arXiv:2601.00420v1 [math.GT] 1 Jan 2026

偶自旋映射类群的一个表示

FILIPPO BIANCHI

Abstract. 我们定义了一个带有偶自旋映射类群作用的胞腔复形，并利用它得到一个有限表示。
我们还得到了一个以德恩扭转生成元为生成元的有限表示。

1. Introduction

每个亏格为 g 的闭可定向曲面 Σ_g 都存在自旋结构。 Σ_g 的自微分同胚群通过拉回作用于自旋结构集合，并由此诱导映射类群 Mod(Σ_g) 的作用。此作用下某个自旋结构 ξ 的稳定子称为自旋映射类群 Mod(Σ_g)[ξ]。Mod(Σ_g)[ξ] 的共轭类仅取决于与 ξ相关联的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$值 Arf不变量。本文主要关注偶自旋映射类群。

自旋映射类群最初出现于对带自旋结构的黎曼曲面模空间的研究中。Harer [10, 11]和 Sierra [26]计算了它们的低维同调。更一般地，Sipe [27, 28] 研究了 r-自旋结构的稳定子，即典范丛的 r次根。Randal-Williams [22, 23]研究了相应稳定子群的同调。

“经典”自旋映射类群已在四维流形拓扑中得到应用。事实上，根据 Stipsicz [29], , 自旋 Lefschetz 纤维化的单值化是由保持正则纤维上某个固定自旋结构的 Dehn 扭转的乘积构成的；更多细节请参见例如 [1, 第 2] 节。另一方面，（高阶）自旋映射类群自然地出现在代数几何中的某些单值化问题中。在此背景下，Salter [25] 和 Calderon–Salter[5, 6] 最近证明了这些群由 Dehn 扭转生成，并给出了显式的生成集。Hamenst¨adt [9] 改进了他们关于经典自旋映射类群的结果，而 Hirose [14, 15]此前已经找到了有限生成集。

本文的主要结果是首次给出偶自旋映射类群的有限表示。

定理（见定理 6.1）。 若 $g \geq 3$, 则偶自旋映射类群 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)[\xi]$ 具有一个以 *Dehn* 扭转为生成元的有限表示，并满足以下关系：
(1) 生成元之间的交换子和辫子关系；*(2)* 亏格为3的双曲关系；*(3)* 若干由灯笼组成且总指数为0的关系；*(4)* 若干由3链及一些灯笼组成且总指数为6的关系。

当 $g = 1,2$ 时，自旋映射类群不能由 Dehn 扭转生成（见 [9] 和注记2.14）。在偶数情形下，Hamenst¨adt 找到了由 Dehn 扭转构成的 $g \geq 4$ 生成集。我们也证明了 $g = 3$ 可以由 Dehn 扭转生成，尽管根据 Hamenst¨adt 的结果，此情形下生成集不可能是可容许的，也就是说，相应曲线的交图

存在环。我们的生成集在 $g = 4$ 时与 Hamenst¨adt 的生成集相同，但在更高亏格时有所不同，且基数更大。

作为推论，我们计算了 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)[\xi]$ 的阿贝尔化，重得 Harer、Randal-Williams 和 Sierra 的结果。

推论 (参见推论 6.3 和 6.8)。 偶自旋映射类群的阿贝尔化为

$$H_1\big(\mathrm{Mod}(\Sigma_g)[\xi]\big) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \text{if } g = 1, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{if } g = 2, \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \text{if } g \geq 3. \end{cases}$$

这与 Ivanov 的一个猜想一致 [17], ，该猜想预言，当 $g \geq 3$ 时，$\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ 的所有有限指数子群都具有有限阿贝尔化。值得注意的是，根据 Putman 的一项结果 [21], ，$\mathrm{Mod}(\Sigma_g)[\xi]$ 不可能成为 Ivanov 猜想的反例，因为它包含 Johnson 核。对于 $g = 2$，我们的计算与 Taherkhani 的一项结果 [30] 一致；特别地，由此可知 $\mathrm{Mod}(\Sigma_2)[\xi]$ 与表 1] 中的 H_7 of [30, 共轭。

我们通过 Hatcher-Thurston 的策略 [13], ，并采用 Wajnryb 的组合观点 [31]，得到了 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)[\xi]$ 的表示。具体而言，在第 3 节中，我们构造了一个带有 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)[\xi]$ 作用的二维胞腔复形 X_g ，并证明它是连通且单连通的。接着，通过一个顶点稳定子的表示，再添加由 X_g 的 1-骨架规定的生成元，以及由 2-骨架规定的关系，从而得到 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)[\xi]$ 的表示。我们在第 4 节中完成这一过程。最后，在第 5 节中，我们应用 Tietze 变换，得到一个由 Dehn 扭转生成元构成的表示。

我们的复形 X_g 受 Hatcher-Thurston 的割系统复形启发，但有三项关键创新。首先，顶点是具有指定自旋值的曲线割系统。其次，边分为两种类型，具有不同的相交模式。最后，除了三角形、正方形和五边形之外，还有第四种 2-胞腔，我们称之为双曲面。在即将发表的论文 [3], 中，我们从四维视角阐释了这一额外 2-胞腔存在的意义，并利用自旋映射类群的表示，为 Rokhlin [24] 关于自旋四维流形指标的经典定理给出新的证明。

容易看出，Σ_g 上的偶自旋结构可以延拓到某个由Σ_g围成的把手体 H_g 上。作为我们构造的副产品，我们得到了自旋把手体映射类群$\mathrm{Mod}(H_g)[\xi] := \mathrm{Mod}(H_g) \cap \mathrm{Mod}(\Sigma_g)[\xi]$ 的一个有限表示（见定理 4.12）。

致谢。 作者谨向 Riccardo Giannini 致谢，感谢他在本项目初期给予的帮助。

2. Spin mapping class groups

本节回顾曲面上高阶自旋结构及其稳定子群的一些基本事实。本文仅关注经典自旋结构。关于更一般的论述，请参阅 Salter [25] 和 Calderon–Salter [5]的论文。

2.1. 自旋结构。

取一个亏格为 g 、具有 b个边界分支的曲面 Σ_g^b 。记 $\mathcal{C}$ 为曲面 Σ_g^b上定向简单闭曲线的同痕类集合。以下定义源自 Humphries-Johnson [16]的工作。

定义 2.1。 r上的一个 Σ_g^b-自旋结构是一个映射 $\phi\colon \mathcal{C} \to \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ ，满足：

(1) $\phi(t_c(d)) = \phi(d) + (d \cdot c)\,\phi(c)$ 对每个 $c,\ d \in \mathcal{C}$ 都成立，其中 t_c 表示沿着c 的 Dehn 扭转，$d \cdot c$ 是 c 与 d 的代数交数（扭转线性）；

(2) 若 $c_1, \dots, c_m \in \mathcal{C}$ 的并集是子曲面 $S \subset \Sigma_g^b$ 的定向边界，则$\sum \phi(c_i) = \chi(S)$（同调相容性）。

注 2.2。对于闭曲面，我们可以给出如下另一种定义（见 [16] 和[25]）。记 $\pi\colon\ UT\Sigma_g \to \Sigma_g$ Σ_g的单位切丛。纤维$i\colon\ S^1 \to UT\Sigma_g$的包含映射诱导出一个短正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} H_1\left(UT\Sigma_g; \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}\right) \xrightarrow{\pi_*} H_1\left(\Sigma_g; \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}\right) \longrightarrow 0.$$

r-自旋结构是一个类 $\xi \in H^1(UT\Sigma_g;\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，其在 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$的一个生成元的像上的取值为 1。由于

$$H^1(UT\Sigma_g; \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^{2g} \oplus \mathbb{Z}/(2g-2)\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}),$$

r-自旋结构存在，当且仅当 r 整除 $2g-2$。对于 $r=2$，这就恢复了 Milnor 对自旋结构的定义 [20]。

情形 $r=2$ 在许多方面都是特殊的。

定理 2.3（Johnson [18]）。设 ϕ 是 Σ_g^b上的一个2-自旋结构。那么：

(1) ϕ 可通过自然映射 $\mathcal{C} \to H_1(\Sigma_g^b; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 分解，并且我们仍用 ϕ 表示诱导映射 $H_1(\Sigma_g^b; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$；*(2)* $q_\phi := \phi + 1$ 是交叉形式的二次增强，即对所有 $a, b \in H_1(\Sigma_g^b; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，均有 $q_\phi(a+b) = q_\phi(a) + q_\phi(b) + a \cdot b$；*(3)* 指派 $\phi \mapsto q_\phi$ 定义了 Σ_g 上的 2-自旋结构集合与 $H_1(\Sigma_g^b; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上的二次增强集合之间的双射。

定义 2.4. 设 ϕ 是 Σ_g^b 上的一个 r-自旋结构。若 r 为偶，则自然映射 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 定义了一个相应的 2-自旋结构$\bar{\phi}$。ϕ 的 *Arf*不变量 是相应二次增强 $q_{\bar{\phi}}$ 的 Arf不变量。具体而言，若 $\{x_1, y_1, \dots, x_g, y_g\}$ 是 $H_1(\Sigma_g^b; \mathbb{Z})$ 的辛基，则有

$$\mathrm{Arf}(\phi) := \sum_{i=1}^{g} \big(\phi(x_i)+1\big)\big(\phi(y_i)+1\big) \pmod 2.$$

我们根据 Arf(ϕ) 的奇偶性称 ϕ 为偶或奇。

下面的定理给出了比较不同 r-自旋结构的一些有用准则。注意，Mod(Σ_g^b) 在 r-自旋结构集合上有自然作用，定义为 $(f \cdot \phi)(c) := \phi(f^{-1}(c))$。

定理 2.5 ([16], [25])。设 ϕ、ψ 是 Σ_g^b上的两个 r-自旋结构。那么：

(1) 当且仅当它们在 H_1的一个基上取值相同$(\Sigma_g^b;\ \mathbb{Z})$；*(2)* $b=0$、ϕ 和 ψ 属于同一个 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$-轨道，当且仅当 r 为奇，或者$\mathrm{Arf}(\phi) = \mathrm{Arf}(\psi)$。

证明（针对 $r=2$）。众所周知，在配备非退化辛配对的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 向量空间上，二次增强完全由其在一组基上的取值决定；按自同构分类时，则完全由其 Arf不变量决定。□

2.2. **曲线与曲面上的运算**。我们常常需要构造具有某些性质的曲线，并对曲面进行剪切与粘贴操作。在自旋语境中，这需要格外小心。

我们首先按照 [25, 第 3.2] 小节介绍曲线上的两种运算。对一族定向曲线进行平滑，即按照定向消解所有交点所得到的多重曲线。若 α 和 β 是满足 $\alpha \cdot \beta = 1$的曲线，则由 k 条 α和 ℓ 条 β 平滑得到的多重曲线有 $\gcd(k, \ell)$ 个连通分支。

两条不相交曲线 γ 和 δ 沿连接它们的弧 c 作弧和，所得简单闭曲线 $\gamma +_c \delta$ 是包含并集 $\gamma \cup c \cup \delta$ 以及 γ和 δ的管状邻域的边界。显然，其同调类满足 $[\gamma +_c \delta] = [\gamma] + [\delta]$。

引理 2.6 ([25, 引理 3.11 和 3.13])**.** 考虑自旋曲面 (Σ_g, ϕ)上的两条曲线 α, β 。

(1) 若 γ 是由 k 条 α 和 ℓ 条 β平滑得到的，则 $\phi(\gamma) = k\phi(\alpha) + \ell\phi(\beta)$。 *(2)* 若 α 和 β 不相交，且 c 是连接它们的弧，则 $\phi(\alpha +_c \beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta) + 1$。

接下来的命题描述了切割一个 2-自旋曲面对其 Arf不变量的影响。此处及下文中，我们假设 S^2 上唯一的自旋结构的 Arf不变量为零。

命题 2.7 （Arf不变量的可加性）。设 (Σ_g, ϕ) 是一个 2-自旋曲面，并考虑一组曲线 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$，其并集将 Σ_g 分割为若干子曲面 $S_1, \dots, S_k$。将 ϕ_i 称为 S_i 上的拉回自旋结构。如果对所有 j， $\phi(\alpha_j) = 1$，那么 $\mathrm{Arf}(\phi) = \sum_i \mathrm{Arf}(\phi_i)$。

证明。对每个 S_i 固定一个几何辛基 B_i，然后沿 α_j 将 $j = 1, \dots, g$ 粘合，并将 J 称为满足沿 α_j 对 $j \in J$ 粘合后会产生新亏格的指标集合。现在，将 $\bigcup_i B_i \cup \{\alpha_j\}_{j \in J}$ 补充为一个几何辛基 B，并相对于 B 计算 Arf不变量。□

推论 2.8。设 (Σ_g, ϕ) 是一个2-自旋曲面。若 $\alpha \subset \Sigma_g$ 是满足 $\phi(\alpha) = 1$的曲线，则 $\Sigma \setminus \alpha$ 上的拉回自旋结构与 ϕ具有相同的奇偶性。

备注 2.9。注意，如果沿自旋值为 0 的曲线粘合，Arf不变量并不具有可加性。例如，沿一条满足 $\phi(\gamma) = 0$的曲线 γ 切割一个 2-自旋环面，可得到一个环带。于是，环面的 Arf不变量由任意一条与 γ 相交一次的曲线决定，但我们无法在环带上读取它的自旋值。

在下文中，我们经常会考虑由切割过程得到的 2-自旋曲面。推论 2。8促使我们作出以下约定。

备注 2.10（带边界曲面）。我们在 Σ_g^b 上的自旋结构将始终满足：对于每个边界分支 δ，都有 $\phi(\delta) = 1$。换言之，我们只考虑能够延拓到曲面 Σ_g 上的自旋结构，其中 Σ_g 是通过用圆盘封闭所有边界分支而得到的曲面。

请注意，这一选择并不标准：例如参见 [2, 定理 5.1]。

2.3. **稳定子子群**。回顾一下，$\mathrm{Mod}(\Sigma_g^b)$自然作用于 r-自旋结构的集合上。

定义 2.11。 r-自旋映射类群 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^b)[\phi]$ 是在 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^b)$ 的作用下，一个 r-自旋结构 ϕ 的稳定子。

显然， r-自旋映射类群是 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^b)$ 的有限指数子群。若 $b = 0$，那么根据定理 2.5(2)，当 r 为奇时， r-自旋映射类群在共轭意义下唯一。若 r 为偶，则恰有两个共轭类，根据诱导的 2-旋量结构的奇偶性，分别定义为偶 或奇 。

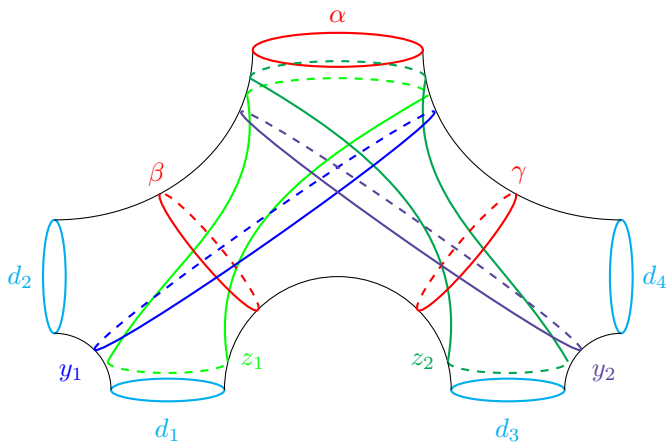


FIGURE 1. 将扭曲的平方和基本多重扭曲分解为可容许扭转的乘积。除红色曲线外，所有曲线均为可容许曲线。

现在我们介绍 r-自旋映射类群中一些重要的元素类。记沿 δ的 Dehn 扭转为 t_δ。考虑曲线 α， β， γ，它们在 Σ_g^b上围成一个裤子曲面。根据同调相容性，我们有 $\phi(\alpha)+\phi(\beta)+\phi(\gamma)=-1$。假设 $b:=\phi(\beta)=-\phi(\alpha)$；则 $\phi(\gamma)=-1$。我们称 $t_\alpha t_\beta^{-1}t_\gamma^b$ 为一个基本多重扭转。

引理2.12 ([25, 引理3.15和3.18])。 设(Σ_g^b,ϕ) 为一个 r-自旋曲面。

(1) 分离扭曲总是保持 ϕ。*(2)* 若 δ 是非分离曲线，则 t_δ^k 保持 ϕ 当且仅当 $k\phi(\delta)\equiv 0$(模 r)。*(3)* 基本多重扭曲保持 ϕ。

由引理2.12可知，$\mathrm{Mod}(\Sigma_g^b)[\phi]$ 中仅有沿自旋值为0的曲线进行的非分离德恩扭转。我们称这类曲线及其对应的扭转为可容许。

定理2.13 (Salter [25], Calderon-Salter [5], Hamenst¨adt [9])。 若亏格足够高，则 r-自旋映射类群由可容许扭转生成。

注记 2.14。现在考虑 $r=2$ 的情形。引理 2.12 给出了 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^b)[\phi]$ 中两类不是可容许扭转之乘积的元素：即沿自旋值为 1 的曲线进行的德恩扭转平方，以及具有 $b=1$ 的基本多重扭曲。现在我们说明一种将这些元素分解为可容许扭转之乘积的方法。结合 Hirose [14, 15], 的结果，这可用于简短地证明上述定理。

考虑图1中的灯笼 $t_\beta t_{z_1}t_{y_1}=t_\alpha t_\gamma t_{d_1}t_{d_2}$。重新排列后，我们得到

$$t_\beta t_\alpha^{-1}t_\gamma^{-1}=t_{d_1}t_{d_2}t_{y_1}^{-1}t_{z_1}^{-1}, \tag{1}$$

这是基本多重扭曲 $t_\beta t_\alpha^{-1}t_\gamma^{-1}$ 的一个分解。

类似地，我们可以利用图1中的灯笼 $t_\gamma t_{y_2}t_{z_2}=t_\alpha t_\beta t_{d_3}t_{d_4}$ 分解 $t_\gamma t_\beta^{-1}t_\alpha^{-1}$。因此，我们得到

$$t_\alpha^2=(t_\alpha^{-1}t_\beta t_\gamma^{-1})^{-1}(t_\gamma t_\beta^{-1}t_\alpha^{-1})^{-1}=t_{z_1}t_{y_1}t_{d_1}^{-1}t_{d_2}^{-1}t_{y_2}t_{z_2}t_{d_3}^{-1}t_{d_4}^{-1}. \tag{2}$$

注意，如果要求 α 的像是非平凡的，图1中的构型可以嵌入到亏格至少为3的闭曲面中。

2.4. 自旋坐标变换。坐标变换原理 [7, 第1节。3]大致可以表述如下：映射类群在具有相同交数模式的曲线集合上传递作用。我们将反复使用这一工具的自旋版本，其中还要求这些曲线具有相同的自旋值。现在，我们通过一系列与我们相关的例子来说明这一原理；为简便起见，我们使用闭曲面上的2-自旋结构。关于更一般的处理，请参见 [25,第 4] 节和 [5, 第5.2] 小节。

几何辛基。设 $\mathcal{B} := \{\alpha_i, \beta_i\}$ 和 $\mathcal{B}' := \{\alpha'_i, \beta'_i\}$ 是 Σ_g的两个几何辛基，并假设对于所有 i, $\phi(\alpha_i) = \phi(\alpha'_i)$ 且 $\phi(\beta_i) = \phi(\beta'_i)$。根据通常的坐标变换原理，存在一个映射类 f，使得对每个 i, $f(\alpha_i) = \alpha'_i$且 $f(\beta_i) = \beta'_i$。根据定理 2.5, f 固定 ϕ。

切割系统。回忆一下， Σ_g 上的切割系统 $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g \rangle$ 是由互不相交的简单闭曲线组成的无序 g元组，其同调类线性无关。设 $\langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_g \rangle$ 是另一个切割系统，且对每个 i, $\phi(\alpha_i) = \phi(\alpha'_i)$。

将切割系统补全为几何辛基 $\mathcal{B} := \{\alpha_i, \beta_i\}$ 和 $\mathcal{B}' := \{\alpha'_i, \beta'_i\}$。称 e_i 为 α_i 和 α'_i的自旋值。若 $e_i = 1$, 则通过将 β'_i 替换为 $t_{\alpha'_i}(\beta'_i)$，不妨假设 $\phi(\beta_i) = \phi(\beta'_i)$。

