arXiv:2601.00409v1 [math.FA] 1 Jan 2026

广义算子乘积的尖锐下界

DOMINIQUE GUILLOT、JAVAD MASHREGHI 和
PRATEEK KUMAR VISHWAKARMA

Abstract. 我们研究由半正定矩阵定义的一般双线性乘积。这些乘积通常不具交换性、结合性或单位元，但能保持正性，并将经典的哈达玛积、克罗内克积和卷积乘积作为特例。我们证明，每一种此类乘积都满足一个非零的尖锐 Loewner 序下界，从而推广了 Vybíral [*Adv. Math.*, 2020] 和 Khare [*Proc. Amer. Math. Soc.*, 2021] 在哈达玛积这一特例中得到的先前结果。对于一族由正迹类算子参数化的乘积，我们的结果自然推广到希尔伯特空间，为这类一般乘积（包括希尔伯特张量积）提供 Loewner 序下界。

1. Introduction

1.1. Loewner 序。 Loewner 序由 K. Loewner 提出，是自伴算子上的典范偏序，也是矩阵分析和算子理论中的一项基本工具 [12]。Loewner 序 $\succcurlyeq$ 通过以下方式比较希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子 $A,\ B$

$$A \succcurlyeq B \quad \Longleftrightarrow \quad \langle Ax, x\rangle \geq \langle Bx, x\rangle \qquad \forall\, x \in \mathcal{H}.$$

当且仅当 $A - B$ 是半正定时，$A \succcurlyeq B$ 成立。该序比较二次型，特别适用于变分论证、谱比较和算子不等式。在有限维情形下，它与 Hermitian 矩阵上的通常序一致；而在无限维情形下，它仍与谱定理相容，并且在算子的范数极限下封闭 [5, 9]。Loewner 序在算子不等式的表述中发挥着核心作用，并在优化、概率论、统计学和量子理论中有重要应用。参见例如专著 [4, 11, 21] 及其中的参考文献。

Loewner 序的一个重要特点是它与函数演算之间的联系：Loewner 定理将算子单调函数刻画为那些恰好能通过函数演算保持 Loewner 序的函数 [6, 12]。特别地，函数 t^α 对于 $0 \leq \alpha \leq 1$是算子单调的，并且

Date: 2026年1月5日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 47B65, 15B48。
Key words and phrases. 舒尔乘积定理、洛文纳序、希尔伯特空间、希尔伯特张量积、典范算子不等式、精确界、矩阵卷积。

$\log t$ 是算子单调的，而在正定锥上的求逆运算相对于 Loewner 序是反序的。这些结果将解析结构与序论行为联系起来，并为构造 Loewner 序保持映射提供了系统的方法。这一视角也促使人们研究函数演算之外的保正映射，它们源自矩阵和算子上的代数构造。经典例子包括逐项保正映射，它们刻画了逐项作用能够保持半正定性的函数或核，以及由其他结构化双线性运算诱导的保正映射。关于近期进展及其应用，请参见 [2, 7, 13, 16] 及其中的参考文献。

保正变换的重要例子包括哈达玛积和克罗内克积：舒尔积定理断言，半正定矩阵的哈达玛积仍为半正定 [17], ，而克罗内克积则以自然的张量意义保持正性。这两种运算在 Loewner 序下都满足丰富的不等式（例如参见 [3, 4]）。近来，卷积型乘积 [1, 8], 也受到关注；它们介于逐元素构造与张量构造之间，并由此产生更多保正运算 [13]。

1.2. 保正矩阵乘积。 给定整数 $n \geq 1$ 以及矩阵 $A = (a_{ij})_{i,\ j=1}^{n}$ 和 $B = (b_{ij})_{i,\ j=1}^{n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$，考虑以下三种经典矩阵乘积。

哈达玛积（或逐元素积）：$A \circ B \in \mathbb{C}^{n\times n}$矩阵卷积（或朱里积）：$A \diamond B \in \mathbb{C}^{n\times n}$（标准）克罗内克积：$A \otimes B \in \mathbb{C}^{n^2\times n^2}$

这些乘积的矩阵元素为：

$$
\begin{aligned}
(A \circ B)_{ij} &:= a_{ij} b_{ij} \\
(A \diamond B)_{ij} &:= \sum_{k=1}^{i} \sum_{l=1}^{j} a_{kl} b_{i-k+1,j-l+1} \\
(A \otimes B)_{ij} &:= a_{ij} B \text{ is the } (i,j)\text{-th block of } A \otimes B.
\end{aligned}
$$

众所周知，这些乘积保持正性。

定理 1.1. 固定一个整数 $n \geq 1$，并令 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$。则：

$$
A \succcurlyeq 0 \quad \textit{and} \quad B \succcurlyeq 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A \circ B \succcurlyeq 0 & \text{(Schur [17])} \\ A \diamond B \succcurlyeq 0 & \text{(Jury [1, 8])} \\ A \otimes B \succcurlyeq 0 & \text{(Folklore)} \end{cases}
$$

对于哈达玛积，最近通过 Novak 的一个猜想、Vyb´ıral 的证明以及 Khare 的改进，得到了上述结果的一个更强形式。结果如下：

定理 1.2 (Novak 猜想 [14], Vyb´ıral [18], Khare [10])。 固定整数 $\beta, n \geq 1$ 和非零矩阵 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times\beta}$。则

$$AA^* \circ BB^* \succcurlyeq \frac{1}{\min\left(\operatorname{rk} AA^*, \operatorname{rk} BB^*\right)} d_{AB^T} d_{AB^T}^* \succcurlyeq 0,$$

其中，给定一个方阵 $M = (m_{jk})$，我们用 $d_M := (m_{jj})$ 表示由 M 的对角元素组成的列向量。此外，系数$1/\min(\cdot,\cdot)$是最优的。

请注意，定理 1.2 强化了定理 1.1，不过仅针对哈达玛积 $\circ$。更准确地说，该定理表明，半正定矩阵的哈达玛积不仅是半正定的（正如定理 1.1 对于 $\circ$所述），而且实际上具有一个秩至多为 1 的下界。这自然引出了关于其他矩阵乘积的类似问题，尤其是经典的克罗内克积 $\otimes$和较新的矩阵卷积 $\diamond$。

1.3. 我们主要贡献概述。 受上述经典与当代考量的启发，我们的目标之一是为克罗内克积和卷积矩阵乘积建立定理 1.2 的对应结果。更一般地，我们在统一框架下对广义双线性矩阵乘积开展研究，并将这一方法拓展到希尔伯特空间上迹类算子的乘积。

在介绍我们的通用框架之前，我们先在三个特殊情形下陈述主要结果：矩阵的克罗内克积、矩阵的 Jury 卷积乘积，以及迹类算子的希尔伯特张量积。

定理 1.3 (克罗内克积)。 设 m、n、$\beta \geq 1$ 为整数。则对于矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m\times\beta}$ 和 $B \in \mathbb{C}^{n\times\beta}$，有

$$AA^* \otimes BB^* \succcurlyeq \frac{1}{\min(\operatorname{rk} AA^*,\, \operatorname{rk} BB^*)} \operatorname{vec}(BA^T) \operatorname{vec}(BA^T)^* \succcurlyeq 0,$$

其中，$\operatorname{vec}(P) \in \mathbb{C}^{mn}$ 是将 $P \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 的各列堆叠成一个列向量得到的。此外，系数 $1/\min(\operatorname{rk} AA^*, \operatorname{rk} BB^*)$ 是最优的，亦即对所有 A、B而言，该系数都无法进一步提高。

卷积的情形也有类似的改进 $\diamond$。

定理 1.4 （矩阵卷积）。 设 N、$\beta \geq 1$ 为整数。则对于矩阵 A、$B \in \mathbb{C}^{N\times\beta}$，有

$$AA^* \diamond BB^* \succcurlyeq \frac{1}{\min(\operatorname{rk} AA^*,\, \operatorname{rk} BB^*)} \rho_\diamond \rho_\diamond^* \succcurlyeq 0,$$
$$\textit{where} \qquad \rho_\diamond := \begin{pmatrix} \mathcal{S}_1(BA^T) & \cdots & \mathcal{S}_N(BA^T) \end{pmatrix}^T \in \mathbb{C}^N,$$

其中 $\mathcal{S}_k(-)$ 表示 k 阶“反对角线”上各元素之和，即

$$\mathcal{S}_k(P) := \sum_{i=1}^{k} p_{i,k-i+1} \qquad \forall P = (p_{ij})_{i,j=1}^{N},\ k = 1, \dots, N.$$

同样，系数 $1/\min(\operatorname{rk} AA^*,\ \operatorname{rk}\ BB^*)$ 是可能达到的最佳值。

我们在希尔伯特空间的框架下，为典范张量积给出了类似的推广。尽管众所周知，正算子的希尔伯特张量积仍然是正的，但我们通过在 Loewner 序下为迹类算子建立一个一致、尖锐且非零的下界，证明了这种正性可以得到加强——记号见第4.1节。

定理 1.5（希尔伯特张量积）。设 H_1、H_2、$\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间。则对于所有非零的 $A \in \mathcal{B}_2(\widetilde{\mathcal{H}}, H_1)$ 和 $B \in \mathcal{B}_2(\widetilde{\mathcal{H}^{\#}}, H_2)$，

$$AA^* \otimes BB^* \succcurlyeq \frac{1}{\min(\operatorname{rk} AA^*, \operatorname{rk} BB^*)} \mathbf{\Theta}_{\operatorname{vec}(BA^{\#}),\operatorname{vec}(BA^{\#})} \succcurlyeq 0,$$

其中我们遵循约定 $\frac{1}{\infty} := 0$。此外，$1/\min(\operatorname{rk}\ AA^*,\ \operatorname{rk} BB^*)$是最佳标量，即无法在 A、B 上一致地改进它。

正如我们将要展示的，上述内容都是一种一般构造的体现：该构造以正算子为参数定义双线性乘积，并体现在以下主要结果中：

> **定理 A：** 在欧几里得空间中，针对以半正定矩阵为参数的乘积。见第 6 页。**定理 B：** 在希尔伯特空间中，针对以正迹类算子为参数的乘积。见第 16 页。

从统一的视角来看，经典的哈达玛积及舒尔乘积定理，以及标准的克罗内克积及其半群胚结构，在矩阵分析中发挥了奠基性作用。定理 A 中的双线性乘积具有显式公式，与这些经典构造直接相关。这种具体性带来了 Loewner 序下统一且依赖维数的下界，而在抽象理论中并无直接对应物。在定理 B 的希尔伯特空间情形中，同样的现象必须借助算子理想、谱分解、共轭空间和典范等距映射来表述。其证明依赖于非平凡的收敛性与可容许性问题，而这些问题在有限维情形中并不存在。

通过对一般双线性矩阵值和算子值乘积提出统一且强化的推广，我们的工作为矩阵分析、算子理论、泛函分析、组合矩阵理论以及其他涉及乘积与正性的相关领域中的理论和应用开辟了新的途径。

1.4. **论文结构**。本文其余部分的组织如下。第2节介绍我们针对定义在欧几里得空间上的矩阵所建立的一般框架和主要结果。第3节给出我们关于欧几里得空间上结果的证明。随后，在第4节中，我们说明如何将主要结果推广到由希尔伯特空间上的迹类算子参数化的正双线性积，并在第5节中给出相应证明。在第 6 节中，我们介绍双线性积的典范表述。

2. Main results over Euclidean spaces

此后，我们在每个 $\mathbb{C}^{k_1\times k_2}$ 上赋予标准的希尔伯特–施密特内积，其定义为 $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(AB^*)$，其中 $k_1, k_2 \geq 1$，$A, B \in \mathbb{C}^{k_1\times k_2}$。下面给出定义本文主要研究对象的方法。

定义 2.1. 固定整数 $m, n, N \geq 1$。

(1) 任意双线性乘积 $\star$：$\mathbb{C}^{m\times m} \times \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{C}^{N\times N}$ 均由矩阵 $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(\star)$ 参数化：$= (Y_{ij})_{i,\ j=1}^{N} \in \mathbb{C}^{mnN\times mnN}$，其中 $Y_{ij} \in \mathbb{C}^{mn\times mn}$。更确切地说，

$$A \star B := \big(\langle A\otimes B, Y_{ij}\rangle\big)_{i,j=1}^{N} = \big(\mathrm{tr}((A\otimes B)Y_{ij}^*)\big)_{i,j=1}^{N},$$

其中 $A \otimes B$ 是标准克罗内克积。

(2) 在所有双线性 $\star$ 型乘积中，我们选取由半正定矩阵参数化的乘积：

$$\mathbf{Prod}_+(m,\ n;\ N) := \\ \big\{\star : \mathbb{C}^{m\times m} \times \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{C}^{N\times N} \ \big|\ \mathcal{Y} = \mathcal{Y}(\star) \text{ is positive semidefinite}\big\}.$$

在上下文明确时，我们将 $\mathbf{Prod}_+$ 记作 $\mathbf{Prod}_+(m,\ n,\ ;\ N)$。

经典的 Hadamard 积和克罗内克积，以及 Jury 的卷积乘积，都是上述构造的特例。

定理 2.1 $(\circ, \diamond, \otimes \in \mathbf{乘积}_+)$**.** 对于整数 $m, n, N \geq 1$:

(1) Hadamard（逐元素）积 $\circ \in \mathbf{乘积}_+(N, N;\ N)$。*(2)* 矩阵卷积 $\diamond \in \mathbf{乘积}_+(N, N;\ N)$。*(3)* 克罗内克积 $\otimes \in \mathbf{乘积}_+(m, n; mn)$。

事实上，每个 $\star \in \{\circ, \diamond, \otimes\}$ 都由适当大小的秩一正半定 $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(\star)$ 参数化。

集合 $\mathbf{乘积}_+$ 自然地具有加法和标量乘法。对于整数 $m, n, N \geq 1$，乘积 $\star_1, \star_2 \in \mathbf{乘积}_+(m, n;\ N)$，以及$\alpha, \beta \geq 0$，我们通过以下方式定义 $\alpha\star_1 + \beta\star_2$：

$$A(\alpha\star_1 + \beta\star_2)B := \alpha A\star_1 B + \beta A\star_2 B \qquad \forall A \in \mathbb{C}^{m\times m}, B \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

此外，对于序列 $(\star_k)_{k\geq 1}$，极限 $\star := \lim_{k\to\infty}\star_k$ 定义为矩阵 $\mathcal{Y}(\star)$ 的逐项极限：$= \lim_{k\to\infty}\mathcal{Y}(\star_k)$，如果该极限存在。由上述定义可知，我们有

$$\mathcal{Y}(\alpha\star_1 + \beta\star_2) = \alpha\mathcal{Y}(\star_1) + \beta\mathcal{Y}(\star_2)$$

and

$$\mathcal{Y}(\lim_{k\to\infty} \star_k) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{Y}(\star_k)$$

如果这些极限存在。在上述运算下，集合 $\mathbf{Prod}_+(m,n;\ N)$ 构成一个闭凸锥。

命题 2.2 ($\mathbf{Prod}_+$ 是一个闭凸锥)**.** 固定整数 $m, n, N \geq 1$，并为 $\mathbf{Prod}_+ = \mathbf{Prod}_+(m,n;\ N)$ 赋予如上所述的加法和标量乘法。于是：

(a) 若极限 $\lim_{k\to\infty} \star_k \in \mathbf{Prod}_+$ 对所有 $(\star_k)_{k\geq 1} \subset \mathbf{Prod}_+$ 存在，则该极限存在。*(b)* 对所有 $\star_1, \star_2 \in \mathbf{Prod}_+$ 以及所有 $\alpha, \beta \geq 0$，组合 $\alpha\star_1 + \beta\star_2 \in \mathbf{Prod}_+$。*(c)* 此外，对每个 $\star \in \mathbf{Prod}_+$，存在 $\star_1, \ldots, \star_\alpha \in \mathbf{Prod}_+$，使得每个 $\mathcal{Y}_i := \mathcal{Y}_i(\star_i)$ 都是秩一的，且 $\star = \star_1 + \cdots + \star_\alpha$。

特别地，矩阵乘积 $\mathbf{Prod}_+$ 构成一个凸锥，该凸锥由那些 $\star \in \mathbf{Prod}_+$ 生成，而这些矩阵乘积来自秩一半正定 $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(\star)$。

定义 2.3 （乘积 $\star \in \mathbf{Prod}_+$ 的秩）。若 $\star \in \mathbf{Prod}_+$ 的秩为 α，则称其秩为 α，其中 $\operatorname{rk}(\mathcal{Y}(\star)) = \alpha$；$\operatorname{rk} X$ 表示矩阵 X 的秩。

作为一项应用，我们接下来的主要结果推广了经典的舒尔乘积定理 [17], ，以及其近期由 Novak [14], 提出猜想、经 Vyb´ıral [18], 证明并随后由 Khare [10]进一步改进的版本。特别地，我们得到了舒尔乘积定理及其最优下界改进的一族不可数类比。这带来了一个可被视为更强的舒尔乘积定理的结果，对每个 $\star \in \mathbf{Prod}_+$ 均成立。

定理 A. 设 m、n、N、$\alpha \geq 1$ 均为整数。对于秩为 $\alpha \geq 1$ 的 $\star \in \mathbf{Prod}_+(m,n;\ N)$，以下结论成立：
(a) 对于所有 $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$：

$$P \succcurlyeq 0 \ \text{and}\ Q \succcurlyeq 0 \quad \Longrightarrow \quad P \star Q \succcurlyeq 0.$$

(b) 更强地，对于给定整数 $\beta \geq 1$，所有非零 $A \in \mathbb{C}^{m\times\beta}$ 和 $B \in \mathbb{C}^{n\times\beta}$ 均满足：

$$AA^* \star BB^* \succcurlyeq \sum_{k=1}^{\alpha} \frac{1}{\min\left(\operatorname{rk} AA^*, \operatorname{rk} BB^*, \mathbf{r}(k)\right)} \rho_k \rho_k^* \succcurlyeq 0,$$

其中，每个 ρ_k 和 $\mathbf{r}(k)$ 的定义如下。
由命题 *2.2* 可知，$\star = \sum_{j=1}^{\alpha} \star_j$ 其中每个 $\mathcal{Y}_k = \mathcal{Y}_k$（$\star_k$）都是秩一半正定的。因此，对于某些 $v_{1,\ k}$，每个 $\mathcal{Y}_k = \left(v_{i,\ k} v_{j,\ k}^*\right)_{i,\ j=1}^{N}$ 均成立，其中 $v_{N,\ k} \in \mathbb{C}^{mn}$。设 $\operatorname{vec}(M) \in \mathbb{C}^{mn}$ 是通过将 $M \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 的列堆叠成一个列向量得到的。那么，ρ_k 定义为：

$$\rho_k = \rho_{\star_k} := \left(\langle \operatorname{vec}(BA^T), v_{1,k}\rangle \ \cdots \ \langle \operatorname{vec}(BA^T), v_{N,k}\rangle\right)^T \in \mathbb{C}^N.$$

此外，对于每个 $k \in \{1, \dots, \alpha\}$，我们定义

$$\mathbf{r}(\star_k) = \mathbf{r}(k) := \max\left\{ \operatorname{rk} X : X \in \mathcal{U}(k) \right\},$$
$$\mathcal{U}(\star_k) = \mathcal{U}(k) := \text{张成空间}\left\{ \text{vec算子}^{-1}(v_{i,\,k}) : i = 1, \dots, \right.$$

其中 $\left. N \right\} \subset \mathbb{C}^{n \times m}$.

