arXiv:2601.00414v1 [math.CO] 1 Jan 2026

平面中余有限集的最大凸性数

Chaya Keller* 和 Micha A. Perles*

2026年1月5日

摘要

集合 $X \subset \mathbb{R}^2$ 的凸性数是覆盖该集合所需的凸子集的最小数量。我们研究以下问题：平面中处于一般位置的 n 个点组成的集合 S，其凸性数$f(n)$ 的最大可能值是多少？我们证明，对于所有 $n \geq 4$, $\lfloor \frac{n+5}{2} \rfloor \leq f(n) \leq \frac{7n+44}{11}$。我们还证明，对于每个 $n \geq 4$，若 S中的点处于凸位置，则 $\mathbb{R}^2 \setminus S$的凸性数为$\lfloor \frac{n+5}{2} \rfloor$。这解决了 Lawrence 和 Morris 提出的一个问题：[有限集作为有限个凸集之并的补集，Disc. Comput. Geom. 42 (2009), 206-218]。

1 引言

集合 $X \subset \mathbb{R}^d$ 的凸性数记为 $\gamma(X)$，定义为覆盖该集合所需的凸集的最小数量。1957 年，Valentine [12] 证明：如果在一个闭集$X \subset \mathbb{R}^2$ 的任意三个点中，总有两个点可以通过 X 相互看见（即连接它们的线段包含于 X中），那么 $\gamma(X) \leq 3$。在此工作的基础上，许多论文（例如 [2, 4, 10, 11]）研究了如何根据集合 $X \subset \mathbb{R}^2$ 的不可见数$\omega(X)$来界定其凸性数；不可见数定义为集合 Y 中两两不能通过X相互看见的点 X 所组成的集合的最大可能大小。[1] 对于闭集，人们得到了一系列界，最终由 Matoušek 和 Valtr [9]证明了界 $\gamma(X) \leq 18\omega(X)^3$。对于一般集合，一个简单例子表明，$\gamma$ 无法用 ω 加以界定：若 X 由单位圆盘中去除一个与圆盘同心、顶点靠近其边界的正 n边形的顶点所得，则 $\omega(X) = 3$，而容易证明 $\gamma(X) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ [9]。[2]

受这个例子的启发，Matoušek 和 Valtr 建议用 $\mathbb{R}^2 \setminus X$ 中孤立点的数量（他们记作 $\lambda(X)$）来界定 $\gamma(X)$。他们证明了 $\gamma(X) \leq \omega(X)^4 + \lambda(X)\omega(X)^2$, ，且这个界在相乘一个 $\omega(X)$ 因子的意义下是紧的。此外，他们提出猜想：在平面中，$\gamma(X)$ 可以用另一个参数——$\chi(X)$——来界定；该参数定义为 X 的不可见图的色数。这个图的顶点集为 X，边连接 X 中无法通过 X互相看见的点。（显然，$\omega(X)$ 是 G_X 的团数，因此对每个 X，都有 $\omega(X) \leq \chi(X) \leq \gamma(X)$。）

*以色列阿里埃勒大学计算机科学学院。chayak@ariel.ac.il。研究部分得到以色列科学基金会（资助编号 1065/20）的支持。*以色列耶路撒冷希伯来大学爱因斯坦数学研究所。micha.perles@mail.huji.ac.il[1]Valentine 提出的术语 *m-convexity* 与 *invisibility number*密切相关：集合 X 是 m-凸的，当且仅当其不可见数为 $< m$。[2]我们注意到，在 [3] 中声称，在这种情况下，$\gamma(X) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$；该结果在那里被归功于 [9]。正如我们在正文中所写，[9] 中证明的说法是 $\gamma(X) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$。准确值为 $\gamma(X) = \lfloor \frac{n+5}{2} \rfloor - \delta(n)$，其中 $\delta(n) = 1$（当 $n = 0$，1，3 时），而 $\delta(n) = 0$ 在其他情况下，这可由定理 1.1 得出。

在 [7], , Lawrence 和 Morris 开始研究 $\mathbb{R}^d$ 中余有限集的凸性数——也就是形如 $X = \mathbb{R}^d \setminus P$ 的集合，其中 P 是有限集。显然，对于这类集合，我们有$\lambda(X) = |P|$，因为 X 的补集中的所有点都是孤立点。 [7] 的作者着重研究 $\gamma(X)$ 关于 $|P| = \lambda(X)$ 的下界，并将其表述为关于 $\gamma(X)$ 的 $|P|$ 上界。沿着同一思路，他们证明，在平面中，即使仅用 $\chi(X)$，也能给出 $|P|$ 的上界；因此，根据 [9], 关于这类集合的上述结果， $\gamma(X)$ 可以用 $\chi(X)$ 来界定，正如 [9] 中的猜想所述。Cibulka等人 [3] 推广了 Lawrence 和 Morris 的界，并证明了 [9] 对任意 $X \subset \mathbb{R}^2$ 都成立。最近，Keller 和 Perles [6] 扩展了 Lawrence 和 Morris 开创的研究，获得了一系列关于 $\mathbb{R}^d$ 中余有限集的结构性结果。

本文延续了 Lawrence 和 Morris [7], 在 $\mathbb{R}^2$ 中发起的余有限集研究，但我们着重探讨另一个极端——关于 $\gamma(X)$ 的上界，并以 $|P|$ 为依据。我们研究了该问题的几种变体。关于集合 P，除了“标准”情形（即 P 是平面上一组处于一般位置的 n 点）外，我们还研究了凸情形，在这种情形下，假设 P 中的点处于凸位置。Lawrence 和 Morris 在 [7, 问题 5] 中明确提出了这个问题。关于凸性数，除了“标准”情形外，我们还研究了不相交情形，在这种情形下，覆盖 $\mathbb{R}^2 \setminus P$ 的凸集必须两两不相交。这个变体的动机是，我们的问题与 Matoušek 在 [8, 节中所述的关于凸集并的 Helly 型定理有关；在这类 Helly 型定理中，“不相交”情形可能更为自然（见 [1, 5]）。最后，关于覆盖区域，除了必须覆盖整个补集 $\mathbb{R}^2 \setminus P$ 的“标准”情形外，我们还研究了包围情形，在这种情形下，只需覆盖 P 中每个点的一个有尖点的邻域（见定义2.1）。这种情形更便于进行归纳证明，并且已在 [6]中研究过。

这些情形的组合构成了八个问题。为正式定义这些问题，我们使用以下记号。对于平面上一组处于一般位置的有限点集 P，令:

- $cov(P)$= 覆盖 $\mathbb{R}^2 \setminus P$ 所需的凸子集的最小数量。
- $cov_\circ(P)$= 覆盖 $\mathbb{R}^2 \setminus P$ 所需的两两不相交的凸子集的最小数量。
- $enc(P)$= 包围 P 所需的凸子集的最小数量。
- $enc_\circ(P)$= 包围 P 所需的两两不相交的凸子集的最小数量。

对于 $n \in \mathbb{N}$，我们定义 $cov(n) = \max_{P:\ |P|=n}(cov(P))$。记号 $cov_\circ(n)$、 $enc(n)$ 和 $enc_\circ(n)$ 的定义类似。在点集 P 处于凸位置的情形下，我们添加上标 c，例如，

$$cov^c(n) = \max_{P:|P|=n,P \text{ is in convex position}}(cov(P)).$$

我们得到以下结果。

定理 1.1。 在上述记号下，以下结论成立:

1. 对于平面上处于凸位置的任意一组 P n 个点，

$$enc(P) = cov(P) = \left\lfloor \frac{n+5}{2} \right\rfloor - \delta(n),$$

其中 $\delta(n) = 1$ 当 $n = 0$、1、3 以及 $\delta(n) = 0$ 时；否则，且

$$enc_\circ(P) = cov_\circ(P) = \left\lfloor \frac{2n+5}{3} \right\rfloor.$$

Consequently, $enc^c(n) = cov^c(n) = \lfloor \frac{n+5}{2} \rfloor - \delta(n)$, *and* $enc^c_\circ(n) = cov^c_\circ(n) = \lfloor \frac{2n+5}{3} \rfloor$.