称 I 为满足 $e_i = 0$的指标 i 的集合。由于 Arf(ϕ) 不依赖于基的选取，子集

$$J := \big\{ j \in I \big| \phi(\beta_j) = 0,\ \phi(\beta'_j) = 1 \big\}, \quad J' := \big\{ j \in I \big| \phi(\beta_j) = 1,\ \phi(\beta'_j) = 0 \big\}$$

二者都含有偶数个元素。我们如下修改 $\mathcal{B}'$：给定 j_1, $j_2 \in J'$, 令 γ 为沿一条与 $\mathcal{B}'$中所有其他曲线不相交的弧，对 α'_{j_1} 和 α'_{j_2} 作弧和所得的曲线。由引理 2.6(2), $\phi(\gamma) = 1$, 因此我们可以用 $t_\gamma(\beta'_{j_1})$替换 β'_{j_1} , 并用 $t_\gamma(\beta'_{j_2})$替换 β'_{j_2} 。重复此操作，直到 J' 为空；对 J也进行相同操作。现在， ϕ在两个基上相同，由上述结论可知，存在映射类 $f \in \mathrm{Mod}(\Sigma_g)[\phi]$, 使得对每个 i都有 $f(\alpha_i) = \alpha'_i$ 。

特别地，Mod(Σ_g)[ϕ]在具有相同自旋值的曲线以及具有固定自旋值的部分切割系统上作用传递。

链。回忆一下， n-链（γ_1, ..., γ_n）是满足以下条件的一组曲线： $|\gamma_i \cap \gamma_{i+1}| = 1$ 对每个i 均成立，并且当 $|i - j| \neq 1$时 $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$。容易看出， $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$的管状邻域在 n 为奇时具有两个边界分支，而在 n 为偶时具有一个边界分支。

设（γ'_1, ..., γ'_n）是另一条 n-链，并假设对每个 i都有 ϕ（γ_i） $= \phi$（γ'_i）。此外，如果 n为奇，则假设$\Sigma \setminus \bigcup_i \gamma_i$与$\Sigma \setminus \bigcup_i \gamma'_i$同胚；若它们不连通，则相应连通分支上的诱导自旋结构具有相同的Arf不变量。于是存在Mod(Σ_g)[ϕ] 中的元素 f，使得对每个 i都有 f（γ_i） $= \gamma'_i$。

为此，按如下方式构造 $\mathcal{B} = \{\alpha_i, \beta_i\}$ 和 $\mathcal{B}' = \{\alpha'_i, \beta'_i\}$ 的两个几何辛基Σ 。对所有 k, 令 $\beta_k := \gamma_{2k}$ 。定向每个 γ_i , 使得对所有 i, $\gamma_i \cdot \gamma_{i+1} = 1$ 。递归地按如下方式定义 α_k ：

$$\alpha_1 = \gamma_1, \qquad \alpha_{k+1} = \alpha_k +_{c_k} \gamma_{2k+1},$$

其中， c_k是 γ_{2k}中从 $\gamma_{2k} \cap \alpha_k$ 延伸至 $\gamma_{2k} \cap \gamma_{2k+1}$的弧。现在，将 $\{\alpha_k, \beta_k\}$ 补充为整个 Σ_g上的几何辛基 $\mathcal{B}$, 使得 $\mathcal{B}$ 在 $\Sigma_g \setminus \bigcup_i \gamma_i$的每个连通分支上都限制为几何辛基。类似地定义 $\mathcal{B}'$。

现在，根据构造，若 $2i \leq n$, 则 $\phi(\alpha_i) = \phi(\alpha'_i)$ 且 $\phi(\beta_i) = \phi(\beta'_i)$；由 Arf($\phi$) 的不变性以及与之前相同的推理，我们可以假设这对所有 i 都成立。同样，我们由通常的坐标变换原理得出结论。

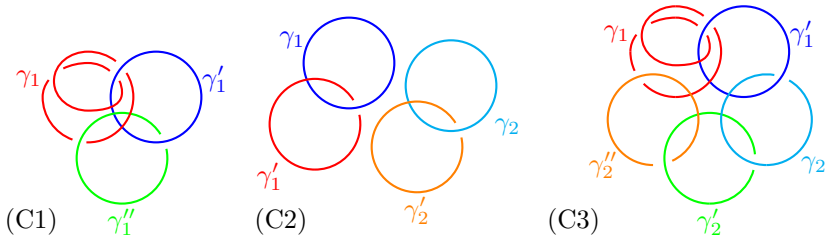


FIGURE 2. 自旋割系统复形中 2-胞腔对应的曲线配置。

3. THE SPIN CUT-SYSTEM COMPLEX

本节中，我们定义自旋割系统复形 X_g，并证明对于每个 $g \geq 1$，它都是连通且单连通的。复形 X_g 的灵感来自 Hatcher 和 Thurston 的割系统复形 [13]。回顾一下，割系统复形的顶点是割系统，而边和面则由两个或更多割系统中的曲线之间的交点条件决定。本节中，ϕ 将是 Σ_g^b上的一个固定偶2-自旋结构。若 $\phi(\gamma) = \epsilon$，我们称 γ 为一条 ϵ曲线。

3.1. 定义与基本性质。考虑一个曲面 Σ_g^b。

定义 3.1. 自旋割系统复形 是如下定义的二维胞腔复形 X_g。

– 顶点是由 1-曲线构成的割系统的同伦类。– 若 $\alpha_i = \beta_i$ 对于 $i \geq 2$ 成立，且满足以下条件，则一条边连接两个顶点 $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g \rangle$ 和 $\langle \beta_1, \dots, \beta_g \rangle$：

- α_1 与 β_1 相交一次（类型 i），或者
- α_1 与 β_1 以相同符号相交两次（类型 ii）。我们通常会在记号中省略共有曲线，并写作 $\langle \alpha_1 \rangle - \langle \beta_1 \rangle$。 – 这些面有以下四种类型（见图2）：

- 三角形 $\langle \gamma_1 \rangle - \langle \gamma_1' \rangle - \langle \gamma_1'' \rangle - \langle \gamma_1 \rangle$，其中两条边为类型 i，第三条边为类型 ii；
- 正方形 $\langle \gamma_1,\ \gamma_2 \rangle - \langle \gamma_1,\ \gamma_2' \rangle - \langle \gamma_1',\ \gamma_2' \rangle - \langle \gamma_1',\ \gamma_2 \rangle - \langle \gamma_1,\ \gamma_2 \rangle$，其中所有边均为类型 i；
- 五边形 $\langle \gamma_1,\ \gamma_2 \rangle - \langle \gamma_1,\ \gamma_2' \rangle - \langle \gamma_1',\ \gamma_2' \rangle - \langle \gamma_1',\ \gamma_2'' \rangle - \langle \gamma_2,\ \gamma_2'' \rangle - \langle \gamma_1,\ \gamma_2 \rangle$，其中四条边是类型 i，第五条是类型 ii；
- 双曲椭圆面，它们有 28 条类型 i 的边，稍后将详细介绍（见定义 3.21）。

注 3.2。 以下事实说明了类型 ii 的边为何重要，并且后文将反复用到。

(i) 1-1-2 技巧。 每条类型 ii 的边都包含在一个三角形中。事实上，设 $\langle \alpha \rangle - \langle \beta \rangle$ 是曲面 Σ 上的一条类型 ii 的边，并称 P 和 Q 为 α 与 β 的两个交点。按如下方式构造两条曲线 γ_1、γ_2：从 P 出发，沿着 β 走到 Q，然后分别向右或向左转，再沿着 α 返回 P（图 3）。由定理 2.3(2)，我们有

$$1 = \phi(\alpha) = \phi(\gamma_1) + \phi(\gamma_2) + \gamma_1 \cdot \gamma_2 + 1 = \phi(\gamma_1) + \phi(\gamma_2),$$

因此二者之一是 1-曲线，设为 γ_1，而 $\langle \alpha \rangle - \langle \beta \rangle - \langle \gamma_1 \rangle - \langle \alpha \rangle$ 是一个三角形。

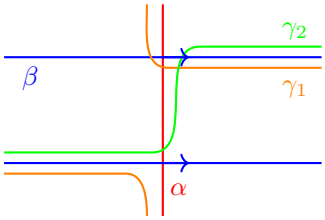
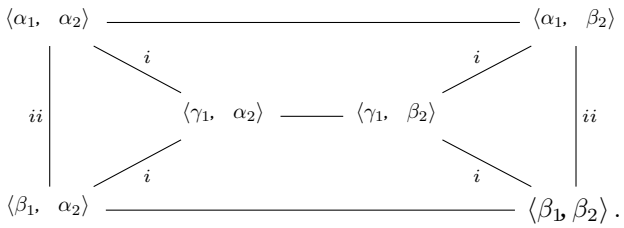


FIGURE 3. 1-1-2 技巧：γ_1 或 γ_2 必须是自旋的。

更一般地，考虑两条非分离 1-曲线 α 和 β，它们与 $|\alpha \cap \beta| \geq 2$ 相交；并假设 β 中有一条弧连接 $\Sigma_g^b \setminus \alpha$ 的两个边界分支，这两个边界分支对应于 α。将 P 和 Q 称为这条弧的端点。等价地，假设 β 上有两个符号相同的连续交点 P、Q。那么可以使用相同的技巧，得到一条与 α 和 β 相交的非分离 1-曲线，且交点数少于 $|\alpha \cap \beta|$。

(ii) 无 *i-i-i* 三角形。长度为 3 的闭路径必须由两条 i 型边和一条 ii 型边组成。事实上，举例来说，假设闭路径 $\langle\gamma_1\rangle - \langle\gamma_2\rangle - \langle\gamma_3\rangle - \langle\gamma_1\rangle$ 位于$\Sigma_{g,\,b}$ 且仅包含 i 型边。管状邻域 $\nu(\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3)$ 有 3 个边界分支，欧拉示性数为 $\chi = -3$。注意，其中一个边界分支，记作 δ_1，满足关系 $[\delta_1] = [\gamma_1] + [\gamma_2] + [\gamma_3]$，且属于 $H_1(\Sigma; \mathbb{Z}/2)$，因此 $\phi(\delta_1) = 0$。特别地，δ_1 是非分离的，所以 $\nu(\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3)$ 的补集至多有两个连通分支。若它有两个连通分支，它们分别同胚于 $\Sigma_{g_1}^{b_1+1}$和 $\Sigma_{g_2}^{b_2+2}$，其中有 $g_1 + g_2 = g - 2$ 和$b_1 + b_2 = b$。若它是连通的，则同胚于 Σ_{g-3}^{b+3}。无论哪种情况，三个边界分支中有两个都是 0-曲线，因此不可能在 $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ 的补集中找到 $g - 1$ 条互不相交的线性无关1-曲线。其他类型三角形（以及五边形）的存在性也可以用类似方法排除。

(iii) 其他正方形。边为 ii 型边的正方形在 X_g 中是零伦的。事实上，这样的正方形有两条相对的 ii 型边，通过 1-1-2 技巧，我们得到如下零伦，其中 γ_1 是通过 1-1-2 技巧由 α_1 和 β_1 得到的曲线：



本节的主要结果如下。

定理 3.3. 对于每个$g \geq 1$，自旋割系统复形 X_g 都是连通且单连通的。

接下来，我们将通过对亏格以及边路径复杂度度量——半径——进行归纳，证明定理 3.3。设 $\mathbf{p}$是 X 中的一条路径，v_0 是$\mathbf{p}$的一个顶点。固定 v_0的一条曲线 α。顶点 v 到 α 的距离 定义为

$$d_\alpha(v) := \min\{\, |\gamma \cap \alpha| : \gamma \in v \,\}.$$

路径$\mathbf{p}$ 围绕 α 的半径 是其各顶点到 α的距离的最大值。如果它的所有顶点都包含 α，则$\mathbf{p}$ 称为一条 α-段。我们用虚线表示一条 α-段。

3.2. **属 1 的曲面**。 本节将证明 X_1 是连通且单连通的。

Prop命题 3.4. 复形 X_1 可通过仅包含 i 型边的路径相连。

证明。 这可通过调整 [31, 引理 8]的证明得出。设 α, β 是 Σ上的两条非分离自旋曲线。我们要证明存在一条从 $\langle\alpha\rangle$ 到 $\langle\beta\rangle$的边路径。如果

α 和 β 不相交，则它们有一个共同的几何对偶 γ，并且我们可以假设它 is

一个 1-曲 如有必要，可沿 α 进行 Dehn 扭转。于是 $\langle\alpha\rangle - \langle\gamma\rangle - \langle\beta\rangle$ 就是所需的路径。

一般而言，按照 [31], 中的说明去除所有二边形后，我们可以假设，根据二边形判据 [7, 命题 1.7]， α 与 β 之间的几何交数和代数交数相等。于是，只需应用广义 1-1-2 技巧，并对 $|\alpha \cap \beta|$ 使用归纳法即可得出结论。□

单连通性需要 ii 型边，正如下文引理所示 s.

引理 3.5 (平方引理)。 设 $\mathbf{p}$ 为边路径 $\langle\delta_1\rangle - \langle\delta_2\rangle - \langle\delta_3\rangle - \langle\delta_4\rangle - \langle\delta_1\rangle$。假设所有边均为类型 i。若 $|\delta_2 \cap \delta_4| = 0$，则 $\mathbf{p}$ 是零伦的。

证明。 这可用与 [31, 引理 9], setting $\beta := \tau_{\delta_2}^{\pm 2}(\delta_3)$ 相同的方法证明。注意，由于不存在 i-i-i 三角形，这样的曲线不能恰好相交 δ_1 一次。□

引理 3.6 ([31, 引理 10])。 在 X_1 中，任意一条所有边均为 i 型边的闭路径 $\mathbf{p}$，都同伦于另一条闭路径 $\mathbf{p}'$；后者的每条曲线都与 $\mathbf{p}$ 中对应的曲线同调，但任意两条曲线都不构成双边形。

命题 3.7。 复形 X_1 是单连通的。

证明。 设 $\mathbf{p} = \langle\alpha_1\rangle - \cdots - \langle\alpha_k\rangle - \langle\alpha_1\rangle$ 是一条闭路径。根据 1-1-2 技巧，我们可以假设它只包含 i 型边（因此 $k \neq 3$）。然后，我们按照证明 [31,命题 7], 的方法，使用平方扭转构造曲线 β，而不是单次扭转，就像平方引理的证明中那样。□

3.3. **连通性**。 从现在起，$\Sigma_{g,\,b}$ 将是一个亏格为 $g \geq 2$ 的固定曲面，我们将把用圆盘封住每个边界分支后得到的曲面称为Σ_g。本节将证明，与 $\Sigma_{g,\,b}$ 相关联的复形 X_g 是连通的。

备注 3.8。 随着亏格增加，我们的证明会比 Wajnryb 的证明稍微复杂一些。事实上，Wajnryb 的论证常常涉及沿一个或多个割系中的某些曲线进行切割；但当我们沿分隔并的 1-曲线切开自旋曲面时，可能会得到一些不含非分离 1-曲线的子曲面：带奇异拉回自旋结构的单孔环面、边界分支的自旋值均为 1 的双孔奇环面，或带状曲线自旋值为 0 的环带。这需要我们在论证中格外谨慎。示例见图 4。

证明 X_g 连通将采用亏格归纳法。基例是命题 3。4。归纳步骤中，我们假设亏格小于 g 时该复形是连通的，并使用以下简单观察。

引理 3.9 ([31, 引理 12])。 如果 X_g 的两个顶点有一条共同的曲线 α，那么它们之间存在一条 α-段相连，且该段只包含 i 型边。

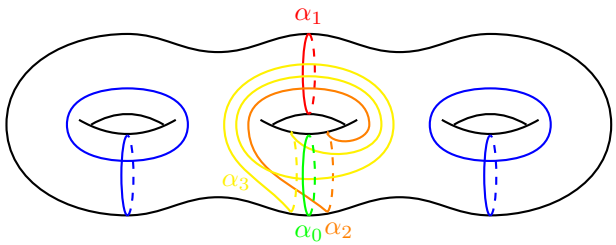


FIGURE 4. 一个不可能的 i-i-ii 三角形：这里所有蓝色曲线的自旋值均为 0，因此非分离 1-曲线 α_1，α_2，α_3 无法同时补全为三个自旋切割系统。不过请注意，将α_1 替换为同调曲线 α_0 后，便可以构成一个定义良好的三角形。

我们先回顾 Wajnryb 的以下构造。设 γ_1、$\gamma_2 \subset \Sigma_g^b$ 是两条非分离的 1-曲线，满足 $|\gamma_1 \cap \gamma_2| = n \geq 2$。我们希望找到第三条非分离的 1-曲线 γ，使得对于 $i = 1$，2，有 $|\gamma \cap \gamma_i| < n$。与引理 15], 的证明中一样，为 γ_1 和 γ_2 选取定向，并令 P_1 为一个交点。按如下方式构造曲线 δ_1：沿着 γ_1 和 γ_2 的定向，从 P_1 出发，沿 γ_1 走到下一个交点 P_2，然后沿着 γ_2 前行，直到回到 P_1。接着按如下方式构造 δ_2：从 P_2 出发，沿着 γ_1 前行，直到遇到第一个未被 δ_1 经过的交点；如果没有这样的交点，则前行至 P_1；然后沿着 γ_2 一直返回 P_2。重复此构造，直到 γ_1 和 γ_2 的每条弧都被某条 δ_i、$i = 1$、……、k 的弧覆盖。然后选取 γ_2 的反向定向，再次开始构造，得到曲线 ϵ_1、……、ϵ_r。注意，在 $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ 中，以下关系成立：$[\delta_1] - [\varepsilon_1] = [\gamma_2]$、$[\delta_1] + \cdots + [\delta_k] = [\gamma_1] + [\gamma_2]$ 和 $[\varepsilon_1] + \cdots + [\varepsilon_r] = [\gamma_1] - [\gamma_2]$。这意味着，$\delta_1$ 与某个 δ_i、$i \geq 2$，或者 ϵ_1 与某个 ϵ_j、$j \geq 2$ 是非分离的。

现在我们研究上述曲线的自旋值。首先注意，若 P_1 和 P_2 符号相同，则 δ_1 和 ε_1 与 γ_2 以及彼此都恰好相交一次，并且其中恰有一条是 1-曲线；这是 1-1-2 技巧的一个实例。更精细的观察如下。

引理3.10。设 $\gamma_1, \gamma_2 \subset \Sigma_g^b$ 是两条定向的1-曲线，满足 $|\gamma_1 \cap \gamma_2| = n \geq 1$，并按上述方式构造 $\delta_1, \ldots, \delta_k$。设 ℓ 为某个 δ_i 与δ_j之间交点的数量，其中 $i, j = 1, \ldots, k$。则 $k + \ell = n$。

证明。我们对 n 作归纳法。若 $n = 1$，则得到一条曲线 δ_1，它是 $\gamma_1 \cup \gamma_2$ 的定向消解。现在假设 $n > 1$。通过对 Σ_g^b 进行某种手术（例如接入一根管），移除 p 与 γ_1 和 γ_2 之间的一个交点。我们将证明 $k + \ell$ 减少 1。

注意，由于 $n \geq 2$，我们的手术只影响两条曲线 δ_i，δ_j：它们要么在 p 处相交，要么都沿着 γ_1 和 γ_2 的定向在 p 处转向。如果它们在 p 处相交，则手术后 ℓ 减少 1，而 k 保持不变。如果二者都在 p 处转向，则手术后它们合并，因此 k 减少 1，而 ℓ 保持不变。□

推论 3.11。设 γ_1、$\gamma_2 \subset \Sigma_g^b$ 是两条定向的 1-曲线，满足 $|\gamma_1 \cap \gamma_2| = n \geq 1$，并按上文构造 δ_1、……、δ_k。则 $\phi(\delta_1) + \cdots + \phi(\delta_k) \equiv 0$（模 2）。

Prop命题 3.12. 复形 X_g 可通过仅包含类型 i 边的路径连通 .

