,n-1\}$ 使得 $p_k = f - \omega_k h = 0$。这表明 $E(\Lambda)$ 在 $L^2[0,1]$中具有 Θ-相位恢复性质。

必要性。设 Λ 是密度为 $D(\Lambda) < n$的格，即 $\Lambda = \alpha\mathbb{Z}$ 对某个$\alpha > n$成立。我们证明 $E(\Lambda)$ 在 $L^2[0,1]$中不具有 Θ-相位恢复性质。为此，我们证明推论 3.3 的假设均满足。

为此，我们对 $j = 0, ..., n-1$定义 $\Lambda_j = \alpha(n\mathbb{Z} + j)$，这意味着$\{\Lambda_j\}_{j=0}^{n-1}$ 是 Λ的覆盖。接下来，我们构造函数 x_j。具体而言，令

$$\xi \coloneqq \frac{1}{2n\alpha}.$$

由于 $2 \leq n < \alpha < \infty$，因此有 $0 < \xi < \frac{1}{2}$。此外，通过以下方式定义函数 S_j

$$S_j(x) = \sin\left(2\pi\xi x - \frac{j\pi}{n}\right), \quad j \in \{0,\dots,n-1\}.$$

显然，每个 S_j 在 Λ_j上都为零。利用三角恒等式

$$\sin(v - v') + \sin(v + v') = 2\sin(v)\cos(v'), \quad v, v' \in \mathbb{R},$$

并代入 $v = 2\pi\xi x - (j-1)\frac{\pi}{n}$和 $v' = \frac{\pi}{n}$，可得

$$S_j = 2\cos(\tfrac{\pi}{n})S_{j-1} - S_{j-2}, \quad j \geq 3$$

接下来，选择 $\Phi \in PW$，使得 $\hat{\Phi}$ 的支撑位于 $[-(\frac{1}{2} - \xi), \frac{1}{2} - \xi]$中，并且 $\Phi(0) \neq 0$。为了得到这样的函数，我们可以取满足以下条件的 $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$

$$\operatorname{supp}(\phi) \subseteq [-(\tfrac{1}{2} - \xi), \tfrac{1}{2} - \xi], \quad \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx \neq 0,$$

并定义 $\Phi \coloneqq \mathcal{F}^{-1}\phi$。由于正弦函数 S_j 可以写成一条直 r
指数函数 $e^{2\pi i\xi x}$ 与 $e^{-2\pi i\xi x}$的组合，

$$S_j(x) = Ce^{2\pi i\xi x} + C'e^{-2\pi i\xi x}, \quad C = -\frac{i}{2}\,e^{-\frac{ij\pi}{n}}, \quad C' = \frac{i}{2}\,e^{\frac{ij\pi}{n}},$$

由此可知，将 Φ 与 S_j 相乘会使 $\mathcal{F}(S_j\Phi)$的支撑平移 $\pm\xi$。结合这一点以及 Φ 的选取，可知 $S_j\Phi$ 是 PW的一个元素。此外， $S_j\Phi$ 不是零函数：若它为零，则两个解析函数 $Ce^{2\pi i\xi x}+C'e^{-2\pi i\xi x}$ 和 Φ 的乘积将恒等于零。由于 $\Phi\neq 0$，可知$Ce^{2\pi i\xi x}+C'e^{-2\pi i\xi x}$ 是零函数。利用复指数函数的线性无关性，得到 $C=C'=0$，这就导致了矛盾。

现在令 $\omega:=e^{\frac{2\pi i}{n}},\zeta:=e^{\frac{2\pi i}{2n}}$，并通过以下方式定义 $x_j\in PW$

$$x_j:=\zeta^j S_j\Phi.$$

于是 $x_j\neq 0$ 和 x_j 在 Λ_j 上消失。利用 S_j 的递推关系，直接计算可得

$$x_j=2\cos(\tfrac{\pi}{n})\zeta\cdot x_{j-1}-\zeta^2\cdot x_{j-2}. \tag{3.5}$$

由欧拉恒等式可得

$$2\cos(\tfrac{\pi}{n})\zeta=2\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}+e^{-i\frac{\pi}{n}}}{2}e^{\frac{2\pi i}{2n}}=1+\omega.$$

结合 $\zeta^2=\omega$，可将 (3.5) 改写为

$$x_j=(1+\omega)x_{j-1}-\omega x_{j-2}.$$

□

本小节的最终目标是证明定理 1.6。为此，我们将用到以下引理。

引理 3.4。对于 $v_1>v_2>0$ 和 $\beta\in\mathbb{R}$，定义

$$m(z):=e^{i\beta}\frac{z+iv_1}{z-iv_1}\frac{z-iv_2}{z+iv_2}.$$

那么 m 将实数轴映射到圆弧 $\{e^{it}:\ t\in[\beta-L,\beta+L]\}$上，其中 $L>0$ 由下式给出

$$L=4\arctan\sqrt{\frac{v_1}{v_2}}-\pi.$$

证明。固定 $x\in\mathbb{R}$。作为预备步骤，容易看出，对于每个 $v>0$，都有 $\frac{x+iv}{x-iv}\in\mathbb{T}$。将 $x+iv=re^{i\theta}$ 写成 $r=\sqrt{x^2+v^2}$ 和 $\theta=\arctan\frac{v}{x}$，可得

$$\frac{x+iv}{x-iv}=e^{2i\arctan(v/x)}.$$

考虑函数 $m(z)$，其定义如引理陈述所示。对 $v_1>v_2>0$ 使用预备步骤可得

$$m(x)=e^{i(\beta+2\arctan(v_1/x)-2\arctan(v_2/x))}.$$

因此

$$\arg m(x)=\beta+2\arctan\frac{v_1}{x}-2\arctan\frac{v_2}{x}.$$

现在定义

$$\Phi(x)=2\arctan\frac{v_1}{x}-2\arctan\frac{v_2}{x}.$$

我们还令 $\Phi(0):=0$。于是， Φ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，并且当 $|x|\to\infty$ 时， $\Phi(x)\to 0$。只需证明 $\max_{x\in\mathbb{R}}\Phi(x)=L$ 且 $\min_{x\in\mathbb{R}}\Phi(x)=-L$，由此我们

可以推出 $\Phi(\mathbb{R}) = [-L, L]$，因此 $\arg(m(x)) = [\beta - L, \beta + L]$。直接计算可得

$$\frac{d}{dx}\Phi(x) = \frac{2\,(v_1 - v_2)\,(v_1 v_2 - x^2)}{(x^2 + v_1^2)(x^2 + v_2^2)}.$$

由于 $v_1 > v_2 > 0$，可知 Φ 在 $(-\sqrt{v_1 v_2},\ \sqrt{v_1 v_2})$ 上严格递增，并在 $(-\infty,\ -\sqrt{v_1 v_2})$ 和 $(\sqrt{v_1 v_2},\ \infty)$ 上分别严格递减。此外，Φ 的唯一临界点为 $\pm\sqrt{v_1 v_2}$。由于 Φ 是奇函数，可知 $\sqrt{v_1 v_2}$ 取得 Φ 的全局最大值，而 $-\sqrt{v_1 v_2}$ 取得其全局最小值。

在 $x = \sqrt{v_1 v_2}$ 处，我们有

$$\Phi\left(\sqrt{v_1 v_2}\right) = 2\left(\arctan\sqrt{\frac{v_1}{v_2}} - \arctan\sqrt{\frac{v_2}{v_1}}\right).$$

对于 $\sigma > 0$，恒等式 $\arctan\sigma + \arctan(1/\sigma) = \pi/2$ 给出

$$\arctan\sqrt{\frac{v_1}{v_2}} - \arctan\sqrt{\frac{v_2}{v_1}} = 2\arctan\sqrt{\frac{v_1}{v_2}} - \frac{\pi}{2},$$

因此

$$\Phi\left(\sqrt{v_1 v_2}\right) = 4\arctan\sqrt{\frac{v_1}{v_2}} - \pi = L.$$

由奇函数性质，$\Phi(-\sqrt{v_1 v_2}) = -L$，由此可得 $\Phi(\mathbb{R}) = [-L, L]$，如所述。 □

作为定理 1.6 证明的第二个要素，我们需要经典的 Paley-Wiener 定理。该定理指出，函数 f 属于 Paley-Wiener 空间 PW，当且仅当 $f \in L^2(\mathbb{R})$，并且 f 是某个整函数 F 在 $\mathbb{R}$ 上的限制：$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$，其指数型至多为 π [55]。请回忆，后者意味着对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $C_\varepsilon > 0$，使得

$$|f(z)| \le C_\varepsilon e^{(\pi+\varepsilon)|z|}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{3.6}$$

我们还注意到，利用 $\Lambda = \mathbb{R}$ 下的方程 (3.3)，定理 1.6 可以改写如下，这种表述在证明时会更加方便。具体而言，Θ是全不连通的，当且仅当对每个 f，$h \in PW$，以下蕴含关系成立：

$$\forall t \in \mathbb{R}\ \exists \theta_t \in \Theta \text{ such that } f(t) = \theta_t h(t) \implies f = \theta h \text{ for some } \theta \in \Theta. \tag{3.7}$$

定理 *1.6* 的证明。**必要性**。假设 Θ 不是全不连通的。我们构造 f，$h \in PW$，使得蕴含关系 (3.7) 不成立。

为此，注意到如果 Θ 不是全不连通的，那么存在 $\tilde{\varepsilon} > 0$ 和 $\beta \in \mathbb{R}$，使得

$$A \coloneqq \{e^{i(\tilde{\beta}+t)} : t \in [-\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}]\} \subseteq \Theta. \tag{3.8}$$