2. 对于平面上一组处于一般位置的 n 个点 P，

$$enc(P), cov(P) \le \frac{7n}{11} + 4, \qquad and \qquad enc_\circ(P), cov_\circ(P) \le \left\lfloor \frac{2n+5}{3} \right\rfloor.$$

根据定理的第一部分，这意味着

$$\left\lfloor \frac{n+5}{2} \right\rfloor - \delta(n) \le enc(n), cov(n) \le \frac{7n}{11} + 4,$$

其中 $\delta(n) = 1$ 当 $n = 0$、1、3 时，以及 $\delta(n) = 0$ 在其他情况下，并且

$$enc_\circ(n) = cov_\circ(n) = \left\lfloor \frac{2n+5}{3} \right\rfloor.$$

特别是，这完全解决了不相交情形和凸情形的问题；后者解决了 Lawrence 和 Morris [7]提出的问题。

我们注意到，尽管在我们的极值结果中，“覆盖”情形与“包围”情形并无区别，但对于特定的点集而言，这两个概念可能有很大差异。例如，考虑点集

$$P = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{N}, 1 \le m, n \le K, \text{ and not both } m \text{ and } n \text{ are even}\},$$

其中 K是一个很大的整数。我们有 $cov(P) \ge (\frac{K}{2})^2$，因为任意两个不同的、形如 $(2\ell, 2k)$ $(0 \le k, \ell \le \lfloor \frac{K+1}{2} \rfloor)$ 的点都无法通过 $\mathbb{R}^2 \setminus P$彼此看见。事实上， P中的某个点位于任意两个这样的点所连接的线段上。另一方面， $enc(P) \le 2K+2$。 $\mathbb{R}^2 \setminus P$的一个相应覆盖由竖直条带和水平条带组成

$$\{(i, i+1) \times \mathbb{R}\}_{1 \le i \le K-1} \bigcup \{\mathbb{R} \times (i, i+1)\}_{1 \le i \le K-1} \cup \{(-\infty, 1) \times \mathbb{R}\} \cup \{(K, \infty) \times \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R} \times (-\infty, 1)\} \cup \{\mathbb{R} \times (K, \infty)\}.$$

我们获得这些结果的方法如图 1 所示。图中用箭头表示以下显然的关系：每个参数的凸变体不大于一般变体，包封变体不大于覆盖变体，而不相交变体不小于相应的一般变体；关系 $\le$从每个箭头的尾部指向其头部。我们的结果也展示在图中，定理 1.1 的结论可由这些结果结合箭头所表示的显然关系推出。

剩下的未解决问题是确定 $enc(n)$ 和 $cov(n)$；我们得到的这两个量的下界与上界之间差距显著。

本文其余部分安排如下。第 3 节介绍包围下界（图 1 中的定理 3.1 和命题 3.7）。第 4 节介绍覆盖上界（图 1 中的定理 4.1、定理 4.2 和命题 4.3）。

2 预备知识

对于集合 $S \subset \mathbb{R}^d$，分别用 cl(S) 和 int(S) 表示 S 的拓扑闭包和内部。 S 的凸包记作 conv(S)。

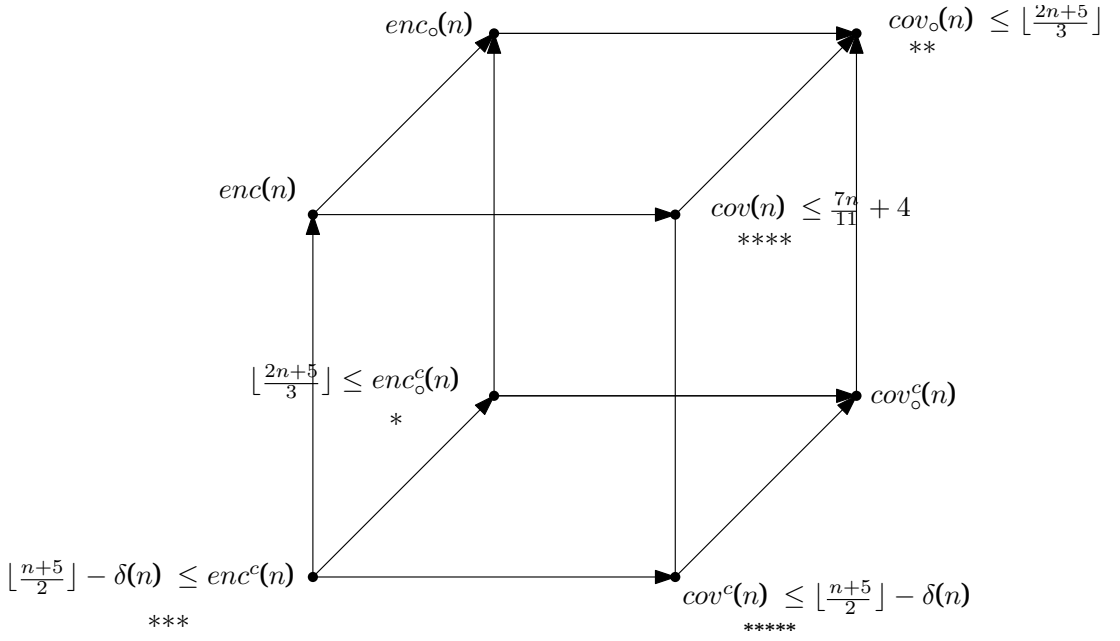


图 1：我们的结果示意图。每个箭头表示一个平凡的'≤'关系，其中箭尾对应的参数小于或等于箭头对应的参数。定理 *=命题 3.7，定理 **=命题 4.3，定理 ***=定理 3.1，定理 ****=定理 4.2，定理 *****=定理 4.1。定理 1.1 的断言可由这些结果通过"箭头"关系推出。

定义2.1。 若存在 p 的某个邻域 N，使得 $(\bigcup_{i=1}^{n} K_i) \cap N = N \setminus \{p\}$，则点 $p \in \mathbb{R}^2$ 被集合 K_1、.....、K_n 包围。

定义2.2。 对于 $K \subset \mathbb{R}^d$，$p \in \mathbb{R}^d$，我们称 p 接触集 K（或 K 接触集 p），若 $p \in \mathrm{cl}(K) \setminus K$。

给定 $\mathbb{R}^2$ 中的有限点集 P 和一个集合 $K \subset \mathbb{R}^d$，令 $touch_P(K) = \{p \in P :\ p$ 接触集 $K\}$。当上下文已清楚表明其对 P 的依赖时，我们简写为 $touch(K)$。