证明。 设 α_1, α_2 是 Σ_g^b上的两条自旋非分离曲线，且设 v_1, v_2 是X_g 的两个顶点，满足 $\alpha_i \in v_i$。我们将对$n := |\alpha_1 \cap \alpha_2|$使用归纳法，证明存在一条从 v_1 到 v_2 的路径。

If $\alpha_1 = \alpha_2$，该结论即引理 3.9。稍后我们将处理满足 $n = 0$ 的其他情形。

若 $n = 1$，我们可以沿着 $\alpha_1 \cup \alpha_2$ 切开 Σ_g^b，得到带有偶拉回自旋结构的曲面 Σ_{g-1}^{b+1}，并在 Σ_{g-1}^{b+1} 上找到一个自旋切割系 u'。令 $u_i := u' \cup \{\alpha_i\}$，其中 $i = 1,2$，则得到一条 i 型边 $u_1 - u_2$；由引理 3.9 可知，存在从 v_1 到 u_1 以及从 u_2 到 v_2 的路径，且仅包含 i 型边。

若 $n = 0$ 和 $[\alpha_1], [\alpha_2]$ 在 $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ 中线性无关，则存在一个同时包含这两条曲线的自旋切割系统v；由引理 3.9，我们可以将 v_1 连接到 v，并将 v 连接到 v_2。

如果 $n = 0$ 和 $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ 属于 $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$，但这两条曲线不同位，那么它们有一个共同的几何对偶 β；经过沿 α_1进行 Dehn 扭转后，我们可以假设它是一条 1-曲线。现在，与情形 $n = 1$ 一样，存在类型 i 的边 $\langle\alpha_1\rangle - \langle\beta\rangle$ 和 $\langle\beta\rangle - \langle\alpha_2\rangle$，反复应用引理 3.9，我们便得到一条从 v_1 到 v_2 的路径，在两者之间进行插值。

如果 $n \geq 2$ 和 α_1, α_2 有两个符号相同的连续交点，我们可以应用广义 1-1-2 技巧，找到一条 1-曲线 α_3，使其与 α_1 和 α_2 的交点都少于 n 个，然后通过归纳法得出结论。

现在假设 $n \geq 2$，并且 α_1 与 α_2 之间所有交点的符号交替出现。固定 α_1上的一个定向。将相对于 α_1位于右侧的管状邻域 $\nu(\alpha_1 \cup \alpha_2)$的边界分支称为 $\gamma_1^r, \ldots, \gamma_{k_r}^r$，其余边界分支称为$\gamma_1^\ell, \ldots, \gamma_{k_\ell}^\ell$。我们可以对这些曲线定向，使得

$$[\gamma_1^r] + \cdots + [\gamma_{k_r}^r] = [\alpha_1] = [\gamma_1^\ell] + \cdots + [\gamma_{k_\ell}^\ell],$$

因此至少有一个右侧分支和一个左侧分支是非分离的。如果某个右侧或左侧分支是非分离的且自旋值为 1，或者与$\Sigma_{g,b} \setminus \nu(\alpha_1 \cup \alpha_2)$的一个子曲面共同围成边界，且该子曲面包含一条不分离$\Sigma_{g,b}$的 1-曲线，那么结论成立。若情况并非如此，则不难看出，每个左侧和右侧分支都属于以下情形之一（参见注释 3.8）：

- 它围成一个圆盘；
- 它围成一个带有诱导奇自旋结构的单孔环面；
- 它是一条0-曲线，并且是一个环带的边界分支。

注意，至少存在两个环带 A_1，A_2 分别有一个右边界分支和一个左边界分支（特别地，n 至少为4）。事实上，如果这样的环带只有一个，那么不妨重新命名，使其边界分支为 γ_1^r 和 γ_1^ℓ；于是 $[\gamma_1^r] = [\alpha_1] = [\gamma_1^\ell]$，所以它们不可能是0-曲线。假设对于 $i = 1$，2，$\partial A_i = \gamma_i^r \cup \gamma_i^\ell$。

我们沿着一条使其与 α_1 和 α_2的交点数最少的弧，将 ∂A_1 的一个连通分支与 ∂A_2的一个连通分支作弧和，从而构造一条1-曲线 δ。可以如下构造这样的弧。对 γ_i^r 和 γ_i^ℓ 作同伦变形，使它们与 α_2不相交，并且 $p_i^r \in \gamma_i^r$和 $p_i^\ell \in \gamma_i^\ell$ 中恰有一个点落在 α_1上，其中 $i = 1$，2。考虑 α_1 中连接 p_1^r 或 p_1^ℓ 与 p_2^r 或 p_2^ℓ的弧。如果这些弧中有任何一条与 α_2 的交点少于 n 个，我们就完成了。否则，注意到 α_1 的同一条弧不可能与 α_2的弧形成两个二边形，因此A_1 或 A_2 的某个边界分支必定也会在另一处靠近 α_1（例如，见图5中 γ_1^r 的虚线橙色弧）。利用该点重复上述过程，即可得到所需的弧。□

称 X_g' 为复形，其顶点是 Σ 上自旋简单闭曲线的同痕类，若两条曲线相交一次，则以一条边连接它们。我们有如下结论。

推论3.13。 该复形 X_g' 是连通的。

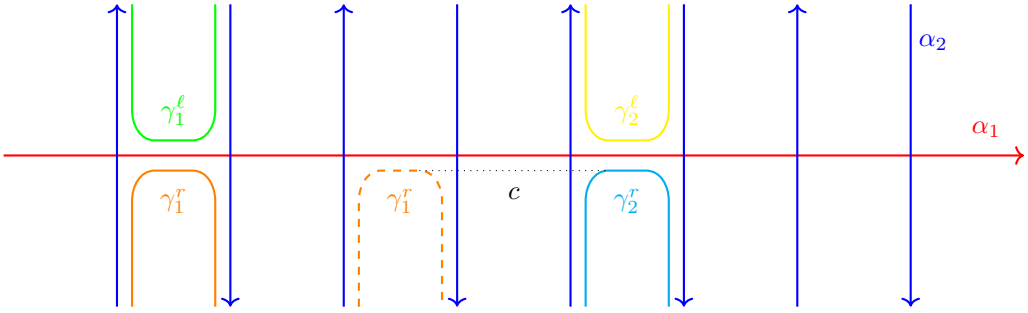


FIGURE 5. 构造命题 3.12 的证明中所需的弧 c：选取 $\gamma_1^r, \gamma_1^\ell, \gamma_2^r, \gamma_2^\ell$ 中与 α_1 平行的线段，并通过与 α_1平行的弧将它们连接起来。如果所有这些弧都在 α_2 处相交于 $n/2$ 点，那么情况就如上图所示，此时可以在至少一条曲线上另选一条线段（例如橙色虚线所示的线段）。(!)

我们还需要命题3.12的以下精细版本，其中考虑了与其他曲线的交点。

引理 3.14. 设 δ_1, δ_2 是两条不同的非分离1-曲线，它们要么不相交且同调，要么相交次数大于一次；假设存在一个整数 $m \geq 1$ 以及非分离1-曲线 γ, γ'，使得：

(a) 若 $m = 1$，则 γ, γ' 不相交且同调，并且 $|\gamma \cap \delta_i| = |\gamma' \cap \delta_i| = 1$ 对于 $i = 1, 2$；*(b)* 若 $m \geq 2$，则 $|\gamma \cap \gamma'| = m$, $|\gamma \cap \delta_1| < m$, $|\gamma \cap \delta_2| \leq m$ 以及 $|\gamma' \cap \delta_i| \leq 1$ 对于 $i = 1, 2$。

存在一条非分离的1-曲线 δ，当 $m = 1$ 时它与 γ 和 γ' 各相交一次；当 $m \geq 2$ 时相交次数小于 m，此外：

(1) 若 δ_1、δ_2 不相交且同调，则对于 $i = 1, |\delta \cap \delta_i| = 1$，$2$；*(2)* 否则，对于 $i = 1, |\delta \cap \delta_i| < |\delta_1 \cap \delta_2|$，$2$。

证明。**情形 1a**。取 $\gamma \cup \gamma'$ 的补集中一个正亏格连通分支 S，并令 $\beta \subset S$ 为一条与 δ_1 和 δ_2 各相交一次的曲线。若 β 是一条 0-曲线，则令 $\delta := \tau_{\delta_1}(\beta)$。假设 β 是一条 1-曲线。按如下方式构造另外两条曲线。令 η_1 为 $\gamma \cup \delta_1 \cup \delta_2 \cup \beta$ 在 S 中的管状邻域的一个边界分支，且它在 Σ_g 中非平凡，并选取 $S \setminus (\delta_1 \cup \delta_2)$ 中的一条曲线 η_2，使其与 β 和 η_1 各相交一次。若 η_1 是一条 0-曲线，则称 β 和 η_1 沿 η_2 的一条弧的弧和为 β'。若 η_1 是一条 1- 曲线，则在用 $\tau_{\eta_1}(\eta_2)$ 替换 η_2 后，我们可以假设 η_2 是一条 1-曲线，并令 $\beta' := \tau_{\eta_2}(\beta)$。无论哪种情形，$\beta'$ 都是一条 0-曲线，而 $\delta := \tau_{\delta_1}(\beta)$ 就是所需的 1-曲线。

情形 2A。在 δ_2 上选定一个定向，并将沿着 δ_2 遇到 γ 后，在 δ_1 上找到的第一个交点称为 p。按如下方式构造一条弧 c：从 γ 与 δ_2 的交点出发，沿着 δ_2 朝 p 移动，然后沿着 δ_1 前进，穿过 γ'，再返回 γ。现在，利用 γ 的弧，可以将 c 补成两条不同的曲线 ξ_1 和 ξ_2，其中一条是符合我们要求的 1- 曲线。

情形 1b: $|\gamma' \cap \delta_i| = 0$. 称 S_1 和 S_2 为 Σ_g的两个连通分支，$\flat \setminus (\delta_1 \cup \delta_2)$，并假设 γ' 位于 S_2中。显然存在一条弧 $c_1 \subset S_1 \setminus \gamma$ 连接 δ_1 和 δ_2。我们断言，存在一条弧 $c_2 \subset S_2$ 连接 δ_1 和 δ_2，它与 γ 至多相交一次，与 γ' 的交点少于 m个。

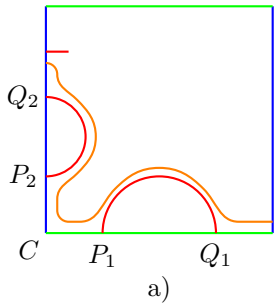


FIGURE 6. 引理 3.14 证明中弧 c_2 的构造。

首先假设 γ 的一条弧 d 在 S_2中连接 δ_1 和 δ_2。若 $|d\cap\gamma'|<m$，则令 $c_2:=d$。若 $|d\cap\gamma'|=m$，则如下定义 c_2：从 δ_1出发，沿着 δ前进，直到与 γ'的第一个交点；然后沿着 γ' 向任一方向前进，直到与 d的下一个交点；最后沿着 d 前进，直到 δ_2 （见图6a）。

若不存在这样的 d，但存在一条弧 d'，属于 γ'，连接一条端点位于δ_1 上的 γ-弧 a_1 与一条端点属于 δ_2的 γ-弧 a_2，则我们如下定义 c_2：沿着 a_1 走，直到 d'，然后沿着d' 走，直到 a_2，再沿着 a_2 走，直到 δ_2 （见图6b）。

最后，若不存在这样的 d 或 d'，我们可以假设 γ' 只与端点位于 δ_2 上的 γ-弧相交。沿着这样一条弧前进，直到遇到与 γ'的第一个交点，然后沿着 γ' 走，直到进入 $S_2\setminus(\gamma\cup\gamma')$ 的一个与 δ_1相交的连通分支，再穿过这样的连通分支，直到 δ_1，由此构造 c_2。

现在，通过一条 δ_1 的弧和一条 δ_2的弧，将 c_1 与 c_2 连接起来。这样的弧对有四种可能的选择：其中两种会产生一条 0-曲线，并且很容易看出，这两条曲线中至少有一条与 γ 的交点数少于 m。

情形 1b： $|\gamma'\cap\delta_i|=1$。再次，令 S_1 和 S_2 为 $\Sigma_{g,\flat}\setminus(\delta_1\cup\delta_2)$ 的两个连通分支。先假设 $\gamma\cap\delta_1=\emptyset$。按如下方式构造一条弧 $c_1\subset S_1$。如果 γ 不在 S_1 中与 γ' 相交，则直接令 $c_1:=\gamma'\cap S_1$。否则，从 δ_1 出发沿着 γ' 前进，在与 γ 的第一个交点处左转，沿着 γ 直到遇到 δ_2。类似地定义 $c_2\subset S_2$，在与 γ 的第一个交点处右转。用与 γ 交点较少的 δ_2 的弧将 $c_1\cup c_2$ 闭合。对所得曲线沿 δ_1 扭转后，即得所需结果。

现在假设存在 γ 的一条弧 d，它在 S_1 上连接 δ_1 与 δ_2。按如下方式构造一条弧 $d'\subset S_2$。如果存在 γ 的一条弧在 S_2 上连接 δ_1 与 δ_2，则将其取作 δ'。如果情况并非如此，并且 γ 与 γ' 在 S_2 上没有交点，则令 $d':=\gamma'\cap S_2$。否则，令 p、$q\in S_2$ 为 γ' 与 γ、δ_1 或 δ_2 之间的两个交点，它们在 γ' 上相邻，并且满足：若为 p、$q\in\gamma'\cap\gamma$，则 p 通过 S_2 上的一条 γ-弧与 δ_1 相连，而 q 通过 S_2 上的一条 γ- 弧与 δ_2 相连。令 d' 为这条 γ- 弧与从 p 到 q 、位于 S_2 上的 γ'- 弧的并集。闭合 $d\cup d'$ 时，δ_1 与 δ_2 的弧有四种可能的选择，其中至少有一种会得到满足我们要求的曲线。

情形 2B. 令 $n:=|\delta_1\cap\delta_2|\geq 2$。首先假设存在两个连续交点 P_1，P_2，它们的符号相同，且都位于 δ_1 上。我们采用前面回顾过的 [31,引理 15] 的证明中的构造。如前所述，在这种情况下，我们可以假设 δ_1 是一条非分离 1-曲线。假设它与 γ 或 γ' 至少有 m 个交点。根据推论 3。11，另一个 δ_i 是一条 1-曲线；若它是非分离的，则满足我们的要求。如果每个自旋值为 1 的 δ_i 都是分离的，我们就将 δ 定义为某个自旋值为

0 的 与一条位于由某个 δ_i 切出的子曲面上的曲线的弧和，并使其与 γ 和 γ' 的交点数最少。

现在假设两条曲线上交点的符号交替出现。在这种情况下，我们调整命题 3.12 证明的最后一部分：为了构造 δ，我们必须选择 ∂A_1 的一个连通分支、∂A_2 的一个连通分支，以及连接它们的一条弧；我们可以通过适当选择，确保 δ 与 γ 和 γ' 的交点都少于 m 个。□

3.4. 单连通性：半径为 0 的路径。 现在我们转而关注单连通性。证明将对亏格和半径进行归纳，并分为本小节和接下来的几个小节。归纳的基础情形是命题 3.7。我们将假设，对于每个 $g' < g$，$X_{g'}$ 都是单连通的，并证明 X_g 中所有闭路径都是零伦的。本节中，我们考虑半径为 0 的路径。

下面的观察与引理 3.9 类似，并将在归纳步骤中使用。

引理 3.15 ([31,引理 11])。 X_g 的每条闭线段都是零伦的。

我们还需要以下引理。第一个涉及一种广义正方形。第二个引理中，五边形将首次出现。

引理 3.16 (梯子引理)。 设 α_1、α_2、β_1、β_2 是 $\Sigma_{g,b}$ 上的非分离1曲线，且对偶 (α_1, α_2)、(α_1, β_1)、(β_1, β_2) 和 (α_2, β_2) 均可补成自旋切割系统。那么 X_g 中存在一条零伦路径

$$\begin{array}{ccc} \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle & \overset{\alpha_2}{\text{------}} & \langle \beta_2, \alpha_2 \rangle \\ {\scriptstyle \alpha_1}\,\vdots & & \vdots\,{\scriptstyle \beta_2} \\ \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle & \underset{\beta_1}{\text{------}} & \langle \beta_1, \beta_2 \rangle . \end{array}$$

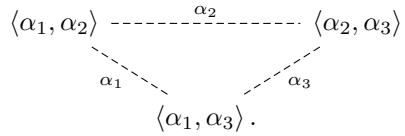
证明。沿 $\beta_1 \cup \alpha_2$ 切割 $\Sigma_{g,b}$。如果结果不连通，且 α_1 和 β_2 位于不同的连通分支上，那么我们实际上可以证明更强的结论：$\langle \alpha_1, \alpha_2, \beta_2 \rangle$ 和 $\langle \alpha_1, \beta_1, \beta_2 \rangle$ 均可补成自旋切割系统，并且根据引理 3.15，它们可以通过一条 (α_1, β_2)-线段连接。

否则，根据命题 3.12，我们可以找到非分离 1-曲线 $\gamma_0 := \alpha_1, \gamma_1, \dots, \gamma_n := \beta_2$，使得 $|\gamma_i \cap \gamma_{i+1}| = 1$ 和每个 γ_i 都位于 $\Sigma \setminus (\beta_1 \cup \alpha_2)$ 中包含 α_1, β_2 的连通分支上。将 $\langle \gamma_i, \alpha_2 \rangle$ 补全为 X_g 的一个顶点 v_i，并将 $\langle \gamma_i, \beta_1 \rangle$ 补全为 w_i，对所有 $i = 0, 1, \dots, n-1$ 均如此，使得 v_i 中唯一与 γ_{i+1} 相交的曲线是 γ_i，对于 w_i 也同样如此。这可以通过沿着 γ_i, γ_{i+1} 和 α_2 或 β_1 切割，并在所得曲面上找到一个自旋切割系统来完成。令 $v_i' := v_i \setminus \{\gamma_{i-1}\} \cup \{\gamma_i\}$ 和 $w_i' := w_i \setminus \{\gamma_{i-1}\} \cup \{\gamma_i\}$。显然，对每个 i，都有边 $v_i - v_{i+1}'$ 和 $w_i - w_{i+1}'$。构造一条 γ_i-线段 $\mathbf{p}_i$，从 v_i 到 w_i，使得对于 $\mathbf{p}_i$ 的每个顶点，唯一与 γ_{i+1} 相交的曲线是 γ_i。将 $\mathbf{p}_i$ 中每处出现的 γ_i 替换为 γ_{i+1}，得到一条从 v_i' 到 w_i' 的路径 $\mathbf{p}_i'$；$\mathbf{p}_i$ 的每个顶点都通过一条边 $\langle \gamma_i \rangle - \langle \gamma_{i+1} \rangle$ 与 $\mathbf{p}_i'$ 中相应的顶点相连。最后，构造从 v_i' 到 v_{i+1} 以及从 w_i 到 w_{i+1} 的 γ_i-线段。由此得到：

$$\begin{array}{ccccccccccc} v_0 & - & v_0' & \overset{\gamma_1}{\text{------}} & v_1 & - & v_1' & \overset{\gamma_2}{\text{------}} & \dots & \overset{\gamma_{n-1}}{\text{------}} & v_{n-1} & - & v_{n-1}' \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{p}_0 & & \mathbf{p}_0' & & \mathbf{p}_1 & & \mathbf{p}_1' & & & & \mathbf{p}_{n-1} & & \mathbf{p}_{n-1}' \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ w_0 & - & w_0' & \underset{\gamma_1}{\text{------}} & w_1 & - & w_1' & \underset{\gamma_2}{\text{------}} & \dots & \underset{\gamma_{n-1}}{\text{------}} & w_{n-1} & - & w_{n-1}'. \end{array}$$

这是由方形梯子和闭合的 γ_i-线段组成的序列；根据引理 3，15，这些线段都是零伦的，因此证明完毕。□

引理 3.17（六边形引理）。设 α_1、α_2、α_3 是 Σ 上三条互不相交的非分离1-曲线，它们两两不同调，但其并集将 Σ_g 分离。$_b$。那么存在一条零同伦路径



证明。根据假设，$\Sigma_{g,\ b}\setminus(\alpha_1\cup\alpha_2\cup\alpha_3)$ 恰有两个连通分支，我们称它们为 S_1 和 S_2。先假设自旋结构在 S_1 和 S_2 上的限制均为偶。在这种情况下，证明与 [31, 引理 13], 中的证明相同，只需令 $\delta:=\tau^2_{\alpha_2}(\beta_3)$。