我们选择 $v_1 > v_2 > 0$，使得

$$0 < 4\arctan\frac{v_1}{v_2} - \pi \le \tilde{\varepsilon}.$$

设 $s \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 是一个支撑于 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 的光滑函数，并令 $S \coloneqq \mathcal{F}^{-1}s$。那么 S 是一个属于 PW 的施瓦茨函数。特别地，S 可解析延拓至复平面。现在定义

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = (z + iv_1)(z - iv_2)S(z).$$

显然，将 f 视为定义在实数轴上的函数时，它仍然是一个施瓦茨函数。此外，前因子 $P(z) = (z + iv_1)(z - iv_2)$ 不会影响

PS的指数型，因为 PS和 S都满足 Groth 估计式 (3.6)。根据 Paley-Wiener 定理，我们有 $f \in PW$。令 $m(z)$ 为引理 3.4 中满足 $\varepsilon := \tilde{\varepsilon}$ 和 $\beta := \beta$ 的函数 $\tilde{}$。注意， f 具有这样的性质： m 的极点集合是 f 的零点集合的子集。因此，我们可以通过以下方式定义第二个施瓦茨函数 h

$$h(z) := \frac{1}{m(z)} f(z) = e^{-i\beta}(z - iv_1)(z + iv_2)S(z).$$

对函数 f 采用类似的论证，可得 $h \in PW$。因此 ，
f 和 h 通过以下关系相联系：

$$f = mh$$

由引理 3.4 和包含关系 (3.8)，可得对于每个 $t \in \mathbb{R}$， $m(t) \in \Theta$ 。由于商 f/h 不是常函数，因此对于每个 $\theta \in \Theta$， $f \neq \theta h$ 。这就证明了该陈述的必要性部分。

充分性。 接下来要证明，若 Θ 是全不连通的，则 (3.7) 成立。因此，设 f, $h \in PW$，使得对每个 $t \in \mathbb{R}$，都存在 $\theta_t \in \Theta$ 满足

$$f(t) = \theta_t h(t). \tag{3.9}$$

我们需要证明存在 $\theta \in \Theta$ 使得 $f = \theta h$。

如果 $f = 0$，那么 $h = 0$，于是结论得证。如果 f 不恒等于零，那么存在 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $f(t) \neq 0$。由于 f 可延拓为整函数，存在一个以 t 为中心的开圆盘 $D \subseteq \mathbb{C}$，使得 f 在 D上不为零。

由于 $f(t) \neq 0$，由（3.9）可得 $h(t) \neq 0$。因此，存在另一个以 t 为中心的圆盘 $D' \subseteq \mathbb{C}$，使得 h 在 D' 上不为零（圆盘 D' 可能比 D更小，因为 h 可能在 $D \setminus \mathbb{R}$中有一个零点）。特别地，f， h 在交集上都不为零

$$D'' := D \cap D',$$

并且商 f/h 在 D''上是全纯的。

现在我们将证明 f/h 在 $D'' \cap \mathbb{R}$上必为常数。反设并非如此。 f/h 在 $D'' \cap \mathbb{R}$ 上的连续性（ $D'' \cap \mathbb{R}$ 是真区间，因而是连通集）意味着， $D'' \cap \mathbb{R}$ 在 f/h 下的像必为连通集，并且包含一条真弧。由于

$$\left\{ \frac{f(t)}{h(t)} : t \in D'' \cap \mathbb{R} \right\} = \{\theta_t : t \in D'' \cap \mathbb{R}\} \subseteq \Theta,$$

由此可知， Θ 包含一个连通集，这与关于Θ的假设矛盾。

因此， f/h 在 $D'' \cap \mathbb{R}$上为常数。由 (3.9) 可知，存在 $\theta \in \Theta$使得

$$\frac{f(t)}{h(t)} = \theta, \quad t \in D'' \cap \mathbb{R}.$$

因此，对于所有 $t \in D'' \cap \mathbb{R}$， $f(t) = \theta h(t)$。由于 $D'' \cap \mathbb{R}$ 是一个真区间，且 f， h 在整个复平面上都是全纯函数，根据全纯函数唯一性定理可知 $f = \theta h$。□

4. Möbius invariance and cross ratios

本节旨在建立射影几何中的经典主题——尤其是莫比乌斯变换和交比——与 Θ-相位恢复理论之间的系统联系。具体而言，我们将说明莫比乌斯变换在分析 Θ-相位恢复时发挥着核心作用。莫比乌斯变换和交比都是证明推论 4.1 和 5.3 以及命题 1.11 的重要工具。

4.1. M¨obius 不变性。回忆一下，对于一个具有复数项的可逆矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a，b，c，$d \in \mathbb{C}$，与 A 对应的 M¨obius 变换定义为

$$M_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

令 $\mathbb{U}(1,1)$ 表示所有矩阵 $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ 组成的群，使得

$$A^* J A = J, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

若 $A \in \mathbb{U}(1,1)$，则 $M_A \in \mathrm{Aut}(\mathbb{T})$，其中 $\mathrm{Aut}(\mathbb{T})$ 表示 $\mathbb{T}$ 上所有双射组成的群。反之，每个 M¨obius 变换 $M \in \mathrm{Aut}(\mathbb{T})$ 都来自 $A \in \mathbb{U}(1,1)$，但相差一个模为一的标量 A Chapter 10.4] 的乘法。对于给定的集合 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$ 和 M¨obius 变换 $M \in \mathrm{Aut}(\mathbb{T})$，我们将 Θ 在 M 下的像记为 $M(\Theta)$，即 $M(\Theta) = \{M(\theta)\colon\ \theta \in \Theta\}$.现在我们准备证明定理 1.7。

定理 1.7 的证明。 蕴含关系 (1) $\Longrightarrow$ (2) 和 (3) $\Longrightarrow$ (1) 来自恒等映射是一个莫比乌斯变换这一事实。因此，只要证明 (2) $\Longrightarrow$ (3)，这三个命题就等价了。

我们通过逆否法证明 (2) $\Longrightarrow$ (3)：假设存在一个莫比乌斯变换 $M \in \mathrm{Aut}(\mathbb{T})$，使得 $\mathbf{G}$ 不满足 $M(\Theta)$-相位恢复。对于固定的 $M' \in \mathrm{Aut}(\mathbb{T})$，我们将证明 $\mathbf{G}$ 也不满足 $M'(\Theta)$-相位恢复。

由 $M(\Theta)$-相位恢复不成立及引理 2.3 可知，我们可以找到线性无关的$f, h \in H$使得对每个 $g \in \mathbf{G}$，都存在 $\theta_g \in M(\Theta)$ 满足

$$\langle f, g\rangle = \theta_g \langle h, g\rangle.$$

令 $M_0 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{T})$ 为如下形式的莫比乌斯变换

$$M_0(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

其中 $ad - bc \neq 0$ (M_0 稍后指定)。通过以下方式定义 $x, y \in H$

$$x = af + bh, \quad y = cf + dh.$$

由于 f 和 h 线性无关，且由于 $ad - bc \neq 0$，因此 x和 y 线性无关。我们将证明，对于每个 $g \in \mathbf{G}$，都存在$\theta_g \in (M_0 \circ M)(\Theta)$，使得

$$\langle x, g\rangle = \theta_g \langle y, g\rangle.$$

固定 $g \in \mathbf{G}$。若 $\langle h,\ g\rangle = 0$，则还有 $\langle f,\ g\rangle = 0$，因此 $\langle x,\ g\rangle = 0 = \theta_g \langle y,\ g\rangle$ 对任意 $\theta_g \in (M_0 \circ M)(\Theta)$ 均成立。设 $\langle f,\ g\rangle$，$\langle h,\ g\rangle \neq 0$。那么该商

$$\frac{\langle f, g\rangle}{\langle h, g\rangle}$$

是单位圆上的一个定义良好的复数，它满足

$$M_0\Big(\frac{\langle f,g\rangle}{\langle h,g\rangle}\Big) = \frac{a\frac{\langle f,g\rangle}{\langle h,g\rangle}+b}{c\frac{\langle f,g\rangle}{\langle h,g\rangle}+d} = \frac{a\langle f,g\rangle + b\langle h,g\rangle}{c\langle f,g\rangle + d\langle h,g\rangle} = \frac{\langle x,g\rangle}{\langle y,g\rangle}.$$

因此，我们得到

$$\frac{\langle x,g\rangle}{\langle y,g\rangle} = M_0(\theta_g) \in (M_0\circ M)(\Theta).$$

由于 x, y线性无关，因此$\mathbf{G}$ 不满足$(M_0\circ M)(\Theta)$-相位恢复。由于M_0是任意的，取 $M_0 := M'\circ M^{-1}$可推出$\mathbf{G}$ 不满足 $M'(\Theta)$-相位恢复。□

4.2. **与交比的关系**。 我们的下一个目标是建立Θ-相位恢复与射影不变量之间的关系。为此，我们先回顾一些关于交比的基本事实。对于两两不同的 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$，交比定义为

$$\mathrm{CR}(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}.$$

众所周知，交比在莫比乌斯变换下保持不变，也就是说，对于任意莫比乌斯变换 M 以及任意两两不同的 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$，都有

$$\mathrm{CR}(M(z_1), M(z_2); M(z_3), M(z_4)) = \mathrm{CR}(z_1, z_2; z_3, z_4).$$

最后，当且仅当 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ 是同一个圆或直线上的四个不同点时，交比CR(z_1, z_2; z_3, z_4)为实数。交比可用于判定两个四元组是否通过莫比乌斯变换相关：若 $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\} \subseteq \mathbb{T}$ 和 $\{\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3, \theta'_4\} \subseteq \mathbb{T}$ 是两个四元组，则

$$\mathrm{CR}(\theta_1, \theta_2; \theta_3, \theta_4) = \mathrm{CR}(\theta'_1, \theta'_2; \theta'_3, \theta'_4)$$