最后，对于固定的 $k \in \{1, \dots, \alpha\}$ 标量 1/最小 $\big($秩 AA^*，秩 BB^*，$\mathbf{r}(k)\big)$ 是关于 $AA^* \star_k BB^*$ 的最佳结果，也就是说，对所有 A、B 而言，它都无法进一步改进。

作为直接应用，定理 A 得出推论 1.1 和 1.2，以及定理 1.3 和定理 1.4。

推论 2.4。

(1) 定理 *A* 得出定理 *1.1* 和定理 *1.2*。*(2)* 定理 *A* 得出定理 *1.3* 和定理 *1.4* 中关于 $\star \in \{\diamond, \otimes\}$ 的新型强化形式。

3. Proofs over Euclidean spaces

本节旨在证明欧几里得情形下的结果，同时也为后续各节中更为复杂的希尔伯特空间相关论述建立直观认识。

3.1. 所有 $\star \in$**Prod**+的一般情形。

我们首先证明命题 2.2 和定理 A。

命题 *2.2* 的证明。 由于半正定矩阵构成一个闭凸锥，断言（a）成立。我们将一并证明另外两个断言。假设给定一个乘积 $\star = \star(\mathcal{Y})$，其中 $\mathcal{Y} = (Y_{ij})_{i,\,j=1}^{N} \in \mathbb{C}^{mnN \times mnN}$ 为某个半正定 $\mathcal{Y} = (Y_{ij})$，且每个 $Y_{ij} \in \mathbb{C}^{mn \times mn}$。由于半正定矩阵是格拉姆矩阵，我们有 $\mathcal{Y}$ 可写成乘积 $\mathcal{Y} = \mathcal{X}\mathcal{X}^*$，其中 $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{mnN \times \alpha}$ 是某个整数 $\alpha \geq 1$。我们将 $\mathcal{X}$ 写成分块列矩阵，得到如下结果：

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X}\mathcal{X}^* = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^* & X_2^* & \cdots & X_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1X_1^* & X_1X_2^* & \cdots & X_1X_N^* \\ X_2X_1^* & X_2X_2^* & \cdots & X_2X_N^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_NX_1^* & X_NX_2^* & \cdots & X_NX_N^* \end{bmatrix}.$$

特别地，每个块都满足 $Y_{ij} = X_iX_j^*$。现在假设 $v_{i1}, \dots, v_{i\alpha} \in \mathbb{C}^{mn}$ 是 X_i 在 $i = 1, \dots, N$中的列。利用线性性，我们有

$$\begin{aligned}(A \star B)_{ij} &= \operatorname{tr}\Big((A \otimes B)\sum_{\kappa=1}^{\alpha} v_{j\kappa}v_{i\kappa}^*\Big) = \sum_{\kappa=1}^{\alpha} \operatorname{tr}\left((A \otimes B)v_{j\kappa}v_{i\kappa}^*\right) \\ &= (A \star_1 B)_{ij} + (A \star_2 B)_{ij} + \cdots + (A \star_\alpha B)_{ij}\end{aligned}$$

其中 $\star_k = \star_k(\mathcal{Y}_k)$，且

$$\mathcal{Y}_k = \begin{bmatrix} v_{1\kappa} \\ v_{2\kappa} \\ \vdots \\ v_{N\kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1\kappa}^* & v_{2\kappa}^* & \dots & v_{N\kappa}^* \end{bmatrix}.$$

显然，它们都是秩一半正定矩阵。这些步骤在实线性意义下可逆，从而完成证明。□

定义 3.1（平方根）。设 $P \in \mathbb{C}^{\kappa\times\kappa}$ 是一个半正定矩阵，其谱分解为 $P = U^*DU$，其中 U 为酉矩阵，D =为对角矩阵，具有非负对角元素 $d_1, \dots, d_\kappa$。我们将 P的平方根 定义为 $P^{1/2} := U^*D^{1/2}U$，其中 $D^{1/2}$:=为对角矩阵，具有 $d_1^{1/2}, \dots, d_\kappa^{1/2}$。

现在我们可以证明定理 A。

定理 *A* 的证明。 我们将证明分为三部分。

第一部分。正性。 半正定矩阵 $\mathcal{Y}$ 是一个 Gram 矩阵，即它可以写成乘积 $\mathcal{Y} = \mathcal{X}\mathcal{X}^*$，其中 $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{mnN\times\alpha}$。将 $\mathcal{X}$写成分块列矩阵 $\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X_1^T & \dots & X_N^T \end{pmatrix}^T$，其中每个 $X_i \in \mathbb{C}^{mn\times\alpha}$；由此可得 $Y_{ij} = X_iX_j^*$。设 $P \in \mathbb{C}^{m\times m}, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为半正定矩阵。那么 $P \otimes Q$ 是半正定的，因此利用它的平方根，

$$\begin{aligned} P \star Q &= \left(\langle P\otimes Q, X_iX_j^*\rangle\right)_{i,j=1}^N = \left(\mathrm{tr}((P\otimes Q)X_jX_i^*)\right)_{i,j=1}^N \\ &= \left(\mathrm{tr}((P\otimes Q)^{1/2}X_j((P\otimes Q)^{1/2}X_i)^*)\right)_{i,j=1}^N \\ &= \left(\langle (P\otimes Q)^{1/2}X_j, (P\otimes Q)^{1/2}X_i\rangle\right)_{i,j=1}^N. \end{aligned}$$

这是一个 Gram 矩阵，证明了第（a）部分。

第二部分。不等式。证明（b）部分时，首先假设 $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(\star)$ 是秩一半正定的。于是存在向量 $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{C}^{mn}$，使得 $Y_{ij} = v_iv_j^*$。设 $C_j \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 是满足以下条件的唯一矩阵

$$\mathrm{vec}(C_j) = v_j,$$

其中 vec算子：$\mathbb{C}^{n\times m} \to \mathbb{C}^{mn}$ 表示按列堆叠等距映射。令 $A \in \mathbb{C}^{m\times\beta}$ 和 $B \in \mathbb{C}^{n\times\beta}$，并计算 $AA^* \star BB^*$ 的各个元素：

$$(AA^* \star BB^*)_{ij} = \left\langle (AA^*\otimes BB^*)^{1/2}\mathrm{vec}(C_j),\, (AA^*\otimes BB^*)^{1/2}\mathrm{vec}(C_i)\right\rangle.$$

由于 $AA^*\otimes BB^*$ 为正，

$$AA^*\otimes BB^* = (A\otimes B)(A^*\otimes B^*) = (A\otimes B)(A\otimes B)^*,$$

我们有

$$\begin{aligned}\langle (AA^*\otimes BB^*)^{1/2}\mathrm{vec}(C_j),\,(AA^*\otimes BB^*)^{1/2}\mathrm{vec}(C_i)\rangle \\ &= \langle (AA^*\otimes BB^*)\mathrm{vec}(C_j),\,\mathrm{vec}(C_i)\rangle \\ &= \langle (A^*\otimes B^*)\mathrm{vec}(C_j),\,(A^*\otimes B^*)\mathrm{vec}(C_i)\rangle\,.\end{aligned}$$

矩阵维度与向量化恒等式 [20]相容：

$$(A^*\otimes B^*)\,\mathrm{vec}(C)=\mathrm{vec}\big(B^*C\,\overline{A}\big),\qquad C\in\mathbb{C}^{n\times m}.$$

因此，我们得到格拉姆矩阵：

$$(AA^*\star BB^*)_{ij}=\Big\langle \mathrm{vec}\big(B^*C_j\,\overline{A}\big),\,\mathrm{vec}\big(B^*C_i\,\overline{A}\big)\Big\rangle=\big\langle B^*C_j\,\overline{A},\;B^*C_i\,\overline{A}\big\rangle.$$

因此，对于所有 $u=(u_1、\ldots\ldots、u_N)^T\in\mathbb{C}^N$，都有

$$\begin{aligned}u^*(AA^*\star BB^*)u&=\sum_{i,j=1}^N \overline{u_i}u_j(AA^*\star BB^*)_{ij}=\sum_{i,j=1}^N \overline{u_i}u_j\langle B^*C_j\overline{A},B^*C_i\overline{A}\rangle\\ &=\left\langle B^*\Big(\sum_{j=1}^N u_jC_j\Big)\overline{A},B^*\Big(\sum_{i=1}^N u_iC_i\Big)\overline{A}\right\rangle=\langle T,T\rangle\end{aligned}$$

其中 $T:=B^*\big(\sum_{j=1}^N u_jC_j\big)A$。现在，对于 $U:=\sum_{j=1}^N u_jC_j\in\mathcal{U}(\star)$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}(B^*U\overline{A})&\le \min\big(\mathrm{rk}(B^*),\mathrm{rk}(U),\mathrm{rk}(A)\big)\\ &\le \min\big(\mathrm{rk}(AA^*),\mathrm{rk}(BB^*),\mathbf{r}(\star)\big)=:r,\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{r}(\star):=\max\big\{\,\mathrm{rk}\;X\colon\;X\in\mathcal{U}(\star)\big\}$。注意，迹

$$\mathrm{tr}(T)=\sum_{j=1}^N u_j\,\mathrm{tr}\left(B^*C_j\overline{A}\right)=\rho^*u$$

其中

$$\begin{aligned}\rho&=\left(\overline{\mathrm{tr}\left(B^*C_1\overline{A}\right)}\quad\cdots\quad\overline{\mathrm{tr}\left(B^*C_N\overline{A}\right)}\right)^T=\left(\mathrm{tr}\left(B^TC_1A\right)\quad\cdots\quad\mathrm{tr}\left(B^T\overline{C_N}A\right)\right)^T\\ &=\left(\big\langle AB^T,C_1^T\big\rangle\quad\cdots\quad\big\langle AB^T,C_N^T\big\rangle\right)^T=\left(\big\langle BA^T,C_1\big\rangle\quad\cdots\quad\big\langle BA^T,C_N\big\rangle\right)^T\\ &=\left(\big\langle \mathrm{vec}(BA^T),v_1\big\rangle\quad\cdots\quad\big\langle \mathrm{vec}(BA^T),v_N\big\rangle\right)^T.\end{aligned}$$

我们简要证明迹-秩不等式 $|\mathrm{tr}(T)|^2\le\mathrm{rk}\;T\,\langle T,\;T\rangle$。令$P$表示投影到 $\mathrm{im}(T)$ 上的正交投影（等价地，投影到 $(\ker\;T^*)^\perp$ 上）。那么 $PT=T$，因此利用柯西–施瓦茨不等式可得

$$|\,\mathrm{tr}(T)|=|\,\mathrm{tr}(PT)|=|\langle P,\,T^*\rangle|\le\sqrt{\langle P,P\rangle}\,\sqrt{\langle T^*,T^*\rangle}.$$

由于 P是秩为 r的正交投影，$\langle P,\;P\rangle=\|P\|^2=r$，如所需。因此，我们得到

$$u^*(AA^*\star BB^*)u=\langle T,T\rangle\ge\frac{1}{r}\,|\rho^*u|^2=\frac{1}{r}\,u^*\rho\rho^*u.$$

这证明了秩为一的 $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(\star)$ 的不等式。更高秩情形的证明可由此及命题 2.2 得出。

第三部分：最优性。 固定 $k \in \{1, \dots, \alpha\}$ 并考虑秩一分量 $\star_k$。 回顾

$$\mathcal{U}(k) := \operatorname{span}\big\{\operatorname{vec}^{-1}(v_{i,k}) : i = 1, \dots, N\big\} \subset \mathbb{C}^{n\times m},$$
$$\text{and} \qquad \mathbf{r}(k) := \max\big\{\operatorname{rk} X : X \in \mathcal{U}(k)\big\}.$$

因此，存在

$$U_0 \in \mathcal{U}(k) \setminus \{\mathbf{0}_{n\times m}\} \quad \text{with} \quad \operatorname{rk}(U_0) = \mathbf{r}(k).$$

我们证明，对于给定的（固定） $\beta \geq 1$，映射 $(AA^*, BB^*) \mapsto AA^* \star_k BB^*$（其中 $A \in \mathbb{C}^{m\times\beta}$ 且 $B \in \mathbb{C}^{n\times\beta}$）的系数 $1/\min\big(\operatorname{rk} AA^*, \operatorname{rk} BB^*, \mathbf{r}(k)\big)$ 是最优的。令

$$r_0 := \min\big(\beta, m, n, \mathbf{r}(k)\big).$$

我们将构造矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m\times\beta}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times\beta}$，使得 $T := B^*U_0A$恰有 r_0 个对角元素为 1，其余元素均为 0，从而在迹-秩不等式中取等。这将说明，不存在对所有 A, B都一致成立的更优常数。

步骤 *1*：的奇异值分解 U_0。 对 U_0进行奇异值分解：

$$U_0 = S\,\Sigma\,R^*,$$

其中， $S \in \mathbb{C}^{n\times\mathbf{r}(k)}$ 和 $R \in \mathbb{C}^{m\times\mathbf{r}(k)}$ 具有正交归一列，而 Σ =为$\operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{\mathbf{r}(k)})$，其中 $\sigma_i > 0$。记

$$S = \begin{bmatrix} S_{r_0} & S' \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} R_{r_0} & R' \end{bmatrix},$$

其中， $S_{r_0} \in \mathbb{C}^{n\times r_0}$ 和 $R_{r_0} \in \mathbb{C}^{m\times r_0}$ 分别收集前 r_0 个左奇异向量和其余的（右侧）奇异向量，并类似地分解

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{r_0} & 0 \\ 0 & \Sigma' \end{pmatrix}, \qquad \Sigma_{r_0} = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{r_0}) \in (0,\infty)^{r_0\times r_0}.$$

~步骤 *2*： A、 B的选择，以及相应的 T。定义矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m\times r_0}$ 和 $B \in \mathbb{C}^{n\times r_0}$ 如下

$$\widetilde{B} := S_{r_0}\,\Sigma_{r_0}^{-1/2} \quad \text{and} \quad \widetilde{A} := \overline{R_{r_0}\,\Sigma_{r_0}^{-1/2}},$$

从而

$$\widetilde{B}^* = \Sigma_{r_0}^{-1/2} S_{r_0}^* \quad \text{and} \quad \overline{\widetilde{A}} = R_{r_0}\,\Sigma_{r_0}^{-1/2}.$$

利用 $S_{r_0}^* S = [I_{r_0}\ 0]$ 和 $R^* R_{r_0} = \begin{bmatrix} I_{r_0} \\ 0 \end{bmatrix}$，我们得到：

$$\begin{aligned} \widetilde{B}^* U_0\,\overline{\widetilde{A}} = \Sigma_{r_0}^{-1/2}\,S_{r_0}^*\,U_0\,R_{r_0}\,\Sigma_{r_0}^{-1/2} &= \Sigma_{r_0}^{-1/2}\,S_{r_0}^*\,S\,\Sigma\,R^*R_{r_0}\,\Sigma_{r_0}^{-1/2} \\ &= \Sigma_{r_0}^{-1/2}\,\Sigma_{r_0}\,\Sigma_{r_0}^{-1/2} = I_{r_0}. \end{aligned}$$

~ ~现在通过补零列，将 A, B 嵌入到 A, B 中，使其恰好有 β 列：

$$A := \begin{bmatrix} \widetilde{A} & 0_{m\times(\beta-r_0)} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times\beta}, \qquad B := \begin{bmatrix} \widetilde{B} & 0_{n\times(\beta-r_0)} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times\beta}.$$

~ ~于是 $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A = r_0$ 且 $\operatorname{rk} B = \operatorname{rk} B = r_0$，因此

$$\min\big(\operatorname{rk} AA^*,\, \operatorname{rk} BB^*,\, \mathbf{r}(k)\big) = \min(r_0, r_0, \mathbf{r}(k)) = r_0.$$