若诱导在 S_1 和 S_2 上的自旋结构为奇，我们可以用一条与其不相交、且属于同一同调类的曲线 α_1' 替换 α_1，使得 α_1'，α_2，α_3 仍满足我们的假设，并且 $\alpha_1'\cup\alpha_2\cup\alpha_3$ 将曲面切成两个偶子曲面。事实上，选取在 S_1 上相交一次的 0-曲线 γ_1，γ_2，并称沿着一条与 γ_2 不相交的弧取 γ_1 和 α_1 的弧和为 γ_3。于是，γ_1，γ_2，γ_3 构成一个由 0-曲线组成的三链，而并集$\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3$ 的一个管状邻域的边界由 α_1 和所需的曲线 α_1' 构成。

现在，将证明的第一部分应用于三元组 α_1'、α_2、α_3，并对包含 α_1' 的六边形的边应用梯子引理，再通过引理 3.9 找出额外的线段，从而构造所需的路径。□

命题 3.18。X_g 中所有半径为零的路径都是零伦的。

证明。设 $\mathbf{p}$ 是一条相对于某条曲线 α 的半径为零的路径，且该曲线包含在$\mathbf{p}$的一个顶点 v_0 中。根据 1-1-2 技巧，我们可以假设 p 的所有边都属于类型 i。接下来的证明与 [31, 命题 14], 的证明相同，使用梯子引理构造图 6 和图 8] 中的正方形。□

3.5. 单连通性：半径为 1 的路径。我们的归纳步骤仅在半径至少为 2 时有效。现在我们单独处理半径为 1 的路径。这里需要用到双曲面。需要引入新的 2-胞腔的原因可以追溯到以下观察。

备注 3.19。设 v_0、v_1 是两个自旋切割系统，并假设存在两条不相交曲线$\alpha_0\in v_0$、$\alpha_1\in v_1$，即 $d_{\alpha_0}(v_1)=0$。那么，与标准割系统复形中的情形不同，X_g 中并不总是存在一条从 v_0 到 v_1 的路径，使其围绕 α_0的半径为 0。例如，选择 α_0、α_1 如图 4 所示（特别地，取 $g=3$）。回想一下，根据备注 3。8，$\Sigma_3\setminus(\alpha_0\cup\alpha_1)$ 中不存在 1-曲线。因此，如果 $\mathbf{p}$ 是一条从 v_0 到 v_1的路径，那么在最后一个 α_1-段之前的那个顶点中的所有曲线都必须与 α_0相交。

在 2 属的情形下不会出现这个问题。事实上，在这种情况下，两条不相交的非分离曲线要么在同调意义下独立，要么围成一个带孔环带。因此，本节及下一节中的论证在该情形下会简单得多，并且可以据此证明 X_2 是单连通的。这个事实将在归纳步骤中使用。

我们通过逆向推导亏格 3 双曲关系来构造双曲面。在给出详细构造之前，我们先陈述一个关键事实，借此可以证明双曲面。

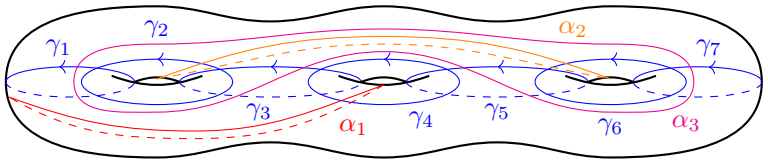


FIGURE 7. 亏格 3 曲面上的偶自旋结构的一条可容许曲线 7-链，以及与所选定向对应的自旋切割系统 v 。

命题 3.20。 设 α, α' 和 β, β' 是 Σ_g^b 上两对非分离 1-曲线，它们满足以下性质：

(i) α、α'（分别为 β、β'）互不相交且同调，并将 Σ_g^1 分隔为两个奇子曲面；*(ii)* $|\alpha \cap \beta| = |\beta \cap \alpha'| = |\alpha' \cap \beta'| = |\beta' \cap \alpha| = 1$。

那么， X_g 中存在一条如下形式的零伦路径

$$\begin{array}{ccccc} \langle\alpha\rangle & - & \langle\beta\rangle & \overset{\beta}{\text{----}} & \langle\beta\rangle & - & \langle\alpha'\rangle \\ {\scriptstyle\alpha}\,\vdots & & & & & & \vdots\,{\scriptstyle\alpha'} \\ \langle\alpha\rangle & - & \langle\beta'\rangle & \underset{\beta'}{\text{----}} & \langle\beta'\rangle & - & \langle\alpha'\rangle\,. \end{array}$$

3.5.1. 双曲面的构造。 考虑命题 3.20 陈述中的 Σ_g^b 上的曲线 α、α'、β、β'。它们的并集 $\alpha \cup \alpha' \cup \beta \cup \beta'$ 将曲面分成四个连通分支 S_1、S_2、S_3 和 S_4，每个连通分支都只有一个新边界分支。我们可以假设， α 和 α' 将曲面分成 $S_1 \cup_\partial S_2$ 和 $S_3 \cup_\partial S_4$，而 β 和 β' 则将其分成 $S_1 \cup_\partial S_3$ 和 $S_2 \cup_\partial S_4$。

注意，恰有两个曲面 S_i 继承了奇自旋结构。事实上，容易看出，在上述所有情形中， $g(S_i \cup_\partial S_j) = g(S_i) + g(S_j)$，因此， S_i 与 S_j 的辛基之并构成 $S_i \cup_\partial S_j$的辛基，而 Arf 不变量具有可加性（即使我们并非沿着整个边界分支进行粘合）。

于是我们可以假设 S_1 和 S_4 继承了奇自旋结构。在 S_2 和 S_3 上选取自旋切割系统，并在 S_1 和 S_4 上选取（部分）自旋切割系统，分别含有 $g(S_1) - 1$ 和 $g(S_4) - 1$ 条曲线，然后沿所有这些 1-曲线切割曲面。我们得到一个亏格 3 曲面 S ，其上带有诱导偶自旋结构。

假设 $\gamma_1, \ldots, \gamma_7$ 是 S 上的一条由可容许曲线组成的 7-链（见图 7）。回想一下，若 S 是通过用圆盘封闭 S 的所有边界分支而得到的曲面，则有如下关系

$$(t_{\gamma_1} \ldots t_{\gamma_6} t_{\gamma_7}^2 t_{\gamma_6} \ldots t_{\gamma_1})^2 = 1$$

在 $\mathrm{Mod}(\overline{S})$ 中。更一般地，设 δ 是 S 中 $\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_6$ 的边界，并设 δ_1， δ_2 是 $\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_7$ 的两个边界分支。那么关系

$$(t_{\gamma_1} \ldots t_{\gamma_6} t_{\gamma_7}^2 t_{\gamma_6} \ldots t_{\gamma_1})^2 = t_{\delta_1}^2 t_{\delta_2}^2 t_\delta^{-1} \tag{3}$$

成立于 $\mathrm{Mod}(S)$ 中，这是结合两个正 7 链关系和一个负 6 链关系得到的结果。

现在我们在 S 上构造一个自旋切割系统，它将作为双曲面的第一个顶点。对 γ_1、...、γ_7 定向，使得 $\gamma_i \cdot \gamma_{i+1} = 1$。考虑 S 上的以下曲线（见图 7）：

- $\alpha_1 := \gamma_1 +_{a_1} \gamma_3$，其中 a_1 是从 $\gamma_1 \cap \gamma_2$ 到 $\gamma_2 \cap \gamma_3$的 γ_2 的弧；

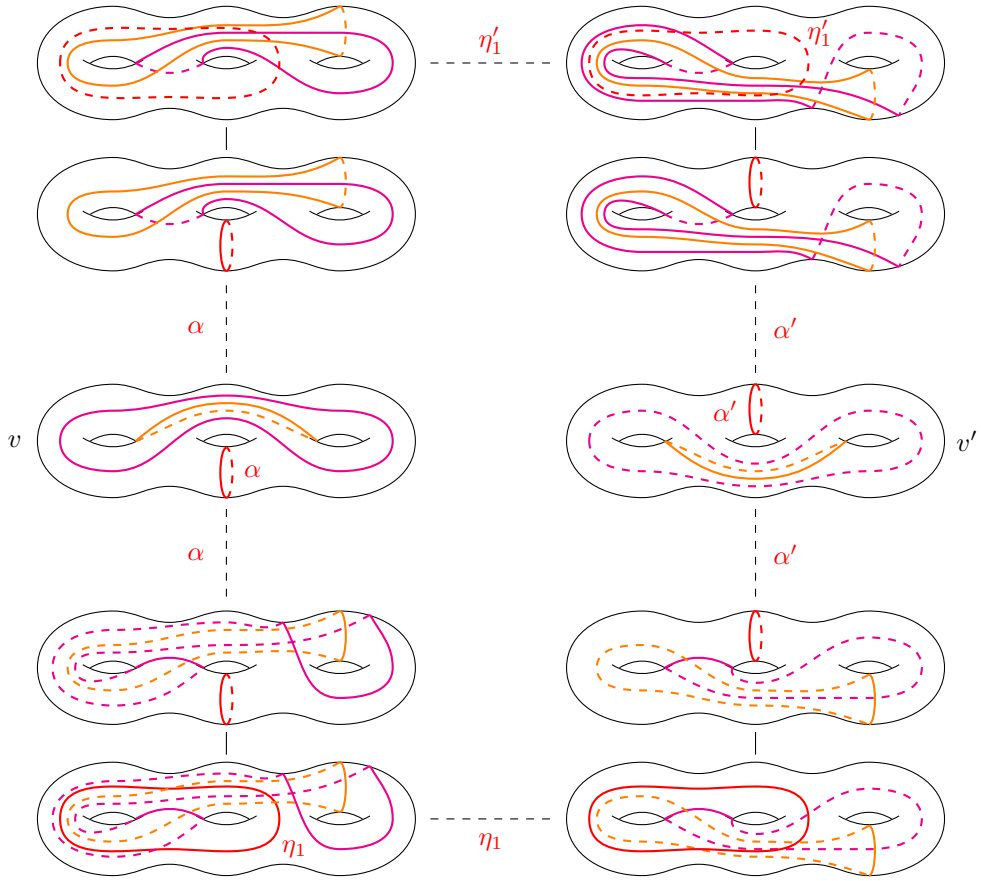


FIGURE 8. 图 7 中双曲面的一些顶点。

- $\alpha_2 := \gamma_3 +_{a_2} \gamma_5$，其中 a_2 是从 $\gamma_4 \cap \gamma_5$ 到 $\gamma_3 \cap \gamma_4$的 γ_4 的弧；
- $\alpha_3 := \gamma_2 +_{a_3} \gamma_6$，其中 a_3 是沿着 γ_5 从 $\gamma_5 \cap \gamma_6$ 通向 $\gamma_2 \cap \gamma_3$ 的弧，γ_4 和γ_3。

容易看出，α_1、α_2、α_3 构成了 S上的一个自旋切割系统 v。注意，它们都位于 $\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_6$的一个管状邻域内。

定义 3.21。令 c_i 为双曲关系 (3) 左侧涉及的第 i个 Dehn 扭转。设 $h_1 := c_1$，并令 $h_i = (c_1 \dots c_{i-1}) * c_i$，其中 $i = 2, \dots, 28$。将 v补全为整个 Σ_g^b上的一个自旋切割系统。一个 双曲面 是如下形式的 28 边形

$$v - h_1(v) - (h_2 h_1)(v) - \cdots - (h_{28} \dots h_1)(v) = v, \tag{4}$$

其中所有的边都属于类型（i）；与往常一样，我们只写出发生变化的曲线。

需要进行一些验证。首先，请注意：

$$h_k \dots h_1 = (c_1 \dots c_{k-1}) c_k (c_{k-1}^{-1} \dots c_1^{-1})(c_1 \dots c_{k-2}) c_{k-1} (c_{k-2}^{-1} \dots c_1^{-1}) \dots c_1 = c_1 \dots c_k, \tag{5}$$

因此，确实有 $h_{28}(v) = v$，由 (3) 可知；由于 α_1，α_2，α_3都包含在 $\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_6$ 的一个邻域中。此外，每条曲线 γ_i 都与 $v = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ 中的一条曲线相交一次，并且与另外两条不相交。

因此，对于 $(h_k \dots h_1)(\gamma_i)$ 和 $(h_k \dots h_1)(v)$，情况也相同。现在，

$$h_{k+1} = (c_1 \dots c_k) * c_{k+1} = (h_k \dots h_1) * c_{k+1}$$

是沿某条曲线 $(h_k \dots h_1)(\gamma_i)$ 的 Dehn 扭转，因此存在一条类型为 (i) $(h_k \dots h_1)(v)$ –$(h_{k+1}h_k \dots h_1)(v)$ 的边。

在证明命题 3.20 之前，我们需要以下引理。

引理 3.22. 双曲面由四条线段组成，其不变曲线满足命题 3.20 的性质 *(i)* 和 *(ii)*。

证明。 设 $\mathbf{p}$ 为一个双曲面。我们可以假设 $g = 3$。令 $\gamma_1, \dots, \gamma_7$ 为定义 $\mathbf{p}$ 的 7-链。按前文所述选取定向，并令 $v = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ 为对应的顶点。那么，$\mathbf{p}$ 具有形式 (4)。

根据构造， α_1 只与 γ_4相交，因此由上述推理可知，曲线 $h_k \dots h_1(\alpha_1)$ 仅在双曲关系中 γ_4 出现的四处参与边，而由 (5) 可知，相应的曲线为

$$\eta_1 := (t_{\gamma_1} t_{\gamma_2} t_{\gamma_3} t_{\gamma_4})(\alpha_1), \qquad \alpha_1' := (t_{\gamma_1} \dots t_{\gamma_6} t_{\gamma_7}^2 t_{\gamma_6} t_{\gamma_5} t_{\gamma_4})(\alpha_1),$$
$$\eta_1' := (t_{\gamma_1} \dots t_{\gamma_6} t_{\gamma_7}^2 t_{\gamma_6} \dots t_{\gamma_1})(t_{\gamma_1} t_{\gamma_2} t_{\gamma_2} t_{\gamma_4})(\alpha_1) = (t_{\gamma_1}^{-1} t_{\gamma_2}^{-1} t_{\gamma_3}^{-1} t_{\gamma_4}^{-1})(\alpha_1),$$
$$(t_{\gamma_1} \dots t_{\gamma_6} t_{\gamma_7}^2 t_{\gamma_6} \dots t_{\gamma_1})(t_{\gamma_1} \dots t_{\gamma_6} t_{\gamma_7}^2 t_{\gamma_6} t_{\gamma_5} t_{\gamma_4})(\alpha_1) = \alpha_1$$

（见图 8）。这些都是非分离 1-曲线，并且根据构造满足 (ii) .

可以证明， η_1和 η_1' 分别同位于弧和 $\gamma_2 +_c \gamma_4$和 $\gamma_2 +_{c'} \gamma_4$，其中 c是 γ_3上从 $\gamma_3 \cap \gamma_4$ 到 $\gamma_2 \cap \gamma_3$的弧，而 $c' = \gamma_3 \setminus c$是其补集。因此，$\eta_1$ 和 η_1' 同调，且它们共同围成一个双孔环面，该双孔环面是 0-曲线 γ_2，γ_3，γ_4的管状邻域。类似地， $\alpha_1' = \gamma_1 +_{a_1'} \gamma_3$，其中 a_1' 是 γ_2中 a_1 的补集，也就是 γ_2 上从 $\gamma_2 \cap \gamma_3$ 到 $\gamma_1 \cap \gamma_3$的弧，而 α_1， α_1' 共同围成$\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$的一个管状邻域。因此，(i)也得到验证。□

注记 3.23。 通过类似的论证可以证明，在 γ_i上选择相反的定向，我们会得到一个自旋切割系统 v'，它已包含在 (4) 中，即 $(h_{14} \dots h_1)(v)$，而且路径与 (4) 完全相同，只是从 v' 出发（见图 8）。

引理 3.24。 设 $\mathbf{p}$ 是 X_g 中的一条路径，相对于某条曲线 α，其半径为1 。若$\mathbf{p}$仅含有一段带有 $d_\alpha = 1$的线段，则它是零伦的。

证明。 只需调整 [31, 命题 19]的证明。沿用其中的记号，可以如下构造 1-曲线 δ_1, δ_2。若 $|\gamma_i \cap \beta| = 0$，则令 $\delta_i := \gamma_i$。否则，若 γ_i与 α同调，则 $\alpha \cup \beta \cup \gamma_i$将 Σ_g^b分成两个子曲面，其中一个必定包含某条 1-曲线 δ_i（参见注记 3。19）。最后，若 γ_i 和 α 不同调，则 $\alpha \cup \beta \cup \gamma_i$ 的正则邻域的边界分支是非分离 1-曲线，我们将其中之一记为 δ_i。现在，根据命题 3。12，可以构造一条路径 $\langle \beta, \delta_1 \rangle - - \langle \beta, \delta_2 \rangle$。□

命题 3.20 的证明。正如前面所指出的，我们可以假设亏格为 3，并且并集 $\alpha \cup \alpha' \cup \beta \cup \beta'$ 将曲面分割成两个圆盘 S_2 和 S_3，以及两个单孔奇数亏格环面 S_1 和 S_4 （其中还包含来自 Σ_g^b 的额外边界分支）。我们将构造一条由 0-曲线组成的 7-链 $\gamma_1, \dots, \gamma_7$，使得按照引理 3.22 中的记号， $\alpha = \alpha_1$ 和 β 等于 η_1 或 η_1'。

为 S_1 选取几何辛基 γ_2, γ_3，并为 S_4选取几何辛基 γ_7, γ_6。根据构造， $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_6$和 γ_7 都是可容许的。定义如下的新曲线:

- $\gamma_4 := \gamma_2 +_{b_1} \beta$，其中 b_1 是 $S_1 \setminus (\gamma_2 \cup \gamma_3)$ 中的某条弧;

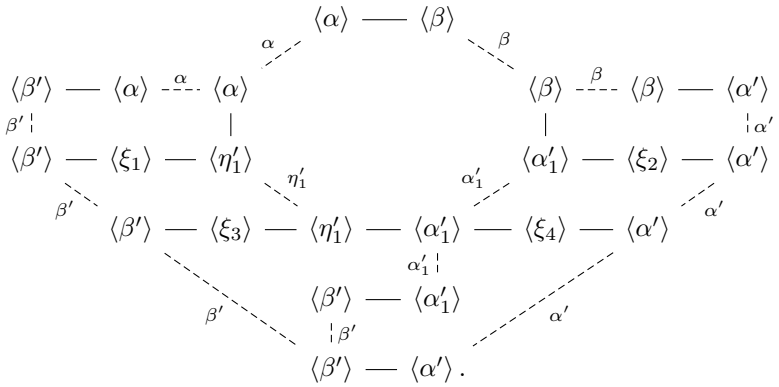
- $\gamma_1 := \gamma_3 +_{b_2} \alpha$，其中 b_2是包含在由 $\beta \cup \gamma_2 \cup \gamma_4$围成且与 b_1不相交的裤子曲面中的某条弧；

- $\gamma_5 := \gamma_7 +_{b_3} \alpha$，其中 b_3 是 $S_4 \setminus (\gamma_6 \cup \gamma_7)$ 中的某条弧。

根据构造， α 同位于沿着 γ_2的某条弧对 γ_1 和 γ_3 取弧和所得的弧，并且我们可以选择 γ_i 的定向，使得 $\alpha = \alpha_1$。此外， β 同位于沿着 γ_3的某条弧对γ_2 和 γ_4 取弧和所得的弧；经过重新命名，我们可以假设它与 η_1重合。还要注意， η_1' 与 α 和 α' 各相交一次，并且 β'， η_1' 围成一个环带（可能带有孔）。类似地， α_1' 与 β 和 β' 各相交一次，并且 α'， α_1' 围成一个环带。

因此，给定一个包含 η_1'的顶点 w，我们可以通过一条满足$d_{\eta_1'} = 0$的路径将它连接到某个包含 β' 的顶点。事实上，设 ξ 是一条曲线，它穿过由$\eta_1' \cup \beta'$ 围成的环带一次，并且与 w的其他曲线不相交。沿η_1'进行 Dehn 扭转后，我们可以假设 ξ 是一条 1-曲线，并且有一条边路径 $\langle \eta_1' \rangle - \langle \xi \rangle - \langle \beta' \rangle$。类似地，我们可以通过一条满足$d_{\alpha_1'} = 0$的路径，将一个包含 α_1' 的顶点连接到某个包含 α' 的顶点。