当且仅当存在一个 Möbius 变换 $M \in \mathrm{Aut}(\mathbb{T})$，使得 $M(\theta_j) = \theta'_j$对每个 $j \in \{1,2,3,4\}$ 都成立（显式证明可参见例如 [32]）。现在我们准备证明以下命题。

推论 4.1. 设 H 为希尔伯特空间，设 $\mathbf{G} \subseteq H$，且令 $\Theta, \Theta' \subseteq \mathbb{T}$ 满足$|\Theta| = |\Theta'| = 4$。若 交比(Θ) =交比(Θ')，则 $\mathbf{G}$ 具有 Θ-相位恢复，当且仅当 $\mathbf{G}$ 具有Θ'-相位恢复。

证明. 假设 $\Theta, \Theta' \subseteq \mathbb{T}$ 满足交比(Θ) = 交比(Θ')。这意味着存在一个 Möbius 变换 $M \in \mathrm{Aut}(\mathbb{T})$，使得 $M(\Theta) = \Theta'$。由定理 1.7 可知，$\mathbf{G}$ 具有 Θ-相位恢复，当且仅当 $\mathbf{G}$ 具有 Θ'-相位恢复。□

例 4.2. 后一推论中的逆命题通常并不成立。事实上，任取一个能够进行相位恢复的系统 $\mathbf{G}$。根据引理 *2.2*，这样的 $\mathbf{G}$对任意 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$ 都能进行 Θ-相位恢复。特别地，我们可以任取满足 $|\Theta| = |\Theta'| = 4$ 且 交比(Θ) $\neq$交比(Θ') 的 Θ、$\Theta' \subseteq \mathbb{T}$。

5. Θ-PR IN $\mathbb{C}^d$

本节研究有限维希尔伯特空间 $H = \mathbb{C}^d$ 中的 Θ-相位恢复。注意，如果 $d = 1$，那么对于任意 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$，$\mathbf{G}$ 具有 Θ-相位恢复，当且仅当 $\mathbf{G} \neq \{0\}$。因此，我们将注意力限制在 $d \geq 2$ 的情形。

5.1. Θ 中的-相位恢复 $\mathbb{C}^2$。可以分析 Θ-相位恢复的第一个非平凡情形是空间 $\mathbb{C}^2$。在这种情况下，所谓的 $4d-4$ 猜想已知成立：存在能够在 $\mathbb{C}^2$ 中实现相位恢复的四向量系统，而少于四个向量的系统均无法实现 [11, 定理 10]。此外，由四个实现 $\mathbb{C}^2$ 中相位恢复的元素组成的完备系统集合已在 [27] 中得到明确刻画。文中证明，经过适当的线性坐标变换后，该问题可归结为研究如下形式的系统

$$\mathbf{G}(a,b,c)=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c\\1\end{pmatrix}\right\},$$

其中 a， b， $c\in\mathbb{C}$。此类系统无法实现相位恢复，可用几何方式刻画 [27, 定理 1.4]： $\mathbf{G}(a,\ b,\ c)$在 $\mathbb{C}^2$ 中无法实现相位恢复，当且仅当 a， b， c 共线。据我们所知， $\mathbb{C}^2$ 仍是唯一一个具有如此具体且完备的相位恢复刻画的希尔伯特空间。在本小节中，我们在 Θ-相位恢复的背景下研究系统$\mathbf{G}(a,\ b,\ c)$；值得注意的是，根据引理 2.4，将$\mathbf{G}\subseteq\mathbb{C}^2$ 的相位恢复研究化简为$\mathbf{G}(a,\ b,\ c)$形式系统所用的同一技巧，也适用于 Θ-相位恢复。我们还指出，无需对每个 $\Theta\subseteq\mathbb{T}$都刻画 Θ-相位恢复。事实上，直接根据相位恢复和 Θ-相位恢复的定义，我们得到如下结果。

引理 5.1. 设$\mathbf{G}\subseteq\mathbb{C}^d$ 满足 $|\mathbf{G}|=m$。那么，$\mathbf{G}$ 具有相位恢复性质，当且仅当对于每个 $\Theta\subseteq\mathbb{T}$，在 $|\Theta|\leq m$ 条件下，$\mathbf{G}$ 具有 Θ-相位恢复性质。

后一个引理实质上说明，要理解系统$\mathbf{G}$ 的相位恢复性质，只需研究 $|\Theta|\leq|\mathbf{G}|$的 Θ-相位恢复性质。由于本节将注意力限定于 $\mathbb{C}^2$ 以及系统 $\mathbf{G}(a,b,c)$，只需分析$\mathbf{G}(a,b,c)$ 何时对 $|\Theta|\leq4$ 具有 Θ-相位恢复性质。

命题 5.2. 设 $a,b,c\in\mathbb{C}$。则有以下结论：

(1) $\mathbf{G}(a,b,c)$ 不具有2-相位恢复性质，当且仅当 $a=b=c$。*(2)* $\mathbf{G}(a,b,c)$ 不具有3-相位恢复性质，当且仅当 $a=b$或 $b=c$，或 $a=c$。*(3)* $\mathbf{G}(a,b,c)$ 不具有 Θ-相位恢复性质，且 $|\Theta|=4$，当且仅当 $a=b$或 $b=c$，或 $a=c$，或存在一个$(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$ 的排列 Θ，使得

$$\frac{c-a}{b-a}=\overline{\mathrm{CR}(\theta_1,\theta_2;\theta_3,\theta_4)}.$$

证明。(1). 根据命题 1.2，只需证明 $\mathbf{G}$ 不满足补性质，当且仅当 。 - 不满足补性质，当且仅当 $a=b=c$。

假设 $\mathbf{G}$ 不满足补性质。我们可以找到 $\mathbf{S}\subseteq\mathbf{G}$，使得 $\mathbf{S}$ 和$\mathbf{G}\setminus\mathbf{S}$ 都不完备。快速排除各种可能情况后可知，唯一可能的情形是 $\mathbf{S}=\{(1,0)\}$ 且 $\mathbf{G}\setminus\mathbf{S}=\{(a,1),(b,1),(c,1)\}$。由于 $\mathbf{G}\setminus\mathbf{S}$ 不完备，因此必有 $a=b=c$。

若 $a=b=c$，则 $\mathbf{S}=\{(1,0)\}$ 不满足补性质。

(2). 我们将使用推论 3.1 中的刻画。假设 $a=b$。考虑 $\mathbf{G_1}=\{(1,0)\}$、$\mathbf{G_2}=\{(a,1),(b,1)\}=\{(a,1)\}$ 以及 $\mathbf{G_3}=\{(c,1)\}$。取 $x_1=(0,1)$、$x_2=(1,-a)$ 和 $x_3=(1,-c)$，可得 $x_j\in\mathbf{G}_j^{\perp}\ \text{for}\ j=1,2,3$。此外，由于 $x_j\in\mathbb{C}^2$，系统 $x_3=Ax_1+Bx_2$有一个非零解 (A,B)。当 $a=c$ 或 $b=c$ 时的情形可类似证明。

现在，假设存在一个覆盖$\mathbf{G}_1$,$\mathbf{G}_2$,$\mathbf{G}_3$ 或$\mathbf{G}$，以及非零的 $x_j\in\mathbf{G}_j^{\perp}$，满足$x_1$，$x_2$线性无关且 $x_3\in$张成空间$\{x_1,x_2\}$。特别地，这意味着

$\mathbf{G}_j$ 对于 $j=1$，2，3是不完备的。由于集合 {(1，0)，(a，1)}、{(1，0)，(b，1)} 和{(1，0)，(c，1)} 总是完备的，因此三个子集均不完备时，唯一的可能性是$\mathbf{G}_1 = \{(1，0)\}$。例如，若$\mathbf{G}_2 = \{(a，1)，(b，1)\}$，则$\mathbf{G}_2$ 的不完备性给出 $a=b$。其他情况则给出 $a=b$ 或 $a=c$。

(3). 固定 Θ，其中 $|\Theta|=4$。我们首先进一步化简这个问题。考虑可逆矩阵 $T\in\mathbb{C}^{2\times 2}$ 以及常数 p，$q\in\mathbb{C}$，定义如下

$$T=\begin{pmatrix}1 & -a\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad p=b-a,\quad q=c-a.$$

T 作用下 $\mathbf{G}(a，\ b，\ c)$ 的像满足

$$T(\mathbf{G}(a,b,c))=\tilde{\mathbf{G}}(p,q)\coloneqq\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}q\\1\end{pmatrix}\right\}=\{g_1,g_2,g_3,g_4\}.$$

˜根据引理 2.4，只需证明 $\mathbf{G}(p，\ q)$ 不满足 Θ-PR，当且仅当 $p=0$ 或 $q=0$ 或 $p=q$，或者存在 Θ 的一个排列 $(\theta_1，\ \theta_2，\ \theta_3，\ \theta_4)$，使得 $\mathrm{CR}(\theta_1，\ \theta_2;\ \theta_3，\ \theta_4)=\frac{q}{p}$。