根据 A, B 的构造，我们有

$$T = B^* U_0 \overline{A} = \begin{bmatrix} \widetilde{B}^* \\ 0 \end{bmatrix} U_0 \begin{bmatrix} \overline{\widetilde{A}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{B}^* U_0 \overline{\widetilde{A}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{r_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{\beta\times\beta}.$$

因此 $\operatorname{rk}(T) = r_0$, $\langle T, T\rangle = \operatorname{tr}(T^*T) = \operatorname{tr}(T) = r_0$, 且 $|\operatorname{tr}(T)|^2 = r_0^2$。于是，当 $|\operatorname{tr}(T)|^2 = r_0 \langle T, T\rangle$ 时，迹-秩不等式取等号。

步骤*3*：常数的尖锐性。根据第一部分中的证明，对每个A, B, u，我们有

$$u^*(AA^* \star_k BB^*)u = \langle T, T\rangle \;\geq\; \frac{1}{r}\,|\operatorname{tr}(T)|^2 = \frac{1}{r}\, u^*\rho_k\rho_k^* u,$$

其中 $r := \min\big(\operatorname{rk} AA^*, \operatorname{rk} BB^*, \mathbf{r}(k)\big)$。对于上文中 A, B, u 的特定取值，我们有 $r = r_0$，且等号成立：

$$u^*(AA^* \star_k BB^*)u = \langle T, T\rangle = \frac{1}{r_0}\,|\operatorname{tr}(T)|^2 = \frac{1}{r_0}\, u^*\rho_k\rho_k^* u.$$

因此，常数 $1/r_0 = 1/\min\big(\operatorname{rk} AA^*,\ \operatorname{rk} BB^*,\ \mathbf{r}(k)\big)$ 可以取到。更确切地说，若将 $1/\min(\operatorname{rk} AA^*,\ \operatorname{rk} BB^*,\ \mathbf{r}(k))$ 替换为任意更大的常数 $c > 0$，并要求该常数对所有 $A,\ B$都成立，那么应用于这个特定选择时，我们会得到

$$\langle T, T\rangle = u^*(AA^* \star_k BB^*)u \;\geq\; c\, u^*\rho_k\rho_k^* u = c\,|\operatorname{tr}(T)|^2 = c\, r_0^2.$$

由于 $\langle T,\ T\rangle = r_0$，这意味着 $r_0 \geq c\, r_0^2$，即 $c \leq 1/r_0$.。因此，不存在能够统一适用的 $c > 1/r_0$。所以，定理 A(b) 中的系数 $1/\min\big(\operatorname{rk} AA^*,\ \operatorname{rk} BB^*,\ \mathbf{r}(k)\big)$ 对秩一分量 $\star_k$而言是最优的。□

3.2. 的若干具体经典情形 $\star \in \{\circ, \diamond, \otimes\}$。现在我们证明定理 2.1 和推论 2.4。

定理 *2.1* 的证明。哈达玛积 $\circ$。取 $m = n = N$。设$e_1, \ldots, e_N$表示 $\mathbb{C}^N$ 的标准基。现在，取 $Y_{ij} := (e_i \otimes e_i)(e_j \otimes e_j)^T$，其中 $\otimes$ 表示标准克罗内克积。显然，$\mathcal{Y}$是秩一半正定矩阵。计算

$$\begin{aligned}(A \star B)_{ij} &= \operatorname{tr}((A \otimes B)Y_{ij}^*) = \operatorname{tr}((A \otimes B)(e_j \otimes e_j)(e_i \otimes e_i)^T) \\ &= (e_i \otimes e_i)^T (A \otimes B)(e_j \otimes e_j) = (e_i^T A e_j)(e_i^T B e_j) = a_{ij} b_{ij},\end{aligned}$$

对所有 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{N\times N}$，证明了 $\circ \in$ **乘积**+$(N,\ N;\ N)$。

克罗内克积 $\otimes$。取 $m,\ n \geq 1$和 $N = mn$。令 $e_1,\ \ldots,\ e_m$和$f_1,\ \ldots,\ f_n$ 分别为 $\mathbb{C}^m$ 和 $\mathbb{C}^n$ 的标准基。现在按字典序排列基元素 $e_{i_1} \otimes f_{i_2}$，排列于 $(i_1,\ i_2)$ 中，并取

$$Y_{n(i_1-1)+i_2,n(j_1-1)+j_2} := (e_{i_1} \otimes f_{i_2})(e_{j_1} \otimes f_{j_2})^T$$

对所有 $1 \leq i_1, j_1 \leq m$和 $1 \leq i_2, j_2 \leq n$。显然，$\mathcal{Y}$是秩一半正定矩阵。对于 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$，计算

$$(A \star B)_{n(i_1-1)+i_2,n(j_1-1)+j_2} = \operatorname{tr}((A \otimes B)Y^*_{n(i_1-1)+i_2,n(j_1-1)+j_2})$$
$$= \operatorname{tr}((A \otimes B)(e_{j_1} \otimes f_{j_2})(e_{i_1} \otimes f_{i_2})^T) = (e_{i_1} \otimes f_{i_2})^T(A \otimes B)(e_{j_1} \otimes f_{j_2})$$
$$= (e_{i_1}^T A e_{j_1})(f_{i_2}^T B f_{j_2}) = a_{i_1,j_1} b_{i_2,j_2}.$$

因此，$\otimes \in \mathbf{Prod}^+(m, n; mn)$。

卷积 $\diamond$。取 $m = n = N$。假设 $e_1, \ldots, e_N$是 $\mathbb{C}^N$的标准基。由此得到秩一半正定矩阵 $\mathcal{Y}(\diamond)$:

$$Y_{ij} := \Big[\sum_{k=1}^{i} e_k \otimes e_{i-k+1}\Big]\Big[\sum_{k=1}^{j} e_k \otimes e_{j-k+1}\Big]^T.$$

对于 $A = (a_{ij})$ $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{N\times N}$，计算

$$(A \star B)_{ij} = \operatorname{tr}((A \otimes B)Y^*_{ij})$$
$$= \operatorname{tr}\Big((A \otimes B)\Big[\sum_{k=1}^{j} e_k \otimes e_{j-k+1}\Big]\Big[\sum_{k=1}^{i} e_k \otimes e_{i-k+1}\Big]^T\Big)$$
$$= \Big[\sum_{k=1}^{i} e_k \otimes e_{i-k+1}\Big]^T (A \otimes B)\Big[\sum_{k=1}^{j} e_k \otimes e_{j-k+1}\Big].$$

展开转置并交叉相乘后，上式等于:

$$\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{j}(e_k^T \otimes e_{i-k+1}^T)(A \otimes B)(e_l \otimes e_{j-l+1}) = \sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{j}(e_k^T A e_l)(e_{i-k+1}^T B e_{j-l+1})$$
$$= \sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{j} a_{k,l} b_{i-k+1,j-l+1} = (A \diamond B)_{i,j}.$$

因此 $\diamond \in$ **乘积**$^+(N,\ N;\ N)$。 □

现在我们可以证明推论 2.4 了。

推论 *2.4* 的证明。 定理 2.1 表明，定理 1.1 是一个特例。为处理其余情形，我们沿用前面对定理 2.1 的证明，计算 $\rho_\star = \big(\rho_1,\ \ldots,\ \rho_N\big)^T \in \mathbb{C}^N$对 $\star \in \{\circ, \diamond, \otimes\}$ 的值。

哈达玛积 $\circ$。我们有 $m = n = N$，且 $Y_{ij} = (e_i \otimes e_i)(e_j \otimes e_j)^T$。因此，$v_i = e_i \otimes e_i$。对于按列堆叠等距映射 vec： $\mathbb{C}^{N\times N} \to \mathbb{C}^{N^2}$,

对于 $A,\ B\in\mathbb{C}^{N\times\beta}$,

$$\rho_i=\langle \mathrm{vec}(BA^T),v_i\rangle=\langle \mathrm{vec}(BA^T),e_i\otimes e_i\rangle=(BA^T)_{ii}=(AB^T)_{ii}.$$

这就得到了定理 1.2。

克罗内克积 $\otimes$。我们有 $m,\ n\geq 1$ 和 $N=mn$。回忆一下$Y_{n(i_1-1)+i_2,\ n(j_1-1)+j_2}:=(e_{i_1}\otimes f_{i_2})(e_{j_1}\otimes f_{j_2})^T$。因此，对于所有 $1\leq i_1,\ j_1\leq m$，有 $v_{n(i_1-1)+i_2}=e_{i_1}\otimes f_{i_2}$，且 $1\leq i_2,\ j_2\leq n$，其中 $(i_1,\ i_2)$ 按字典序排列。因此，利用按列堆叠向量化 $\mathrm{vec}:\ \mathbb{C}^{n\times m}\to\mathbb{C}^{mn}$，对于 $A\in\mathbb{C}^{m\times\beta}$ 和 $B\in\mathbb{C}^{n\times\beta}$，我们有

$$\rho_{n(i_1-1)+i_2}=\langle \mathrm{vec}(BA^T),e_{i_1}\otimes f_{i_2}\rangle=(BA^T)_{i_2,i_1}.$$

因此，由于 $(i_1,\ i_2)$ 按字典序排列，我们有

$$\rho=\mathrm{vec}(BA^T).$$

卷积 $\diamond$。我们有 $m=n=N$，并且根据定理 2.1 的证明，

$$Y_{ij}:=\left[\sum_{k=1}^{i}e_k\otimes e_{i-k+1}\right]\left[\sum_{l=1}^{j}e_l\otimes e_{j-l+1}\right]^T.$$

因此，$v_i=\sum_{k=1}^{i}e_k\otimes e_{i-k+1}$。通过按列堆叠的 vec算子：$\mathbb{C}^{n\times m}\to\mathbb{C}^{mn}$，我们得到所需的

$$\rho_i=\langle \mathrm{vec}(BA^T),v_i\rangle=\sum_{k=1}^{i}\langle \mathrm{vec}(BA^T),e_k\otimes e_{i-k+1}\rangle=\sum_{k=1}^{i}(BA^T)_{i-k+1,k}.$$

容易看出，在 $\star\in\{\circ,\otimes,\diamond\}$ 的所有情形下，$\mathbf{r}(\star)\geq\mathrm{rk}\ AA^*,\ \mathrm{rk}\,BB^*$，因此 $\mathbf{r}(\star)$ 不会出现在最终的不等式中。这些计算证明了定理 1.3 和定理 1.4。□

4. Qualitative analysis over Hilbert spaces

4.1. 预备知识。我们首先回顾几个标准概念。

在本文余下部分，所有希尔伯特空间均假设为复希尔伯特空间。对于希尔伯特空间 H，我们将 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_H$ 记作其内积，其中第一个变量是线性的，第二个变量是共轭线性的。如果根据上下文可以明确空间，则省略下标。

设 H,K 为希尔伯特空间。我们分别用 $\mathcal{B}_1(H,K)$、$\subset\mathcal{B}_2(H,K)$ 和 $\subset\mathcal{B}(H,K)$ 表示迹类、希尔伯特–施密特类和有界线性算子：$H\to K$。对于每个 $\mathcal{B}_\mu\in\{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}\}$，记 $\mathcal{B}_\mu(H):=\mathcal{B}_\mu(H,H)$。我们分别用 $\|\cdot\|$、$\|\cdot\|_2$（有时为清晰起见用 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_2(H,K)}$）和 $\|\cdot\|_1$ 表示 $\mathcal{B}(H,K)$ 上的算子范数、$\mathcal{B}_2(H,K)$ 上的希尔伯特–施密特范数，以及 $\mathcal{B}_1(H,K)$ 上的迹范数 [5, 9, 19]。对于迹类算子：$H\to H$，记迹为 Tr_H。上下文明确时，省略下标。我们用 $Q^*\in\mathcal{B}(H,K)$ 表示 $Q\in\mathcal{B}(K,H)$ 的伴随算子，因此

$$\langle Qx,y\rangle_H=\langle x,Q^*y\rangle_K\qquad\forall x\in K,\ y\in H.$$

秩一算子。对于 $y \in H$ 和 $x \in K$，我们将由 $\mathbf{\Theta}_{x,\ y}$ 定义的秩一算子 $\mathbf{\Theta}_{x,\ y}\colon\ H \to K$ 记为

$$\mathbf{\Theta}_{x,y}\, w := \langle w, y\rangle_{H}\, x \qquad \forall w \in H.$$

因此，映射 $(x,\ y) \mapsto \mathbf{\Theta}_{x,\ y}$ 关于 x 是线性的，关于 y是共轭线性的。有关更多性质，请参阅 [5, 命题 16.3]。

希尔伯特空间与算子的张量积。H 和 K 的代数张量积记作 $H \otimes_{\text{alg}} K$，即由初等张量 $x \otimes y$生成的向量空间，并对其施加通常的双线性关系，再赋予半双线性形式

$$\langle x_1 \otimes y_1,\ x_2 \otimes y_2\rangle_0 := \langle x_1, x_2\rangle_{H}\, \langle y_1, y_2\rangle_{K},$$

在简单张量上定义，并以半双线性方式延拓 [9, 注 2.6.7]。希尔伯特张量积 $H \otimes K$ 定义为该空间的完备化。对应的完备内积记作 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{H\otimes K}$。

$P \in \mathcal{B}(H)$ $Q \in \mathcal{B}(K)$的张量积在简单张量上的定义为

$$(P \otimes Q)(x \otimes y) := (Px) \otimes (Qy).$$

这定义了一个从 $H \otimes K$ 到其自身的唯一有界线性映射 [9, 命题 2.6.12]

共轭希尔伯特空间。给定希尔伯特空间 $\big(H,\ \langle\cdot,\ \cdot\rangle_{H}\big)$，我们将其共轭空间 $\big(H^{\#},\ \langle\cdot,\ \cdot\rangle_{H^{\#}}\big)$ 记为 H 的等距副本，其加法与 H 中的相同，但数乘 $*$ 以及 $H^{\#}$上的内积定义如下：

$$\lambda * y := \overline{\lambda}\, y \qquad \text{and} \qquad \langle x, y\rangle_{H^{\#}} := \langle y, x\rangle_{H} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ x, y \in H^{\#}.$$

根据这些定义，$\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{H^{\#}}$ 是 $H^{\#}$ 上的一个内积，它对第一个变量是线性的，对第二个变量是共轭线性的 [9,页 131]

向量化等距映射。空间 $\mathcal{B}_2(H^{\#},\ K)$ 配备有希尔伯特–施密特内积

$$\langle X, Y\rangle_{\mathcal{B}_2(H^{\#},K)} := \operatorname{Tr}_{K}(XY^{*}) = \operatorname{Tr}_{H^{\#}}(Y^{*}X) \qquad \forall X, Y \in \mathcal{B}_2(H^{\#}, K).$$

在 $\mathcal{B}_2(H^{\#},\ K)$ 与 $H \otimes K$ 之间存在一个等距映射：

$$\operatorname{vec} : \mathcal{B}_2(H^{\#}, K) \longrightarrow H \otimes K \qquad \text{defined by} \qquad \operatorname{vec}(\mathbf{\Theta}_{y,\overline{x}}) := x \otimes y$$

在秩一算子上 $\mathbf{\Theta}_{y,\ x}\colon\ H^{\#_{-}} \to K$，并按线性方式连续延拓[9, 命题 2.6.9]。

共轭等距映射。共轭等距映射定义为

$$\mathcal{C}_H : H \longrightarrow H^{\#} \qquad \text{defined by} \qquad y \longmapsto \overline{y},$$

其中，^{-}y 表示同一个向量 y，只是将其视为 $H^{\#}$ 的一个元素（采用修改后的数乘和内积）。由于 H 和 $H^{\#}$ 具有

相同的底层加法结构， $\mathcal{C}_H$ 是加法群上的恒等映射，因此自动具有加法性。此外，对于 $\lambda \in \mathbb{C}$， $x \in H$，

$$\mathcal{C}_H(\lambda x) = \overline{\lambda x} = \lambda x = \overline{\lambda} * x = \overline{\lambda} * \overline{x} = \overline{\lambda} * \mathcal{C}_H(x),$$

其中 $\overline{\lambda x} = \lambda x$ 因为 $\mathcal{C}_H$ 是底层集合上的恒等映射。因此$\mathcal{C}_H(\lambda x) = \lambda * \mathcal{C}_H(x)$，所以 $\mathcal{C}_H$是共轭线性的。显然， $\mathcal{C}_H$是等距映射。关于这个从 H 到其 Banach 对偶定义的算子，更多细节可参见 [9, 推论 2.3。2]

转置算子。 给定 $Q \in \mathcal{B}(K, H)$，我们定义相应的转置算子

$$Q^{\#} : H^{\#} \longrightarrow K^{\#} \qquad \text{given by} \qquad Q^{\#} := \mathcal{C}_K \, Q^* \, \mathcal{C}_H^{-1}.$$

那么 $Q^{\#}$ 是有界的。关于此运算的更多性质，参见引理 5.2 和 [9,第 102]页。

有界线性算子的秩。 $P \in \mathcal{B}(K, H)$ 的秩记为 $\mathbf{rk}\ P$，即 P的闭值域的维数。因此 $\mathbf{rk}\ P = \mathbf{rk}\ P^* = \mathbf{rk}(PP^*) = \mathbf{rk}\ P_{\#}$。

正算子与 *Loewner* 序 $\succcurlyeq$。 如果算子 $P \in \mathcal{B}(H)$ 满足 $\langle Px, x\rangle \geq 0$ 对所有 $x \in H$ [5, §3]均成立，则称其为正算子。这些算子是自伴算子。对于自伴算子 P, $Q \in \mathcal{B}(H)$，如果$P - Q$ 为正算子，我们称 $P \succcurlyeq Q$ 。由此得到的序称为 Loewner 序。