观察 2.3。 设 P 为一个点集，它被 t 个凸集包围。若 $|P| = 1$，则$t \ge 2$；若 $|P| = 2$，则 $t \ge 3$。

对于 a，$b \in \mathbb{R}^d$，记 $\ell(a,\ b)$ 为经过 a 和 b的直线。

3 下界

本节证明图 1 中所示的两个包围下界。首先证明定理 3.1，然后证明命题 3.7。

定理 3.1。

$$\left\lfloor \frac{n+5}{2} \right\rfloor - \delta(n) \le enc^c(n),$$

其中 $\delta(0) = \delta(1) = \delta(3) = 1$ 且对于所有 $n \ne 0,\ 1、3</style}),\ (n) = 0$。也就是说，至少需要 $\lfloor \frac{n+5}{2} \rfloor - \delta(n)$ 个凸集，才能包围平面中处于凸位置的 n 个点。

证明。 $n = 1,2,3$ 的情形显然成立。对于 $n = 4$，我们将证明，三个凸集不足以包围平面中处于凸位置的四个点 $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$。[3] 反设三个凸集 A, B, C 足够。考虑 $\ell(a_i, a_{i+1})$ 上的八条短线段（下标模 4）（这些短线段从 $\text{conv}(a_0, \dots, a_3)$ 外部出发，在图 2 中以实线绘出）。根据鸽巢原理，其中三条线段包含

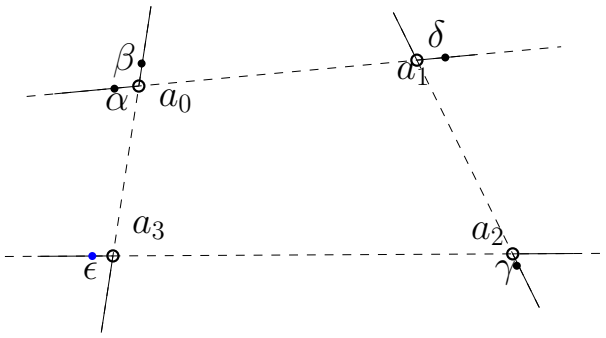


图 2：定理 3.1 证明的示意图。

一个非常靠近相应 a_i的点 A（不失一般性）。

- 如果这三个点是 α，β和 γ（采用图 2 中的记号），那么 $a_0 \in \text{conv}(\alpha, \beta, \gamma) \subset A$，矛盾。
- 如果这 3 个点是 β，γ，δ那么 a_1，$a_2 \in \text{conv}(\beta, \gamma, \delta) \subset A$，矛盾。
- 如果这三个点是 α，β和 ϵ，那么要得到矛盾还需要一步：考虑直线 $\ell(a_1, a_2)$。根据观察 2.3，要包围这条直线上的 a_1，，需要所有三个集合，B，C。无论是 $a_1 \in touch(A)$ 还是 $a_2 \in touch(A)$，我们都有 $a_0 \in A$，矛盾。
- 其他所有情形都是对称或类似的。

现在我们转向 $n \geq 5$。设 $f(n) = \lfloor \frac{n+5}{2} \rfloor$。设 P是平面上一组处于凸位置的 n个点 $\{a_0, \dots, a_{n-1}\}$。考虑一个由凸集组成的族 $\mathcal{K}$，这些凸集包围 P。我们将证明$|\mathcal{K}| \geq f(n)$。为此，我们考虑两种情形：

情形A： 存在某个 $x \in \text{int}(\text{conv}P)$，它至少包含在 $\mathcal{K}$中的两个集合内。**情形B：** $\text{int}(\text{conv}P)$中没有任何点同时包含在 $\mathcal{K}$中的两个集合内。

我们分别处理每种情形。

情形A：考虑 $\ell(x, a_i)$ 上、$\text{conv}P$ 之外的短线段（图 3 中的常规线段）。令 β_i 为这样一条线段上一个非常靠近 a_i 的点。我们断言，任意三个 β_i 都不会包含在同一个 $K \in \mathcal{K}$ 中。事实上，假设 $\beta_i, \beta_j, \beta_k \in K$。如果 x, β_i, β_j 位于同一条直线上，那么 $a_i, a_j \in \text{conv}(\beta_i, \beta_j) \subset K$，矛盾。否则，从 x 到 $\beta_i, \beta_j, \beta_k$ 的三条射线（按此循环顺序）要么全部包含在一个半平面内，要么不全包含在半平面内。第一种情况下（见图 4(a)），$a_j \in \text{conv}(\beta_i, \beta_j, \beta_k) \in K$，矛盾。第二种情况下（见图4(b)），$a_i, a_j, a_k \in \text{conv}(\beta_i, \beta_j, \beta_k) \in K$，矛盾。因此，由于每个凸集最多只能使用 2 次，根据鸽巢原理，到目前为止至少使用了$\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 个集合。这些 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 个集合中没有一个包含 x（否则某个 a_i 会包含在 K 中）。于是 $|\mathcal{K}| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \geq \lfloor \frac{n+5}{2} \rfloor = f(n)$，如所述。 ——

[3]我们指出，针对一个类似问题（其中 $n = 4$）的略有不同的论证见 [7, 定理 1]。

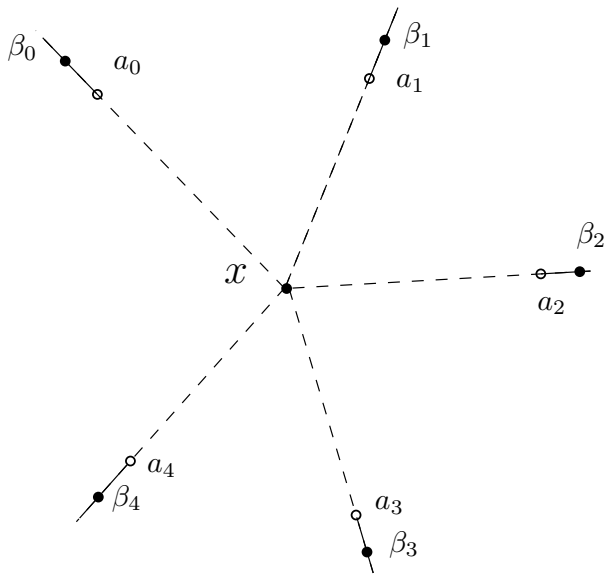


图 3：定理 3.1 证明的示意图。

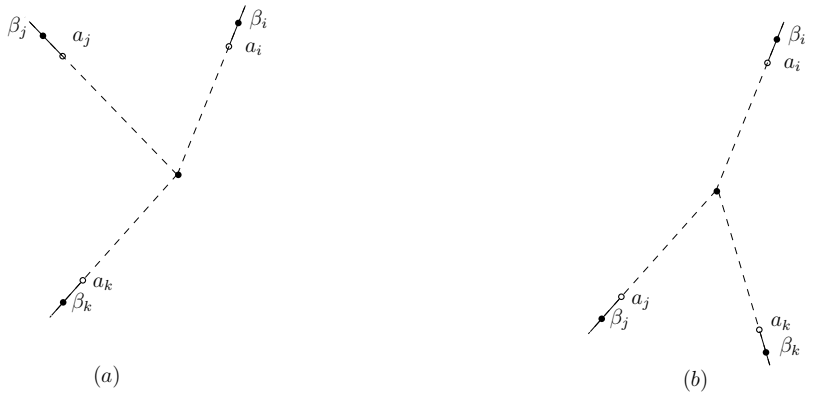


图4：定理 3.1 证明的示意图——情形A。

情形B： 由于对于 $n > 5$，有 $f(n-2) = f(n) - 1$；对于 $i \geq 3$，有 $f(2i) = f(2i-1)$，因此只需对奇数 n 证明该断言，其中基例 $n = 5$ 将在下文的断言3.2中讨论。对于归纳步骤，令 $n > 5$ 为一个奇整数，并假设结论对 $n-2$ 成立。