˜对于正向蕴含，设 G 不满足 Θ-PR。若进一步有 $\mathrm{G}(p,q)$ 不满足˜3-PR，则根据第 (b) 部分，$p=0$ 或 $q=0$，或 $p=q$。设 $\mathrm{G}(p,q)$ 满足 3-PR。这意味着我们可以找到 f、$h\in H$ 以及 Θ 的一个排列 $(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$，使得对于$\theta\in\Theta$，$f\neq\theta h$，但对于 $j=1$、2、3、4，$\langle f$、$g_j\rangle=\theta_j\langle h$、$g_j\rangle$。根据 $\mathrm{G}(p,q)$ 的定义，我们得到

$$\begin{aligned}f_1&=\theta_1 h_1\\ f_2&=\theta_2 h_2\\ \overline{p}f_1+f_2&=\theta_3(\overline{p}h_1+h_2)\\ \overline{q}f_1+f_2&=\theta_4(\overline{q}h_1+h_2).\end{aligned}$$

重新整理后得到

$$\begin{aligned}\overline{p}h_1(\theta_1-\theta_3)+h_2(\theta_2-\theta_3)&=0\\ \overline{q}h_1(\theta_1-\theta_4)+h_2(\theta_2-\theta_4)&=0.\end{aligned}$$

注意，若 $h_1=0$ 且 $h_2\neq 0$，则得到 $f_1=0$，并且由于 $f_2=\theta_2 h_2$，可得 $f=\theta_2 h$，这与 Θ-PR 不成立相矛盾。因此 $h_1\neq 0$。类似的论证表明 $h_2\neq 0$。解这个方程组可得

$$\frac{q}{p}=\overline{\frac{(\theta_1-\theta_3)(\theta_2-\theta_4)}{(\theta_2-\theta_3)(\theta_1-\theta_4)}}=\overline{\mathrm{CR}(\theta_1,\theta_2;\theta_3,\theta_4)}.$$

˜对于逆命题，若 $p=0$ 或 $q=0$ 或 $p=q$，则根据 (b) 部分，$\mathbf{G}(p，\ q)$ 不满足 3-PR，因此根据引理 2.2，它满足 Θ-PR。假设 p，$q\neq 0$。设 Θ 的一个排列 $(\theta_1，\ \theta_2，\ \theta_3，\ \theta_4)$ 满足 $\frac{q}{p}=\mathrm{CR}(\theta_1，\ \theta_2;\theta_3，\ \theta_4)$。取

$$f=\begin{pmatrix}\frac{\theta_1}{\overline{p}}\\ -\theta_2\frac{\theta_1-\theta_3}{\theta_2-\theta_3}\end{pmatrix},\quad h=\begin{pmatrix}\frac{1}{\overline{p}}\\ -\frac{\theta_1-\theta_3}{\theta_2-\theta_3}\end{pmatrix}.$$

由于 Θ 中的元素两两不同，因此对于任意 $\theta\in\Theta$，都有 $f\neq\theta h$。接下来，我们立即得到，对于 $j=1$，有 $\langle f，\ g_j\rangle=\theta_j\langle h，\ g_j\rangle$。要证明 $\langle f，\ g_3\rangle=$

$\theta_3\langle h,\ g_3\rangle$ 我们首先注意到，直接计算可得

$$\theta_1-\theta_2\frac{\theta_1-\theta_3}{\theta_2-\theta_3}=\theta_3\Big(1-\frac{\theta_1-\theta_3}{\theta_2-\theta_3}\Big).$$

由此可得

$$\langle f,g_3\rangle=\theta_1-\theta_2\frac{\theta_1-\theta_3}{\theta_2-\theta_3}=\theta_3\Big(1-\frac{\theta_1-\theta_3}{\theta_2-\theta_3}\Big)=\theta_3\langle h,g_3\rangle.$$

最后，为了证明 $\langle f,\ g_4\rangle=\theta_4\langle h,\ g_4\rangle$ 我们注意到

$$\theta_2-\theta_1\frac{\theta_2-\theta_4}{\theta_1-\theta_4}=\theta_4\Big(1-\frac{\theta_2-\theta_4}{\theta_1-\theta_4}\Big).$$

利用假设 $\frac{q}{p}=$交比(Θ)，可得

$$\begin{aligned}\langle f,g_4\rangle&=\theta_1\frac{\overline{q}}{\overline{p}}-\theta_2\frac{\theta_1-\theta_3}{\theta_2-\theta_3}=\theta_1\frac{(\theta_1-\theta_3)(\theta_2-\theta_4)}{(\theta_2-\theta_3)(\theta_1-\theta_4)}-\theta_2\frac{\theta_1-\theta_3}{\theta_2-\theta_3}\\&=-\frac{\theta_1-\theta_3}{\theta_2-\theta_3}\Big(\theta_2-\theta_1\frac{\theta_2-\theta_4}{\theta_1-\theta_4}\Big)=-\frac{\theta_1-\theta_3}{\theta_2-\theta_3}\theta_4\Big(1-\frac{\theta_2-\theta_4}{\theta_1-\theta_4}\Big)\\&=\theta_4\Big(\frac{\overline{q}}{\overline{p}}-\frac{\theta_1-\theta_3}{\theta_2-\theta_3}\Big)=\theta_4\langle h,g_4\rangle.\end{aligned}$$

□

利用命题 5.2 中的刻画，并注意到单位圆上元素的交比是实数，我们得到另一种刻画 $\mathbb{C}^2$ 中相位恢复的方法，它等价于 [27,定理 1.4] 中得到的方法。

推论 5.3。设 $\mathbf{G}=\{(1,\ 0),\ (a,\ 1),\ (b,\ 1),\ (c,\ 1)\}\subseteq\mathbb{C}^2$。那么，$\mathbf{G}$ 不具有相位恢复性质，当且仅当 $b=a$ 或 $\frac{c-a}{b-a}\in\mathbb{R}$。

证明。**必要性**。假设 $\mathbf{G}$ 不满足相位恢复。根据相位恢复的定义，我们可以找到$f,\ h\in\mathbb{C}^2$和 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\}$ 来见证这一失败。由命题 5.2 的 (c) 部分可知，这必然导致 $a=b$ 或 $a=c,$ 或 $b=c$ （后两者给出 $\frac{c-a}{b-a}\in\mathbb{R}$），或 $\frac{c-a}{b-a}=$交比 (Θ)。由于交比 (Θ) 始终为实数，因此我们得到 $\frac{c-a}{b-a}\in\mathbb{R}$。

充分性。如果 $a=b$ $\mathbf{G}$ 不满足 3-PR，则根据命题 5.2 的 (b) 部分，它也不满足相位恢复，这由引理 2.2 得出。假设 $a\neq b$ 和 $\frac{c-a}{b-a}\in\mathbb{R}$。我们将证明可以找到$\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\}\subseteq\mathbb{T}$，使得 $\frac{c-a}{b-a}=$交比(Θ)，由此根据命题 5.2 的 (c) 部分可知 Θ- PR 失效，进而由引理 2.2 得出相位恢复失效。记作$r=\frac{c-a}{b-a}\in\mathbb{R}$。令 $\alpha\in[0,2\pi]$ 并选择 $\theta_1=1,\ \theta_2=e^{i\alpha},\ \theta_3=e^{i(\alpha+\pi)}$ 和$\theta_4=e^{i(\alpha+\pi/2)}$。我们将证明可以找到 α，使交比等于 r。直接计算可得

$$\begin{aligned}\frac{(\theta_2-\theta_4)(\theta_1-\theta_3)}{(\theta_1-\theta_4)(\theta_2-\theta_3)}&=\frac{(1-e^{i(\alpha+\pi/2)})(e^{i\alpha}-e^{i(\alpha+\pi)})}{(1-e^{i(\alpha+\pi)})(e^{i\alpha}-e^{i(\alpha+\pi/2)})}=\frac{1-ie^{i\alpha}}{1+e^{i\alpha}}\frac{2e^{i\alpha}}{e^{i\alpha}-ie^{i\alpha}}\\&=\frac{1-ie^{i\alpha}}{1+e^{i\alpha}}(1+i)=\frac{1-ie^{i\alpha}+i+e^{i\alpha}}{1+e^{i\alpha}}=1+i\frac{1-e^{i\alpha}}{1+e^{i\alpha}}\\&=1+i\Big(1-\frac{2e^{i\alpha}}{1+e^{i\alpha}}\Big)=1+\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\end{aligned}$$

由于函数 $1+\frac{\text{正弦}\alpha}{1+\text{余弦}\alpha}$ 是满射 $\mathbb{R}$，我们得到存在 α，使得交比(Θ) $=r$，从而完成证明。□

现在我们进一步仔细考察命题 5.2 中得到的刻画。当我们将定义系统 $\mathbf{G}(a,\ b,\ c)$ 的参数 $(a,\ b,\ c)$ 视为 $\mathbb{C}^3$ 中的一个点时，Θ-相位恢复失效可以用 $(a,\ b,\ c)$ 上明确的代数条件来描述。例如，$\mathbf{G}(a,\ b,\ c)$ 失去 2-PR，当且仅当 $(a,\ b,\ c)$ 属于多项式的零点集

$$P : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}, \quad P(x,y,z) = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2.$$

类似地，3-PR 可以通过以下对象的零点集得到完整刻画：

$$Q : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}, \quad Q(x,y,z) = (x-y)(y-z)(x-z).$$

对于 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ 的四点情形，定义

$$R_\Theta : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}, \quad R_\Theta(x,y,z) = (z-x) - \overline{\mathrm{CR}(\theta_1, \theta_2; \theta_3, \theta_4)} \cdot (y-x).$$