4.2. 希尔伯特空间上的主要结果。 现在我们准备讨论希尔伯特空间上正双线性积的构造。

定义 4.1。 设 H_1, H_2, K 是给定的希尔伯特空间。定义

$$H = H_1 \otimes H_2 \qquad \text{and} \qquad \mathcal{H} = K \otimes H.$$

固定 $\mu \in \{1, 2\}$ ，并令 $T \in \mathcal{B}_\mu(\mathcal{H})$。

(1) 对于 K 的标准正交基 $\{e_i\}_{i\in I}$ ，考虑 $T_{ij} := T_{e_i,\ e_j}$ 的“切片”T ，定义如下:

$$\langle T_{ij}\eta,\, \xi\rangle_H := \langle T(e_j \otimes \eta),\, e_i \otimes \xi\rangle_{\mathcal{H}} \qquad (\xi, \eta \in H).$$

于是每个 $T_{ij} \in \mathcal{B}_\mu(H)$。（命题 5.1）

(2) 利用这些切片，定义双线性乘积 $\star = \star(T)$:

$$\star : \mathcal{B}_2(H_1) \times \mathcal{B}_2(H_2) \longrightarrow \mathcal{B}(K)$$

其中，对于 $P \in \mathcal{B}_2(H_1)$ 和 $Q \in \mathcal{B}_2(H_2)$，我们通过以下方式定义 $P \star Q \in \mathcal{B}(K)$

$$\langle P \star Q e_j, e_i\rangle_K := \langle P \otimes Q, T_{ij}\rangle_{\mathcal{B}_2(H)}.$$

由于 $P \otimes Q$ 和 $T_{ij} \in \mathcal{B}_2(H)$ 都成立，上述定义是良定义的。

现在，选取正性给出的乘积:

$$\mathbf{Prod}_+(H_1, H_2; K; \mu; \{e_i\}_{i\in I}) :=$$
$$\big\{\star = \star(T) : \mathcal{B}_2(H_1) \times \mathcal{B}_2(H_2) \longrightarrow \mathcal{B}(K) \;\big|\; T \in \mathcal{B}_\mu(H) \text{ is positive}\big\}.$$

如果在一段讨论中基底保持不变，那么我们使用 $\mathbf{Prod}^+(H_1,\ H_2; K; \mu)$。类似地，如果 $H_1,\ H_2,\ K$ 也保持不变，我们就写作 $\mathbf{Prod}^+(\mu)$。

下面给出主要结果。

定理 B。沿用定义 *4.1* 中的记号，设 H_1、H_2、K 为希尔伯特空间，且设 $\{e_i\}_{i\in I}$ 为 K 的标准正交基。则有以下结论。

(a) 若 $\star = \star(T) \in \mathbf{Prod}^+(\mu)$ 对 $T \in \mathcal{B}_\mu(\mathcal{H})$ 为正，则对所有 $P \in \mathcal{B}_2(H_1)$ 和 $Q \in \mathcal{B}_2(H_2)$，算子 $P \star Q \in \mathcal{B}_\mu(K)$ 满足

$$\|P \star Q\|_\mu \ \le\ \|P\|_2\, \|T\|_\mu\, \|Q\|_2 \qquad (\mu = 1, 2).$$

此外，

$$P \succcurlyeq 0 \ \text{ and } \ Q \succcurlyeq 0 \quad \Longrightarrow \quad P \star Q \succcurlyeq 0.$$

(b) 更强地，若 T 为非零正迹类算子，则对所有非零 $A \in \mathcal{B}_2(\widetilde{\mathcal{H}},\ H_1)$ 和 $B \in \mathcal{B}_2(\widetilde{\mathcal{H}}^{\#},\ H_2)$，其中 $\widetilde{\mathcal{H}}$ 为给定的希尔伯特空间，我们在 *Loewner* 序 $\succcurlyeq$ 下有以下迹类下界：

$$AA^* \star BB^* \ \succcurlyeq\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\min\big(\operatorname{rk} AA^*,\ \operatorname{rk} BB^*,\ \mathbf{r}(n)\big)}\ \mathbf{\Theta}_{\rho_n,\rho_n} \ \succcurlyeq\ 0,$$

其中我们采用约定 $\frac{1}{\infty} := 0$。

三元组序列 $\big(\lambda_n,\ \mathbf{r}(n)\ \rho_n\big)_{n\ge 1}$ 取决于 A、B 和 T，并通过以下正秩一正交算子的谱分解给出：

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, \mathbf{\Theta}_{w_n,w_n} \quad \textit{where } w_n = \sum_{i\in I} e_i \otimes u_i^{(n)} \quad \textit{with } u_i^{(n)} \in H_1 \otimes H_2.$$

利用向量化和转置，我们对 $n \ge 1$ 定义如下：

$$\begin{aligned} \rho_n \ &:=\ \sum_{i\in I} \big\langle \operatorname{vec}(BA^{\#}), u_i^{(n)} \big\rangle_{H_1\otimes H_2}\ e_i \ \in\ K, \\ \textit{and} \qquad \mathbf{r}(n) \ &:=\ \sup\big\{ \operatorname{rk} X : X \in \mathcal{U}(n)\big\}, \\ \textit{where} \qquad \mathcal{U}(n) \ &:=\ \overline{\operatorname{span}}^{\mathcal{B}_2}\big\{\operatorname{vec}^{-1}(u_i^{(n)}) : i \in I\big\} \ \subset\ \mathcal{B}_2(H_1^{\#}, H_2). \end{aligned}$$

备注 4.2。利用定理 B，我们稍后将证明定理 1.5。

备注 4.3（典范表述）。虽然前述依赖基底的方法对于分析至关重要，但我们强调，由此得到的构造最终是典范的：在第 6 节中，我们将对所有秩一可容许算子给出这一结果；见推论 6.2。

备注 4.4。定理 B 的若干特性在定理 A 中看似显而易见，但在算子理论框架下需要明确地重新表述。我们简要指出其中两点。

向量化。在定理 A 中，从$\mathbb{C}^{n\times m} \to \mathbb{C}^{mn}$出发的按列堆叠向量化通常被视为一种坐标层面的约定，它隐含地

将 $\mathbb{C}^m$ 与其对偶空间等同起来，并忽略了共轭的作用。然而，在希尔伯特空间的情形下，不能再隐式地作这种等同。$\mathbb{C}^{n\times m}$ 的正确算子论类比是希尔伯特空间 $\mathcal{B}_2(H_1^{\#},\ H_2)$，而典范等距映射 vec算子：$\mathcal{B}_2(H_1^{\#},\ H_2)$ $\to H_1\otimes H_2$则提供了相应的向量化。

转置。在有限维定理 A 中，矩阵转置A^T 通过 vec(BA^T) 出现在向量化中。如上所述，一旦将向量化理解为 vec：$\mathcal{B}_2(H_1^{\#},H_2)\ \to H_1\otimes H_2$，vec 本身的定义就必然涉及作用于共轭空间 $H_1^{\#}$ 上的算子。因此，在定理 B 中，有限维的 A^T 被规范的 $A^{\#}$ 所取代。

5. Proofs over Hilbert spaces

5.1. 切片与拼接。 在本小节中，我们将希尔伯特空间情形下提取子矩阵的过程形式化，这一过程称为对算子进行切片 。确定这些切片后，我们将介绍一种根据它们重构原算子的方法，称为拼接。虽然本文后文不需要拼接这一步骤，但为求完整，我们仍将其纳入讨论。

命题 5.1。 设 H_1、H_2、K 为给定的希尔伯特空间，并令 $H:=H_1\otimes H_2$ 以及 $\mathcal{H}:=K\otimes H$。固定一个算子类 $\mathcal{B}_\mu\in\{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}\}$。令$T\in\mathcal{B}_\mu(\mathcal{H})$，并对 u、$v\in K$，通过$T_{u,\ v}:\ \ H\to H$ 定义

$$\langle T_{u,v}\eta,\,\xi\rangle_{H}:=\langle T(v\otimes\eta),\,u\otimes\xi\rangle_{\mathcal{H}}\qquad(\xi,\eta\in H).$$

则以下结论成立。

1.（切片。）对于任意 u、$v\in K$，有 $T_{u,\ v}\in\mathcal{B}_\mu(H)$ 以及

$$\|T_{u,v}\|_\mu\le\|T\|_\mu\,\|u\|\,\|v\|.$$

映射 $(u、\ v)\mapsto T_{u,\ v}$ 关于 u 共轭线性，关于 v 线性，并且联合有界：$K\times K\to\mathcal{B}_\mu(H)$。此外，如果 $\left(T^{(n)}\right)_{n\ge1}\subset\mathcal{B}_\mu(\mathcal{H})$ 且 $T=\sum_{n=1}^{\infty}T^{(n)}$ 在 $\mathcal{B}_\mu(\mathcal{H})$ 中收敛，那么对所有 u、$v\in K$，

$$T_{u,v}=\sum_{n=1}^{\infty}T_{u,v}^{(n)}\quad\textit{convergence in }\mathcal{B}_\mu(H).$$

2.（拼接。）对于 K 的一个标准正交基 $\{e_i\}_{i\in I}$，假设 $T_{ij}:=T_{e_i,\ e_j}$。那么，可以按如下方式从 T_{ij}s 重新构造 $T\in\mathcal{B}_\mu$（$\mathcal{H}$）。在有限和上定义Q：

$$Q\Big[\sum_{j\in F}e_j\otimes y_j\Big]:=\sum_{i\in I}e_i\otimes\Big[\sum_{j\in F}T_{ij}(y_j)\Big],\qquad F\subset I\ \textit{finite},\ y_j\in H.$$

于是 Q 扩展为作用于 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子，而扩展后的$Q=T$。特别地，$Q=T\in\mathcal{B}_\mu(\mathcal{H})$ 且 $\|Q\|_\mu=\|T\|_\mu$，对于所选的算子类 $\mathcal{B}_\mu\in\{\mathcal{B},\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2\}$。

证明。第一部分。切片。对于 $u \in K$，令

$$J_u : H \to K \otimes H \quad \text{defined by} \quad J_u\xi := u \otimes \xi \qquad (\xi \in H).$$

则 J_u 是线性的，且算子范数为 $\|J_u\| = \|u\|$。根据定义，

$$\langle T_{u,v}\eta, \xi\rangle_H = \langle T(v \otimes \eta), u \otimes \xi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle TJ_v\eta, J_u\xi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle J_u^* T J_v\eta, \xi\rangle_H.$$

因此，$T_{u,\ v} = J_u^* T J_v$。所以，我们有 $\|T_{u,\ v}\| \le \|J_u^*\|\ \|T\|\ \|J_v\|$。当 $\mu \in \{1, 2\}$ 时，算子类 $\mathcal{B}_\mu$ 是具有性质 $\|AXB\|_\mu \le \|A\|\|X\|_\mu\|B\|$的双边理想，其中 A，B 有界；例如参见 [9, 第 141] 页。这证明了范数界。线性和共轭线性显然成立。第一项断言的最后一部分由以下事实及连续性得出：$T_{u,\ v} = J_u^* T J_v$。

第二部分：拼接。回顾一下，给定希尔伯特空间 H 和指标集I，平方可和序列构成的希尔伯特空间为

$$\ell^2(I; H) := \big\{(x_i)_{i\in I} : x_i \in H \text{ and } \sum_{i\in I}\|x_i\|^2 < \infty\big\} \ \cong\ K \otimes H.$$

J_u 上述定义的伴随算子为 $J_u^*(w \otimes \eta) = \langle w,\ u\rangle\eta$ 在简单张量上。因此，

$$J_{e_i}^*(e_k \otimes \eta) = \delta_{ik}\eta \qquad (i \in I,\ \eta \in H).$$

若 $y = \sum_{k\in I} e_k \otimes \eta_k$ 具有有限支撑，则 $J_{e_k}^* y = \eta_k$ 当 $k \in I$ 时成立，否则为 0。因此

$$\sum_{i\in I}\|J_{e_i}^* y\|_H^2 = \sum_{i\in I}\|\eta_i\|_H^2 = \|y\|_{K\otimes H}^2. \tag{5.1}$$

由这类有限和的稠密性以及范数的连续性，上述结论对所有 $y \in K \otimes H$ 均成立。

设 $y = \sum_{j\in F} e_j \otimes y_j$ 且 F 有限。对任意 $k \in I$，利用前述切片恒等式 $T_{kj} = J_{e_k}^* T J_{e_j}$，我们计算得

$$\begin{aligned} J_{e_k}^*(Qy) &= J_{e_k}^* \sum_{i\in I} e_i \otimes \Big[\sum_{j\in F} T_{ij}(y_j)\Big] \\ &= \sum_{j\in F} T_{kj}(y_j) = \sum_{j\in F} J_{e_k}^*\, T\,(e_j \otimes y_j) = J_{e_k}^*(Ty). \end{aligned}$$

因此，对所有 $k \in I$，$J_{e_k}^*(Ty - Qy) = 0$。应用 (5.1) 得

$$\|Ty - Qy\|_{K\otimes H}^2 = \sum_{k\in I}\|J_{e_k}^*(Ty - Qy)\|_H^2 = 0.$$

因此，对每个有限支撑的 $y \in \mathcal{H}$，$Qy = Ty$ 均成立。因此，由于 T 有界，

$$\|Qy\| = \|Ty\| \le \|T\|\,\|y\|.$$

由此可得，在 $K \otimes H$ 上，$\|Q\| = \|T\|$。

为证明 Schatten 类稳定性，令 $\mathcal{J}\colon K\otimes H\to \ell^2(I;H)$ 为映射

$$\mathcal{J}(z):=\big(J_{e_i}^{*}z\big)_{i\in I},$$

根据 (5.1)，它是一个等距映射。其伴随算子是映射

$$\mathcal{J}^{*}:\ell^2(I;H)\to K\otimes H,\qquad \mathcal{J}^{*}((y_i)_{i\in I})=\sum_{i\in I}e_i\otimes y_i,$$

以及 $\|\mathcal{J}\|=\|\mathcal{J}^{*}\|=1$，其中 $\mathcal{J}^{*}\mathcal{J}=\mathrm{Id}_{K\otimes H}$。定义块算子

$$S:\ell^2(I;H)\to\ell^2(I;H),\qquad S((y_j)):=\Big(\sum_{j\in I}T_{ij}(y_j)\Big)_{i\in I}.$$

在有限支撑向量构成的稠密子空间上，$S=\mathcal{J}\,T\,\mathcal{J}^{*}$。因此，由稠密性可知，该结论对所有 $\ell^2(I;H)$ 都成立。若 $T\in\mathcal{B}_\mu(\mathcal{H})$ 且 $\mu\in\{1,2\}$，则由双边理想性质可得（参见 [9, p. 141，关于 HS], [5, §18], [19, 定理 7.8]）：

$$\begin{aligned}S=\mathcal{J}T\mathcal{J}^{*}\in\mathcal{B}_\mu(\ell^2(I;H))&\implies Q=\mathcal{J}^{*}S\mathcal{J}\in\mathcal{B}_\mu(\mathcal{H})\\&\implies \|Q\|_\mu\le\|S\|_\mu\le\|T\|_\mu.\end{aligned}$$

由于 $Q=T$，我们得出 $\|Q\|_\mu=\|T\|_\mu$。 □

5.2. 转置与向量化。 我们回顾第 4.1 小节中引入的转置算子和向量化等距映射的一些性质，这些性质将在后文中用到。

引理 5.2。 设 H_1、H_2、K 为希尔伯特空间。对于任意有界算子$Q\in\mathcal{B}(H_1,H_2)$，我们有：

1. 若 $Q\in\mathcal{B}_\mu(H_1,H_2)$ 对某个 $\mathcal{B}_\mu\in\{\mathcal{B},\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2\}$ 成立，则 $Q^{\#}\in\mathcal{B}_\mu(H_2^{\#},H_1^{\#})$ 且 $\|Q^{\#}\|_\mu=\|Q\|_\mu$。 *2.* 若 $R\in\mathcal{B}(K,H_1)$，则 $(QR)^{\#}=R^{\#}\,Q^{\#}$。 *3.* 伴随算子与转置满足 $(Q^{*})^{\#}=(Q^{\#})^{*}=\mathcal{C}_{H_2}\,Q\,\mathcal{C}_{H_1}^{-1}$。

证明。 对于 (1)，由于$\mathcal{C}_{H_1}$ 和 $\mathcal{C}_{H_2}$ 都是共轭线性等距映射，$Q^{\#}$ 是线性且有界的。利用 $\mathcal{C}_{H_1}$ 和 $\mathcal{C}_{H_2}$ 都是（共轭线性）等距映射这一点，可以推出 Schatten 类的稳定性。

为证明 (2)，令 $R\in\mathcal{B}(K,\ H_1)$。根据定义

$$\begin{aligned}(QR)^{\#}&=\mathcal{C}_K\,(QR)^{*}\,\mathcal{C}_{H_2}^{-1}=\mathcal{C}_K\,R^{*}Q^{*}\,\mathcal{C}_{H_2}^{-1}\\&=\big(\mathcal{C}_KR^{*}\mathcal{C}_{H_1}^{-1}\big)\big(\mathcal{C}_{H_1}Q^{*}\mathcal{C}_{H_2}^{-1}\big)=R^{\#}Q^{\#}.\end{aligned}$$