我们按如下方式构造所需的零伦路径：



这里， ξ_1， ξ_2， ξ_3 和 ξ_4 是如上构造的 1-曲线。中央的“八边形”是一个双曲面，而其他路径的半径要么为 0，要么为 1，且只有一条线段与基曲线的距离为 1。由命题 3.18 和引理 3.24，我们得出结论。□

注 3.25。 亏格 3 曲面上的 7-链必定是分离的。不过请注意，我们在命题 3.20 的证明中构造的 7-链也将 Σ_g^b 分离开来，其中一个连通分支是带 4 个洞的球面，因为它是 $\gamma_3 \cup b_2 \cup \alpha \cup b_3 \cup \gamma_5$ 的一个管状邻域。

3.5.2. 半径为 1 的一般路径。 现在我们可以证明本小节的主要结果了。

命题 3.26. *X_g 中的所有半径为 1 的路径都是零伦的。*

证明。 设$\mathbf{p}$ 是绕某条曲线 α的半径为 1 的路径，且 v_0 是$\mathbf{p}$ 上包含α的一个顶点。那么$\mathbf{p}$ 可以分成有限条 η_i线段，使得每条 η_i 要么与 α 不相交，要么与 α 恰好相交一次。若 $|\alpha \cap \eta_i| = 1$，选取 w_i 作为η_i线段的一个顶点。然后我们可以构造一条捷径

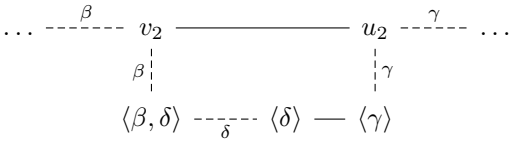
$$v_0 \overset{\alpha}{\text{-----}} \langle \alpha \rangle \text{——} \langle \eta_i \rangle \overset{\eta_i}{\text{-----}} w_i.$$

这些捷径将$\mathbf{p}$ 分割成有限条围绕 α、半径为 1 的闭路径，每条最多包含两条带有 $d_\alpha = 1$的线段。因此，我们可以假设$\mathbf{p}$ 最多包含两条带有 $d_\alpha = 1$的线段。引理 3.24 中处理了只有一条线段的情形。接下来假设$\mathbf{p}$有两条带有 $d_\alpha = 1$的线段，并将 β 和 γ 称为这两条线段的不变曲线。

情形 1： β**-线段与** γ**-线段共用一个顶点**。在这种情况下，β 和 γ 互不相交且不同调，因此 $\beta \cup \alpha \cup \gamma$ 的两个边界分支都是非分离 1-曲线。若将 δ_2 定义为其中一个边界分支，我们便可按照引理 3.24 的证明，将$\mathbf{p}$ 分割成三条半径为 0 的路径和一条仅含一条线段、距离为 1 的路径；根据命题 3.18 和引理 3.24，这些路径都是零伦的。

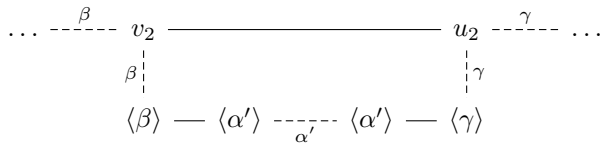
情形 2：存在一条边 $\langle\beta\rangle - \langle\gamma\rangle$。注意，$\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 是由三条两两相交一次的1-曲线组成的三元组。我们在注 3.2*(ii)*中简要描述过这类三元组，并证明其补集至多包含 $g-2$ 条互不相交的线性无关1-曲线。另一方面，注意到其补集至少包含 $g-3$ 条互不相交的线性无关1-曲线。事实上，设其由两个子曲面 $\Sigma_{g_1}^{b_1+1}$和 $\Sigma_{g_2}^{b_2+2}$组成，其中 $g_1+g_2=g-2$且 $b_1+b_2=b$。那么 $\Sigma_{g_1}^{b_1+1}$包含 g_1 条或 g_1-1 条互不相交的线性无关1-曲线，具体取决于其Arf不变量是0还是1。另一方面，$\Sigma_{g_2}^{b_2+2}$总是包含g_2 条互不相交的线性无关1-曲线。事实上，若其Arf不变量为0，只需取一个自旋切割系统。若其Arf不变量为1，则存在一个含有 g_2-1 1条曲线和一条0-曲线 η的切割系统。将 η 与一个边界分支取弧和；正如我们已经观察到的，这是一条0-曲线。所用的弧与其他曲线不相交，由此得到最后一条1-曲线。若我们这个三元组的补集是一个连通子曲面 Σ_{g-3}^{b+3}，则可对 $\Sigma_{g_2}^{b_2+2}$重复上述论证，并且也取自旋值为1的边界分支。若一个三元组 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 的补集包含 $g-2$ 条互不相交的线性无关1-曲线，我们称其为好三元组；否则称为坏三元组（即其补集不连通，且 $\Sigma_{g_1}^{b_1+1}$继承了奇自旋结构）。根据归纳法，当 $g=3$ 时，只需处理坏三元组；当 $g=2$时，只需处理好三元组。

情形 2A： $g=2$ **和** $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ **是一个好三元组**。$\alpha \cup \beta \cup \gamma$的补集是一个圆盘和一个圆柱的并。将 ξ_1 和 ξ_2 称为圆柱的边界分支；根据注记 3。8，它们是 0-曲线。构造一条曲线 δ，使其从 ξ_1 延伸至 ξ_2，仅穿过γ一次，然后沿圆柱返回。此时，δ必定是 1-曲线，因为 $\{\alpha, \beta, \xi_1, \delta\}$ 是 $H_1(\Sigma_2^b; \mathbb{Z})$ 的几何辛基。接着我们可以构造以下捷径：



由于 δ 和 α 互不相交且线性无关，我们可以通过一条绕 α的半径为 0 的路径，将包含 δ的某个顶点连接到 v_0。因此，我们将$\mathbf{p}$ 分成三条路径，每条路径都只有一个距离为 1 的线段，由引理 3。24 可得结论。

情形 2B： $g=3$ **和** $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ **是一个坏三元组**。α与 $\alpha \cup \beta \cup \gamma$的分离边界分支的弧和是一条 1-曲线 α'，它与 α 不相交且与之同调，并且 $\{\alpha', \beta, \gamma\}$ 构成一个好三元组（见图 9）。因此，我们可以构造一条捷径



将 $\mathbf{p}$ 分成一条含有好三元组的路径和一条含有两个距离为 1 的不相邻线段的路径。

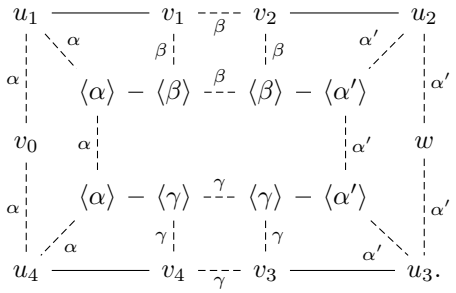
情形 3： β**-线段和** γ **线段由一条在** α **周围半径**0 **的子路径连接**。设 w 为该子路径的一个顶点，并称 α' 为一条与 w 不相交的曲线

α。如果我们可以用一条在 α周围半径为 0 的路径将 v_0 连接到 w，则由引理 3.24 可知结论成立。如果不存在这样的路径，那么 α 与 α' 同调，我们处于备注 3.19 所描述的情形。特别地，亏格至少为 3，并且根据归纳法，我们可以假设 $g = 3$。此外，$\Sigma \setminus (\alpha \cup \alpha')$的两个连通分支是奇环面。将 v_1、v_2 和 v_3、v_4 分别称为 β-线段和 γ-线段的端点。我们将把问题化归到可以应用命题 3.20 的情形。

首先，我们断言 $|\alpha' \cap \beta| = |\alpha' \cap \gamma| = 1$。因此，对适当的捷径应用引理 3.24 后，可以假设 $\mathbf{p}$ 由四条线段组成。为证明关于β的断言，将 u_2 称为 v_2之后的第一个顶点。由于 $d_\alpha(u_2) = 0$，存在一条与 α不相交的非分离 1-曲线 $\eta \in u_2$。因此，α 和 η 必定同调，并且它们必定将 Σ_3 切成两个奇环面；否则，我们就能通过一条在 α周围半径为 0 的路径，将 v_0 连接到 w，这与注记 3.19 矛盾。特别地，β 不能与 η不相交，因此 $|\beta \cap \eta| = 1$。现在，存在一条从 w 到包含 η 的某个顶点的路径，该路径在 α周围半径为 0；又由于 $\Sigma_{3,b} \setminus (\alpha \cup \alpha')$ 和 α', η中没有 1-曲线，它们同调，因而必定重合。对 $|\alpha' \cap \gamma|$也可作同样的推理。

设 $m := |\beta \cap \gamma|$。应用引理 3.14(a)，可得非分离 1-曲线 $\beta_1 := \beta, \beta_2, \ldots, \beta_k := \gamma$，使得 $|\beta_i \cap \alpha| = |\beta_i \cap \alpha'| = 1$ 和 $|\beta_i \cap \beta_{i+1}| \leq 1$。因此，我们可以假设 $|\beta \cap \gamma| \leq 1$。如果 β 和 γ 重合，或者它们不相交且不同调，或者 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 和 $\{\alpha', \beta, \gamma\}$ 都是好三元组，那么我们可以通过一条仅含两条线段的路径将 v_2 连接到 v_3，其中对应的不变曲线分别为 β 和 γ；再根据情形 1 和情形 2A，将 $\mathbf{p}$ 分成两条零伦路径。

情形 3A： β **和** γ **互不相交且同调**。注意，$\beta \cup \gamma$ 的并将曲面分成两个奇环面。因此，根据命题 3.20，存在一条恰有 4 条线段的零伦路径，其不变曲线为 α、β、α'和 γ。按如下方式构造捷径，我们可将问题化归为引理 3.24：



情形 3B: $|\beta \cap \gamma| = 1$**.** 注意，$\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 和 $\{\alpha', \beta, \gamma\}$ 不可能同时是坏三元组。假设 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 是一个坏三元组。令 β' 为 β 与 $\alpha \cup \beta \cup \gamma$ 的分离边界分支的弧和，如图 9 所示。则 β 和 β' 不相交且同调，并将 Σ_3 分成两个奇环面。注意，$\{\alpha, \beta', \gamma\}$ 和 $\{\alpha', \beta', \gamma\}$ 都是好三元组。因此，我们可以应用命题 3.20，找到如下捷径，从而化归为情形 2A，并

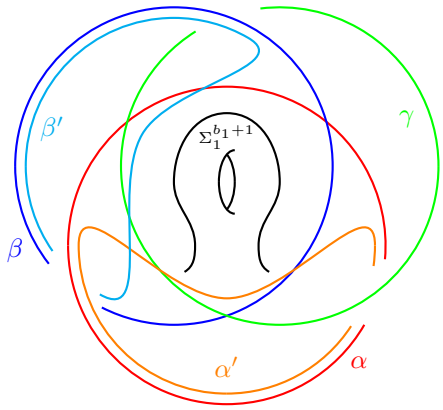
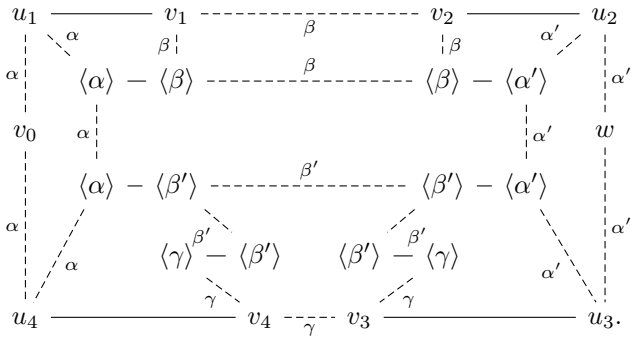


FIGURE 9. 坏三元组和好三元组：如果 $\Sigma_1^{b_1+1}$ 继承了奇自旋结构，则三元组 $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ 是坏的。注意，三元组 $\{\alpha',\beta,\gamma\}$、$\{\alpha',\beta',\gamma\}$ 和 $\{\alpha,\beta',\gamma\}$ 是好的。此外，α，α'，β，β' 满足命题3。20的假设。

引理3。24：



□

3.6. **单连通性：一般情形。** 对于半径至少为二的路径，我们终于能够对半径进行恰当的归纳。关键引理如下。

引理3.27。 设 α、β、γ 是 Σ_g 上的非分离自旋曲线，并假设 $|\alpha\cap\beta|=m\geq 2$、$|\alpha\cap\gamma|\leq m$ 和 $|\beta\cap\gamma|=1$。那么存在一条非分离自旋曲线 δ，使得 $|\alpha\cap\delta|<m$、$|\beta\cap\delta|=0$、1 和 $|\gamma\cap\delta|=0$、1。

证明 [31, 引理 18]。沿着 $\beta\cup\gamma$切割 Σ_g 后，可以将其视为一个附有若干把手的正方形。正方形的相对边对应于同一条曲线，β 或 γ。首先注意，如果 $|\alpha\cap\gamma|=1$，那么我们可以设 $\delta:=\gamma$。于是，假设 $|\alpha\cap\gamma|\geq 2$。

如果 α 的一条弧的端点分别位于正方形的两条相对边上，例如位于 γ-边上，那么我们可以运用一种类似 1-1-2技巧的方法。设 η_1，η_2 为图10中的曲线。由于它们都与 γ 恰好相交一次，因此二者都是非分离的；并且它们与 α 的交点至多有 $|\alpha\cap\gamma|-1\leq m-1$个。此外，我们有 $\phi(\eta_1)+\phi(\eta_2)=\phi(\gamma)$，因此二者中恰有一条是 1-曲线，我们可以将其取作 δ。如果 α 的一条弧的端点位于两条相对的 β-边上，同样的推理也适用。此外，我们可以从正方形上任意一条连接两条相对边且不与 α相交的弧出发，前提是它的端点被若干个

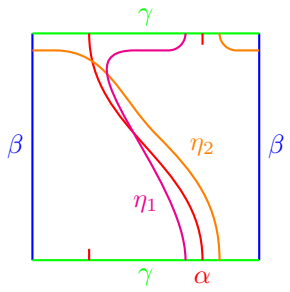
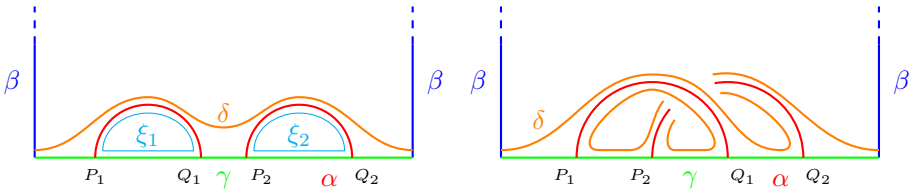


FIGURE 10. 当 α-线段的端点位于相对的 γ边上时，引理 3.27 中曲线 δ 的构造。注意，$[\eta_1]+[\eta_2]\equiv\gamma$（模 2）。



a) b)

FIGURE 11. 当两条 α-弧的端点位于同一条 γ边上且彼此不嵌套时，引理 3.27 中曲线 δ 的构造。这里，$\phi(\xi_1)=\phi(\xi_2)=0$。

与 α 的交点隔开（否则，我们无法保证所得的自旋曲线与α 的交点少于 m 个）。我们将这类弧称为优良弧。

给定 α 上的一条弧 c，其端点位于同一条边上或相邻的边上，将由 c 与正方形边界上连接 c 两端点且至多包含一个角点的部分之并得到的曲线记为 $\widetilde{c}$。我们将 c 的自旋值定义为 $\widetilde{c}$ 的自旋值。

现在假设 α 上有两条弧 a_1、a_2，其端点分别为 P_1、Q_1 和 P_2、Q_2，且都位于正方形的同一条边 ℓ 上。选定该边的一个定向，并对它与 α的交点依次编号。如果这些端点按 P_1、Q_1、P_2、Q_2 或 P_1、P_2、Q_1、Q_2 的顺序出现（适当重新命名后），则按如下方式构造一条 δ。令P_iQ_i 为 ℓ 上端点为P_i、Q_i的线段。考虑曲线 $\xi_1:=\widetilde{a_1}$ 和 $\xi_2:=\widetilde{a_2}$。若其中一条（设为 ξ_1）是1-曲线（不一定是非分离的），则令 $\delta:=(\ell\setminus P_1Q_1)\cup a_1$。若 ~~$\xi_1$和~~ ξ_2 是不相交的0-曲线，则令 $\delta:=(\ell\setminus(P_1Q_1\cup P_2Q_2))\cup a_1\cup a_2$；见图11a）。最后，若 $|\xi_1\cap\xi_2|=1$，则可取 $\ell\cup\xi_1\cup\xi_2$ 的管状邻域的边界作为 δ；见图11b)。

从现在起，我们假设上述情况均不发生，即不存在优美弧；如果两条 α-弧的端点位于同一条边上，那么它们彼此嵌套。此外，如果一条 α-弧 c 的端点位于同一条边上，我们将假设 $\widetilde{c}$ 是一条 0-曲线。

考虑正方形两条边 ℓ_1 和 ℓ_2 之间的一个角 C。令 P_1 和 P_2 分别为从 C出发，沿着 ℓ_1 和 ℓ_2 找到的与 α 的第一个交点。令 c_i 为从 P_i出发的α-弧，令 Q_i 为它的另一个端点。存在多种可能。

情形A：$Q_1\in\ell_1$ 和 $Q_2\in\ell_2$。如果 Q_1 是 ℓ_1上与 α 的最后一个交点，那么 Q_2 也是 ℓ_2上的最后一个交点，否则我们将找到一条优美弧；参见图 12a)。此外，

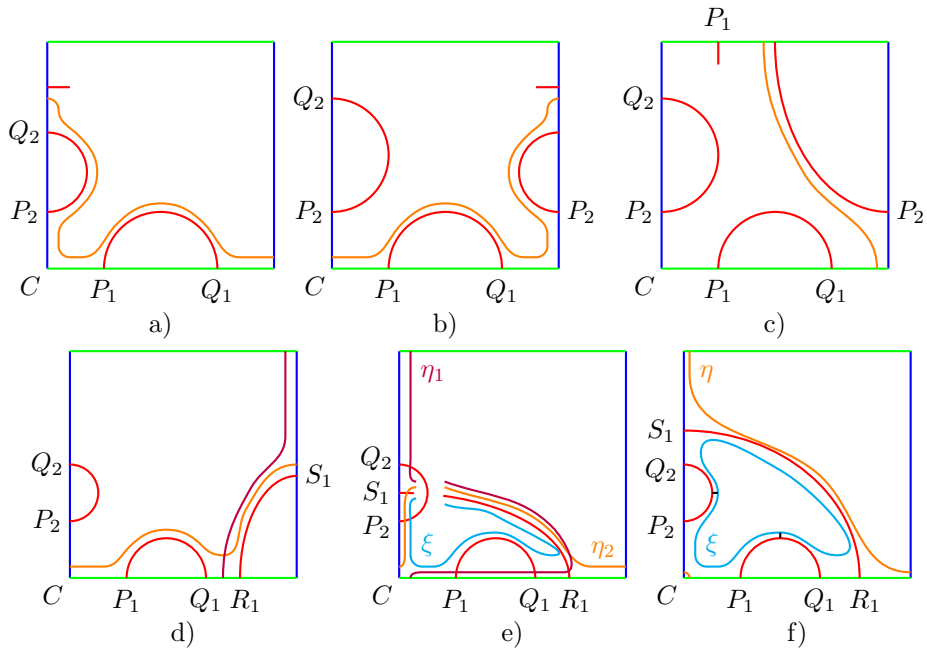


FIGURE 12. 情形A中优美弧和自旋曲线的构造，引理 3.27。

出于同样的原因（参见图12b)和c)），ℓ_1 和 ℓ_2 对面的$\widetilde{\ }$边上分别对应于 P_1 和 P_2 的点，由一条 α-弧 d连接。我们可以假设 d 是一条1-曲线，否则图12c)中的橙色弧会以显然的方式闭合成一条如陈述中所示的 δ 曲线。这是一个“坏构型”（参见图 13a)），我们稍后将处理这种情况。