命题 5.2 表明，$\mathbf{G}(a,\ b,\ c)$ 不满足 Θ-PR，当且仅当 $(a,\ b,\ c)$ 属于 Q 或 R_Θ 的零点集。由于非平凡多项式的零点集是环境空间的真代数子集，其补集是 Zariski开集，因而稠密（且具有满勒贝格测度），并且在欧几里得拓扑下也是如此。这表明，对 $(a,\ b,\ c)$ 作“泛型”选择，意味着 $\mathbf{G}(a,\ b,\ c)$ 满足 Θ-PR。如果 Θ 恰好由两个元素组成，那么正如引言中所指出的，每个满火花系统都满足 Θ-PR，并且全火花系统再次构成一个非空扎里斯基开集。在下一节中，我们将精确说明这些观察结果，并证明在每个维数 d 中，满足 Θ-PR 的性质都是泛型成立的。

5.2. 在 Θ中，$\mathbb{C}^d$ 的 $d \geq 2$失效。为了精确表述一般情形下的 Θ-PR，我们首先确定 Θ-PR 失效的条件。定理 1.8 阐述了这一内容，其证明如下。

*定理 1.8 的证明。*首先，若 $m \leq d-1$，则 $\mathbf{G}$ 不是完备的。因此，引理 2.1 表明 $\mathbf{G}$ 不满足 Θ-PR。所以我们假设 $m \geq d$。

(1). 若 $d \leq m \leq 2d-2$，则令 $\mathbf{S} = \{g_1, ..., g_{d-1}\}$。由于 $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{G} \setminus \mathbf{S}$ 在 $\mathbb{C}^d$ 中都不可能完备，这表明 $\mathbf{G}$不具有补性质。因此，由命题 1.2 可知 $\mathbf{G}$ 不满足 2-PR，进而由引理 2.2 可知，对任意满足 $|\Theta| \geq 2$ 的 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$，它也不满足 Θ-PR。

(2). 假设 $m = 2d-1$，并考虑覆盖 $\mathbf{G}_1 = \{g_1, ..., g_{d-1}\}$、$\mathbf{G}_2 = \{g_d, ..., g_{2d-2}\}$ 和 $\mathbf{G}_3 = \{g_{2d-1}\}$。由于对每个 $j \in \{1,2,3\}$，$\mathbf{G}_j$ 都不是完备的，因此存在 x_1、x_2、$x_3 \in \mathbb{C}^d$，使得 $x_j \in \mathbf{G}_j^\perp$。

如果对于每一种这样的选择 x_1，x_2 都有 x_1 和 x_2 线性相关，那么 span($\mathbf{G}_1$) = span($\mathbf{G}_2$)，且这两个系统$\mathbf{S} = \mathbf{G}_1 \cup \mathbf{G}_2$ 和$\mathbf{G} \setminus \mathbf{S} = \mathbf{G}_3$都是不完备的。特别地，$\mathbf{G}$ 不具有补性质，因此不满足 2-PR。根据引理 2.2，这意味着$\mathbf{G}$ 对每个满足 $|\Theta| \geq 3$的 Θ都不满足 Θ-PR。

接下来考虑 x_1 和 x_2 可以选为线性无关的情形。在这种情况下，我们证明推论 3.1 的假设得到满足。为此，只需证明 $x_3 \in$ 张成$\{x_1, x_2\}$，或者等价地，证明方程有解

$$a\langle x, g_{2d-1}\rangle + b\langle y, g_{2d-1}\rangle = 0.$$

若 $\langle x,\ g_{2d-1}\rangle = 0$，我们可以取 $a = 1$和 $b = 0$。若 $\langle x,\ g_{2d-1}\rangle \neq 0$，那么选择 $b = 1$ 和 $a = -\frac{\langle y,\ g_{2d-1}\rangle}{\langle x,\ g_{2d-1}\rangle}$，即可。由推论 3.1可知，$\mathbf{G}$ 不满足 3-PR，因此根据引理 2.2，对于任意满足 $|\Theta| \geq 3$的 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$，它也不满足 Θ-PR。□

给定 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$，接下来我们探讨$\mathbf{G} \subseteq \mathbb{C}^d$ 满足$|\mathbf{G}| \geq 2d$时，可以预期什么。显然，并非所有这样的$\mathbf{G}$ 都能实现 Θ-PR，因此自然会想知道，对于满足 $|\mathbf{G}| \geq 2d$ 的$\mathbf{G}$ ，实现 Θ-PR的可能性有多大。我们借助Zariski拓扑框架来回答这个问题。为此，我们先介绍几个预备定义。

5.3. 一般的 Θ-相位恢复。 考虑空间 $\mathbb{C}^N$，其坐标为 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_N)$。变量 $x_1, \ldots\ldots, x_N$的多项式是单项式 $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}$的有限线性组合，其中 $\alpha = (\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$。令 $\mathcal{P}$表示 $x_1, \ldots\ldots, x_N$中所有多项式构成的集合。给定 $P \subseteq \mathcal{P}$，令

$$V(P) = \{x \in \mathbb{C}^N : p(x) = 0 \text{ for every } p \in P\}$$

表示 P中各元素的公共零点。若存在 $P \subseteq \mathcal{P}$ 使得 $C = V(P)$，则称子集 $C \subseteq \mathbb{C}^N$ 在 $\mathbb{C}^N$ 中是 Zariski闭的。若集合 $O \subseteq \mathbb{C}^N$ 是某个 Zariski闭集的补集，则称其为 Zariski开集。

根据定理 1.8，对于任意$|\Theta| \geq 3$，由 m 个元素构成的系统在 $\mathbb{C}^d$ 中实现 Θ-相位恢复，当且仅当 $m \geq 2d$。本节旨在证明，当 Θ 为有限集时，这个必要条件实际上在一般情形下也是充分的：在所有由 $m \geq 2d$ 个元素构成的系统中，实现 Θ-相位恢复的系统包含一个 Zariski开集。

为了证明后一个结果，我们需要以下组合引理。

引理 5.4. 设 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$和 $d \geq 2$。此外，设 $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{2d}) \in \Theta^{2d}$，并设 $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_t \geq 1$ 为 θ中不同取值的重数。若 $s_1 \leq d$，则存在指标集 $\{1, \ldots, 2d\}$ 的一个划分，使其由 d 个互不相交的数对组成，且每一对中的两个指标在 θ处取不同的值。形式化地，

$$\{1, \ldots, 2d\} = \{j_1, k_1\} \dot\cup \cdots \dot\cup \{j_d, k_d\}, \quad \theta_{j_r} \neq \theta_{k_r}, \quad r = 1, \ldots, d.$$

证明。 设重数 $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_t \geq 1$ 所对应的不同取值为 $a_1, \ldots, a_t$。对每个 $i \in \{1, ..., t\}$，我们用 A_i 表示来自 $\{1, ..., 2d\}$ 且取值为 a_i的指标集合，

$$A_i = \{j \in \{1, \ldots, 2d\} : \theta_j = a_i\}.$$

于是，对每个 $i \in \{1, \ldots, t\}$，都有 $|A_i| = s_i \leq d$。将 A_i 中的元素记为$a_{i,1}, \ldots a_{i,s_i}$。我们通过连接各块$A_i$，构造出 $\{1, \ldots, 2d\}$ 的一个排列：

$$(\pi(1), \ldots, \pi(2d)) = (a_{1,1}, \ldots, a_{1,s_1}, a_{2,1}, \ldots, a_{2,s_2}, a_{t,1}, \ldots, a_{t,s_t}).$$

因此，在这个列表中，具有相同 θ值的索引会连续出现，形成长度为 s_i的区块。现在，对每个 $r \in \{1, \ldots, d\}$，定义以下数对

$$\{j_r, k_r\} := \{\pi(r), \pi(r + d)\}.$$

后面的这些数对构成了 $\{1, \ldots, 2d\}$的一个划分。此外，每对中的两个元素具有不同的 θ值：固定 r，并假设 $\theta_{\pi(r)} = \theta_{\pi(r+d)} = a_i$。由于所有具有 a_i 值的索引都连续出现，后者意味着 $s_i \geq d + 1$，从而导致矛盾。□

注 5.5. 前一个引理也可以用匹配理论的语言给出另一种证明：若集合 A_i 按照引理 *5.4* 的证明中所述定义，则可以将它们视为附属于$(\theta_1, \ldots, \theta_{2d})$的所谓匹配类。此外，将指标集 $\{1, \ldots, 2d\}$ 视为有限无向图的顶点 V，并根据各类 A_i，在顶点集$V = \{1, \ldots, 2d\}$ 上定义一个完全多部图 $K_{s_1, \ldots, s_t}$。该图具有如下性质：

$\{u, v\}$ 是边，当且仅当 $\theta_u \neq \theta_v$。由此，引理 *5.4* 中所述划分的存在性等价于在 $K_{s_1,\ldots,s_t}$中存在所谓的完美匹配。*Tutte* 的 *1*-因子定理保证了这种匹配的存在 *[37, 42]*。

现在我们已准备好证明定理 1.9 的第一部分

定理 *1.9 (1)* 的证明。只需证明该陈述对 $m = 2d$ 成立。因为，如果 O 是 $\mathbb{C}^{d\times m}$ 的非空扎里斯基开子集，且每个系统 $\{g_j\}_{j=1}^m \simeq (g_1, \ldots, g_m) \in O$ 在 $\mathbb{C}^d$ 中都具有 Θ-相位恢复性质，那么对于每个 $b \in \mathbb{N}$，集合 $O \times \mathbb{C}^{d\times b}$ 都是 $\mathbb{C}^{d\times(m+b)}$ 的非空扎里斯基开子集，并且每个 $\{g_j\}_{j=1}^{m+b} \simeq (g_1, \ldots, g_{m+b}) \in O \times \mathbb{C}^{d\times b}$ 在 $\mathbb{C}^d$ 中都具有 Θ-相位恢复性质。