最后，为证明 (3)，令 $y\in H_2^{\#}$ 和 $x\in H_1^{\#}$，并计算：

$$\begin{aligned}&\langle Q^{\#}\overline{y},\ \overline{x}\rangle_{H_1^{\#}}=\langle\mathcal{C}_{H_1}Q^{*}\mathcal{C}_{H_2}^{-1}\overline{y},\ \mathcal{C}_{H_1}x\rangle_{H_1^{\#}}=\langle\mathcal{C}_{H_1}Q^{*}y,\ \mathcal{C}_{H_1}x\rangle_{H_1^{\#}}\\&=\langle x,Q^{*}y\rangle_{H_1}=\langle Qx,y\rangle_{H_2}=\langle\mathcal{C}_{H_2}y,\mathcal{C}_{H_2}Qx\rangle_{H_2^{\#}}=\langle\overline{y},\mathcal{C}_{H_2}Q\mathcal{C}_{H_1}^{-1}\overline{x}\rangle_{H_2^{\#}}.\end{aligned}$$

因此 $(Q^{\#})^{*}=\mathcal{C}_{H_2}Q\mathcal{C}_{H_1}^{-1}$。对于 $Q^{*}\colon\ H_2\to H_1$，根据定义，我们立即得到 $(Q^{*})^{\#}=\mathcal{C}_{H_2}Q\mathcal{C}_{H_1}^{-1}$。□

引理 5.3。设 H_1、H_2、$\widetilde{\mathcal{H}}$ 是希尔伯特空间，且 $X \in \mathcal{B}_2(H_1^{\#}$、$H_2)$。

1. 对所有 $u \in H_1$ 和 $v \in H_2$，以下结论成立：

$$\langle \mathrm{vec}(X),\, u \otimes v \rangle_{H_1 \otimes H_2} = \big\langle X\,\overline{u},\, v \big\rangle_{H_2}.$$

2. 对所有 $A \in \mathcal{B}_2(\widetilde{\mathcal{H}}, H_1)$ 和 $B \in \mathcal{B}_2(\widetilde{\mathcal{H}}^{\#}, H_2)$，以下结论成立：

$$AA^* \otimes BB^*\,\mathrm{vec}(X) = \mathrm{vec}(BB^* X (A^{\#})^* A^{\#}).$$

证明。我们先证明第一个断言。只需对秩一算子 $X = \mathbf{\Theta}_{y,x}$ 证明，其中 $x \in H_1$ 和 $y \in H_2$，因为有限秩算子是这类秩一算子的线性组合，且在 $\mathcal{B}_2(H_1^{\#}, H_2)$ 中稠密，而第一个断言两边定义的都是 X 上的有界线性映射。利用 $\mathrm{vec}(\mathbf{\Theta}_{y,x}) = x \otimes y$，可得

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{vec}(\mathbf{\Theta}_{y,\overline{x}}),\, u \otimes v \rangle_{H_1 \otimes H_2} &= \langle x,\, u \rangle_{H_1} \langle y,\, v \rangle_{H_2} \\ &= \langle \overline{u}, \overline{x} \rangle_{H_1^{\#}} \langle y,\, v \rangle_{H_2} = \big\langle \mathbf{\Theta}_{y,\overline{x}}\, \overline{u},\, v \big\rangle_{H_2}.\end{aligned}$$

这就证明了所需的恒等式。

为了证明第二个恒等式，设 $X = \mathbf{\Theta}_{y,x}$ 对于 $x \in H_1^{\#}$ 和 $y \in H_2$ 是秩一算子。于是，根据定义，$\mathrm{vec}(\mathbf{\Theta}_{y,x}) = x \otimes y$，因此，

$$\begin{aligned}AA^* \otimes BB^* \mathrm{vec}(\mathbf{\Theta}_{y,\overline{x}}) &= AA^* \otimes BB^* (x \otimes y) \\ &= (AA^* x) \otimes (BB^* y) = \mathrm{vec}(\mathbf{\Theta}_{BB^* y, \overline{AA^* x}}).\end{aligned}$$

另一方面，对于 $z \in H_1^{\#}$，利用引理 5.2，我们有

$$\begin{aligned}BB^*\, \mathbf{\Theta}_{y,\overline{x}} (A^{\#})^* A^{\#}(\overline{z}) &= BB^*\, \mathbf{\Theta}_{y,\overline{x}}\, \mathcal{C}_{H_1} A \mathcal{C}_{\widetilde{\mathcal{H}}}^{-1} \mathcal{C}_{\widetilde{\mathcal{H}}} A^* \mathcal{C}_{H_1}^{-1}(\overline{z}) \\ &= BB^*\, \mathbf{\Theta}_{y,\overline{x}}\, \overline{AA^* z} = \langle \overline{AA^* z}, \overline{x} \rangle_{H_1^{\#}} BB^* y = \langle x, AA^* z \rangle_{H_1} BB^* y \\ &= \langle AA^* x, z \rangle_{H_1} BB^* y = \langle \overline{z}, \overline{AA^* x} \rangle_{H_1^{\#}} BB^* y = \mathbf{\Theta}_{BB^* y, \overline{AA^* x}}(\overline{z}).\end{aligned}$$

因此，利用前面的计算

$$\mathrm{vec}\big(BB^*\, \mathbf{\Theta}_{y,\overline{x}} (A^{\#})^* A^{\#}\big) = \mathrm{vec}\big(\mathbf{\Theta}_{BB^* y, \overline{AA^* x}}\big) = AA^* \otimes BB^* \mathrm{vec}(\mathbf{\Theta}_{y,\overline{x}}).$$

因此，所需的恒等式对秩一 X 成立，并由连续性推广至 $\mathcal{B}_2(H_1^{\#}, H_2)$。□

5.3. **秩一 () 的定理 B** $T = T(\star)$。为了证明定理 B，我们先处理可容许的秩一正算子的情形。首先给出以下引理。

引理 5.4（秩一 T）。设 H_1、H_2、K 为希尔伯特空间，设 $H := H_1 \otimes H_2$、$\mathcal{H} := K \otimes H$，并给定 K 的一个标准正交基 $\{e_i\}_{i \in I}$。对于秩一正算子 $T = \mathbf{\Theta}_{w,w} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，记

$$w = \sum_{i \in I} e_i \otimes u_i, \qquad u_i \in H, \qquad \sum_{i \in I} \|u_i\|^2 < \infty.$$

那么，对于 i、$j \in I$，切片由 $T_{e_i,\ e_j} = \mathbf{\Theta}_{u_i,\ u_j}$ 给出。对于 $\star = \star(T)$，有 $P \star Q \in \mathcal{B}_1(K)$，对所有 $P \in \mathcal{B}_2(H_1)$ 以及 $Q \in \mathcal{B}_2(H_2)$ 均成立，其中

$$\|P \star Q\|_1 \ \leq \|P\|_2 \ \|Q\|_2 \ \|w\|^2,$$
$$\textit{and} \qquad \langle (P \star Q)e_j, e_i \rangle_K \ = \langle (P \otimes Q)u_j,\, u_i \rangle_H \qquad (i, j \in I).$$

此外，当 $P \succcurlyeq 0$ 且 $Q \succcurlyeq 0$ 时，$P \star Q \succcurlyeq 0$

证明。由于 $w = \sum_{k \in I} e_k \otimes u_k$，根据定义，对于任意 $j \in I$ 和 $\eta \in H$，有

$$\begin{aligned} T(e_j \otimes \eta) &= \mathbf{\Theta}_{w,w}(e_j \otimes \eta) = \langle e_j \otimes \eta, w \rangle_{\mathcal{H}}\, w \\ &= \Big(\sum_{k \in I} \langle e_j, e_k \rangle_K \, \langle \eta, u_k \rangle_H \Big)\, w = \langle \eta, u_j \rangle_H \, w. \end{aligned}$$

因此，对于 ξ，$\eta \in H$，根据定义有

$$\begin{aligned} \langle T_{ij}\eta, \xi \rangle_H &= \langle T(e_j \otimes \eta), e_i \otimes \xi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \eta, u_j \rangle_H \, \langle w, e_i \otimes \xi \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle \eta, u_j \rangle_H \, \langle u_i, \xi \rangle_H = \big\langle \langle \eta, u_j \rangle_H \, u_i, \xi \big\rangle_H = \langle \mathbf{\Theta}_{u_i,u_j}\, \eta, \xi \rangle_H. \end{aligned}$$

因此 $T_{ij} = \mathbf{\Theta}_{u_i,\ u_j}$，从而证明了第一个断言。

接下来，由 [5, 命题 16.3] 可得

$$\begin{aligned} \langle (P \star Q)e_j, e_i \rangle_K &:= \operatorname{Tr}_H(T_{ij}^*(P \otimes Q)) = \operatorname{Tr}_H(\mathbf{\Theta}_{u_j,u_i}(P \otimes Q)) \\ &= \operatorname{Tr}_H(\mathbf{\Theta}_{u_j,(P \otimes Q)^* u_i}) = \langle (P \otimes Q)u_j, u_i \rangle_H. \end{aligned}$$

最后，定义 $V\colon\ K \to H$，令 $Ve_i := u_i$，并将其线性延拓。由于 $\|V\|_2^2 = \sum_{i \in I} \|u_i\|^2 = \|w\|^2 < \infty$，因此$V \in \mathcal{B}_2(K,\ H)$。此外，对于希尔伯特–施密特算子 P，Q，其乘积 $P \otimes Q$ 是希尔伯特–施密特算子。由于两个希尔伯特–施密特算子的乘积是迹类 [9, p。 141],

$$P \star Q = V^*(P \otimes Q)V \in \mathcal{B}_1(K) \quad \text{and} \quad \|P \star Q\|_1 \leq \|V\|_2^2 \|P\|_2 \|Q\|_2.$$

这也证明了最后的正性推论，从而完成证明。 □

现在我们陈述并证明秩一 $T = T(\star)$ 情形下的定理 B。

定理 5.5。设 H_1、H_2、K 是希尔伯特空间，且令 $H = H_1 \otimes H_2$ 和 $\mathcal{H} = K \otimes H$。设 $\{e_i\}_{i \in I}$ 是 K 的标准正交基。对于秩一算子 $T = \mathbf{\Theta}_{w,\ w} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，其中 $w \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$，记

$$w = \sum_{i \in I} e_i \otimes u_i, \qquad u_i \in H, \qquad \sum_{i \in I} \|u_i\|^2 < \infty.$$

设 $\widetilde{\mathcal{H}}$ 是给定的希尔伯特空间，且 $A \in \mathcal{B}_2(\widetilde{\mathcal{H}}, H_1)$和 $B \in \mathcal{B}_2(\widetilde{\mathcal{H}}^{\#}, H_2)$均非零。那么

$$\rho \ := \ \sum_{i \in I} \langle \operatorname{vec}(BA^{\#}), u_i \rangle_{H_1 \otimes H_2} \ e_i \ \in \ K.$$

事实上，$\|\rho\| \leq \|A\|_2 \, \|B\|_2 \, \sqrt{\|T\|_2 < \infty}$。此外，对于 $\star = \star(T) \in \mathbf{Prod}(\{e_i\}_{i \in I})$，我们有

$$AA^* \star BB^* \ \succcurlyeq \ \frac{1}{\min\big(\operatorname{rk} AA^*, \operatorname{rk} BB^*, \mathbf{r}(\star)\big)}\, \mathbf{\Theta}_{\rho,\rho} \ \succcurlyeq \ 0,$$

其中我们约定 $\frac{1}{\infty} := 0$，并定义

$$\mathbf{r}(\star) := \sup\big\{\operatorname{rk} X : X \in \mathcal{U}(\star)\big\},$$
$$\textit{where} \quad \mathcal{U}(\star) := \overline{\operatorname{span}}^{\mathcal{B}_2}\big\{\operatorname{vec}^{-1}(u_i) : i \in I\big\} \subset \mathcal{B}_2(H_1^{\#}, H_2).$$

此外，标量 $1/\min\big(\operatorname{rk} AA^*, \operatorname{rk} BB^*, \mathbf{r}(\star)\big)$ 是最佳的通用常数，即对所有 A, B 而言，无法将其统一改进。

证明。**第一部分。不等式。** 回顾引理 5.4 可知

$$\langle AA^* \star BB^* e_j, e_i\rangle_K = \langle AA^* \otimes BB^* u_j, u_i\rangle_H.$$

令 $X_i := \operatorname{vec}^{-1}(u_i) \in \mathcal{B}_2(H_1^{\#}, H_2)$。

步骤 *1*。格拉姆矩阵结构。回顾，对于 $u_i = \operatorname{vec}(X_i)$，我们有

$$\langle (AA^* \star BB^*)e_j, e_i\rangle_K = \big\langle (AA^* \otimes BB^*)\operatorname{vec}(X_j),\, \operatorname{vec}(X_i)\big\rangle_H.$$

将引理 5.3 应用于上述内容可得

$$\langle (AA^* \star BB^*)e_j, e_i\rangle_K = \big\langle \operatorname{vec}\big(BB^* X_j (A^{\#})^* A^{\#}\big), \operatorname{vec}(X_i)\big\rangle_H$$
$$= \langle BB^* X_j (A^{\#})^* A^{\#}, X_i\rangle_{\mathcal{B}_2(H_1^{\#}, H_2)} = \operatorname{Tr}_{H_2}\Big(BB^* X_j (A^{\#})^* A^{\#} X_i^*\Big)$$
$$= \operatorname{Tr}_{H_1^{\#}}\Big(X_i^* BB^* X_j (A^{\#})^* A^{\#}\Big) = \operatorname{Tr}_{\widetilde{\mathcal{H}}^{\#}}\Big(A^{\#} X_i^* BB^* X_j (A^{\#})^*\Big)$$
$$= \operatorname{Tr}_{\widetilde{\mathcal{H}}^{\#}}\Big(\big(A^{\#} X_i^* B\big)\,\big(B^* X_j (A^{\#})^*\big)\Big) = \Big\langle B^* X_j (A^{\#})^*, B^* X_i (A^{\#})^*\Big\rangle_{\mathcal{B}_2(\widetilde{\mathcal{H}}^{\#})},$$

这里用到了迹的循环性质，因为上述涉及的所有算子都是希尔伯特–施密特算子（参见 [5, §18] and [9,p. 141]）。因此我们有

$$\langle (AA^* \star BB^*)e_j, e_i\rangle_K = \langle G_j, G_i\rangle_{\mathcal{B}_2(\widetilde{\mathcal{H}}^{\#})} \qquad (i, j \in I), \tag{5.6}$$

其中 $G_j := B^* X_j (A^{\#})^* \in \mathcal{B}_2(\widetilde{\mathcal{H}}^{\#})$。

步骤 *2*。秩的考量。如果 $\min(\operatorname{rk} AA^*, \operatorname{rk} BB^*, \mathbf{r}(\star)) = \infty$，则无须证明。因此，假设 $\min(\operatorname{rk} AA^*, \operatorname{rk} BB^*, \mathbf{r}(\star)) < \infty$。

对于有限支撑的 $x = \sum_{i\in I} x_i e_i \in K$，由 (5.6) 可得

$$\langle (AA^* \star BB^*)x, x\rangle_K = \sum_{i,j\in I} \overline{x_i}\, x_j \,\langle (AA^* \star BB^*)e_j, e_i\rangle_K$$
$$= \sum_{i,j\in I} \overline{x_i}\, x_j \,\langle G_j, G_i\rangle_{\mathcal{B}_2(\widetilde{\mathcal{H}}^{\#})} = \Big\langle \sum_{j\in I} x_j G_j,\ \sum_{i\in I} x_i G_i\Big\rangle_{\mathcal{B}_2(\widetilde{\mathcal{H}}^{\#})} = \|G(x)\|^2_{\mathcal{B}_2(\widetilde{\mathcal{H}}^{\#})},$$

其中，对于 $X(x) := \sum_{j\in I} x_j X_j$，我们令

$$G(x) := \sum_{j\in I} x_j G_j = B^*\Big(\sum_{j\in I} x_j X_j\Big)(A^{\#})^* = B^* X(x)(A^{\#})^* \in \mathcal{B}_2(\widetilde{\mathcal{H}}^{\#}).$$

注意：

$$\operatorname{rk} G(x) = \operatorname{rk} B^* X(x)(A^{\#})^* \le \min(\operatorname{rk} B^*, \operatorname{rk} X(x), \operatorname{rk}(A^{\#})^*)$$
$$= \min(\operatorname{rk} BB^*, \operatorname{rk} X(x), \operatorname{rk} AA^*) \le \min(\operatorname{rk} BB^*, \mathbf{r}(\star), \operatorname{rk} AA^*) < \infty.$$

因此， $G(x)$ 的秩有限，且 $r(x) := \operatorname{rk} G(x) \le \min(\operatorname{rk} BB^*, \mathbf{r}(\star), \operatorname{rk} AA^*)$。

步骤3。迹-秩不等式。设 $G = G(x) \in \mathcal{B}_2(\widetilde{\mathcal{H}}^{\#})$ 具有有限秩 $r = r(x)$。取 $\{h_1, \dots, h_r\}$ 为 $(\ker G)^{\perp}$ 的正交归一基，并将其扩展为 $\{h_j\}_{j\in J}$ 为 $\widetilde{\mathcal{H}}^{\#}$ 的正交归一基。于是，对于 $j \in J \setminus \{1, \dots, r\}$，有 $Gh_j = 0$，因此

$$\operatorname{Tr}(G) = \sum_{j\in J} \langle Gh_j, h_j\rangle = \sum_{j=1}^{r} \langle Gh_j, h_j\rangle.$$

因此，先在 $\mathbb{C}^r$ 中应用柯西–施瓦茨不等式，再在 $\widetilde{\mathcal{H}}^{\#}$ 中应用柯西–施瓦茨不等式，得到

$$\begin{aligned} |\operatorname{Tr}(G)|^2 &= \left|\sum_{j=1}^{r} \langle Gh_j, h_j\rangle\right|^2 \le r \sum_{j=1}^{r} |\langle Gh_j, h_j\rangle|^2 \\ &\le r \sum_{j=1}^{r} \|Gh_j\|^2 \le r \sum_{j\in J} \|Gh_j\|^2 = r\|G\|^2_{\mathcal{B}_2(\widetilde{\mathcal{H}}^{\#})}. \end{aligned}$$