如果某个 $K \in \mathcal{K}$ 至多接触 P 个点，那么根据归纳假设，至少需要 $f(n-2)$ 个凸集来包围所有其他 $n-2$ 点。因此 $|\mathcal{K}| \geq 1 + f(n-2) = f(n)$（在右侧等式中，我们使用了假设 $n > 5$）。

从现在起，我们假设每个 $K \in \mathcal{K}$ 在 P 中至少接触三个点。令 $K \in \mathcal{K}$ 的一个跨度 为 $\mathrm{conv}P$ 边界上的一条最短弧，它包含 $touch(K)$ 中的所有点。跨度的长度是其包含的 P 中的点数。设 $K \in \mathcal{K}$ 是一个跨度最短的集合，γ。那么 K 接触 $P \cap \gamma$ 中的所有点；否则，某个内部 $p \in \gamma \cap P$ 会接触另一个 $K' \in \mathcal{K}$，其跨度至少一样长。但这样一来，$K \cap K' \neq \emptyset$，这与情形B的假设矛盾。

特别地， K 接触 conv$P$ 的三个连续顶点，即 a_1， a_2， a_3。由于根据观察 2.3，没有点会被单个凸集封装， a_2 会接触另一个 $K'' \in \mathcal{K}$。但由于 K'' 在 P 中至少接触三个点，因此我们有 int(K) ∩int(K') ∩int(conv$P$) $\neq \emptyset$，这与情形B的假设矛盾。

为了完成情形B的证明，我们必须为 $n = 5$ 证明归纳基础。为方便起见，下面将在断言3.2中完成这一工作。至此，我们完成了定理 3.1 的证明。

□

剩下的工作是为 $n = 5$ 证明归纳基础。

断言3.2。 设 $P = \{a_1, \ldots, a_5\}$ 是平面上按此循环顺序排列且处于凸位置的 *5* 个点的集合，并设 K_1、*.....*、K_t 是包围 P 的 t 凸集，其中 ***int***(***conv***P) 中的任何点都不包含于两个 K_i 中。则 $t \geq 5$。

证明 断言*3.2*的 证明。反设 $t < 5$。我们使用几个观察 :

观察 3.3。 每个 K_i 至少与两个 a_j 接触。

事实上，否则将有 4 个点被 $t-1$ 凸集包围。正如我们在定理 3.1 证明开头所证明的，可得 $t - 1 \geq 4$，矛盾。

观察 3.4。 某个 K_i 至少接触 *3* 个 a_j。

证明。 根据观察 3.3， K_i与a_j的接触次数至少为 $2 \times 5 = 10$。如果每个 K_i恰好接触 2 个点，则 $t = 5$，矛盾。否则，通过双重计数，可得观察 3.4 的断言。

□

观察3.5。对于 $1 \leq i_1 < i_2 \leq t$， $|touch(K_{i_1}) \cup touch(K_{i_2})| > 3$。

证明。 否则， $|P \setminus (touch(K_{i_1}) \cup touch(K_{i_2}))| \geq 2$，因此根据观察 2.3，至少需要 3 个凸集来包围 $P \setminus (touch(K_{i_1}) \cup touch(K_{i_2}))$，再加上 K_{i_1}， K_{i_2} 我们有$t \geq 5$，矛盾。

□

观察 3.6。 每个 a_j 都接触某个满足 $|touch(K_i)| \geq 3$ 的 K_i 。

事实上，根据观察 2.3， a_j 至少接触两个 K_i，而如果它们都至多接触 2 个点，就会与观察 3.5 矛盾。

现在我们可以继续证明断言3.2。假设 $|touch(K_1)|$ =max$\{|touch(K_1)|, \ldots, |touch(K_t)|\}$。根据观察 3.4， $|touch(K_1)| \geq 3$，因此我们考虑 3 种情形:

情形 1： $|touch(K_1)| = 5$。 那么，由于任意两个 K_i 都不在 int(conv$P$) 中相交，根据观察 3.3，每个 $K_2, \ldots, K_t$ 都接触两个相邻的 a_j。由于根据观察 2.3，每个 a_j 至少接触两个 K_i，族 $K_2, \ldots, K_t$ 至少包含 3 个集合，但这样一来，两个 K_i 就共同接触 3 个点，这与观察 3.5 矛盾。

情形 2： $|touch(K_1)| = 4$。 **</style}假设 () 。与 接触的集合 不能与 或 接触，因为没有两个凸集在 int(conv) 中相交。根据观察 2.3，至少需要 3 个凸集来包围 ,** a_4。还需要至少 2 个其他凸集来包围a_1，因此总数为 $t \geq 5$，矛盾。

情形 3： $|touch(K_1)| = 3$。如果 $touch(K_1)$ 包含 3 个连续的点，即 a_1、a_2、a_3，那么根据观察 2.3 a_2 接触另一个集合，设为 K_2。由于 K_1 和 K_2 不在 int(conv$P$) 中相交，因此 $touch(K_2) = \{a_1, a_2\}$，或 $touch(K_2) = \{a_2, a_3\}$。于是 $|touch(K_1) \cup touch(K_2)| = 3$，这与观察3.5矛盾。情形 3 的剩余情况是 $touch(K_1)$ 包含 3 个不连续的点，即 a_1、a_3、a_4；我们还可以假设，每个其他满足 $|touch(K_i)| = 3$ 的 K_i 都接触 3 个不连续的点（否则只需将相应的集合替换为 K_1）。然后根据观察 3.6，a_2 接触某个满足 $|touch(K_i)| = 3$ 的 K_i，但此时 K_1 和 K_i 在 int(conv$P$) 中相交，矛盾。至此，断言3.2的证明完成。 □

现在我们转向本节的第二个结果。

命题 3.7. $enc^c_\circ(n) \geq \lfloor \frac{2n+5}{3} \rfloor$. 换言之，如果凸位置中的一组 $P = \{p_1, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ 个 n 点被两两不相交的凸集 $\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_t\}$ 封装，那么$t \geq \lfloor \frac{2n+5}{3} \rfloor$。

命题 *3.7* 的证明。令 $f(n) = \lfloor \frac{2n+5}{3} \rfloor$。那么 $\forall n \geq 3, f(n) = 2 + f(n-3)$，且序列$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$为 $\langle 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, \ldots \rangle$。证明对 n 使用归纳法，其中情形 $n = 0, 1, 2, 3$ 显然。

我们先进行几项简化：首先，可以假设每个 K_i 都接触 P中的某个点（否则只需删去 K_i），且每个 $p_j \in P$ 都接触至少两个 K_i（由观察 2.3 得出）。此外，若某个集合 K_i 只接触一个点 $p_j \in P$，则 $P \setminus \{p_j\}$ 被$\mathcal{K} \setminus \{K_i\}$包围；根据归纳假设，$f(n-1) \leq t-1$。因此 $f(n) \leq f(n-1) + 1 \leq t$，结论得证。另一方面，若 $\mathcal{K}$ 中的每个集合都只接触两个点，那么由于 P中的每个点都接触至少两个 K_i，我们有 $n \leq t$。既然 $\forall n \geq 3$，$f(n) \leq n$，结论再次得证。因此，从现在起我们假设每个 K_i 都接触 P中的至少两个点，并且至少有一个 K_i 接触三个或更多点。

对于每个 $K_i \in \mathcal{K}$，令 $touch(K_i) = \{p \in P : p \text{ 接触 } K_i\}$。在下面的论证中，我们将使用以下观察：

观察 3.8。沿用命题 *3.7* 中的记号，若对于某个 $1 \leq i < j \leq n$, $|touch(K_i) \cup touch(K_j)| \leq 3$，则 $f(n) \leq t$，于是结论成立。