假设此时 Q_1 不是最后一个交点，并将沿远离 C的方向遇到的下一个交点称为 R_1 。从 R_1 出发的 α-弧 d_1 的另一个端点 S_1 必定位于 ℓ_2上。事实上，根据假设，S_1 不能位于 ℓ_1 上；而如果 $S_1 \notin \ell_2$ ，那么图12d）中的橙色弧或紫色弧就是优美弧。

$\widetilde{\ }$假设 S_1 位于 P_2 和 Q_2之间。注意， d_1 是非分离的，因为它与 $\widetilde{c_2}$$\widetilde{\ }$恰好相交一次。如果它是0-曲线，那么图12e）中的曲线 ξ 是非分离 1-曲线。反之，如果 d_1是1-曲线，那么图12e）中的曲线 η_1 和 η_2 也都是非分离 1-曲线。设 m_1 为 ℓ_2 与 α 的交点中距离 C比 S_1 更远的点数，并设 m_2 为距离更近的点数。对 ℓ_1类似地定义 n_1 和 n_2 。那么 $m_1+m_2+1 \leq m$和 $n_1+n_2+1 \leq m$。注意，

$$|\eta_1 \cap \alpha| = m_1+1+n_2, \quad |\eta_2 \cap \alpha| = m_2+1+n_1, \quad |\widetilde{d_1} \cap \alpha| = m_2+n_2.$$

如果这三个量都至少等于 m，我们将得到 $2n_2 \geq m$ 和 $2m_2 \geq m$，因此有 $m_2+n_2 \geq m$ 和 $m_1+n_1+2 \leq m$。现在， $t_{\widetilde{c_2}}(\eta_2)$ 是一条非分离 1-曲线，它与 α 的交点至多有 $m_1+n_1 < m$ 个。

另一方面，假设 S_1 与 Q_2 的距离大于 ξ 必定是一条0-曲线。沿图12f)中的黑色弧，将 ξ 分别与 $\widetilde{c_1}$ 和 $\widetilde{c_2}$ 作弧和，得到的都是1-曲线，且它们不可能都是分离的。显然， $\xi+\widetilde{c_2}$ 与 α 相交于

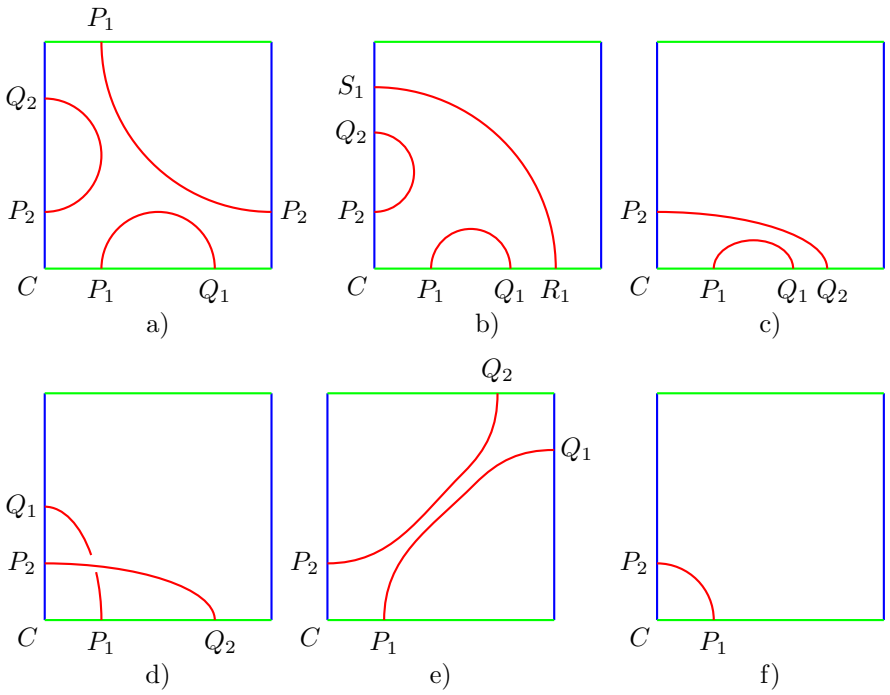


FIGURE 13. 引理 3.27 证明中的坏构型。

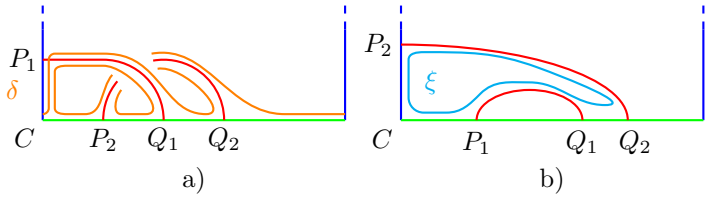


FIGURE 14. 情形 B 中引理 3.27 的曲线 δ 的构造。

少于 m 个点。另一方面，这对 $\xi+\widetilde{c_1}$未必成立；但如果 $|(\xi+\widetilde{c_1})\cap\alpha|\geq m$，那么显然，图12中的曲线 η 是一条满足 $|\eta\cap\alpha|<m$的非分离1-曲线。

假设是一条 1-曲线。像之前一样定义 m_1，m_2，n_1 和 n_2，除非 $m_2=n_2\geq\lfloor m/2\rfloor+1$ 和 $m_1=n_1$，我们可以取 $t_\gamma^{\pm}(\eta)$、$t_\beta^{\pm}(\eta)$ 和 $\widetilde{d}$ 中的一个作为 δ。此外，在这种情况下，图 12f) 中的曲线ξ 是一条 1-曲线，且与 α 的交点总少于 m 个，因此我们可以取它作为 δ，除非它是分离的。显然，若 ξ 是分离的，则 Q_2 和 S_1 之间没有 $\alpha\cap\ell_2$ 的点。这就是图 13b) 中的坏构型。注意，类似地论证可知，我们可以假设：如果从紧接 R_1 之后的交点出发的 α-弧落在 ℓ_2 上，那么它恰好落在紧接 S_1 之后的交点上，依此类推。

情形B： Q_1，$Q_2\in\ell_1$。如果 Q_2 位于 P_1 和 Q_1 之间，我们就取 δ，如图14a)所示。如果它离 C更远，那么我们断言它必定是下一个交点。事实上，按照与情形A类似的推理，图14b)中的曲线 $\widetilde{c_2}$ 和 ξ 之一是1-曲线，因此我们可以取

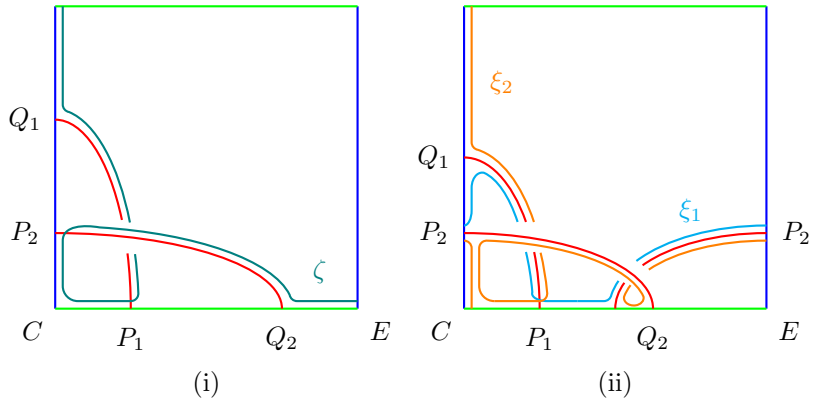


FIGURE 15. 图13d)中坏构型的自旋曲线。

它作为 δ，除非它是分离的。如果它是分离的，那么 Q_1和 Q_2之间就没有 $\ell_1 \cap \alpha$ 的点。此外，如果 $\widetilde{c}_2$ 是分离的，那么我们可以取它与 ℓ_1 的显然弧和作为 δ，因此不妨假设 $\widetilde{c}_2$ 是0-曲线。由此得到图13c)中的坏构型。

情形 C： $Q_1 \in \ell_2$ 和 $Q_2 \in \ell_1$。在这种情形下， $\widetilde{c}_1$ 和 $\widetilde{c}_2$ 都是非分离的。如果其中一条是1-曲线，那么我们可以将其取作 δ。如果两条都是0-曲线，就得到图13d)中的坏构型。

请注意，在这种情况下，我们可以假设不存在两个端点都在$\sim \ell_1$ 上（或在 ℓ_2上）的弧。事实上，设 d 是这样一条弧，并将其端点记为 R 和 S。回想一下，根据假设， d 是一条0-曲线。如果 R 和 S 都位于 P_1 与 Q_2之间，那么我们可以像图14b)那样构造一条曲线ξ；在这种情况下， ξ 是非分离的，而且显然是自旋曲线。如果 Q_2 位于 R与 S之间，我们可以像图14a)那样构造 δ。最后，如果 R 和 S 都比$\sim Q_2$离 C 更远，那么可以将 ℓ_1 与 d 和 $\widetilde{c}_2$ 的弧和取作 δ。

此外，注意到图 15(i) 中的曲线 ζ 是一条 1-曲线， $t_{\widetilde{c}_1}^{\pm 1}(\zeta)$ 和 $t_{\widetilde{c}_2}^{\pm 1}(\zeta)$ 也都是。因此，我们可以假设，距离 C 比 Q_2 和 Q_1 更远的交点总数至少为 $m-2$，且每条边上至少有一个交点。

我们还可以假设，从 P_2 出发、位于与 ℓ_2 相对的边上的弧不会落在 ℓ_1 上。事实上，如果它落在 Q_2 和 E 之间，就很容易构造出一条沿着 c_2 再沿着 d 延伸的 δ。如果它落在 P_1 和 Q_2 之间，注意到图 15(ii) 中的曲线 ξ_1 和 ξ_2 都是自旋曲线，且它们中至少有一条与 α 的交点少于 m 个。

情形 D： $Q_1 \notin \ell_1$， ℓ_2。在这种情况下， Q_1 必须位于与 ℓ_2 相对的边上。除非 Q_1 是距离与 C 相对的角最近的点，否则我们可以得到一条如图 16a) 所示的优美弧。此外，若确实如此，则与 C 相对的角要么属于情形A，要么 Q_2 既不位于 ℓ_1 上，也不位于 ℓ_2 上；否则，我们就会再次得到如图 16b) 或 c) 所示的优美弧。由此得到图 13e) 中的坏构型，其中 $\widetilde{c}_1$ 和 $\widetilde{c}_2$ 都是 0-曲线。

情形 E： $Q_1 = P_2$。我们假设 $\widetilde{c}_1$ 要么是 0-曲线，要么是分离曲线；否则可将其视为 δ。这是图 13f) 中的坏构型。

为了处理角处的坏构型，有必要考察全局构型。

再次固定一个角 C，并假设每个角处都存在图 13 所示的某种坏构型。如果情况如图 13a) 所示，则图 17 中的曲线 ξ_1 根据

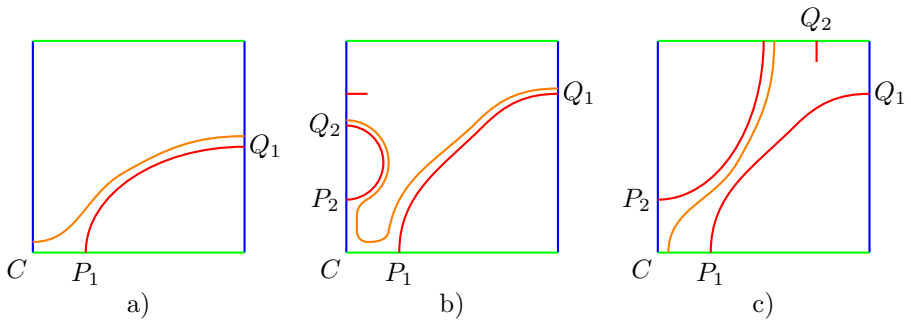


FIGURE 16. 引理 3.27 中情形 D 的优美弧。

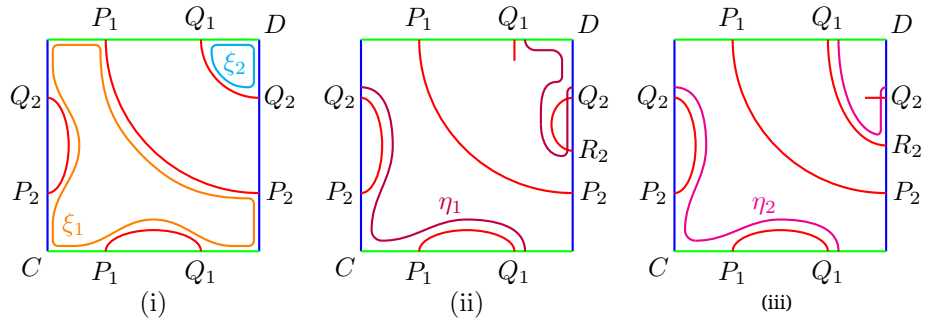


FIGURE 17. 处理图 13a) 中的坏构型。

假设是 1-曲线。我们假设它是分离的，否则可以将其取作 δ。考虑角 D。如果在 D 处存在图 13f) 所示的坏构型，即如果对应于 $\widetilde{\ }$ 和 Q_1 的点与对应于 Q_2 的点由一条弧 ℓ 连接，那么 ℓ 必须是自旋的，并且根据带有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 系数的同调，它与 $[\alpha]=[\xi_1]+[\ell]$ 非分离。

如果在 D 处出现另一种坏构型（即图 13b)、c) 或 d) 中的构型），那么我们取图 17(ii) 和 (iii) 中的曲线 η_1 或 η_2 作为 δ。根据上述讨论，我们可以假设从 Q_2 到 R_2 以及从 Q_1 到 R_1 的 α-弧的自旋值为 0。至此，便完成了存在图 13a) 中坏构型时的证明。

现在考虑图 13e) 中的坏构型。正如已经指出的，我们可以假设曲线 $\widetilde{c_1}$ 和 $\widetilde{c_2}$ 是 0-曲线。注意，角 E 和 F 处的构型不可能是图 13f) 中的构型。因此，存在一条自旋值为 0 的弧，从 P_1 到 R_1 或从 Q_1 到 R_1，如图 18(i) 和 (ii) 所示；我们可以取相应的曲线 η_1 或 η_2 作为 δ。由此便处理了图 13e) 的情形。

现在假设 C 处的坏构型如图13b)所示。回想一下，与 α 的交点相对于 R_1 和 S_1对称地分布在边 ℓ_1 和 ℓ_2 上。称R_2，……，R_k为 ℓ_1 上距离 C 比 R_1更远的交点，并称 S_2，……，S_k 为 ℓ_2上的对称点。如前所述，可能存在从 R_2 到 S_2 等的弧，但并非所有从 R_i 出发的弧都具有这种形式，因为我们排除了图13a)和e)中的构型。令 c_n 为这种形式的最后一条弧，它从 R_n 延伸至 S_n。我们可以像之前一样假设$\widetilde{c_n}$ 是一条1-曲线。根据上述论证，从 R_{n+1} 出发的 α-弧不会落在 ℓ_2 上

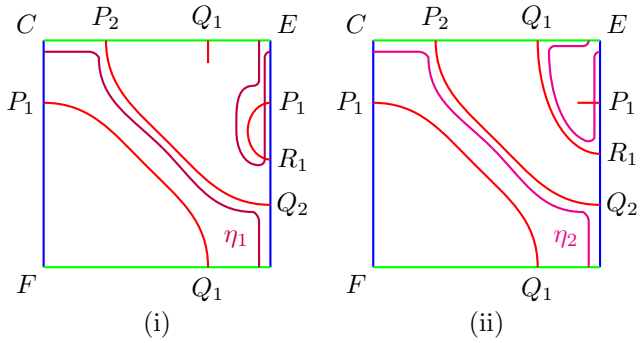


FIGURE 18. 处理图13e)中的坏构型。

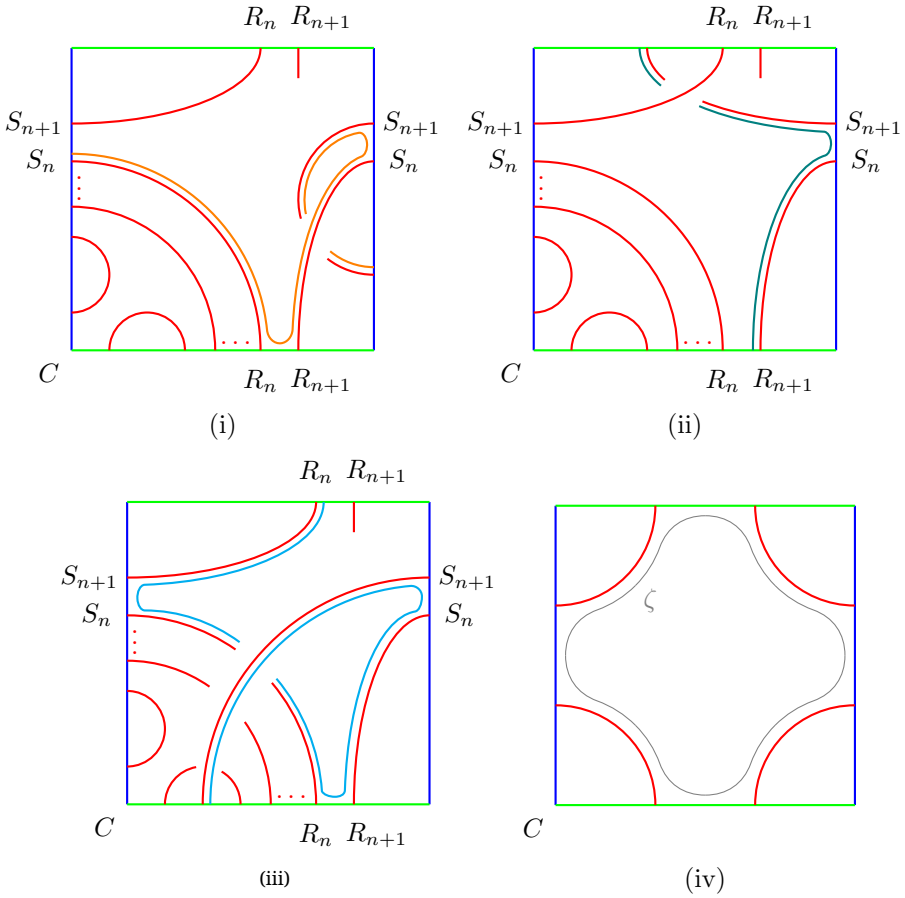


FIGURE 19. 处理图13b)中的坏构型。

情形A。我们可以假设它落在与 S_n对应的点上，否则就会存在一条优美弧。类似地，我们假设从 S_{n+1} 出发的弧落在 R_n上。

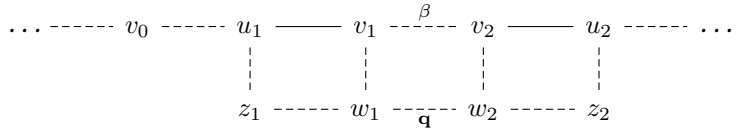
我们断言， R_{n+1} 和 S_{n+1} 由一条 α-弧连接。事实上，如果从 S_{n+1} 出发的弧落在另一个点上，我们就可以找到图 19(i)、(ii)和(iii)所示的优美弧。因此，在不存在优美弧这一假设下，每个角上的构型都会退化为图 13f)所示的构型。在这种情况下， α 的模 2 同调类与图 19(iv)中的曲线 ζ 的同调类相同，因此 ζ 是一条非分离 1-曲线。

剩下需要处理的是仅存在图 13c)、d)和f)中的坏构型的情形。容易看出，在这种情况下，每条边上都有一对相邻的交点，它们是落在相对两侧的 α-弧的端点。于是，我们可以重复图 19 中的分析，证明总能找到一条优美弧，和/或找到陈述中所说的曲线 δ 。□