我们将在以下步骤中使用这一不等式。

步骤4。范数界。我们将证明 $\rho \in K$。事实上，假设 $F \subset K$ 有限，并计算

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{i\in F} \langle \operatorname{vec}(BA^{\#}), u_i\rangle_H e_i \Big\|^2 &= \sum_{i\in F} |\langle \operatorname{vec}(BA^{\#}), u_i\rangle_H|^2 \\ \le \sum_{i\in F} \|\operatorname{vec}(BA^{\#})\|_H^2 \, \|u_i\|_H^2 &\le \|BA^{\#}\|^2_{\mathcal{B}_2(H_1^{\#}, H_2)} \sum_{i\in I} \|u_i\|_H^2 \\ &= \|BA^{\#}\|^2_{\mathcal{B}_2(H_1^{\#}, H_2)} \|w\|^2_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

因此， $\rho \in K$，而 $\|BA^{\#}\|_{\mathcal{B}_2(H^{\#}{}_1, H_2)} \le \|A\|_{\mathcal{B}_2(\widetilde{\mathcal{H}}, H_1)} \|B\|_{\mathcal{B}_2(\widetilde{\mathcal{H}}^{\#}, H_2)}$ 给出了 ρ 上所需的范数界。

步骤 5。所需的不等式。由前面的步骤可得

$$|\operatorname{Tr}(G(x))|^2 \le \min(\operatorname{rk} BB^*, \mathbf{r}(\star), \operatorname{rk} AA^*) \, \|G(x)\|^2_{\mathcal{B}_2(\widetilde{\mathcal{H}}^{\#})}.$$

回忆一下， $G_j = B^* X_j (A^{\#})^* \in \mathcal{B}_2(\widetilde{\mathcal{H}}^{\#})$，其迹为

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}_{\widetilde{\mathcal{H}}^{\#}}(G_j) &= \operatorname{Tr}_{\widetilde{\mathcal{H}}^{\#}}(B^* X_j (A^{\#})^*) = \operatorname{Tr}_{H_2}(X_j (BA^{\#})^*) \\ = \langle X_j, BA^{\#}\rangle_{\mathcal{B}_2(H_1^{\#}, H_2)} &= \overline{\langle BA^{\#}, X_j\rangle}_{\mathcal{B}_2(H_1^{\#}, H_2)} = \overline{\langle \operatorname{vec}(BA^{\#}), u_j\rangle}_H \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}|\operatorname{Tr}(G(x))|^2 &= \left|\sum_{j\in I} x_j \operatorname{Tr}(G_j)\right|^2 \\ &= \left|\sum_{j\in I} x_j \overline{\langle \operatorname{vec}(BA^{\#}), u_j\rangle}_H\right|^2 = |\langle x,\rho\rangle_K|^2 \\ &= \langle x,\rho\rangle_K\langle \rho,x\rangle_K = \Big\langle \langle x,\rho\rangle_K \rho, x\Big\rangle_K = \langle \mathbf{\Theta}_{\rho,\rho}\, x, x\rangle_K .\end{aligned}$$

因此，利用步骤 2 中的计算以及本步骤开头的不等式，我们得出

$$\Big\langle \big(AA^* \star BB^* - \frac{1}{\min(\operatorname{rk} AA^*, \operatorname{rk} BB^*, \mathbf{r}(\star))}\, \mathbf{\Theta}_{\rho,\rho}\,\big)x, x\Big\rangle_K \geq 0$$

对于所有有限支撑的 $x \in K$。由于此类向量在 K 中稠密，且二次型是连续的，因此该结论可推广到所有 $x \in K$，证毕。

第二部分. 最优性。我们将此分为两种情况。

情况 *1.* 设$\mathbf{r}(\star) < \infty$。此时上确界可以取到，因此存在 $X_0 \in \mathcal{U}(\star)$，使得 $\operatorname{rk} X_0 = \mathbf{r}(\star)$。于是，由 X_0 的奇异值分解可知，存在正交归一的 $\{x_1, \dots, x_{\mathbf{r}(\star)}\} \subset H_1^{\#}$ 和 $\{y_1, \dots, y_{\mathbf{r}(\star)}\} \subset H_2$，以及正实数 $\{\overline{\sigma_1, \dots}, \sigma_{\mathbf{r}(\star)}\}$，使得

$$X_0 = \sum_{j=1}^{\mathbf{r}(\star)} \sigma_j\, \mathbf{\Theta}_{y_j, \overline{x_j}} = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j\, \mathbf{\Theta}_{y_j, \overline{x_j}} + \sum_{j=r+1}^{\mathbf{r}(\star)} \sigma_j\, \mathbf{\Theta}_{y_j, \overline{x_j}},$$

其中 $r := \min\{\dim H_1, \dim H_2, \dim \mathcal{H}, \mathbf{r}(\star)\}$。设 $\{z_1, \dots, z_r\} \subset \mathcal{H}$ 是一个正交归一集，并定义 $A\colon \widetilde{\mathcal{H}} \to H_1$ 和 $B\colon \widetilde{\mathcal{H}}^{\#} \to H_2$ 如下：

$$A = \sum_{j=1}^{r} \mathbf{\Theta}_{x_j, z_j} \qquad \text{and} \qquad B = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j^{-1}\, \mathbf{\Theta}_{y_j, \overline{z_j}}\,.$$

因此 $\operatorname{rk} AA^* = \operatorname{rk} BB^* = r$，于是 $\min(\operatorname{rk} AA^*, \operatorname{rk} BB^*, \mathbf{r}(\star)) = r$。由于

$$B^* = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j^{-1}\, \mathbf{\Theta}_{\overline{z_j}, y_j}, \qquad (A^{\#})^* = \sum_{j=1}^{r} \mathbf{\Theta}_{\overline{x_j}, \overline{z_j}},$$

由此可得

$$B^* X_0 (A^{\#})^* = \sum_{j=1}^{r} \mathbf{\Theta}_{\overline{z_j}, \overline{z_j}}\,.$$

因此 $\operatorname{Tr}(B^* X_0 (A^{\#})^*) = r = \|B^* X_0 (A^{\#})^*\|_2^2 = \operatorname{rk}(B^* X_0 (A^{\#})^*)$，所以第一部分步骤 5 中的迹-秩不等式取等号。在

换言之，存在 $x_0 \in K$，以及 A 和 B （如上所述），使得 $\min(\mathrm{rk}\ AA^*,\ \mathrm{rk}\, BB^*,\ \mathbf{r}(\star)) = r$ 且

$$\left\langle \left(AA^* \star BB^* - \frac{1}{r}\, \mathbf{\Theta}_{\rho,\rho} \right) x_0, x_0 \right\rangle_K = 0.$$

因此，对于任意 $\epsilon > 0$,

$$\left\langle \left(AA^* \star BB^* - (1/r + \epsilon)\, \mathbf{\Theta}_{\rho,\rho} \right) x_0, x_0 \right\rangle_K < 0.$$

因此，无法在所有 A, B 上一致地改进系数 $1/\min(\mathrm{rk}\, AA^*, \mathrm{rk}\, BB^*, \mathbf{r}(\star))$。

情况 *2.* 假设 $\mathbf{r}(\star) = \infty$。那么，与前一种情况类似，设$X_0 \in \mathcal{U}(\star)$的奇异值分解为

$$X_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j\, \mathbf{\Theta}_{y_j, \overline{x_j}} = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j\, \mathbf{\Theta}_{y_j, \overline{x_j}} + \sum_{j=r+1}^{\infty} \sigma_j\, \mathbf{\Theta}_{y_j, \overline{x_j}},$$

~其中 $r = \min\{\dim\ H_1, \dim H_2, \dim\ \mathcal{H}, \mathbf{r}(\star)\}$，若右侧有限；否则，令 r 为任意正数。然后，按照上述情况中的相同步骤构造 A 和 B。□

5.4. **定理 1.5 的证明**。

定理 *1.5* 的证明。若 $\min(\mathrm{rk}\ AA^*,\ \mathrm{rk}\, BB^*) = \infty$，则无须证明，因此不妨设其有限。我们沿用定理 5.5 中的构造和记号。设 $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{P}}$ 和 $\{f_\beta\}_{\beta \in \mathrm{Q}}$ 分别是 H_1 和H_2的标准正交基。我们选择

$$K = H_1 \otimes H_2 \qquad \text{and} \qquad \{e_\alpha \otimes f_\beta\}_{(\alpha,\beta) \in \mathrm{P} \times \mathrm{Q}}$$

作为 K的标准正交基。我们将证明分为两部分。

第一部分。$\max(\mathrm{rk}\ AA^*,\ \mathrm{rk}\, BB^*) < \infty$。于是存在有限的 $\mathrm{P}' \subset \mathrm{P}$，使得 $\mathrm{Ran}(AA^*) =$ 张成空间$\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{P}'}$；也存在有限的 $\mathrm{Q}' \subset \mathrm{Q}$，使得 $\mathrm{Ran}(BB^*) =$张成空间$\{f_\beta\}_{\beta \in \mathrm{Q}'}$。

步骤 *1.* 可容许向量。令$\mathbf{1}$ 表示示性函数，考虑向量

$$w := \sum_{(\alpha,\beta) \in \mathrm{P} \times \mathrm{Q}} (e_\alpha \otimes f_\beta) \otimes (\mathbf{1}_{(\alpha,\beta) \in \mathrm{P}' \times \mathrm{Q}'} e_\alpha \otimes f_\beta).$$

由于 P' 和 Q' 都是有限的，$w \in \mathcal{H} := K \otimes (H_1 \otimes H_2)$。此外，定理 5.5 中的向量 $\{u_i\}_{i \in I}$ 变为

$$\left\{ \mathbf{1}_{(\alpha,\beta) \in \mathrm{P}' \times \mathrm{Q}'} e_\alpha \otimes f_\beta \right\}_{\alpha \in \mathrm{P}, \beta \in \mathrm{Q}}.$$

步骤 *2*。$\star$ 乘积和不等式。我们选择 $\star$ 乘积

$$\star = \star(\mathbf{\Theta}_{w,w}) \in \mathbf{Prod}_+(H_1, H_2; H_1 \otimes H_2; \{e_\alpha \otimes f_\beta\}_{(\alpha,\beta) \in \mathrm{P} \times \mathrm{Q}}).$$

由于 AA^* 在 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in \mathrm{P}'}$ 的张成空间之外为零，且 BB^* 在 $\{f_\beta\}_{\beta\in \mathrm{Q}'}$ 的张成空间之外为零，根据引理 5.4，我们有

$$AA^* \star BB^* = AA^* \otimes BB^*.$$

因此，由定理 5.5 可得

$$AA^* \otimes BB^* \succcurlyeq \frac{1}{\min\left(\operatorname{rk} AA^*, \operatorname{rk} BB^*, \mathbf{r}(\star)\right)} \mathbf{\Theta}_{\rho,\rho} \succcurlyeq 0,$$

其中

$$\rho := \sum_{(\alpha,\beta)\in \mathrm{P}\times \mathrm{Q}} \langle \operatorname{vec}(BA^{\#}), \mathbf{1}_{(\alpha,\beta)\in \mathrm{P}'\times \mathrm{Q}'} e_\alpha \otimes f_\beta \rangle_{H_1\otimes H_2}\, e_\alpha \otimes f_\beta \in K.$$

步骤*3.* 证明 ρ = vec算子($BA^{\#}$)。令 P_1 为 H_1 在张成空间$\{e_\alpha\}_{\alpha\in \mathrm{P}'}$ 上的正交投影，并令 P_2 为 H_2在张成空间$\{f_\beta\}_{\beta\in \mathrm{Q}'}$上的正交投影。由于 Ran($AA^*$) = Ran A = 张成空间$\{e_\alpha\}_{\alpha\in \mathrm{P}'}$，我们有$P_1A = A$。由引理 5.2，得到 $A^{\#} = (P_1A)^{\#} = A^{\#}P_1^{\#}$ 。类似地，Ran(BB^*) = Ran(B) = 张成空间$\{f_\beta\}_{\beta\in \mathrm{Q}'}$ 意味着 $P_2B = B$，因此

$$BA^{\#} = (P_2B)(A^{\#}P_1^{\#}) = P_2\,(BA^{\#})\,P_1^{\#}.$$

因此，

$$(BA^{\#})\,\overline{e_\alpha} = 0 \quad (\alpha \notin \mathrm{P}'), \qquad \langle (BA^{\#})\,\overline{e_\alpha},\, f_\beta\rangle = 0 \quad (\beta \notin \mathrm{Q}').$$

利用引理 5.3，可得

$$\langle \operatorname{vec}(BA^{\#}),\, e_\alpha \otimes f_\beta\rangle_{H_1\otimes H_2} = \left\langle (BA^{\#})\,\overline{e_\alpha},\, f_\beta \right\rangle_{H_2},$$

因此我们推得

$$\langle \operatorname{vec}(BA^{\#}),\, e_\alpha \otimes f_\beta\rangle_{H_1\otimes H_2} = 0 \qquad \text{provided } (\alpha,\beta) \notin \mathrm{P}'\times \mathrm{Q}'.$$

因此，vec($BA^{\#}$) $\in$ 张成空间$\{e_\alpha \otimes f_\beta : (\alpha,\ \beta) \in \mathrm{P}'\times \mathrm{Q}'\}$，于是

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_{(\alpha,\beta)\in \mathrm{P}\times \mathrm{Q}} \mathbf{1}_{(\alpha,\beta)\in \mathrm{P}'\times \mathrm{Q}'} \langle \operatorname{vec}(BA^{\#}),\, e_\alpha \otimes f_\beta\rangle_{H_1\otimes H_2}\, e_\alpha \otimes f_\beta \\ &= \sum_{(\alpha,\beta)\in \mathrm{P}\times \mathrm{Q}} \langle \operatorname{vec}(BA^{\#}),\, e_\alpha \otimes f_\beta\rangle_{H_1\otimes H_2}\, e_\alpha \otimes f_\beta = \operatorname{vec}(BA^{\#}),\end{aligned}$$

其中，最后一个等式只是将 vec($BA^{\#}$) 展开到标准正交基 $\{e_\alpha \otimes f_\beta\}_{\alpha,\ \beta}$ 中，而 $\mathrm{P}'\times \mathrm{Q}'$ 之外的项已经为 0。

步骤*4.* 证明 $\mathbf{r}(\star) \geq \operatorname{rk} BB^*$. 注意到

$$\mathcal{U}(\star) := \overline{\operatorname{span}}^{\mathcal{B}_2}\left\{\operatorname{vec}^{-1}(\mathbf{1}_{(\alpha,\beta)\in \mathrm{P}'\times \mathrm{Q}'} e_\alpha \otimes f_\beta) : (\alpha,\beta) \in \mathrm{P}\times \mathrm{Q}\right\},$$

包含秩一算子 $\mathbf{\Theta}_{f_\beta,\ e_\alpha}$ 对于 $\alpha \in \mathrm{P}'$ 和 $\beta \in \mathrm{Q}'$，从而证明了此情形下所需的不等式。

~**第二部分**。 $\operatorname{rk} BB^* < \operatorname{rk} AA^* = \infty$。 令 $A_n \to A$ in $\mathcal{B}_2(\mathcal{H},\ H_1)$ 为有限秩近似，例如通过 A 的奇异值展开得到，使得 $\operatorname{rk} A_nA_n^* > \operatorname{rk} BB^*$。于是，

$$\min(\operatorname{rk} A_nA_n^*, \operatorname{rk} BB^*) = \min(\operatorname{rk} AA^*, \operatorname{rk} BB^*),$$

并且由前一部分

$$A_nA_n^* \otimes BB^* \succcurlyeq \frac{1}{\min\left(\operatorname{rk} AA^*, \operatorname{rk} BB^*\right)} \mathbf{\Theta}_{\operatorname{vec}(BA_n^{\#}),\operatorname{vec}(BA_n^{\#})} \succcurlyeq 0.$$

步骤 *1*. $A_nA_n^* \to AA^*$ 在迹范数下。 利用希尔伯特–施密特算子的理想性质 $\|XY\|_1 \leq \|X\|_2\|Y\|_2$ 希尔伯特–施密特算子 [19, 定理 7.8], ，我们得到

$$\begin{aligned}\|AA^* - A_nA_n^*\|_1 &= \|(A-A_n)A^* + A_n(A-A_n)^*\|_1 \\ &\leq \|A-A_n\|_2\|A\|_2 + \|A_n\|_2\|A-A_n\|_2.\end{aligned}$$

由于 $\|A_n\|_2 \to \|A\|_2$和 $\|A-A_n\|_2 \to 0$，可得 $\|AA^* - A_nA_n^*\|_1 \to$**0**，因此在算子范数下也有 $\|AA^* - A_nA_n^*\| \to 0$ 。

步骤 *2*。张量积收敛。由于 BB^* 是迹类的，并且 $\|X \otimes Y\| = \|X\|\,\|Y\|$ [9, 。 146],

$$\|(AA^* - A_nA_n^*) \otimes BB^*\| = \|AA^* - A_nA_n^*\|\,\|BB^*\| \longrightarrow 0.$$

因此， $A_nA_n^* \otimes BB^* \to AA^* \otimes BB^*$ 在算子范数下收敛。

步骤*3*。秩一项的收敛。首先注意到， $BA_n^{\#} \to BA^{\#}$ 在迹范数下收敛，从而也在希尔伯特–施密特范数下收敛:

$$\|BA_n^{\#} - BA^{\#}\|_1 \leq \|B\|_2\,\|A_n^{\#} - A^{\#}\|_2 = \|B\|_2\,\|A_n - A\|_2 \to 0,$$