步骤 1：预备知识与方法。固定 $d \geq 2$，令 $m = 2d$，并令 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$ 为有限集。给定从 Θ 中选取的 m 个元素，我们将其视为向量 $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \Theta^m$。我们还将由 θ 的复-共轭元素组成的向量记为 $\bar{\theta} := (\bar{\theta}_1, \ldots, \bar{\theta}_m)$。此外，令 $D(\theta) = \mathrm{diag}(\theta) \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 表示一个对角矩阵，其元素为 θ。对于由 m 个向量组成的有限序列 $\{g_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{C}^d$，我们用 F 表示 $\mathbb{C}^{d\times m}$ 中以 g_j 为列的矩阵，

$$F = (g_1, \ldots, g_m) \in \mathbb{C}^{d\times m},$$

并令 x_{kl} 表示矩阵 F 的元素（即第 k 行第 l列中的 F 项）。接下来，对于 $f, h \in \mathbb{C}^d$ 我们通过下式定义列向量 $v_{f,\,h}$

$$v_{f,h} = \begin{pmatrix} \bar{f} \\ h \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2d}.$$

最后，我们通过下式定义矩阵 $M(\theta,\ F)$

$$M(\bar{\theta}, F) := \left(F^T, -D(\bar{\theta})F^T\right) \in \mathbb{C}^{m\times 2d},$$

其中，F^T表示 F的转置。

利用本步骤中引入的记号，我们注意到，F中的列满足 Θ-相位恢复，当且仅当对于每个 $f,\ h \in \mathbb{C}^d$ 以下蕴含关系成立：

$$M(\bar{\theta}, F)v_{f,h} = 0 \text{ for some } \theta \in \Theta^m, \text{then } f = \theta_0 h \text{ for some } \theta_0 \in \Theta.$$

目标是证明存在一个非空的扎里斯基开子集 $O \subseteq \mathbb{C}^{d\times m} \cong \mathbb{C}^{dm}$，使得其中每个 $F \in O$ 都满足 Θ-相位恢复。为此，我们首先注意到集合Θ^m 是有限的。因此，如果对于每个 $\theta \in \Theta^m$，存在一个非空的扎里斯基开子集 O_θ，使得其中每个 $F \in O_\theta$ 都满足

$$M(\bar{\theta}, F)v_{f,h} = 0 \text{ for } f, h \in \mathbb{C}^d \implies f = \theta_0 h \text{ for some } \theta_0 \in \Theta, \tag{5.1}$$

then

$$O = \bigcap_{\theta\in\Theta^m} O_\theta$$

则将具有所需性质（这里我们利用了有限个非空扎里斯基开子集的交仍是非空扎里斯基开子集这一事实）。

在证明的其余部分，我们旨在为每个 θ 构造一个满足以下性质的集合 O_θ t具有上述性质。

我们固定 $\theta \in \Theta^m$，并分别考虑两种情况。

步骤 2： θ**至少有** d**次重复**。设 $\theta = (\theta_1、\ldots..、\theta_m) \in \Theta^m$，并假设 θ 具有如下性质：存在一个坐标，至少重复

d次。因此，存在 $\theta_0 \in \Theta$和一个基数为$|I| = d$ 的指标集 $I \subseteq \{1, \dots, 2d\}$，使得

$$\theta_j = \theta_0, \quad j \in I.$$

定义 O_θ为全火花系统的集合（g_1，……，g_m）$\in \mathbb{C}^{d\times m}$。众所周知，这样的集合构成一个非空扎里斯基开集 [6]。那么，对于每个 $F \in O_\theta$和 f，$h \in \mathbb{C}^d$，关系

$$M(\bar{\theta}, F)v_{f,h} = 0$$

意味着

$$\langle f - \theta_0 h, g_j\rangle = 0, \quad j \in I.$$

全火花性质意味着系统 $\{g_j\}_{j\in I}$ 是 $\mathbb{C}^d$的一个张成集。因此，$f = \theta_0 h$。

步骤 3： θ **重复次数少于** d **次**。现在假设向量 θ 的每个坐标重复次数都少于 d次。定义

$$O_\theta = \{F \in \mathbb{C}^{d\times m} : M(\bar{\theta}, F) \text{ is invertible}\}.$$

我们注意到这个问题是适定的，因为 $M(\bar{\theta}, F) \in \mathbb{C}^{m\times 2d} = \mathbb{C}^{2d\times 2d}$。

我们需要证明 O_θ的三个性质：i) 每个 $F \in O_\theta$ 都满足 (5.1)；ii) O_θ是 Zariski开的；iii) O_θ 非空。

¯为证明 i)，注意若 $F \in O_\theta$，则 $M(\theta, F)v_{f,h} = 0$意味着 $v_{f,h} = 0$。等价地，$f = h = 0$。特别地，对于任意 $\theta_0 \in \Theta$，都有 $f = \theta_0 h$。

¯接下来证明 ii)。注意，矩阵 $M(\theta, F)$ 的每个元素都是 F 的元素的多项式（事实上，每个元素都是 F 中元素的线性函数）。¯由于多项式的复合仍是多项式，函数 $F \mapsto \det M(\theta, F)$ 是 F 的元素的多项式。将 O_θ 重写为

$$O_\theta = \{F \in \mathbb{C}^{d\times m} : \det M(\bar{\theta}, F) = 0\}^c,$$

这意味着 O_θ 是 Zariski开集。

剩下要证明 iii)，即 O_θ 非空。为此，我们通过显式构造来给出一个矩阵 F，使得 $M(\theta, F)$ 可逆。具体来说，设 $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_t$ 为 $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{2d})$ 中不同取值的重数。由于关于 θ 的附加假设，有 $s_1 \leq d - 1$。根据引理 5.4，存在一个划分

$$\{1, \dots, 2d\} = \{j_1, k_1\} \dot\cup \cdots \dot\cup \{j_d, k_d\},$$

使得对于每个 $r = 1$ $\theta_{j_r} \neq \theta_{k_r}, \dots, d$。现在我们根据后一个划分定义一个矩阵 F：对于每个 $r = 1, \dots, d$，令

$$g_{j_r} = g_{k_r} = e_r$$

其中，e_r 表示 $\mathbb{C}^d$ 中的第 r 个单位向量。在定义了 F 后，我们考察相应的矩阵 $M(\theta, F)$。回顾一下，$M(\theta, F)$ 定义为

$$M(\bar{\theta}, F) = \left(F^T, -D(\bar{\theta})F^T\right) = \begin{pmatrix} g_1^T & -\overline{\theta_1} g_1^T \\ \vdots & \dots \\ g_{2d}^T & -\overline{\theta_{2d}} g_{2d}^T \end{pmatrix}.$$

¯ $M(\theta, F)$ 的行列式在行重新排列下保持不变（相差 ± 1因子）。考虑行排序

$$j_1, k_1, j_2, k_2, \dots, j_d, k_d,$$

由此可知， $M(\theta,\ F)$ 的行列式等于.....的行列式，相差一个 ± 1 因子

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\overline{\theta_{j_1}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\overline{\theta_{k_1}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\overline{\theta_{j_2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\overline{\theta_{k_2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\overline{\theta_{j_d}} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\overline{\theta_{k_d}} \end{pmatrix}.$$

经过进一步重新排列（这次是对列进行排列）后可知， $M(\theta, F)$ 的 ± 1 行列式除以一个因子后等于该分块对角矩阵的行列式

$$\begin{pmatrix} 1 & -\overline{\theta_{j_1}} & & & & & \\ 1 & -\overline{\theta_{k_1}} & & & & & \\ & & 1 & -\overline{\theta_{j_2}} & & & \\ & & 1 & -\overline{\theta_{k_2}} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & -\overline{\theta_{j_d}} \\ & & & & & 1 & -\overline{\theta_{k_d}} \end{pmatrix}.$$

该分块对角矩阵的行列式等于该乘积的复共轭

$$\prod_{r=1}^{d} (\theta_{j_r} - \theta_{k_r})\,.$$

由于对于每个 $\theta_{j_r} \neq \theta_{k_r}$ $r = 1,\ldots,d$ 都成立，因此该乘积不会消失。因此，我们构造出了一个矩阵 F，使得 $\det M(\theta, F) \neq 0$。 consequently， $O_\theta \neq \varnothing$ ，且第 iii) 部分得证。□

接下来，我们证明定理 1.9 的第二部分。

定理 *1.9 (2)* 的证明。 令 $\{\theta_j : j \in \mathbb{N}\}$ 为 Θ 中元素的一个枚举。此外，通过以下方式定义由 Θ 的前 n 个元素组成的子集

$$\Theta_n \coloneqq \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}.$$

由于 Θ_n 是有限集，定理 1.9 的第一部分表明，存在一个非空的扎里斯基开子集 $O_n \subseteq \mathbb{C}^{d\times m}$，使得每个 $\{g_j\}_{j=1}^m \cong (g_1,\ \ldots\ldots,\ g_m) \in O_n$ 都具有 Θ_n-相位恢复性质。由于 $\mathbb{C}^N$ 中每个具有 $N \in \mathbb{N}$ 的非空扎里斯基开子集在欧几里得拓扑下都是开且稠密的，因此由贝尔纲定理可知，该交集

$$\mathcal{B} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$$

是一个 G_δ-集，在欧几里得拓扑下仍然稠密。特别地， $\mathcal{B}$ 非空。此外， $\mathcal{B}$ 具有满测度。事实上，令 μ 表示$\mathbb{C}^{d\times m} \cong \mathbb{C}^{dm}$上的勒贝格测度。由于对每个 $n \in \mathbb{N}$ ，都有 $\mu(O_n^c) = 0$, 因此

$$\mu(\mathcal{B}^c) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n^c\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(O_n^c) = 0.$$