观察 *3.8* 的证明。若（不失一般性） $touch(K_i) \cup touch(K_j) \subseteq \{p_1, p_2, p_3\}$，那么 $\mathcal{K} \setminus \{K_i, K_j\}$ 中的 $t-2$ 集包围 $P \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$ 中的 $n-3$ 个（或更多）点；根据归纳假设，$f(n-3) \leq t-2$。因此 $f(n) = 2 + f(n-3) \leq 2 + (t-2) = t$，结论再次成立。 □

如果 $|touch(K_i)| \geq 3$，我们就称 $K_i \in \mathcal{K}$ 为大集合。根据上述约化，如果 $|touch(K_i)| = 2$，那么 K_i 就不是大集合，我们称 K_i 为小集合。我们可以假设每个 $p_i \in P$ 都接触某个大集合 K_j。事实上，否则 p_i 至少接触两个小集合 K_{j_1}，K_{j_2}。由此可得$|touch(K_{j_1}) \cup touch(K_{j_2})| \leq 3$，再由观察 3.8 可知结论成立。

与定理 3.1 的证明类似，将大集合 K_i 的跨度定义为 conv(P) 边界上的一条最短弧，该弧包含 $touch(K_i)$。跨度的长度是P 中所含点的数量。不失一般性，设 K_1 是跨度最短的大集合 γ。那么 K_1 接触 $P \cap \gamma$ 中的所有点，因为否则某个内部 $p \in \gamma \cap P$会接触另一个大集合 K_j，而其跨度至少与之相同。但这样便有 $K_i \cap K_j \neq \emptyset$，矛盾。

由于 K_1 很大，$|P \cap \gamma| \geq 3$。现在我们考虑情形 $|P \cap \gamma| = 3$、$|P \cap \gamma| = 4$ 和$|P \cap \gamma| \geq 5$，并证明在每种情形下，该断言都可由归纳假设推出。出于技术原因，我们先考虑简单情形 $P \cap \gamma = P$。在此情形下，K_1接触集 p_1、.....、p_n

并且由于对于每个 $2 \le i \le n$，都有 $touch(K_i) \ge 2$ 且 $K_1 \cap K_i = \emptyset$，因此每个 K_i都接触 conv$P$ 的两个连续顶点。不失一般性， K_2 接触 p_1， p_2，但由于少于三个凸集无法包围任意两个点， $\mathcal{K}$中必有另一个集合（例如 K_3）接触 p_1 或 p_2。于是$|touch(K_2) \cup touch(K_3)| \le 3$，根据观察 3.8，结论成立。

因此，接下来我们可以假设 $|P \cap \gamma| < |P|$。

情形 1： $|P \cap \gamma| = 3$。

假设 $P \cap \gamma = \{p_1, p_2, p_3\}$（见图 5），即 K_1 恰好接触 P 中的点 p_1、 p_2、 p_3。点 p_2还接触另一个凸集，记作 K_2。由于 $K_1 \cap K_2 = \emptyset$，集合 $touch(K_2)$ 要么是$\{p_1, p_2\}$，要么是 $\{p_2, p_3\}$。但应用观察 3.8，令 K_1、 K_2、 p_1、 p_2、 p_3，即可完成证明。

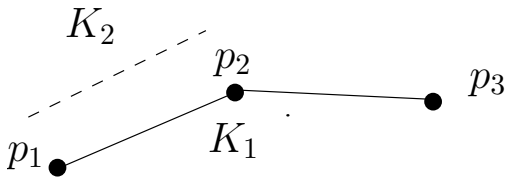


图 5：一幅 lus图，展示了命题 3.7 证明中情形 1 的情况，其中 $touch(K_2) = \{p_1, p_2\}$。

情形 2： $|P \cap \gamma| = 4$。

假设 $P \cap \gamma = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$（见图 6）。由于在 $\mathcal{K}$ 中没有点只接触一个集合，因此点 p_2 还接触另一个凸集，记为 K_2。同样，由于 $K_1 \cap K_2 = \emptyset$，集合 $touch$（K_2）要么是 $\{p_1, p_2\}$，要么是 $\{p_2, p_3\}$。如果 $touch$（K_2）$= \{p_2, p_3\}$，那么 $\mathcal{K}$ 中还存在另一个集合，记为 K_3，它接触 p_2 或 p_3（因为少于三个凸集无法包围两个点）；不妨设 K_3 接触 p_2。由于 $|touch$（K_3）$| > 1$ 且 $K_1 \cap K_3 = \emptyset$，我们再次得到 $touch$（K_3）$= \{p_1, p_2\}$ 或 $touch$（K_3）$= \{p_2, p_3\}$。但此时由观察 3.8，取 K_2， K_3， p_1， p_2， p_3，即可完成证明。

现在只剩下另一种可能，即 $touch(K_2) = \{p_1, p_2\}$。点 p_3 接触（不失一般性地） K_3。若 $touch(K_3) = \{p_2, p_3\}$，则由观察 3.8 可知结论成立。因此，我们可以假设 $touch(K_3) = \{p_3, p_4\}$。于是 $touch(K_1) \cup touch(K_2) \cup touch(K_3) = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$，根据归纳假设， $f(n-4) \le t-3$（因为 $\mathcal{K} \setminus \{K_1, K_2, K_3\}$ 中的 $t-3$ 集包围了 $P \setminus \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ 中的 $n-4$ 点）。因此

$$f(n) \le f(n-1) + 1 = 3 + (f(n-1) - 2) = 3 + f(n-4) \le 3 + (t-3) = t,$$

正如所断言的。（这里 我们使用了假设 $n \ge 5$，该假设成立，因为 $|P \cap \gamma| < |P|$，如上文所述。 ）

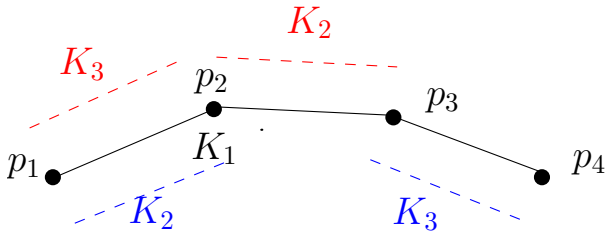


图 6：命题 3.7 证明中情形 2 的示意图。情形 $touch(K_2) = \{p_2, p_3\}$以红色标示，情形 $touch(K_2) = \{p_1, p_2\}$ 以绿色标示。

情形 3： $|P \cap \gamma| \geq 5$。假设 $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} \subseteq P \cap \gamma$（见图 7）。由于 p_3 与 $\mathcal{K}$ 中不止一个集合接触，不失一般性，$p_3 \in touch(K_2)$。与之前一样，接着 $touch(K_2)$ 是 $\{p_2, p_3\}$ 或 $\{p_3, p_4\}$。不失一般性，$touch(K_2) = \{p_3, p_4\}$。由观察 2.3 可知，少于三个凸集不可能包围两个点，因此我们可以假设 $\mathcal{K}$ 中的某个其他集合（例如 K_3）与 p_3 或 p_4 接触，或二者都接触。由于 $K_1 \cap K_3 = \emptyset$，可得 $|touch(K_3)| = 2$，于是我们再次得到两个凸集 K_2，K_3，其中 $|touch(K_2) \cup touch(K_3)| \leq 3$；根据观察 3.8，结论得证。