注记 3.28。 注意，对于 $m = 1$，引理 3.27 不成立：只需考虑亏格 3 曲面上的一个坏三元组。

定理 3.29。 复形 X_g 是单连通的。

证明 [31, 命题 19]。我们只需证明半径至少为 2 的路径是零伦的。设 $\mathbf{p}$ 是一条路径，其半径为 $m \geq 2$ ，围绕着包含在 $\mathbf{p}$ 的某个顶点 v_0 中的一条曲线 α 。设 v_1 是 $\mathbf{p}$ 上满足 $d_\alpha(v_1) = m$ 的第一个顶点；于是 v_1 包含一条满足 $|\alpha \cap \beta| = m$ 的曲线 β 。考虑从 v_1 开始的极大 β 段，使得该段的所有顶点到 α 的距离均为 m ，并将该段的最后一个顶点记为 v_2 。此外，将 v_1 之前的最后一个顶点记为 u_1 ，将 v_2 之后的第一个顶点记为 u_2 。于是，存在曲线 $\gamma_1 \in u_1$ 和 $\gamma_2 \in u_2$，使得 $|\gamma_i \cap \alpha| = d_\alpha(u_i)$；特别地， $|\gamma_i \cap \alpha| \leq m$。若 γ_i 与 β 不相交，则令 $\delta_i := \gamma_i$；否则，将引理 3.27 给出的曲线记为 δ_i 。我们要如下构造一条捷径：



如果 $\delta_i = \gamma_i$，只需令 $z_i = u_i$。如果 $\delta_i \neq \gamma_i$，暂且假设 δ_i 与 β不同调，也与 γ_i不同调。如果 δ_i 与 γ_i不相交且彼此独立，令 z_i 为同时包含 γ_i 和δ_i的顶点，并通过一条 γ_i线段将其连接到 u_i 。类似地，如果 δ_i 与 β不相交且彼此独立，令 w_i为同时包含 β和 δ_i的顶点，并通过一条 β线段将其连接到 v_i 。如果有 $|\gamma_i \cap \delta_i| = 1$，令 z_i 为包含 δ_i的顶点，并通过如下形式的路径将其连接到 u_i ：

$$u_i \overset{\gamma_i}{\text{------}} \langle \gamma_i \rangle \text{ ——— } \langle \delta_i \rangle \overset{\delta_i}{\text{------}} z_i.$$

类似地，如果 $|\beta \cap \delta_i| = 1$，令 w_i 为包含 δ_i的顶点，并通过如下形式的路径将其连接到 v_i ：

$$v_i \overset{\beta}{\text{------}} \langle \beta \rangle \text{ ——— } \langle \delta_i \rangle \overset{\delta_i}{\text{------}} w_i.$$

现在通过一条 δ_i路径将顶点 z_i 连接到 w_i 。由此得到一条闭路径 $u_i - v_i$- -w_i- -z_i- -u_i，其半径为 1，且以 δ_i为中心；此外， u_1- -z_1- -w_1 以 α为中心的半径严格小于 m 。

注意， δ_i 不可能同时与 γ_i 和 β同调。假设它与 γ_i 同调（且与之不相交）。那么，在 $\Sigma_g \setminus (\gamma_i \cup \delta_i)$ 的每个连通分支 S_1, S_2 上，我们都能找到一条弧 a_i ，连接两个边界分支且与 α不相交。将 c_i, c_i' 和d_i, d_i'称为端点 a_1, a_2分别在 γ_i和 δ_i上划分出的两条弧。于是我们有 $|c_i \cap \alpha| + |c_i' \cap \alpha| \leq m$和 $|d_i \cap \alpha| + |d_i' \cap \alpha| < m$。不妨重新命名，使曲线

对并集 $a_1 \cup c_i \cup a_2 \cup d_i$ 和 $a_1 \cup c_i' \cup a_2 \cup d_i'$ 进行平滑后得到的曲线是1-曲线，因为它们的同调类模2之和为 $[\gamma_i] + [\delta_i]$，且其代数交数为0。此外，其中一条与 α 的交点少于 m 个；将它记作 η_i。注意，$|\gamma_i \cap \eta_i| = |\delta_i \cap \eta_i| = 1$。现在令 z_i 为包含 δ_i的一个顶点，并通过以下形式的路径将其与 u_i 连接：

$$u_i \overset{\gamma_i}{\text{------}} \langle \gamma_i \rangle \text{ ——— } \langle \eta_i \rangle \overset{\eta_i}{\text{------}} \langle \eta_i \rangle \text{ ——— } \langle \delta_i \rangle \overset{\delta_i}{\text{------}} z_i.$$

如果 δ_i 与 β 同调（且与其不相交），我们只需选择一条同时与 δ_i 和 β 各相交一次的曲线 ξ_i；经过沿 β进行 Dehn 扭转后，可以假设它是一条 1-曲线。现在令w_i 为包含 δ_i的一个顶点，并通过以下形式的路径将其连接到 v_i：

$$u_i \overset{\gamma_i}{\text{------}} \langle \gamma_i \rangle \text{ ——— } \langle \xi_i \rangle \overset{\xi_i}{\text{------}} \langle \xi_i \rangle \text{ ——— } \langle \delta_i \rangle \overset{\delta_i}{\text{------}} w_i.$$

现在我们通过一条 δ_i-路径将 z_i 连接到 w_i，便得到与之前相同的性质。

最后，应用引理 3.14(b)，我们可以通过一条路径$\mathbf{q}$ 将 w_1 连接到 w_2，使得除最后一个可能例外的δ_2-段外，其所有顶点到 α 和 β的距离都小于 m。证明至此完成。□

4. A finite presentation

考虑亏格为 g、有一个边界分支C的曲面 Σ_g^1 上的偶自旋结构 ϕ，它由对所有 $i = 1,\dots,g$定义，其中 $\phi(C) = 1$、$\phi(\alpha_i) = 1$和 $\phi(\beta_i) = 0$，记号参见图20。本节中，我们将为 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^1)[\phi]$ 和 $\mathrm{Mod}(H_g)[\phi]$找出一个有限表示，其中H_g 是以 α_i 为边界的圆盘的把手体。

给定群元素 a，b，我们用 $a * b$ 表示共轭元 aba^{-1}。

4.1. 策略。 我们先回顾 Hatcher 和 Thurston 的策略（另见 Laudenbach 的综述文章 [19]）。

固定一个顶点 $v_0 \in X_g$。根据自旋坐标变换，$\mathrm{Mod}(\Sigma_g^1)[\phi]$ 在 X_g 的顶点上具有传递作用，我们将看到，以 v_0 为顶点的边和面的轨道数量有限。对于每个以 v_0 为顶点的边轨道 O，取 $r_O \in \mathrm{Mod}(\Sigma_g^1)[\phi]$，使得 $v_0 - r_O(v_0)$ 是 O 的一个代表。令 S 为以下集合的并：$H[\phi] := \mathrm{Stab}(v_0)$ 的一个生成集，以及元素 r_O。

X_g 中的路径与 S 中的词一一对应。给定 $\varphi \in \mathrm{Mod}(\Sigma_g^1)[\phi]$，根据命题 3.12，存在一条边路径 $v_0 - v_1 - \cdots - v_k = \varphi(v_0)$。我们可以按如下方式将一个 S 中的词与这条路径关联起来。令 O_1 为 $v_0 - v_1$的边轨道；那么，存在$h_1 \in H[\phi]$，使得 $h_1^{-1}(v_1) = r_{O_1}(v_0)$，即 $h_1 r_{O_1}(v_0) = v_1$。接着，令 O_2 为$v_0 - (h_1 r_{O_1})^{-1}(v_2)$ 的边轨道，并找到 $h_2 \in H[\phi]$，使得 $h_1 r_{O_1} h_2 r_{O_2}(v_0) = v_2$，依此类推。每个 h_i 都可以表示为 $H[\phi]$ 的生成元所组成的词，因此所得的 h 乘积 $h_1 r_{O_1} \dots h_k r_{O_k}$ 确实是 S 中的一个词。此外，我们有 $(h_1 r_1 \dots h_k r_k)(v_0) = \varphi(v_0)$，所以 $\varphi^{-1} h_1 r_1 \dots h_k r_k$ 等于某个 $h_{k+1}^{-1} \in H[\phi]$，并且我们可以将 φ 表示为 S 中的一个词。

反过来，给定一个 h-乘积 $h_1 r_1 \dots h_k r_k$，我们可以通过对 $i = 0,1,\dots,k$ 设置 $v_i := h_1 r_1 \dots h_i r_i(v_0)$ 来构造一条边路径。如果一个 h-乘积 $h_1 r_1 \dots h_k r_k$ 对应于一条闭边路径，那么对于某个 $h_{k+1} \in H[\phi]$，$h_1 r_1 \dots h_k r_k h_{k+1}$ 是 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^1)[\phi]$ 中的一个关系。

我们利用这一对应关系证明下面的定理，这是本节的主要结果。

定理 4.1。 群 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^1)[\phi]$ 具有一个有限表示，其生成集为 S，并满足以下关系：

*(*表示中稳定子 $H[\phi]$ v_0 的 ***(A1)-(A8)*** 关系；

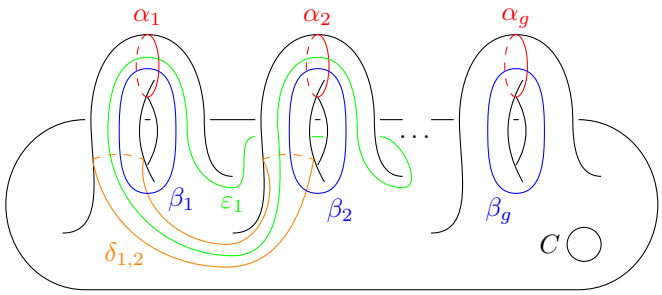


FIGURE 20. 定义 Mod(Σ_g^1)[ϕ]的生成元时涉及的部分曲线。

(A9) 对每条路径 $v_0 - r(v_0) - v_0$，给出一个代表它的 h-乘积，其中 $r \in S \setminus H[\phi]$; *(A10)* 所有形如 $r^{-1} * h = h_0$ 的关系，其中 $r \in S \setminus H[\phi]$, h 是边 $v_0 - r(v_0)$ 的稳定子的一个生成元，且 $h_0 \in H[\phi]$; *(A11)-(A14)* 对 X_g 中以 v_0 为顶点的每个 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^1)[\phi]$-轨道的面，给出一个代表它的 h-乘积。

证明。将 G 称为由陈述中的表示给出的群。首先注意到，由于 $H[\phi]$ 是有限生成的映射类群在 v_0 的稳定子 H 中的有限指数子群，而该稳定子由 [31, 命题 27]可知是有限表示的，因此 $H[\phi]$ 也是有限表示的。

上述讨论表明，Mod(Σ_g^1)[ϕ] 是 G的一个商群。Mod(Σ_g^1)[ϕ]中的一个关系可以写成 G中的一个 h-乘积 $h_1 r_1 \dots h_k r_k h_{k+1}$，它表示 X_g中的一条闭边路径$\mathbf{p}$。我们要证明 $h_1 r_1 \dots h_k r_k h_{k+1}$在 G中等于单位元。

首先，任何其他表示$\mathbf{p}$的 h-乘积 $h'_1 r'_1 \dots h'_k r'_k h'_{k+1}$在$G$中都等于 $h_1 r_1 \dots h_k r_k h_{k+1}$。事实上，我们有 $r_1(v_0) = h_1^{-1} h'_1 r'_1(v_0)$，因此 r_1 和 r'_1 表示同一个边轨道，且$r_1 = r'_1$。此外， $h_1^{-1} h'_1$ 固定边 $v_0 - r_1(v_0)$，因此由 (A10) 可得，对于某个 $h''_1 \in H[\phi]$，有 $h_1^{-1} h'_1 r_1 = r_1 h''_1$。因此，

$$h'_1 r'_1 h'_2 r'_2 \dots h'_k r'_k h'_{k+1} = h_1 r_1 h''_1 h'_2 r'_2 \dots h'_k r'_k h'_{k+1},$$

因此，我们得到两个较短的 h-乘积，它们表示相同的边路径，于是由对 k 的归纳法可得结论。

此外，我们可以假设 $\mathbf{p}$ 不包含回溯，即不存在满足 $v_i = v_{i+2}$ 的子路径 $v_i - v_{i+1} - v_{i+2}$。事实上，如果存在这样的子路径，我们可以假设它由某个表示路径 $v_0 - r(v_0) - v_0$ 的 h-乘积的共轭元表示，其中 r 是某个生成元；根据 (A9)，这些在 G 中都是平凡的。

最后，由定理 3.3，$\mathbf{p}$ 是零伦的，因此可以将其写成若干路径的复合：先从 v_0 走到某个顶点 v，接着绕 X_g 的一个面一周，最后沿着之前相同的路径从 v返回 v_0。根据上述讨论，我们可以假设这些路径由表示一个在 v_0 处有顶点的面的 h-乘积的共轭元表示；根据 (A11)–(A14)，这些在 G 中都是平凡的。

由于与 v_0 接触的 X_g 的边和面的轨道数有限，因此得到的表示是有限的。□

4.2. 顶点稳定子。考虑图20中的自旋切割系统 $v_0 = \langle \alpha_1, \dots\dots, \alpha_g \rangle$。我们将给出其稳定子 $H[\phi]$ 在 Mod(Σ_g^1)[ϕ]作用下的一个表示；该稳定子是 v_0 在 Mod(Σ_g^1)作用下的稳定子 H 的一个有限指数子群。我们将对 Wajnryb 的 H [31,命题 27]表示应用尼尔森-施赖尔方法。

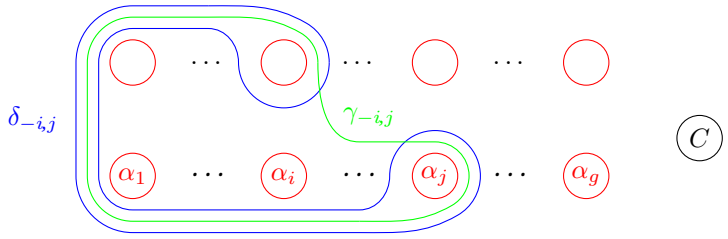


FIGURE 21. 曲线 $\delta_{-i,\ j}$和 $\gamma_{-i,\ j}$。此处，我们沿着 α_1、…、α_g切开了 Σ_g^1，得到一个平面曲面。

首先，我们为 H引入 Wajnryb生成元。按照图20中的记号，令$a_i := t_{\alpha_i}$，其中 $i = 1, \ldots\ldots, g$；令 $s := t_{\beta_1} t_{\alpha_1}^2 t_{\beta_1}$，以及令 $t_i := t_{\varepsilon_i} t_{\alpha_i} t_{\alpha_{i+1}} t_{\varepsilon_i}$，其中 $i = 1, \ldots\ldots, g-1$。此外，对于所有满足 $i < j$的 $i,\ j \in \{\pm 1, \ldots, \pm g\}$，令$\delta_{i,\ j}$为图21中的曲线，并令 $d_{i,\ j} := t_{\delta_{i,\ j}}$，以及

$$\overline{d}_{i,j} := d_{i,j} a_{|i|}^{-1} a_{|j|}^{-1}. \tag{6}$$

命题4.2. 群 $H[\phi]$ 有一个表示，其生成元为 $a_1^2, \ldots, a_g^2$, s, $t_1, \ldots, t_{g-1}$和 $d_{i,\ j}$，其中对所有满足 $i < j$ 的 $i, j \in \{\pm 1, \ldots, \pm g\}$，并满足以下关系：

(A1) 对所有 i, j, k，$[a_i^2, a_j^2] = 1$和 $[a_i^2, d_{j,k}] = 1$；*(A2)* 纯辫关系：*(a)* 若 $r < s < i < j$ 或 $i < r < s < j$，则 $d_r^{-1}, s * d_{i,j} = d_{i,j}$；*(b)* 若 $r < s < j$，则 $d_r^{-1}, s * d_{s,j} = d_{r,j} * d_{s,j}$；*(c)* 若 $r < s < j$，则 $d_r^{-1}, j * d_{r,s} = d_{s,j} * d_{r,s}$；*(d)* 若 $r < i < s < j$，则 $[d_{i,j}, d_{r,j}^{-1} * d_{r,s}] = 1$；*(A3)* 对所有 i，且若 $i < j - 1$则 $[t_i, t_j] = 1$，有 $t_i t_{i+1} t_i = t_{i+1} t_i t_{i+1}$；*(A4)* 对所有 i，$s^2 = d_{-1,1} a_1^{-2}$和 $t_i^2 = d_{i,i+1} d_{-i-1,-i}$；*(A5)* 对所有 $i \geq 2$，$[t_i, s] = 1$；*(A6)* $st_1 st_1 = t_1 st_1 s$；*(A7)* 对所有 i，$[s, a_i^2] = 1$；对所有 i，$t_i * a_i^2 = a_{i+1}^2$；若 $j \neq i, i-1$，则 $[a_i^2, t_j] = 1$；*(A8)* 涉及生成元 $d_{i,j}$的其他关系：*(a)* 若 $|i|, |j| \geq 2$ 或若 $i = -1$，则 $s * d_{i,j} = d_{i,j}$；若 $j \geq 2, s * d_{i,-1} = d_i$，则 $j = 1$，$s * d_{-1, j} = d_{1,j}$；若 $i \leq -2$，则 *1*；*(b)* 若 $j - 1 = i = k$或 $j = i + 1 = -k$或 $|i|$，则 $t_k * d_{i,j} = d_{i,j}$；$|j| \neq k, k+1$；*(c)* 若 $j \geq k + 2$，则 $t_k * d_{k,j} = d_{k+1,j}$；若 $i \leq -k - 2$，则 $t_k * d_{i,-k-1} = d_{i,-k}$；*(d)* $t_k * d_{-k-1,k} = d_{-k,k+1}$；*(e)* $t_k * d_{-k-1,k+1} = d_{k,k+1} * d_{-k,k}$；*(f)* 若 $j > -k$，则 $t_k * d_{-k-1,j} = d_{-k,j}$；且 $j \neq k, k+1$和 $t_k * d_{i,k} = d_{i,k+1}$，若 $i < k$且$i \neq -k$，则 $-k - 1$。

注意到，关系 (A4) 和 (A8) 允许我们消去除一个之外的所有生成元 $d_{i,j}$，例如$d_{1,2}$。

证明。首先，我们对 H 由 [31,命题 27]给出的表示进行以下 Tietze 变换。我们添加生成元 $d_{i,j}$，其中所有 i,j 均满足该条件，并添加关系 (6)。$d_{i,j}$ 只出现在关系 (P1)、(P2)、(P4) 和 (P8) 中，因此可以利用 (6) 将其替换为 $d_{i,j}$。

(P1) 由于所有生成元 a_i 交换，我们得到 $[\alpha_i, d_{j,k}] = 1$。*(P2)* 纯辫关系只涉及生成元 $d_{i,\,j}$；同样，由于所有 a_i 交换，我们只需将 $d_{i,\,j}$ 替换为 $d_{i,\,j}$，对所有 i、j均如此，从而得到（A2）。*(P4)* 这些关系变为 $s^2 = d_{-1,\,1}a_1^{-2}$以及 $t_i^2 \equiv d_{i,\,i+1}d_{-i-1,\,-i}$，对所有 i均如此。*(P8)* 由关系（P7），s 与所有 a_i交换，而当 $j \neq i$、$i-1$时，$t_i * a_i = a_{i+1}$ 和 $[a_i, t_j] = 1$。

注意，由（P1）和（P4）我们还有

$$t_i * a_{i+1} = t_i^2 * a_i = (d_{i,i+1}d_{-i-1,-i}) * a_i = a_i. \tag{7}$$

因此，我们只需将每个$d_{i,\,j}$ 替换为 $d_{i,\,j}$，从而得到（A8）。

现在，我们可以从 H的表示中删除生成元 $d_{i,\,j}$ 以及关系 6。注意，H的所有新生成元都保持 ϕ不变，除了 a_1、……、a_g。

我们断言，H 的子群 $H[\phi]$ 由元素 a_i^2、s、t_i 和 $d_{i,\,j}$生成。事实上，设 w 是由 H的生成元构成的一个词。根据关系 (P1)、(P7) 和 (7)，可将其写成$w = w'a_1^{\epsilon_1} \cdot \ldots \cdot a_g^{\epsilon_g}$，其中 w'是由生成元 s、t_i和 $d_{i,\,j}$构成的一个词。因此，w'表示 $H[\phi]$中的一个元素；根据引理 2。12(2)，w 表示 $H[\phi]$中的一个元素，当且仅当每个ε_i 都是偶数。因此，H^s 在 H 中的一个 Schreier横截系为

$$U := \left\{ u_J := \prod_{j \in J} a_j \,\middle|\, J \subseteq \{1, \ldots, g\} \right\}, \tag{8}$$