并且对于迹类 T， $\|T\|_2 \leq \|T\|_1$。由于 vec算子: $\mathcal{B}_2(H_1^{\#},\ H_2) \to H_1 \otimes H_2$ 是等距映射，这意味着 $\operatorname{vec}(BA_n^{\#}) \to \operatorname{vec}(BA^{\#})$ 在 $H_1 \otimes H_2$ 中收敛。令 v_n :=vec$(BA_n^{\#})$，并令 $v := \operatorname{vec}(BA^{\#})$。对于秩一算子，有$\|\,\mathbf{\Theta}_{x,\ y}\,\| = \|x\|\,\|y\|$，因此

$$\begin{aligned}\|\,\mathbf{\Theta}_{v_n,v_n} - \mathbf{\Theta}_{v,v}\,\| &= \|\,\mathbf{\Theta}_{v_n,v_n} + \mathbf{\Theta}_{-v,v_n} + \mathbf{\Theta}_{v,v_n} + \mathbf{\Theta}_{v,-v}\,\| \\ = \|\,\mathbf{\Theta}_{v_n-v,v_n} + \mathbf{\Theta}_{v,v_n-v}\,\| &\leq \|v_n - v\|\,\|v_n\| + \|v\|\,\|v_n - v\|.\end{aligned}$$

由于 $v_n \to v$，右侧趋于 0，因此 $\mathbf{\Theta}_{v_n,\ v_n} \to \mathbf{\Theta}_{v,\ v}$ 在算子范数下收敛。由于所需不等式的左侧也在算子范数下收敛，且正锥在算子范数极限下封闭 [5,命题 3.5], ，最终的勒文纳不等式成立。□

5.5. 定理 B 的证明。 我们先给出一个引理。

引理 5.7。 沿用定理 *B* 中的记号，考虑一个正算子$T \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ ，其迹范数下的谱分解为: $T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\ \mathbf{\Theta}_{w_n,w_n}$。假设对于 $n \geq 1$， $\star_n = \star_n(\mathbf{\Theta}_{w_n,w_n})$ ，且 $\star = \star(T)$。则

$$P \star Q = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (P \star_n Q) \qquad (P \in \mathcal{B}_2(H_1),\ Q \in \mathcal{B}_2(H_2)),$$

在迹范数下收敛，且界为 $\|P \star Q\|_1 \leq \|T\|_1 \|P\|_2 \|Q\|_2$。

证明。令 $T^{(n)} := \mathbf{\Theta}_{w_n,\, w_n}$ 并使用命题 5.1，我们有 $T_{e_i,\, e_j} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T_{(n)}{}_{e_i,\, e_j}$，其中对每个 $i,\ j \in I$，收敛是在 $\mathcal{B}_1(H)$ 中进行的；$\lambda_n \geq 0$，$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ 和 $(w_n)_{n\geq 1}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的一个正交归一族。对于 $p \geq 1$:

$$\star_{S^{(p)}} := \star(S^{(p)}) \qquad \text{where} \qquad S^{(p)} := \sum_{n=1}^{p} \lambda_n T^{(n)}.$$

由命题 5.1，我们有 $P \star_{S^{(p)}} Q = \sum_{n=1}^{p} \lambda_n (P \star_n Q)$。我们将证明的其余部分分为两个步骤。

步骤 *1*。证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (P \star_n Q) \in \mathcal{B}_1(K)$。利用引理 5.4 得到范数界，对正整数 $p < q$，使用迹范数的三角不等式，我们有

$$\|P \star_{S^{(q)}} Q - P \star_{S^{(p)}} Q\|_1 \leq \sum_{n=p+1}^{q} \left\|\lambda_n (P \star_n Q)\right\|_1 = \sum_{n=p+1}^{q} \lambda_n \|P \star_n Q\|_1$$

$$\leq \sum_{n=p+1}^{q} \lambda_n \|P\|_2 \|Q\|_2 \leq \|P\|_2 \|Q\|_2 \sum_{n=p+1}^{q} \lambda_n \to 0 \text{ as } p < q \to \infty.$$

由此可知，部分和 $P \star_{S^{(p)}} Q$ 在 $\mathcal{B}_1(K)$ 中构成一个柯西序列。因此，由于 $(\mathcal{B}_1(K)$ $\|\cdot\|_1)$ 是 Banach 空间，它们在迹范数下收敛到某个 $S \in \mathcal{B}_1(K)$。换言之，该级数

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (P \star_n Q)$$

在 K 上定义了一个迹类算子。

步骤 *2.* 确定 S 和 $P \star Q$。固定 $i,\ j \in I$，并注意到根据乘积的定义以及命题 5.1，我们有:

$$\langle (P \star Q) e_j, e_i \rangle_K = \operatorname{Tr}\left(T^*_{e_i,e_j}(P \otimes Q)\right) = \operatorname{Tr}\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T^{(n)}_{e_i,e_j}\right)^* (P \otimes Q)\right)$$

$$= \operatorname{Tr}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (T^{(n)}_{e_i,e_j})^* (P \otimes Q)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \operatorname{Tr}\left((T^{(n)}_{e_i,e_j})^* (P \otimes Q)\right).$$

另一方面，我们还有，

$$\langle S e_j, e_i \rangle_K = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (P \star_n Q) e_j, e_i \right\rangle_K = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle (P \star_n Q) e_j, e_i \rangle_K$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \operatorname{Tr}\left((T^{(n)}_{e_i,e_j})^* (P \otimes Q)\right).$$

因此，对于每个 $i,j \in I$，$\langle (P \star Q)^{e_j}, e_i \rangle_K = \langle S e_j, e_i \rangle_K$。这意味着 $P \star Q = S = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (P \star_n Q)$ 属于 $\mathcal{B}_1(K)$。最后，我们有

$$\begin{aligned} \|P \star Q\|_1 &\le \sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda_n (P \star_n Q)\|_1 \le \|P\|_2 \, \|Q\|_2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \\ &= \|T\|_1 \, \|P\|_2 \, \|Q\|_2 < \infty. \end{aligned}$$

这表明了所需的范数界。 □

定理 *B* 的证明。 我们将证明分为四个部分。

第一部分。范数界。 情形 $T \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$由引理 5.7 得出。我们考虑 $T \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ 情形。考虑乘积 $\star = \star(T) \in \mathbf{Prod}\text{-}(2)$。设 $\{f_\alpha\}_\alpha$ 是 H 的一个正交归一基。那么族$\{e_i \otimes f_\alpha\}_{i \in I, \alpha}$ 是 $\mathcal{H}$的一个正交归一基。根据切片$T_{ij} := T_{e_i, e_j}$的定义，我们有

$$\langle T_{ij} f_\beta, \, f_\alpha \rangle_H = \langle T(e_j \otimes f_\beta), \, e_i \otimes f_\alpha \rangle_{\mathcal{H}}.$$

根据命题 5.1，每个 $T_{ij} \in \mathcal{B}_2(H)$，因此我们写成

$$\|T_{ij}\|_2^2 = \sum_{\alpha,\beta} \left| \langle T_{ij} f_\beta, f_\alpha \rangle \right|^2 = \sum_{\alpha,\beta} \left| \langle T(e_j \otimes f_\beta), e_i \otimes f_\alpha \rangle \right|^2.$$

利用上述结果，由于 $T \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$，我们也有

$$\|T\|_2^2 = \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} \left| \langle T(e_j \otimes f_\beta), e_i \otimes f_\alpha \rangle \right|^2 = \sum_{i,j \in I} \|T_{ij}\|_2^2.$$

现在，对每个 $i,j \in I$，由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\left| \langle P \star Q e_j, e_i \rangle_K \right|^2 = |\langle P \otimes Q, T_{ij} \rangle_{\mathcal{B}_2(H)}|^2 \le \|T_{ij}\|_2^2 \, \|P \otimes Q\|_2^2.$$

对 $i,j \in I$ 求和，得到

$$\begin{aligned} \sum_{i,j \in I} \left| \langle P \star Q e_j, e_i \rangle_K \right|^2 &\le \sum_{i,j \in I} \|T_{ij}\|_2^2 \, \|P \otimes Q\|_2^2 \\ = \|P \otimes Q\|_2^2 \sum_{i,j \in I} \|T_{ij}\|_2^2 &= \|P \otimes Q\|_2^2 \, \|T\|_2^2. \end{aligned}$$

因此我们得出结论： $P \star Q \in \mathcal{B}_2(K)$ 且 $\|P \star Q\|_2 \le \|T\|_2 \, \|P\|_2 \, \|Q\|_2$。

第二部分。正性。 固定 $\star = \star(T) \in \mathbf{Prod}\text{-}(2)$。假设 $P \succcurlyeq 0$和 $Q \succcurlyeq 0$。我们将证明 $P \star Q \succcurlyeq 0$。令 $x = \sum_{i \in I} x_i e_i \in K$ 具有有限支撑。于是

$$\begin{aligned} \langle (P \star Q) x, x \rangle_K &= \sum_{i,j \in I} \overline{x_i} x_j \, \langle (P \star Q) e_j, e_i \rangle_K \\ = \sum_{i,j \in I} \overline{x_i} x_j \, \operatorname{Tr}\left(T_{ij}^* (P \otimes Q) \right) &= \operatorname{Tr}\Big(\Big(\sum_{i,j \in I} \overline{x_i} x_j \, T_{ij} \Big)^* (P \otimes Q) \Big). \end{aligned}$$

对于 $\xi,\ \eta \in H$，我们计算

$$\langle T_{x,x}\eta,\xi\rangle_H = \langle T(x\otimes\eta), x\otimes\xi\rangle_{\mathcal{H}} = \Big\langle T\Big(\sum_{j\in I} x_j e_j\otimes\eta\Big), \sum_{i\in I} x_i e_i\otimes\xi\Big\rangle_{\mathcal{H}}$$
$$= \sum_{i,j\in I} \overline{x_i}\, x_j \,\langle T(e_j\otimes\eta), e_i\otimes\xi\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{i,j\in I} \overline{x_i}\, x_j \,\langle T_{ij}\eta,\xi\rangle_H$$
$$= \Big\langle \Big(\sum_{i,j} \overline{x_i} x_j T_{ij}\Big)\eta,\xi\Big\rangle_H .$$

因此，$\sum_{i,\ j\in I} x_j x_i \underline{T_{ij}}$ 正是切片 $T_{x,\ x}$。此外，显然 $T \succcurlyeq 0$ 蕴含 $T_{x,\ x} \succcurlyeq 0$。由于 $P\otimes Q \succcurlyeq 0$，且两个正算子的乘积的迹非负，我们得到

$$\langle (P\star Q)x, x\rangle_K = \mathrm{Tr}(T_{x,x}^{1/2}(P\otimes Q)T_{x,x}^{1/2}) \ \geq\ 0,$$

其中 $T_x^{1/2},\ _x$ 是 $T_{x,\ x}$的正平方根，它根据命题 3.3]唯一存在。由 K中有限支撑向量的稠密性，$P\star Q \succcurlyeq 0$。

第三部分。下界属于迹类。我们现在证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{m(n)}\ \mathbf{\Theta}_{\rho_n,\rho_n} \in \mathcal{B}_1(K),$$

其中 $m(n) := \min(\mathrm{rk}\, AA^*,\ \mathrm{rk}\, BB^*,\ \mathbf{r}(n))$。由于每个 $\mathbf{\Theta}_{\rho_n,\ \rho_n}$ 都是秩一正算子，其迹范数等于其迹：

$$\|\,\mathbf{\Theta}_{\rho_n,\rho_n}\,\|_1 = \mathrm{Tr}(\mathbf{\Theta}_{\rho_n,\rho_n}) = \|\rho_n\|^2.$$

因此，

$$\Big\|\frac{\lambda_n}{m(n)}\ \mathbf{\Theta}_{\rho_n,\rho_n}\Big\|_1 = \frac{\lambda_n}{m(n)}\,\|\rho_n\|^2.$$

由于当 $m(n) \in (0,\ \infty)$ 时，$m(n) \geq 1$，我们有 $\frac{\lambda_n}{m(n)}$ $\|\rho_n\|^2 \leq \lambda_n \|\rho_n\|^2$。因此，只需证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\|\rho_n\|^2 < \infty$。根据定理 5.5，

$$\|\rho_n\| \leq \|A\|_2\,\|B\|_2\,\sqrt{\|\,\mathbf{\Theta}_{w_n,w_n}\,\|_2} = \|A\|_2\,\|B\|_2\,\|w_n\| = \|A\|_2\,\|B\|_2.$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\|\rho_n\|^2 \leq \|A\|_2^2\,\|B\|_2^2\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n < \infty$。

第四部分。极限不等式。对于每个整数 $p\geq 1$，考虑以下关于 $P = AA^*$ 和 $Q = BB^*$ 的内容：

$$\mathcal{X}_p := \sum_{n=1}^{p} \lambda_n (P\star_n Q) \qquad \text{and} \qquad \mathcal{Y}_p := \sum_{n=1}^{p} \frac{\lambda_n}{m(n)}\ \mathbf{\Theta}_{\rho_n,\rho_n}.$$

我们已经证明了 $\mathcal{X}_p \to P\star Q$ 和 $\mathcal{Y}_p \to \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_n}{m(n)}\ \mathbf{\Theta}_{\rho_n,\ \rho_n}$ 在迹范数下成立，因而在算子范数下也成立。此外，根据定理 5.5，对于每个 n，λ_n $(P\star_n Q) \succcurlyeq \frac{\lambda_n}{m(n)}\ \mathbf{\Theta}_{\rho_n,\ \rho_n}$，因此对 $n = 1,\ \ldots\ldots,\ p$ 求和可得 $\mathcal{X}_p \succcurlyeq \mathcal{Y}_p$对所有 $p\geq 1$均成立。由于 $\mathcal{X}_p - \mathcal{Y}_p$在算子范数下收敛于 $P\star Q - \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_n}{m(n)}\ \mathbf{\Theta}_{\rho_n,\ \rho_n}$，且正锥在算子范数极限下是闭的，[5, 命题 3.5], 所要求的不等式成立。□

6. Canonical formulation

在前面的各节中，我们使用希尔伯特空间 K的一个固定标准正交基，构造了 $\star$ 乘积及其相应的下界。现在我们证明，对于秩一可容许算子，这些构造具有典范表述，并且下界与所选标准正交基无关。

与前文相同，设 H_1, H_2, K 为希尔伯特空间，并令 $H := H_1 \otimes H_2$ 和 $\mathcal{H} := K \otimes H$。对于共轭线性等距映射 $\mathcal{C}_K : K \to K^{\#}$ 和 $\mathcal{C}_H : H \to H^{\#}$，回想一下，$\mathcal{C}_K \otimes \mathcal{C}_H$ 是唯一的共轭线性映射 $: K \otimes H \to K^{\#} \otimes H^{\#}$，它在简单张量 $k \otimes h \in K \otimes H$ 上定义为

$$(\mathcal{C}_K \otimes \mathcal{C}_H)(k \otimes h) := (\mathcal{C}_K k) \otimes (\mathcal{C}_H h) = \overline{k} \otimes \overline{h}.$$

利用等距映射 $\mathcal{C}_K \otimes \mathcal{C}_H$，我们构造算子 $\mathcal{W} : K^{\#} \longrightarrow H^{\#}$，它将在下文的推导中发挥关键作用。

定义6.1。设 H_1, H_2, K 为希尔伯特空间，并令 $H := H_1 \otimes H_2$和 $\mathcal{H} := K \otimes H$。给定 $w \in \mathcal{H}$，定义 $\mathcal{W} : K^{\#} \longrightarrow H^{\#}$ 如下

$$\langle \mathcal{W}\overline{\xi},\ \overline{h} \rangle_{H^{\#}} := \left\langle (\mathcal{C}_K \otimes \mathcal{C}_H)\, w,\ \overline{\xi} \otimes \overline{h} \right\rangle_{K^{\#} \otimes H^{\#}}$$

对所有 $\xi \in K$ 和 $h \in H$均成立。

引理 6.1。定义*6.1*中的映射 $\mathcal{W}$ 是有界的共轭线性映射，并且 $\mathcal{C}_H^{-1}\mathcal{W} \in \mathcal{B}_2(K^{\#}, H)$，其中 $\|\mathcal{C}_H^{-1}\mathcal{W}\|_2 = \|w\|$。此外，对于 K的一个标准正交基 $\{e_i\}_{i \in I}$，以及分解为$w = \sum_{i \in I} e_i \otimes u_i$的 $w \in \mathcal{H} = K \otimes H$，有 $\mathcal{C}_H^{-1}\mathcal{W}\, e_i = u_i$。

证明。设 $\lambda \in \mathbb{C}$和 $\xi \in K$。为避免混淆，我们用 $*_{K^{\#}}$ 和 $*_{H^{\#}}$分别表示 $K^{\#}$和 $H^{\#}$ 中的数乘。在 $K^{\#}$ 中有 $\lambda *_{K^{\#}} \xi = \lambda\xi$。因此，对于每个 $h \in H$,