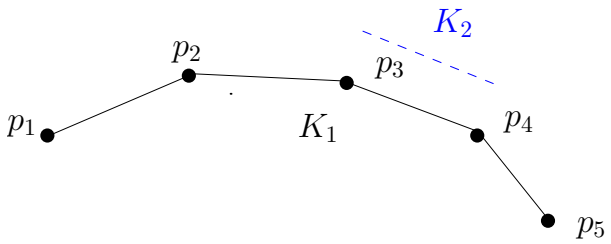


图 7：命题 3.7 证明中情形 3 的示意图。

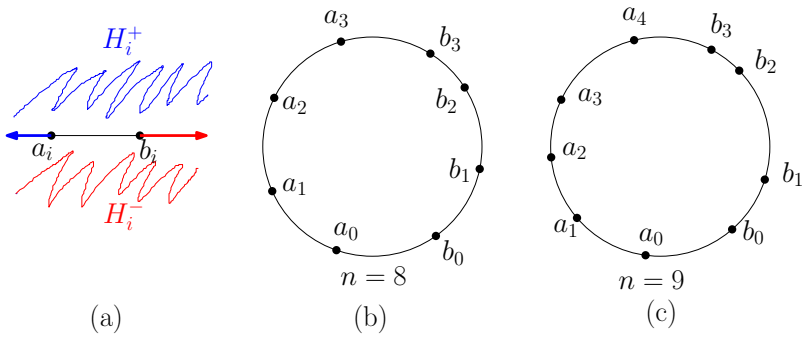
命题 3.7 的证明至此完成。 □

4 上界

本节将证明图 1 所示覆盖问题的三个上界，即定理 4.1、定理 4.2 和命题 4.3。我们先证明定理 4.1，其证明还提供了建立定理 4.2 所需的一些工具。

定理 4.1。 $cov^c(n) \leq \lfloor \frac{n+5}{2} \rfloor - \delta(n)$ 其中 $\delta(n)$ 的定义见定理 *3.1*。也就是说，$\lfloor \frac{n+5}{2} \rfloor - \delta(n)$ 个凸集足以覆盖平面中处于凸位置的 n 个点的补集。

证明。记 $f(n)$ 为 $= \lfloor \frac{n+5}{2} \rfloor - \delta(n)$。考虑 $\mathbb{R}^2$ 中由 P 个处于凸位置的 $n \geq 4$ 点组成的集合，按循环顺序排列为 b_0、……、$b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$、$a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$、……、$a_0$，如图 8(b,c) 所示。对于每个 $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$，令 H_i^- 为 $\ell(a_i, b_i)$ 下方的半开半平面，并包含从 b_i 向右延伸、位于 $\ell(a_i, b_i)$ 上的开射线；令 H_i^+ 为 $\ell(a_i, b_i)$ 上方的半开半平面，并包含从 a_i 向左延伸、位于 $\ell(a_i, b_i)$ 上的开射线，如图 8(a) 所示。



(a) (b) (c)

图 8：定理 4.1 证明的示意图。

我们构造$\lfloor \frac{n+5}{2} \rfloor$个凸集：

$$
\begin{aligned}
&H_0^- \\
&H_0^+ \cap H_1^- \\
&H_0^+ \cap H_1^+ \cap H_2^- \\
&\dots \\
&H_0^+ \cap \ldots \cap H^+_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2} \cap H^-_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}.
\end{aligned}
$$

如果 n为偶数，则最后两个凸集是 $H^+_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$和 $\operatorname{int}(\operatorname{conv}(\{a_i\} \cup \{b_i\}))$。如果 n为奇数，则最后三个凸集为

$$
\begin{aligned}
&H_0^+ \cap \ldots \cap H^+_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \cap H^-_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \\
&H^+_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \\
&\operatorname{int}(\operatorname{conv}(\{a_i\} \cup \{b_i\})),
\end{aligned}
$$

其中，$H^-_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$是位于$a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$下方并包含左侧开射线的半开半平面，而$H^+_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$是位于$a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$上方并包含右侧开射线的半开半平面。显然，在这两种情况下，我们构造的集合都覆盖了 $\mathbb{R}^2 \setminus P$。

□

定理 4.2。平面中处于一般位置的任意 n个点集的补集都可以由 $\frac{7n}{11} + 4$ 个凸集覆盖，即

$$cov(n) \leq \frac{7n}{11} + 4.$$

证明。设 P是平面中处于一般位置的 n 个点的集合。如果 P处于凸位置，则根据定理 4.1，$cov(P) \leq \lfloor \frac{n+5}{2} \rfloor - \delta(n) \leq \frac{7n}{11} + 4$。如果 P包含处于凸位置的 $n-1$个点，以及其凸包内部的一个点 p，则根据定理 4.1 的证明，$\mathbb{R}^2 \setminus (P \setminus \{p\})$可以由$\lfloor \frac{n+5}{2} \rfloor - \delta(n)$个凸集覆盖，使得 $\operatorname{int}(\operatorname{conv}(P \setminus \{p\}))$中的每个点都被覆盖两次。于是，将包含 p的两个凸集分别拆分为 2 个凸集，我们得到对 $\mathbb{R}^2 \setminus P$的覆盖，共有 $\lfloor \frac{n+5}{2} \rfloor - \delta(n) + 2 \leq \frac{7n}{11} + 4$ 个凸集。从现在起，我们假设$|P \cap (\operatorname{int}(\operatorname{conv} P))| \geq 2$。

我们通过归纳法进行证明，其中归纳基础是上述两个“退化”情形。分两种情况讨论。较简单的一种是：$\operatorname{conv} P$的边界上存在三个连续顶点 a，b，c，使得 P 中的某个点位于三角形 $\triangle abc$内。不失一般性，设b是 $\operatorname{conv} P$的最高点，且直线 $\ell(a, c)$ 是水平的（见图 9）。

设 x 是 $P \cap \operatorname{int}(\triangle abc)$ 中的最高点（若最高点不止一个，则 x 取最左边的那个）。设 a'，$c' \in P$为两点，使得 a'，x，c'是 $\operatorname{conv}(P \setminus \{b\})$边界上的连续顶点。注意，$a'$可以是 a，也可以是 $int(\operatorname{conv}(P \setminus \{b\}))$中的某个更高点；$c'$同理。在图10中，$a' \in \operatorname{int}(\operatorname{conv}(P \setminus \{b\}))$ 和 $c' = c$。另请注意，$P \cap (\operatorname{conv} P \setminus \operatorname{conv}(P \setminus \{b\}))$ $\{b\}$ $\vec{xb}$ $\vec{xc'}$ $\vec{xa'}$ A B C x a' b c'。射线，，将平面分成三个凸集，，，而，，未被覆盖，如图10所示。

由于 $|C \cap P| = n - 4$，根据归纳假设，$\mathbb{R}^2 \setminus (P \setminus \{x, a', b', c'\})$ 可由$\leq \frac{7(n-4)}{11} + 4$ 个凸集覆盖。将这些凸集分别与 C 相交，再加入 A 和 B，即可得到由 $\leq \frac{7(n-4)}{11} + 6 \leq \frac{7n}{11} + 4$ 个凸集对 $\mathbb{R}^2 \setminus P$ 的覆盖，证毕。