现在令 $\{g_j\}_{j=1}^m \in \mathcal{B}$，并假设 f，$h \in \mathbb{C}^d$ 满足

$$\langle f, g_j\rangle = \theta_j \langle h, g_j\rangle, \quad j = 1, \dots, m,$$

对某些 θ_1、.....、$\theta_m \in \Theta$。当 n 足够大时，有 θ_1、.....、$\theta_m \in \Theta_n$。由于 $\{g_j\}_{j=1}^m$ 属于所有 O_n 的交集，因此它具有 Θ_n-相位恢复性质。因此，对某个 $\theta_0 \in \Theta_n \subseteq \Theta$，有 $f = \theta_0 h$，这表明 $\{g_j\}_{j=1}^m$ 具有 Θ-相位恢复性质。□

最后，结合定理 1.8 和定理 1.9，我们得到推论 1.10。

5.4. **Θ-相位恢复于 $\mathbb{C}^d$ 对于一个不可数的 Θ。** 本节的目标是证明命题 1.11。为此，我们先给出一些预备定义。

首先，回顾一下，凯莱变换是 M¨obius 变换

$$C(z) := i\,\frac{1+z}{1-z},$$

其逆变换为

$$C^{-1}(w) := \frac{w-i}{w+i}.$$

映射 C 是开单位圆盘 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$到上半平面 $\mathbb{H} := \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ w > 0\}$的双全纯映射。在 $\mathbb{D}$的边界 $\mathbb{T}$ 上，凯莱变换连续延拓为一个同胚

$$C : \mathbb{T} \to \hat{\mathbb{R}}, \qquad C(1) = \infty,$$

ˆ，将 $\mathbb{T}$ 映到扩˙充实数轴 $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$。直接计算可得，对于 $t \in (0, 2\pi)$,

$$C(e^{it}) = i\,\frac{1+e^{it}}{1-e^{it}} = -\cot\Big(\frac{t}{2}\Big) = \cot\Big(-\frac{t}{2}\Big). \tag{5.2}$$

因此，映射 $t \mapsto C(e^{it})$ 在 $(0, 2\pi)$ 上严格递增，并将此区间双射到 $\mathbb{R}$。特别地， $\mathbb{T}$ 的任意闭弧都经 C 映为 $\mathbb{R}$中的一个闭ˆ区间。进一步观察，对于任意 $b \in \mathbb{R}$，水平平移

$$T_b(w) := w + b$$

ˆ是 $\mathbb{H}$ 的一个自同构，且保持 $\mathbb{R}$，因此

$$M(z) := C^{-1}\big(C(z) + b\big)$$

给出 $\mathbb{D}$的一个自同构，其边界值构成 $\mathbb{T}$的一个 M¨obius 自同构，即 $M \in$Aut($\mathbb{T}$)。

我们已准备好证明以下引理。

引理 5.6. 设

$$A := \{e^{it} : t \in [\alpha, \alpha + \ell]\}, \qquad \mathcal{A} := \{e^{it} : t \in [\beta, \beta + L]\},$$

是 $\mathbb{T}$ 上的两条弧，端点分别为 α、$\beta \in \mathbb{R}$ 和 ℓ、$L \in$，位于$(0, 2\pi)$。那么存在一个莫比乌斯变换 $M \in \mathrm{Aut}(\mathbb{T})$，使得 $M(A) = \mathcal{A}$。

证明。 首先考虑 $\alpha = 0 = \beta$ 时的特殊情形。利用方程（5.2），对于$t \in (0, \ell]$，我们有

$$C(e^{it}) = -\cot\left(\frac{t}{2}\right) \in \mathbb{R}.$$

当 t 从 0 增至 ℓ 时，此表达式从 $-\infty$ 增至 $-\cot(\ell/2)$。结合 $C(1) = \infty$，可得

$$C(A) = \left\{ -\cot\left(\frac{t}{2}\right) : t \in (0, \ell] \right\} \cup \{\infty\}$$

ˆ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个闭区间，其有限端点为 $-\cot(\ell/2)$，无限端点为 ∞。现在令 $b \in \mathbb{R}$ 满足

$$-\cot\left(\frac{\ell}{2}\right) + b = -\cot\left(\frac{L}{2}\right),$$

ˆ 平移 $T_b(w) = w + b$ 是 $\mathbb{H}$ 的一个自同构，保持 $\mathbb{R}$ 不变，并将 $C(A)$ 的有限端点映射到

$$C(\mathcal{A}) = \left\{ -\cot\left(\frac{t}{2}\right) : t \in (0, L] \right\} \cup \{\infty\}.$$

因此我们得到

$$T_b\big(C(A)\big) = C(\mathcal{A}).$$

现在定义

$$F(z) := C^{-1}\big(C(z) + b\big)$$

那么 $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{T})$ 是一个满足 $F(A) = \mathcal{A}$ 的莫比乌斯变换。

现在考虑任意 $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ 的一般情形。旋转 $z \mapsto e^{i\beta} z$ 将$\{e^{it}$ 映射: $t \in [0, L]\}$ 到 $\mathcal{A}$，而旋转 $z \mapsto e^{-i\alpha} z$ 将 A 映射到 $\{e^{it} : t \in [0, \ell]\}$。因此，利用特殊情形中的 M¨obius 变换 $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{T})$，其复合变换

$$M(z) := e^{i\beta}\, F(e^{-i\alpha} z)$$

是 Aut(𝕋) 中的一个 M¨obius 变换，满足 $M(A) = \mathcal{A}$. □

前一个引理结合定理 1.7 表明，如果 Θ 和 Θ'是两个非平凡弧，那么G </style}进行 Θ-相位恢复，当且仅当G </style}进行 Θ'-相位恢复。在有限维希尔伯特空间的特殊情形下，我们有以下陈述。

命题 5.7。 假设 $\Theta \subseteq \mathbb{T}$ 包含一个非平凡弧。那么$\mathbf{G} = \{g_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{C}^d$ 进行 Θ-相位恢复，当且仅当它进行相位恢复。特别地，

$$\mathcal{N}(\mathbb{C}^d, \Theta) \geq 4d - 4 - 2\log_2(d).$$

证明。 根据引理 2.2，若$\mathbf{G}$ 具有相位恢复性质，则它也具有 Θ-相位恢复性质。剩下需要证明反向结论。为此，我们证明若$\mathbf{G}$ 不具有相位恢复性质，则它也不具有 Θ-相位恢复性质。

因此，设$\mathbf{G}$ 不具有相位恢复性质。于是，根据引理 2.3，存在一组线性无关的 $f, h \in \mathbb{C}^d$ 和 $\Theta' = \{\theta'_1, ..., \theta'_m\} \subseteq \mathbb{T}$，使得对任意 $j \in \{1, \ldots, m\}$，都有

$$\langle f, g_j \rangle = \theta'_j \langle h, g_j \rangle.$$

由于 Θ' 是 $\mathbb{T}$ 的有限子集，因此存在 $\mathbb{T}$ 的一个真弧 A，满足 $\Theta' \subseteq A$。由引理 2.2 可知，$\mathbf{G}$ 不具有 A-相位恢复性质。接下来，根据引理 5.6，存在一个 M¨obius 变换 $M \in \mathrm{Aut}(\mathbb{T})$，使得 $M(A) = \mathcal{A}$。由定理 1.7 可知，这意味着$\mathbf{G}$ 不具有 $\mathcal{A}$-相位恢复性质，因此再次由引理 2.2 可推出$\mathbf{G}$不具有Θ-相位恢复性质。

为了证明该陈述的第二部分，我们注意到第一部分意味着

$$\mathcal{N}(\mathbb{C}^d, \Theta) = \mathcal{N}(\mathbb{C}^d, \mathbb{T}). \tag{5.3}$$

根据 [31], , 有

$$\mathcal{N}(\mathbb{C}^d, \mathbb{T}) \geq \begin{cases} 4d - 4 - 2\alpha(d) + 2, & d \text{ odd, and } \alpha(d) = 2 \mod 4 \\ 4d - 4 - 2\alpha(d) + 3, & d \text{ odd, and } \alpha(d) = 3 \mod 4\,, \\ 4d - 4 - 2\alpha(d) + 1, & \text{else,} \end{cases} \tag{5.4}$$

其中, $\alpha(d)$表示 $d-1$的二进制展开中 1 的个数。量 $\alpha(d)$ 满足不等式 $\alpha(d) \leq \log_2(d)$。将此估计代入 (5.4), 并利用恒等式 (5.3), 即可得出所述结论。

□

Acknowledgments

作者谨向马德里数学科学研究所分析与应用中的格结构 研究学期的组织者, 以及苏黎世联邦理工学院相位恢复与巴拿赫格 会议的组织者致谢, 感谢他们的热情款待, 使这次合作得以实现。