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{W}(\overline{\lambda} *_{K^{\#}} \overline{\xi}), \overline{h} \rangle_{H^{\#}} = \langle \mathcal{W}(\overline{\lambda\xi}), \overline{h} \rangle_{H^{\#}} = \left\langle (\mathcal{C}_K \otimes \mathcal{C}_H)w, (\overline{\lambda\xi}) \otimes \overline{h} \right\rangle_{K^{\#} \otimes H^{\#}} \\
&= \left\langle (\mathcal{C}_K \otimes \mathcal{C}_H)w, (\overline{\lambda} *_{K^{\#}} \overline{\xi}) \otimes \overline{h} \right\rangle_{K^{\#} \otimes H^{\#}} = \left\langle (\mathcal{C}_K \otimes \mathcal{C}_H)w, \overline{\lambda}(\overline{\xi} \otimes \overline{h}) \right\rangle_{K^{\#} \otimes H^{\#}} \\
&= \lambda \langle (\mathcal{C}_K \otimes \mathcal{C}_H)w, \overline{\xi} \otimes \overline{h} \rangle_{K^{\#} \otimes H^{\#}} = \lambda \langle \mathcal{W}\overline{\xi}, \overline{h} \rangle_{H^{\#}} = \langle \lambda *_{H^{\#}} \mathcal{W}\overline{\xi}, \overline{h} \rangle_{H^{\#}}.
\end{aligned}$$

由于这对所有 $h \in H^{\#}$, $\mathcal{W}$ 都成立，因此具有共轭乘法性。由张量积的双加性可得加法性。下面证明其有界性。固定 $\xi \in K$。对所有 $h \in H$，根据 $K^{\#} \otimes H^{\#}$ 中的柯西–施瓦茨不等式，我们有

$$\begin{aligned}
\left| \langle \mathcal{W}\overline{\xi},\ \overline{h} \rangle_{H^{\#}} \right| &= \left| \left\langle (\mathcal{C}_K \otimes \mathcal{C}_H)w,\ \overline{\xi} \otimes \overline{h} \right\rangle_{K^{\#} \otimes H^{\#}} \right| \\
&\leq \|(\mathcal{C}_K \otimes \mathcal{C}_H)w\|_{K^{\#} \otimes H^{\#}}\, \|\overline{\xi} \otimes \overline{h}\|_{K^{\#} \otimes H^{\#}}.
\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{C}_K \otimes \mathcal{C}_H : K \otimes H \to K^{\#} \otimes H^{\#}$ 是等距映射，

$$\|(\mathcal{C}_K \otimes \mathcal{C}_H)w\|_{K^{\#} \otimes H^{\#}} = \|w\|_{K \otimes H}.$$

此外,

$$\|\overline{\xi}\otimes\overline{h}\|_{K^{\#}\otimes H^{\#}}=\|\overline{\xi}\|_{K^{\#}}\,\|\overline{h}\|_{H^{\#}}=\|\xi\|_{K}\,\|h\|_{H}.$$

因此

$$\left|\langle\mathcal{W}\overline{\xi},\ \overline{h}\rangle_{H^{\#}}\right|\leq\|w\|\,\|\xi\|\,\|h\|\qquad(h\in H).$$

对所有 $h\in H$ 取上确界，并令 $\|h\|=1$，得到

$$\|\mathcal{W}\,\overline{\xi}\|=\sup_{\|h\|=1}\left|\langle\mathcal{W}\overline{\xi},\ \overline{h}\rangle_{H^{\#}}\right|\leq\|w\|\,\|\xi\|.$$

因此，$\mathcal{W}$ 有界，且 $\|\mathcal{W}\|\leq\|w\|$。令 $w=\sum_{i\in I}e_i\otimes u_i$，其中 $\|w\|^2=\sum_{i\in I}\|u_i\|^2<\infty$。那么对每个 $h\in H$,

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{W}\,\overline{e_i},\,\overline{h}\rangle_{H^{\#}}&=\langle\mathcal{C}_K\otimes\mathcal{C}_H(w),\ \overline{e_i}\otimes\overline{h}\rangle_{K^{\#}\otimes H^{\#}}\\&=\Big\langle\sum_{k\in I}\overline{e_k}\otimes\overline{u_k},\ \overline{e_i}\otimes\overline{h}\Big\rangle_{K^{\#}\otimes H^{\#}}=\langle\overline{u_i},\overline{h}\rangle_{H^{\#}}.\end{aligned}$$

因此，对所有 $i\in I$，我们有 $\mathcal{W}\,e_i=u_i\in H^{\#}$，从而

$$\mathcal{C}_H^{-1}\mathcal{W}\,\overline{e_i}=u_i\in H.$$

由于 $\mathcal{C}_H^{-1}$（双射共轭线性映射 $\mathcal{C}_H$ 的逆）和 $\mathcal{W}$ 都是共轭线性的，因此 $\mathcal{C}_H^{-1}\mathcal{W}$ 是线性的：$K^{\#}\to H$。利用这一点以及 $(u_i)_{i\in I}$ 的平方可和性，我们得到 $\mathcal{C}_H^{-1}\mathcal{W}\in\mathcal{B}_2(K^{\#},H)$ 且$\|\mathcal{C}_H^{-1}\mathcal{W}\|_2=\|w\|$。□

现在我们可以证明本节的主要结果。

定理 6.2. 设 H_1,H_2,K 是希尔伯特空间，且 $H:=H_1\otimes H_2$ 和 $\mathcal{H}:=K\otimes H$。假设 $T:=\mathbf{\Theta}_{w,w}\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 对 $w\in\mathcal{H}$ 成立。对于 K 的标准正交基 $\{e_i\}_{i\in I}$，定义 $C_e\colon K\to K^{\#}$ 为如下给出的线性等距同构:

$$C_e\Big(\sum_{i\in I}\langle x,e_i\rangle_K e_i\Big):=\sum_{i\in I}\overline{\langle x,e_i\rangle_K}e_i=\sum_{i\in I}\langle x,e_i\rangle_K*\overline{e_i}.$$

(1) 对于 $P\in\mathcal{B}_2(H_1)$ 和 $Q\in\mathcal{B}_2(H_2)$，定义

$$P\star_w Q\ :=\ (\mathcal{C}_H^{-1}\,\mathcal{W})^*\,(P\otimes Q)\,(\mathcal{C}_H^{-1}\,\mathcal{W})\ \in\ \mathcal{B}(K^{\#}).$$

那么，对于 $\star=\star(T)\in\mathbf{Prod}+(\{e_i\}_{i\in I})$，有

$$P\star Q=C_e^*\,(P\star_w Q)\,C_e.$$

(2) 若 $w=\sum_{i\in I}e_i\otimes u_i$ 对 $u_i\in H$ 成立，则对所有 $x\in H$，定义

$$\phi_w(x):=\sum_{i\in I}\langle x,u_i\rangle_H*\overline{e_i}\ \in\ K^{\#}.$$

那么，$\phi_w(x)$ 取决于 w，但不取决于其分解 $w=\sum_{i\in I}e_i\otimes u_i$。

此外，定理 *5.5* 中的向量 ρ 由下式给出

$$\rho=C_e^*\left(\phi_w(\mathrm{vec}(BA^{\#}))\right),$$

对定理 *5.5* 中所有可容许的 A,B。

(3) 最后，定理 *5.5* 中的标量 $\mathbf{r}(\star)$ 取决于 w ，但不取决于其分解 $w=\sum_{i\in I} e_i\otimes u_i$。

证明。 (1) 我们计算:

$$\begin{aligned}\langle (\mathcal{C}_H^{-1}\mathcal{W})^*\,(P\otimes Q)\,(\mathcal{C}_H^{-1}\mathcal{W})\,\overline{e_j},\,\overline{e_i}\rangle_{K^\#} &= \langle (P\otimes Q)\,(\mathcal{C}_H^{-1}\mathcal{W})\,\overline{e_j},\,(\mathcal{C}_H^{-1}\mathcal{W})\overline{e_i}\rangle_H\\ &= \langle (P\otimes Q)\,u_j,\,u_i\rangle_H = \langle P\star Q\,e_j,\,e_i\rangle_K\\ &= \langle P\star Q\,C_e^*\,\overline{e_j},\,C_e^*\,\overline{e_i}\rangle_K = \langle\, C_e\,P\star Q\,C_e^*\,\overline{e_j},\,\overline{e_i}\rangle_{K^\#},\end{aligned}$$

这里用到了引理 5.4 和引理 6.1。这就证明了 (1)。

(2) 假设我们有

$$w=\sum_{i\in I} e_i\otimes u_i=\sum_{j\in I} f_j\otimes v_j\quad\text{where}\quad \|w\|^2=\sum_{i\in I}\|u_i\|^2=\sum_{j\in I}\|v_j\|^2<\infty$$

对于 K 的标准正交基 $\{e_i\}_{i\in I}$ 和 $\{f_j\}_{j\in I}$。那么 $\{e_i\}_{i\in I}$ 和 $\{f_j\}_{j\in I}$ 是 $K^\#$ 的标准正交基。假设 $\alpha_{ij}:=\langle e_i,f_j\rangle_K$。对于 $x\in H$，令

$$\phi_e:=\sum_{i\in I}\langle x,u_i\rangle_H * \overline{e_i}\qquad\text{and}\qquad \phi_f:=\sum_{j\in I}\langle x,v_j\rangle_H * \overline{f_j}.$$

我们证明 $\phi_e=\phi_f$，这表明 $\phi_w(x)$ 具有所需的独立性。

注意，对于任意 $h\in H$，我们有 $\langle w,\ e_i\otimes h\rangle_{K\otimes H}=\langle u_i,\ h\rangle_H$。另一方面，我们还有

$$\begin{aligned}\langle w,e_i\otimes h\rangle_{K\otimes H} &= \Big\langle \sum_{j\in I} f_j\otimes v_j, e_i\otimes h\Big\rangle_{K\otimes H}\\ &= \sum_{j\in I}\langle f_j,e_i\rangle_K\langle v_j,h\rangle_H = \Big\langle \sum_{j\in I}\overline{\alpha_{ij}}v_j,h\Big\rangle_H.\end{aligned}$$

因此 $u_i=\sum_{j\in I}\alpha_{ij}v_j\in H$。类似地，$\langle w,\ f_j\otimes h\rangle_{K\otimes H}=\langle v_j,\ h\rangle_H$，并且，

$$\begin{aligned}\langle w,f_j\otimes h\rangle_{K\otimes H} &= \Big\langle \sum_{i\in I} e_i\otimes u_i, f_j\otimes h\Big\rangle_{K\otimes H}\\ &= \sum_{i\in I}\langle e_i,f_j\rangle_K\langle u_i,h\rangle_H = \Big\langle \sum_{i\in I}\alpha_{ij}u_i,h\Big\rangle_H.\end{aligned}$$

因此 $v_j=\sum_{i\in I}\alpha_{ij}u_i\in H$。现在，$\phi_e$ 关于 $(f_j)_{j\in I}$ 的系数为:

$$\begin{aligned}\langle \phi_e,\overline{f_j}\rangle_{K^\#} &= \Big\langle \sum_{i\in I}\langle x,u_i\rangle_H * \overline{e_i},\overline{f_j}\Big\rangle_{K^\#} = \sum_{i\in I}\overline{\alpha_{ij}}\langle x,u_i\rangle_H\\ &= \langle x,\sum_{i\in I}\alpha_{ij}u_i\rangle_H = \langle x,v_j\rangle_H = \langle \phi_f,\overline{f_j}\rangle_{K^\#}.\end{aligned}$$

因此 $\phi_e=\phi_f$。此外，根据定义 $\rho=C_e^*\,\phi_w$(vec算子($BA^\#$))。

（3）根据 vec^{-1} 的线性性，上述计算给出

$$\mathrm{vec}^{-1}(v_j)=\sum_{i\in I}\alpha_{ij}\,\mathrm{vec}^{-1}(u_i)\qquad (j\in I),$$

在 $\mathcal{B}_2(H_1^{\#},\ H_2)$ 中收敛。因此 $\mathcal{U}_f(\star) :=$ 张成空间$\mathsf{vec}^{-1}(u_j) :\ j \in I\} \subseteq$ 张成空间$\mathsf{vec}^{-1}(u_i) :\ i \in I\} =: \mathcal{U}_e(\star)$。利用另一个关系可得反向包含，因此 $\mathcal{U}_f(\star) = \mathcal{U}_e(\star)$。consequently,

$$\mathbf{r}_f(\star) := \sup\{\operatorname{rk} X :\ X \in \mathcal{U}_f(\star)\} = \sup\{\operatorname{rk} X :\ X \in \mathcal{U}_e(\star)\} =: \mathbf{r}_e(\star).$$

因此，$\mathbf{r}(\star)$ 不依赖于分解 $w = \sum_{i\in I} e_i \otimes u_i$。 □

下面的算子不等式是显然的。

推论 6.2。采用定理 *5.5* 和定理 *6.2* 中的相同记号，对于定理 *5.5* 中所有可容许的 A, B，我们有一个典范算子不等式：

$$(\mathcal{C}_H^{-1}\mathcal{W})^*\,(AA^*\otimes BB^*)\,(\mathcal{C}_H^{-1}\mathcal{W}) \succcurlyeq \frac{1}{\min\left(\operatorname{rk} AA^*, \operatorname{rk} BB^*, \mathbf{r}(\star)\right)}\,\mathbf{\Theta}_{\phi,\phi} \succcurlyeq 0,$$

其中 $\phi := \phi_w$(vec算子$(BA^{\#})) \in K^{\#}$。

证明。由定理 5.5 和定理 6.2 可得此结论，其中用到了 C_e 是酉的 [15,p. 4-5] 以及命题 16.3(e)]。□

如所需，上述不等式与定理 5.5 中的不等式酉等价，仅取决于 $w \in \mathcal{H}$，而不取决于给定的 K 的任意标准正交基 $\{e_i\}_{i\in I}$ 的分解 $w = \sum_{i\in I} e_i \otimes u_i$。本文至此结束。

Acknowledgements

D.G. 得到了 NSF 资助项目 #2350067 的部分资助。P.K.V. 获得了 Centre de recherches math´ematiques 和 Universit´e Laval（CRM-Laval）博士后奖学金的资助。

References

[1] Jim Agler 和 John E. McCarthy。《 *Pick interpolation and Hilbert function spaces*》，*Graduate Studies in Mathematics*第 44 卷。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2002 年。[2] Alexander Belton、Dominique Guillot、Apoorva Khare 和 Mihai Putinar。正性的全景。I：无维数限制。载于《 *Analysis of operators on function spaces*》，Trends Math.，第 117–164 页。Birkh¨auser/施普林格，沙姆，2019 年。[3] Rajendra Bhatia。《 *Matrix Analysis*》。施普林格，1997 年。[4] Rajendra Bhatia。《 *Positive definite matrices*》。普林斯顿大学出版社，2009 年。[5] John B. Conway。《 *A Course in Operator Theory* 21 *Graduate Studies in Mathematics* 2000 》，*Graduate Studies in Mathematics*第 卷。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，[2] 。[6] WF Jr Donoghue。《 *Monotone matrix functions and analytic continuation*》，第 207 卷。施普林格科学与商业媒体，2012 年。[7] Dominique Guillot、Himanshu Gupta、Prateek Kumar Vishwakarma 和 Chi Hoi Yip。有限域上的正性保持映射。《 *J. Algebra*》，684：479–523，2025 年。[8] Michael T. Jury。《*spaces* 2002 》。ProQuest 有限责任公司，密歇根州安娜堡，[4] 。论文（博士）——圣路易斯华盛顿大学。

[9] Richard V. Kadison 和 John R. Ringrose。《 *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Volume I: Elementary Theory* 15 》， *Graduate Studies in Mathematics* 1997 1983 第 卷。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，[10] 。原著重印。[10] Apoorva Khare。舒尔乘积定理的尖锐非零下界。《 *Proc. Amer. Math. Soc.* 149 12 5049 5063, 2021 》， （[11] ）：–。[11] Apoorva Khare。《 *Matrix analysis and entrywise positivity preservers*》， *London Mathematical Society Lecture Note Series*第 471 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2022 年。Mihai Putinar 作序。[12] Karl L¨owner。《 ¨Uber 单调矩阵函数》。《 *Mathematische Zeitschrift*》， 38：177–216，1934 年。[13] Javad Mashreghi、Mostafa Nasri 和 Prateek Kumar Vishwakarma。泛函演算、正性与矩阵卷积。《 *arXiv preprint arXiv:2512.24575*》， 2025 年。[14] Erich Novak。正求积公式与三角多项式极值问题的不可处理性结果。《 *J. Complex.*》， 15（3）：299–316，1999 年。[15] Frank Oertel。超越迹类——量子物理中的希尔伯特空间张量积与算子理想。《 *arXiv preprint arXiv:2308.04627*》， 2023 年。[16] James E. Pascoe。非交换舒尔型积及其舍恩伯格定理。《 *arXiv preprint arXiv:1907.04480*》， 2019 年。[17] Issai Schur。关于具有无穷多个变量的有界双线性型理论的注记。《 *J. Reine Angew. Math.*》， 140：1–28，1911 年。[18] Jan Vyb´ıral。舒尔积定理的一个变体及其应用。《 *Adv. Math.*》， 368：107140，2020 年。[19] Joachim Weidmann。《 *Linear operators in Hilbert spaces* 20 *Graduate Texts* 》， *in Mathematics* 1980 *Graduate Studies in Mathematics* 1997 1983 第 卷。施普林格，[10] 。 *Linear operators in Hilbert spaces* 20 *Graduate Texts* 维基百科。向量化，2025 年。https://en.wikipedia.org/wiki/Vectorization[20] （数学）。 Xingzhi Zhan。《[21] 》。施普林格，2004 年。

（Dominique Guillot）

Department of Mathematical Sciences University of , , , , Delaware Newark DE USA 19716.
Email address: dguillot@udel.edu （Javad Mashreghi）

Département de mathématiques et de statistique Univer- , , , , sité Laval Québec QC Canada G1V 0K6.
Email address: javad.mashreghi@ulaval.ca （Prateek Kumar Vishwakarma）

Département de mathématiques et de statistique Université Laval Québec QC Canada G1V 0K6. , , , ,

Email address: prateek-kumar.vishwakarma.1@ulaval.ca, prateekv@alum.iisc.ac.

in