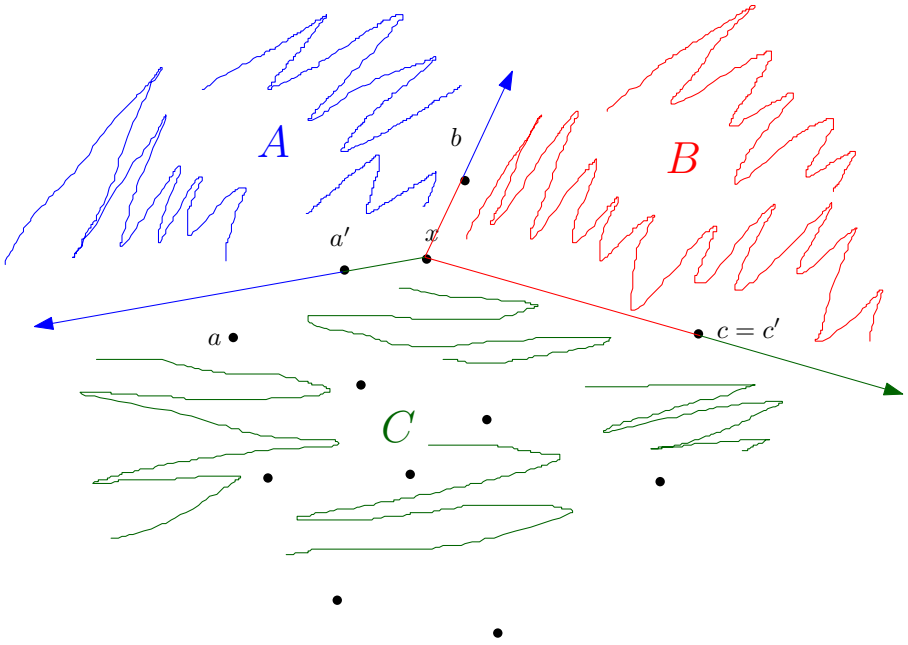


图 9：定理 4.2 证明的示意图。

剩下的情形是：conv$P$ 的每三个连续顶点构成一个三角形，其内部不含 P 中的点。设 $P' = \text{int}(\text{conv}P)$。根据上述假设，$|P'| \geq 2$。设$[p,q]$ $(p,q \in P')$ 是 conv(P') 的一条边界边。直线 $\ell(p,q)$ 与 conv$P$ 的两条非连续[4]边界边 $[p',p''],[q',q'']$ 相交。（不妨设 P' 的所有顶点都位于 $\ell(p,q)$ 下方，如图10所示。）

令 ℓ^+ 为 $\ell(p,\ q)$ 上方的闭半平面，ℓ^- 为 $\ell(p,\ q)$ 下方的闭半平面。令q'''，$p''' \in P$为满足以下条件的点：p'''，p，q，q'''是 conv($P \cap \ell^-$) 的四个连续顶点。（点 p''' 可以是 p'，也可以是 conv$P$ 的某个内部点——后一种情况见图10；q''' 可以是 q'，也可以是 conv$P$ 的某个内部点——前一种情况见图10）。

注意，$\angle p''pq + \angle pqq'' \geq 180°$ 或 $\angle p'''pq + \angle pqq''' \geq 180°$。我们将集合 $\mathbb{R}^2 \setminus \{p,q,p'',q'',p''',q'''\}$ 划分为四个凸集 A，B，C，D，如下所示。若 $\angle p''pq + \angle pqq'' > 180°$ 且 $\angle p'''pq + \angle pqq''' > 180°$（如图10所示），则 A 由 $p\vec{p}''$，$[p,q]$ 和 $q\vec{q}''$围成，C 由 $p\vec{p}''$，$p\vec{p}'''$围成，B 由 $q\vec{q}''$，$q\vec{q}'''$围成，而 D 由 $p\vec{p}'''$，$[p,q]$ 和 $q\vec{q}'''$围成。

如果 $\angle p'''pq + \angle pqq''' < 180°$，那么集合 A、B、C、D 的定义类似，但 D 是有界的，如图 11 所示。对称地，如果 $\angle p''pq + \angle pqq'' < 180°$，那么 A 是有界的。无论如何，cl(A) $\cap P$ 只包含从 p'' 到 q''的 conv$P$ 边界上的连续顶点。此外，cl(C) $\cap P = \{p,p'',p'''\}$，cl(B) $\cap P = \{q,q'',q'''\}$，且只有 D 包含 int(conv$P$)中的点。因此$|D \cap P| \leq n-6$。

证明的其余部分利用了关于 $P \cap D$的归纳假设。我们将根据归纳假设得到的每个凸集分别与 D相交。该过程保证得到一个凸集族 $\mathcal{D}$。

如果 $A \cap P = \emptyset$，那么 $\mathcal{D} \cup \{A,B,C\}$ 是由至多 $7_{(n-6)_{11}} + 4 + 3$ 个凸集对 $\mathbb{R}^2 \setminus P$ 的覆盖，并且由于 $7_{(n-6)_{11}} + 7 < 7_{11}^{n} + 4$，结论得证。如果 $|A \cap P| = k$，那么根据定理 4.1（此处可以应用该定理，因为 $A \cap P$ 处于凸位置），$\mathbb{R}^2 \setminus (A \cap P)$ 可以由$\lfloor \binom{k+5}{2} \rfloor - \delta(k)$ 个凸集覆盖。

[4]这两条边 确实不相邻，否则我们又会遇到非空三角形的第一种情况 .

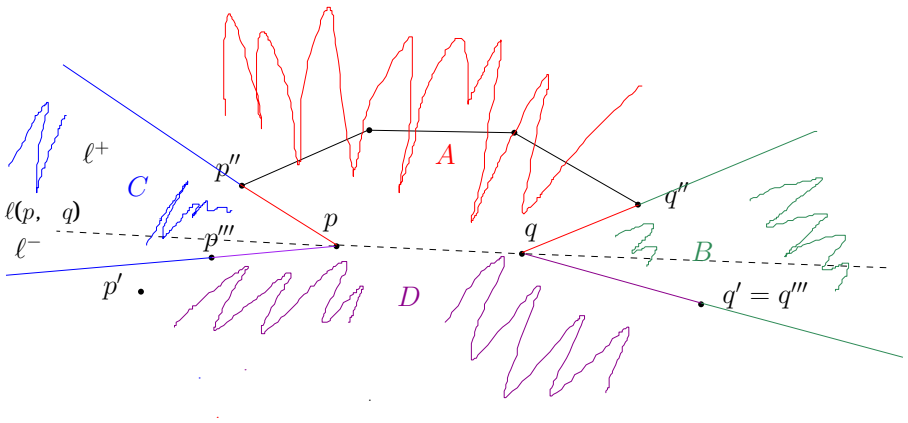


图 1：定理 4.2 证明示意图。射线 xb, xc', xa'（点a', b', c', x 除外）属于相应的集合 A, B, C 或 D，如颜色所示。

令 $\mathcal{A}$ 为这些凸集与 A 的交集所构成的族。那么 $\mathcal{A} \cup \mathcal{D} \cup \{B, C\}$ 是一个至多包含

$$\left(\left\lfloor \frac{k+5}{2} \right\rfloor - \delta(k)\right) + \left(\frac{7(n-6-k)}{11} + 4\right) + 2 \leq \frac{7n}{11} + 4$$

个凸集的族，能够按需要覆盖 $\mathbb{R}^2 \setminus P$。（当 $k = 5$ 时，比例为 7:11；对于 k 的其他取值，右侧不等式均为严格不等式。）这就完成了定理 4.2 的证明。 □

命题 4.3。

$$cov_{\circ}(n) \leq \left\lfloor \frac{2n+5}{3} \right\rfloor .$$

也就是说，平面上处于一般位置的 n 个点的补集可以由 $\lfloor \frac{2n+5}{3} \rfloor$ 个两两不相交的凸集覆盖。——

命题 *4.3* 的证明。 我们通过对 n 作归纳法来证明这一断言。对于 $n = 1$，该不等式显然成立。对于 $n = 2$，平面上 2 个点的补集的一种覆盖方式如图 12(*a*) 所示。 $n = 3$ 的情况如图 12(*b*) 所示。