Lukas Liehr 感谢阿兹列里基金会授予阿兹列里奖学金, 该奖学金为这项研究提供了支持。

References

[1] Edwin J. Akutowicz. 关于傅里叶积分相位的确定, I. *Transactions of the American Mathematical Society* 83 1 179 192, 1956 , ( ): – . [2] Rima Alaifari, Francesca Bartolucci, and Matthias Wellershoff. 从未带限的采样中唯一恢复小波符号。 *Proceedings of the American Mathematical Society Se-* , , ( ): – . [3] Rima Alaifari, Ingrid Daubechies, Philipp Grohs, and Gaurav Thakur. 根据小波及其他框架的无符号系数重构实值函数。 *ries B* 11 30 330 344, 2024 *Journal of Fourier Analysis and Applications* 23 6 1480 1494, 2017 , ( ): – . [4] Rima Alaifari and Philipp Grohs. 巴拿赫空间连续框架一般情形下的相位恢复。 *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 49(3):1895–1911, 2017. [5] Akram Aldroubi, Ilya Krishtal, and Sui Tang. 从时空采样进行无相位重构。 *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 48(1):395–414, 2020. [6] Boris Alexeev, Jameson Cahill, and Dustin G. Mixon. 满火花框架。 *Journal of Fourier Analysis and Applications* 18 6 1167 1194, 2012 , ( ): – . [7] Wedad Alharbi, Daniel Freeman, Dorsa Ghoreishi, Claire Lois, and Shanea Sebastian. 稳定相位恢复与框架扰动。 *Proceedings of the American Mathematical Society Series B* 10 31 353 368, 2023 , , ( ): – . [8] Tamir Amir, Tamir Bendory, Nadav Dym, and Dan Edidin. 紧群上广义相位恢复问题的稳定性。 *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 82, 2025. [9] Radu Balan, Bernhard G. Bodmann, Peter G. Casazza, and Dan Edidin. 从框架系数的模进行简便重构。 *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 15 4 488 501, 2009 ( ): – . [10] Radu Balan, Pete Casazza, and Dan Edidin. 关于无相位信号重构。 *Applied and Computational Harmonic Analysis* 20 3 345 356, 2006 , ( ): – . [11] Afonso S. Bandeira, Jameson Cahill, Dustin G. Mixon, and Aaron A. Nelson. 保留相位：相位恢复的单射性与稳定性。 *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 37 1 106 125, 2014 ( ): – . [12] David Bartusel, Hartmut F¨uhr, and Vignon Oussa. 素域上仿射群的相位恢复。 *Linear Algebra and its Applications*, 677:161–193, 2023. [13] Tamir Bendory and Dan Edidin. 相位恢复的代数理论。 *Notices Of The American Mathematical Society* 69 9 1487 1495, 2022 , ( ): – .

[14] Gabriele Bianchi, Richard Gardner, and Markus Kiderlen. 凸体示性函数的相位恢复及基于协变图的重构。 *Journal of the American Mathematical Society* 24 2 293 343, 2011 , ( ): – .

[15] Jameson Cahill, Peter Casazza, and Ingrid Daubechies. 无限维希尔伯特空间中的相位恢复。 *Transactions of the American Mathematical Society, Series B*, 3 3 63( ): –76, 2016. [16] E mmanuel J. Candes, Yonina C. Eldar, Thomas Strohmer, and Vladislav Voroninski. 通过矩阵补全实现相位恢复。 *SIAM review*, 57(2):225–251, 2015. [17] Emmanuel J. Candes, Xiaodong Li, and Mahdi Soltanolkotabi. 通过 Wirtinger 流实现相位恢复：理论与算法。 *IEEE Transactions on Information Theory* 61 4 1985 2007, , ( ): – . 2015

[18] Isabelle Chalendar, Emmanuel Fricain, and Jonathan R. Partington. 模型空间中再生核序列的过完备性。 *Integral Equations and Operator Theory*, 56 1 45 56, 2006 ( ): – . [19] Michael Christ, Ben Pineau, and Mitchell A Taylor. Hölder 稳定相位恢复的例子。 *Mathematical Research Letters*, 31:1339–1352, 2024. [20] Ole Christensen. *An introduction to frames and Riesz bases*. Springer, 2003. [21] Aldo Conca, Dan Edidin, Milena Hering, and Cynthia Vinzant. 相位恢复中单射性的代数刻画。 *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 38(2):346– 356, 2015. [22] Veit Elser. 通过迭代投影求解晶体学相位问题。 *Foundations of Crystallography* 59 3 201 209, 2003 , ( ): – .

[23] D. Freeman, T. Oikhberg, B. Pineau, and M. A. Taylor. 函数空间中的稳定相位恢复。 *Mathematische Annalen*, 390(1):1–43, Sep 2024. [24] Daniel Freeman and Mitchell A Taylor. 关于 Hölder 稳定相位恢复的 Cahill-Casazza-Daubechies 问题。 *arXiv:2512.08806*, 2025. [25] Philipp Grohs, Sarah Koppensteiner, and Martin Rathmair. 相位恢复：唯一性与稳定性。 *SIAM Review*, 62(2):301–350, 2020. [26] Philipp Grohs and Lukas Liehr. 平方根晶格上的无相位采样。 *Foundations of Computational Mathematics* 25 2 351 374, 2025 , ( ): – .

[27] Philipp Grohs, Lukas Liehr, and Martin Rathmair. 多窗口短时傅里叶变换相位恢复：晶格唯一性。 *Journal of Functional Analysis*, 288(3):110733, 2025. [28] Philipp Grohs, Lukas Liehr, and Martin Rathmair. Fock空间中的相位恢复与 Liouville 集的扰动。 *Revista Matemática Iberoamericana*, 41(3):969–1008, 2025. [29] Philipp Grohs and Martin Rathmair. 多元函数的稳定 Gabor 相位恢复。 *Journal of the European Mathematical Society*, 24(5):1593–1615, 2021. [30] Christopher Heil. *A basis theory primer*. Springer Science & Business Media, 2011. [31] Teiko Heinosaari, Luca Mazzarella, and Michael M. Wolf. 先验信息约束下的量子层析。 *Communications in Mathematical Physics*, 318(2):355–374, 2013. [32] Elias Hohl. 带混合边界条件的矩形区域上的拉普拉斯方程。 *SIAM Undergraduate Research Online* 18 2025 , , . [33]

Philippe Jaming. Pauli 相位恢复问题扩展中的唯一性结果。 *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 37(3):413–441, 2014. [34] Philippe Jaming, Karim Kellay, and Rolando Perez III. 零翻转对 Paley-Wiener 类中相位恢复问题稳定性的影响。 *Monatshefte für Mathematik* 198 4 757 776, 2022 , ( ): – .

[35] Philippe Jaming and Martin Rathmair. 通过半定规划实现 Gabor 相位恢复。 *Foundations of Computational Mathematics*, pages 1–67, 2024. [36] Chun-Kit Lai, Friedrich Littmann, and Eric S. Weber. Paley-Wiener 空间中的共轭相位恢复。 *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 27(6):89, 2021. [37] L´aszl´o Lov´asz and Michael D Plummer. *Matching theory*, volume 367. American Mathematical Soc., 2009. [38] St´ephane Mallat. 理解深度卷积网络。 *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical Physical and Engineering Sciences* 374 2065 20150203, , , ( ): . 2016

[39] Jianwei Miao、Tetsuya Ishikawa、Ian K Robinson 和 Margaret M Murnane。超越晶体学：利用相干X射线光源进行衍射成像。

Science 348 6234 530 535, , ( ): – .[40]
2015
Arkadiusz Orl、Harry Paul 等。量子力学中的相位恢复。 *Physical Review A*, 50 2( ):R921, 1994. [41] Wolfgang Pauli。 *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*。Springer，1990。[42] Michael D Plummer。匹配理论——入门读本：从 D

´ ¨ *Discrete* enes Konig 到

Mathematics 100 1 3 177 219, 1992
当代。 , (-): – . [43] Volker Pohl、Fanny Yang 和 Holger Boche。利用结构化调制在无限维空间中进行无相位信号恢复。 *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 20 6 1212( ): –1233, 2014. [44] Jo˜ao P. G. Ramos 和 Mateus Sousa。论 Pauli 对与傅里叶唯一性问题。*Journal of the London Mathematical Society*, 112(6):e70358, 2025. [45] MG Raymer。测量量子力学波函数。 *Contemporary Physics*, 38 5 343 355, 1997 ( ): – .[46] Yoav Shechtman、Yonina C Eldar、Oren Cohen、Henry Nicholas Chapman、Jianwei Miao 和 Mordechai Segev。相位恢复及其在光学成像中的应用：当代综述。
IEEE signal processing magazine, 32(3):87–109, 2015. [47] Barry Simon。
Orthogonal polynomials on the unit circle。American Mathematical Soc.，2005。[48] Ivan Singer。
Bases in Banach spaces II。Springer，1981。[49] Stefan Steinerberger 和 Hau-tieng Wu。特征向量相位恢复：从特征向量分量的绝对值恢复特征向量。

Linear Algebra and its Applications 652 239 252, , : – .[50]
2022
Gaurav Thakur。从无符号采样重建带限函数。 *Journal of*
Fourier Analysis and Applications 17 4 720 732, 2011 , ( ): – .[51]

Pierre Thibault、Martin Dierolf、Andreas Menzel、Oliver Bunk、Christian David 和 Franz Pfeiffer。高分辨率扫描X射线衍射显微术。

Science 321 5887 379 382, , ( ): – .[52]
2008
Cynthia Vinzant。一个小型框架及其单射性证书。载于 *2015 International*
Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA) 197 200 2015 ，第 – 页。

IEEE，。[53] Matthias Wellershoff。整函数的相位恢复及其对 Gabor相位恢复的影响。
Journal of Functional Analysis, 286(11):110403, 2024. [54] Yu Xia、Zhiqiang Xu 和 Zili Xu。相位恢复稳定性：刻画条件数与最优向量集。 *Mathematics of Computation*, 94(356):2931–2960, 2025. [55] R. Young。
An Introduction to Non-Harmonic Fourier Series。Academic Press，修订版，2001。

Department of Mathematics, Bar-Ilan University, Ramat-Gan 5290002, Israel*Email address*: lukas.liehr@biu.ac.il

Department of Mathematical and Statistical Sciences, University of Alberta, Edmonton, AB, Canada, T6G 2G1*Email address*: tszczepa@ualberta.ca