在归纳步骤中，我们将证明，对于 $n \geq 3$, $cov_{\circ}(n) \leq 2 + cov_{\circ}(n-3)$，结论便可随之得出。事实上，给定平面上一组处于一般位置的 n 个点 P，令 x、y、$z \in P$ 为 conv$P$ 的 3 个连续顶点。令 A、B 为 conv$P$ 内部的补集中的凸集，如图 13 所示，并令 $C = \mathbb{R}^2 \setminus (A \cup B \cup \{x, y, z\})$。根据归纳假设，$\mathbb{R}^2 \setminus P \setminus \{x, y, z\}$ $cov_{\circ}\ n-3$ $K_1\ \ldots\ K_{cov_{\circ}\ n-3}$ A B $K_1 \cap (\ )$ 可 $C\ \ldots\ K_{cov_{\circ}\ n-3} \cap C$ $2 + cov_{\circ}\ n-3$ $\mathbb{R}^2 \setminus P$ 由 ( ) 个凸集、、() 覆盖。于是，、、、、() 是 ( ) 个凸集，它们的并集等于，如所述。 □

参考文献

[1] N. Amenta. 有界盒、豪斯多夫距离，以及一个有趣的 Helly 型定理的新证明。载于*SoCG* 论文集，第 340–347 页。ACM，1994。

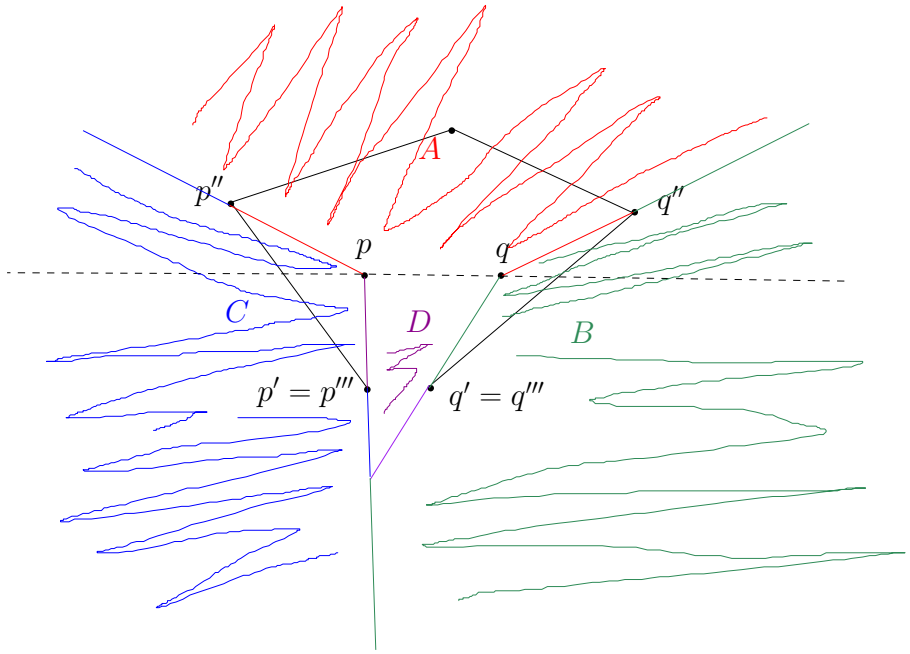


图 11：定理 4.2 证明的示意图，其中 $\angle p'''pq + \angle pqq''' < 180°$.

[2] M. Breen 和 D. C. Kay. 平面中 m-凸集的一般分解定理。以色列数学杂志，24(3–4)：217–233，1976。[3] J. Cibulka、M. Korbel´aˇr、J. Kynˇcl、V. M´esz´aros、R. Stolaˇr 和 P. Valtr。论非凸性的三种度量。以色列数学杂志，218：331–369，2017。[4] H. G. Eggleston。紧平面集可表示为有限个凸集之并的条件。剑桥哲学学会数学学报，76：61–66，1974。[5] B. Gr¨unbaum 和 T. Motzkin。论若干集合族中的连通分支。美国数学会会刊，12：607–613，1961。[6] C. Keller 和 M. A. Perles。凸集的有限并之补集，arxiv:2508.19413。[7] J. Lawrence 和 W. D. Morris Jr. 有限集作为有限个凸集之并的补集。离散与计算几何，42(2)：206–218，2009。[8] J. Matouˇsek。凸集之并的 Helly 型定理。离散与计算几何，18(1)：1–12，1997。[9] J. Matouˇsek 和 P. Valtr。论可见性与凸集覆盖。以色列数学杂志，113(3)：341–379，1999。[10] N. Nitzan 和 M. A. Perles。平面 3-凸集确实是六个凸集之并。离散与计算几何，49(3)：454–477，2013。[11] M. A. Perles 和 S. Shelah。 $\mathbb{R}^2$ 中的一个闭$n+1$-凸集是 n^6 个凸集之并。以色列数学杂志，70(3)：305–312，1990。

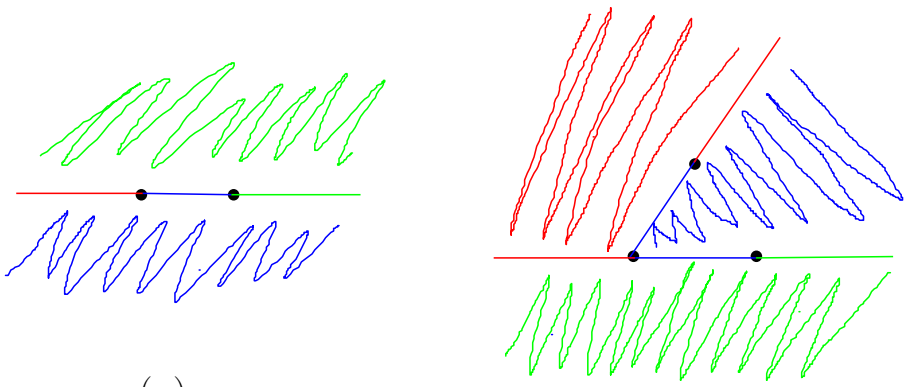


图 12：用凸集覆盖 $\mathbb{R}^2$ 中 $n = 2$ 和 $n = 3$ 这两个点的补集。每个凸集用不同的颜色标示。

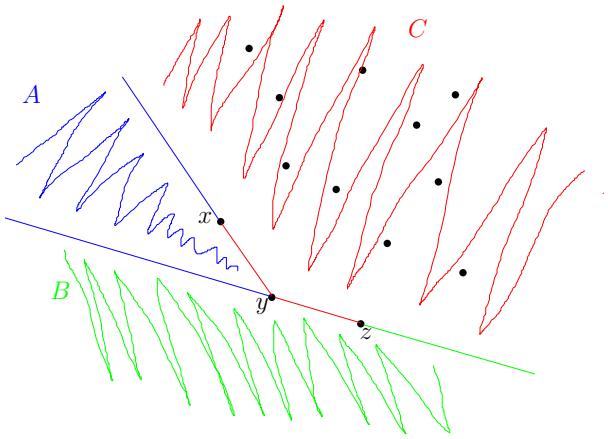


图 13：命题 4.3 的证明示意图。每个凸集用不同的颜色标示。

[12] F. Valen tine。三点凸性性质。《太平洋数学杂志》，7(2):1227–1235，1957 .