按字典序排列。

现在我们确定 H^s的 Schreier生成元。回想一下，它们的形式为 $uxux^{-1}$，其中 u 是 U中的一个元素，x 或 x^{-1} 是 H的一个生成元，而 $g \mapsto \overline{g}$ 是函数 $H \to U$，它将每个元素映射到其 $H[\phi]$-陪集在 U 中的唯一代表元。

注意，若 x 或 x^{-1} 等于 s 或 $d_{i,\,j}$ 其中某个 i，j，则它与 U的所有元素交换；因此，在这种情况下，对每个 $u \in U$，我们都有 $ux = u\overline{x}$。若 $x = a_i^{\pm 1}$，则有

$$\overline{u_J a_i^{\pm 1}} = \begin{cases} u_{J \cup \{i\}} & \text{if } i \notin J, \\ u_{J \setminus \{i\}} & \text{if } i \in J. \end{cases}$$

若 $x = t_i^{\pm 1}$，则有：

$$\overline{u_J t_i^{\pm 1}} = \begin{cases} u_J & \text{if } i, i+1 \in J \text{ or } i, i+1 \notin J; \\ u_{(J \setminus \{i\}) \cup \{i+1\}} & \text{if } i \in J \text{ and } i+1 \notin J; \\ u_{(J \setminus \{i+1\}) \cup \{i\}} & \text{if } i \notin J \text{ and } i+1 \in J. \end{cases}$$

为了简化这一过程，我们可以直接使用 H 的关系来去除冗余生成元。例如，根据 (P7)，s 与 U 在 H中的所有元素都交换，因此所有生成元 $usus^{-1}$ 都与 s 在 $H[\phi]$中重合。更一般地，利用关系 (P1) 和 (P7)，我们看到 Schreier 生成元恰好归结为陈述中的那些生成元。事实上，H 中每个保持 ϕ 的生成元 g 都会给出一族 Schreier 生成元，它们都等于 g 本身，或者等于 g 与某个 a_i^2的乘积；并且对所有 i，我们都有

$$u_J a_i \overline{u_J a_i}^{-1} = \begin{cases} 1 & \text{if } i \in J, \\ a_i^2 & \text{if } i \notin J. \end{cases}$$

最后， $H[\phi]$ 的关系形式为 uru^{-1}，其中 u 是 U 的一个元素，而 r 是 H的一个关系。显然，唯一发生变化的关系是涉及某个 a_i的那些关系，也就是 (P1)、(P4) 和 (P7)。

(P1) 对于所有 i， j， k，我们得到 $[\alpha_i^2, \alpha_j^2] = 1$ 和 $[\alpha_i^2, d_{j,k}] = 1$。*(P4)* 第一个关系变为 $s^2 = d_{-1,\ 1}(a_1^2)^{-1}$。*(P7)* 对于所有 i，我们得到 $[s, a_i^2] = 1$；对于所有 i，我们得到 $t_i * a_i^2 = a_{i+1}^2$；如果 $j \neq i$， $i-1$，则有 $[a_i^2, t_j] = 1$。 □

4.3. 边的轨道。 现在我们可以为 Mod(Σ_g^1)$[\phi]$导出一组完整的生成元。考虑 Mod(Σ_g^1)$[\phi]$ 对从 v_0出发的 X_g 的边的作用。显然，类型 (i) 的边的轨道与类型 (ii) 的边的轨道互不相交。根据自旋坐标变换，类型 (i) 的边只有一个轨道。该轨道的一个代表是边 $v_0 - b_1(v_0)$，其中 $b_1 = \tau_{\beta_1}$ 采用图20中的记号。

对于类型 (ii) 的边，情况类似于 Wajnryb 在其关于把手体群 [32] 的论文中所研究的情形。Wajnryb 研究了 Mod(H_g) 在胞腔复形 X_g^H上的作用，该胞腔复形的顶点是 H_g 的子午线切割系统；如果对于 $k = 2, \dots, g$, $|\alpha_1 \cap \alpha_1'| = 0$ 和 $\alpha_k = \alpha_k'$ 满足相应条件，则两个顶点 $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g \rangle$ 与 $\langle \alpha_1', \dots, \alpha_g' \rangle$ 之间由一条边连接。

现在，考虑 X_g 中的一条类型 (ii) 的边 $v_0 - v_1$。在重新命名曲线后， v_1 具有形式 $\langle \gamma_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g \rangle$，其中曲线 γ_1 与 α_1 （代数上和几何上）相交两次，并且与 $\alpha_2, \dots, \alpha_g$ 不相交。沿着 $\alpha_2, \dots, \alpha_g$ 对 Σ_g^1 进行切割，我们得到一个具有若干边界分支的环面 T，它继承了一个偶自旋结构。用圆盘封闭每个边界分支后，我们得到一个闭环面 T，并且可以将 α_1 补充为一个几何辛基$\{ \alpha_1, \eta_1 \}$。注意，对于 η_1，除沿α_1进行德恩扭转平方外，仅有两种可能的选择。现在， γ_1 对应于 T 上的一条曲线 γ_1，其同调类为 $(2k+1)\alpha_1 \pm 2\overline{\eta_1}$。同样地，除沿 α_1 进行平方扭转外，我们可以设 k 或为 0，或为 -1。因此，在 Mod(T)$[\phi]$的作用下， γ_1 恰有两个可能的同伦类。

若 H_g 是以 α_1、……、 α_g 为子午线的把手体，上述论证表明， γ_1 由 $\tau_{\eta_1}^{\pm 2}(\xi_1)$ 给出，其中 η_1 是一条与 α_1 相交一次、且与 α_2、……、 α_g 不相交的曲线，并且存在一条边

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g \rangle - \langle \xi_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g \rangle$$

位于 Wajnryb复形 X_g^H 中。除去 Mod(Σ_g^1)$[\phi]$ 的作用，我们不妨假设 $\eta_1 = \beta_1$ （注意，我们并未要求 η_1 是自旋的）。Wajnryb 将 ξ_1 的可能选择按 Mod(H_g) 的作用分类（见 [32, 第 220] 页），但按 Mod(Σ_g^1)$[\phi]$ 的作用分类完全相同：一个固定 α_2、……、 α_g 并将 ξ_1 映至另一个可能选择 ξ_1' 的映射类，必然可延拓至 H_g，且通过与沿 α_1、……、 α_g 的适当扭转复合，可以使其成为自旋映射类。

注记 4.3. 沿所有涉及 (ii) 型边的曲线切割 Σ_g^1，会得到一个具有两个连通分支的平面曲面，其中一个连通分支包含由 Σ_g^1 的边界分支 C 产生的孔。因此，依据 C 所在的连通分支，实际上会有更多边轨道。我们将看到，根据引理 4.10 和引理 4.11，包含这些额外边轨道的 X_g 的面对于单连通性而言是多余的。因此，我们将忽略它们。

现在我们可以给出(ii)型边的轨道的代表元系。Wajnryb 找到的代表元系由以下边给出：$\langle \alpha_j \rangle - \langle \gamma_{i,\ j} \rangle$ 对于 i， $j \in \{ \pm 1, \dots, \pm g \}$、 $i \leq 1$、 $j + i \geq 1$、 $j - i \leq g$，其中 $\gamma_{i,\ j}$ 是图21中的曲线。定义映射类$r_{i,\ j} = b_j a_j c_{i,\ j} b_j$，其中 $c_{i,\ j} := t_{\gamma_{i,\ j}}$。注意， $r_{i,\ j}$ 交换 α_j 和 $\gamma_{i,\ j}$，并固定所有其他曲线

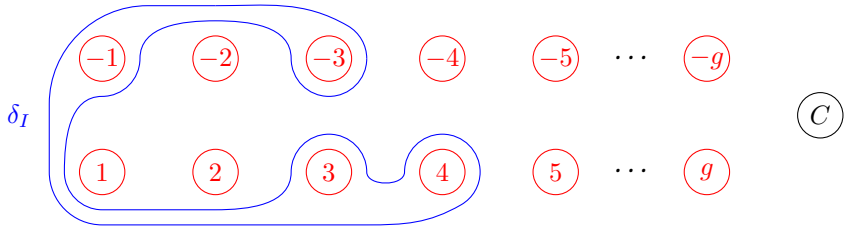


FIGURE 22. 曲线 δ_I，对于 $I=\{-3,-1,3,4\}$。

α_k。此外，在模2同调中，我们有

$$\big[r_{i,j}(\beta_k)\big] \equiv_2 \begin{cases} [\beta_k] & \text{if } k \le |i| \text{ and } i \le -1, \text{ or if } k \ge j+1, \\ [\beta_k+\gamma_{i,j}+\beta_j] & \text{if } k=i=1, \text{ or if } |i|<k<j, \\ [\alpha_j+\beta_j+\gamma_{i,j}] & \text{if } k=j. \end{cases}$$

特别地，$r_{i,\ j}$ 仅在第二种情况下改变自旋值。设

$$\overline{r}_{i,j} := \begin{cases} a_1^{-1}\dots a_{j-1}^{-1} r_{1,j} & if \text{ i=1}, \\ a_1^{-2}\dots a_{-i}^{-2} a_{-i+1}^{-1}\dots a_{j-1}^{-1} r_{i,j} & \text{if } i \le -1. \end{cases} \tag{9}$$

显然，$r_{i,}{}^{-}{}_{j}$ 保持自旋结构，交换 α_j 和$\gamma_{i,\ j}$，并固定所有其他曲线α_k。因此，在 Mod$(\Sigma_g^1)[\phi]$ 的作用下，(ii) 型边的轨道的一个代表元系由 $v_0-v^{\pm}$ 和 $v_0-v_i^{\pm}{}_{,\ j}$给出，其中

$$v^{\pm} := b_1^{\pm 2}(v_0), \quad v_{i,j}^{\pm} := b_j^{\pm 2}\overline{r}_{i,j}(v_0).$$

这里，指标 $i,\ j$是 $\{\pm 1,\dots,\pm g\}$ 的元素，满足 $i\le 1$、 $j+i\ge 1$ 和 $j-i\le g$。

于是，Mod$(\Sigma_g^1)[\phi]$ 的生成集 S 由命题 4.2 中 $H[\phi]$ 的生成元 b、 $b_1^{\pm 2}$ 和 $b_j^{\pm 2}r_{i,\ j}$ 给出，其中 $i,\ j$ 如上所述。

注 4.4。我们仅利用自旋割系统复形的连通性来确定 Mod$(\Sigma_g^1)[\phi]$ 的生成集。根据命题 3.12，连通性不需要 (ii) 型的边，因此生成元 $b_1^{\pm 2}$ 和 $b_j^{\pm}r_{i,\ j}$ 是多余的。目前我们仍将它们保留下来，因为写出关系时需要用到它们。请注意，目前还应将 b_1、 b_1^2 和 b_1^{-2} 视为彼此独立的生成元。由 (A9) 和 (A11) 可得它们之间显然的关系。

4.4. **回溯**。现在我们明确写出关系（A9）。回忆一下，这些是表示回溯的 h-乘积，即对于每个生成元 $r\notin H[\phi]$，形如 $v_0-r(v_0)-v_0$的环。

我们首先引入一些额外的记号。沿着曲线 α_0，.....， α_g切开 Σ_g^1，得到如图21所示的平面曲面。给定 $\{\pm 1,\dots,\pm g\}$的一个子集 I，令 δ_I为围绕与 I中的元素相对应的红色孔洞的曲线，其中上方孔洞用负整数编号（见图23）。特别地，$\delta_{i,\ j}=\delta_{\{i,j\}}$以及$\gamma_{i,\ j}=\delta_{\{i,i+1,\dots,j\}}$。最后，令 $d_I:=t_{\delta_I}$。我们定义

$$\overline{d}_{\{i_1,\dots,i_n\}} := d_{\{i_1,\dots,i_n\}}(a_{i_1}\dots a_{i_n})^{-1}. \tag{10}$$

可以证明

$$\overline{d}_{\{i_1,\dots,i_n\}} = (\overline{d}_{i_1,i_2}\overline{d}_{i_1,i_3}\dots\overline{d}_{i_1,i_n}\overline{d}_{i_2,i_3}\dots\overline{d}_{i_2,i_n}\dots\overline{d}_{i_{n-1},i_n}). \tag{11}$$

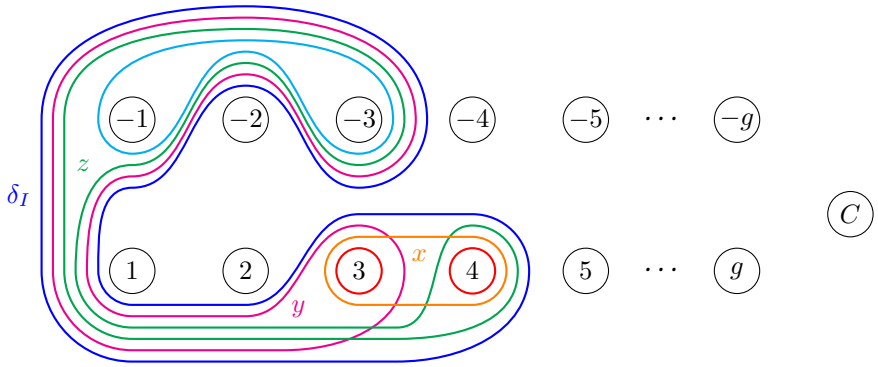


FIGURE 23. 灯笼 $xyz = a_3a_4d_{-3,\ -1}d_I$ 可用于定义 d_I 对于$I:=\{-3,-1,3,4\}$。这里 $x = d_{3,\ 4}$，$y = d_{\{-3,-1,3\}}$ 以及 $z = d_{\{-3,-1,4\}}$。

注记 4.5. 式 (11) 的展开涉及若干灯笼关系。思路如下。考虑由曲线 δ_{i_{n-1},i_n} 和 $\delta_{I\setminus\{i_n\}}$指定的灯笼，即

$$d_{i_{n-1},i_n}d_{I\setminus\{i_n\}}d_{I\setminus\{i_{n-1}\}} = a_{|i_{n-1}|}a_{|i_n|}d_Id_{I\setminus\{i_{n-1},i_n\}}.$$

这使我们能够用映射类 $d_{I'}$来表示 d_I，其中 I' 比 I 少一个或两个元素（见图22）。注意，如果我们用 $\ell(n)$表示将 d_I 写成元素 $d_{i,\ j}$的乘积所需的灯笼数量，就可以写出递推关系，并看到$\ell(n) = (n-1)(n-2)/2$。

此外，对所有 j，令 $k_j := t_jd_j^{-1}{}_{,\ j+1}$，并定义 $s_1 := s$ 以及

$$s_j := (k_{j-1}k_{j-2}\dots k_1) * s_1.$$

可以证明 $s_j = b_ja_j^2b_j$ （见（18））。

注 4.6. 对 $v_0 - v_i^+{}_{,j}$ 的轨道中的一条边进行回溯，会得到 $v_0 - v_i^-{}_{,j}$ 的轨道中的一条边。只需给相交两次的曲线赋予定向，即可看出这一点。因此，只需考虑相对于回溯且第一条边为 $v_0 - v_i^+{}_{,j}$ 的 h-乘积。

(A9) 我们有 $b_1a_1^2b_1 = s_1$, $b_1^{+2}b_1^{-2} = 1$,

$$b_j^{+2}\overline{r}_{1,j}\overline{d}_{\{1,\dots,j\}}a_j^2b_j^{-2}\overline{r}_{1,j} = a_1^{-2}\dots a_{j-1}^{-2}a_j^2s_j\overline{d}_{\{1,\dots,j\}}s_j$$

对于每个 $j \geq 2$ 和

$$b_j^{+2}\overline{r}_{i,j}\overline{d}_{\{i,\dots,j\}}a_j^2b_j^{-2}\overline{r}_{i,j} = a_1^{-4}\dots a_{-i}^{-4}a_{-i+1}^{-2}\dots a_{j-1}^{-2}a_j^2s_j\overline{d}_{\{i,\dots,j\}}s_j$$

for every $i,j \in \{\pm1,\dots,\pm g\}$ *with* $i \leq -1$, $j+i \geq 1$ *and* $j-i \leq g$.

(A9) 的证明。 前两个关系显然成立。其余关系由辫子关系T_1 （在整个 Mod(Σ_g^1) 中）推出。我们讨论 $i = 1$ 的情形；另一个情形类似。我们将应用某个关系的位置标出：

其中应用了一个关系 T_1：

$$\begin{aligned} b_j^{\pm 2}\overline{r}_{1,j}\overline{d}_{\{1,\dots,j\}}a_j^2 b_j^{\mp 2}\overline{r}_{1,j} &= (a_1\dots a_{j-1})^{-3} b_j^{\pm 2} r_{1,j} c_{1,j} a_j b_j^{\mp 2} r_{i,j} = \\ &= (a_1\dots a_{j-1})^{-3} b_j b_j^{\pm 2} a_j \underline{c_{1,j} b_j c_{1,j}} a_j b_j^{\mp 2} b_j a_j c_{1,j} b_j = \\ &= (a_1\dots a_{j-1})^{-3} b_j \underline{b_j^{\pm 2} a_j b_j} c_{1,j} \underline{b_j a_j b_j^{\mp 2}} b_j a_j c_{1,j} b_j = \\ &= (a_1\dots a_{j-1})^{-3} \underline{b_j a_j b_j} a_j^{\pm 2} c_{1,j} a_j^{\mp 2} \underline{b_j a_j b_j} a_j c_{1,j} b_j = \\ &= (a_1\dots a_{j-1})^{-3} a_j b_j a_j a_j \underline{c_{1,j} b_j c_{1,j}} a_j a_j b_j = a_1^{-2}\dots a_{j-1}^{-2} a_j^2 s_j \overline{d}_{\{1,\dots,j\}} s_j. \end{aligned}$$ □

利用命题 3.12 和 (A9) 中的关系，我们已经可以得到以下一组较小的生成元，或许会有用。

推论 4.7. 偶自旋映射类群 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)[\phi]$ 由 a_1^2、b_1、t_1、$d_{1,2}$和 $u := t_1\dots t_{g-1}$生成。

证明。记 G 为由陈述中的元素生成的 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)[\phi]$ 的子群。由 (A9)，$s_1 = b_1 a_1^2 b_1$ 包含于 G 中。因此，根据 (A3)、(A4)、(A7) 和 (A8)，所有的 a_i^2、$d_{i,j}$以及 t_i 也都包含于 G中。正如注记 4.4 中指出的，生成元 $b_1^{\pm 2}$和$b_j^{\pm 2} r_{i,j}$ 是多余的，因此 $G = \mathrm{Mod}(\Sigma_g)[\phi]$。□

4.5. **同一条边的不同写法。** 关系 (A10) 源于将 h-乘积关联到同一条边的不同方式。为了明确写出这类关系，我们必须为每一类边的稳定子找到一个生成集。

引理 4.8 ([31, 引理 29])。边 $v_0 - b_1(v_0)$ 和 $v_0 - b_1^{\pm 2}(v_0)$ 的稳定子都由 $a_1^2 s$, $t_1 s t_1$, a_2^2, $d_{2,3}$, $d_{-2,2}$, $d_{-1,1}d_{-1,2}d_{1,2}a_1^2$ 以及 $t_2, \dots, t_{g-1}$生成。

引理 4.9。边 $v_0 - v_i^{\pm}{}_{,j}$ 的稳定子 $H_i^{\pm}{}_{,j}$ 由以下元素生成：

- $a_1^2, \dots, a_{j-1}^2, a_{j+1}^2, \dots, a_g^2$;
- t_k *for* $k > j$ *or* $1 \le k < j-1$ *with* $k \ne -i$;
- s_k *for* $k > j$ *or* $k \le -i$;
- $\overline{d}_{k,m}$ *for* $k, m \in \{i, i+1, \dots, j-1\}$ *or* $k, m \notin \{-j, i, i+1, \dots, j\}$;
- $a_j^2 s_j \overline{d}_{\{i,\dots,j\}}$ *for* $(i,j)^+$, $a_j^2 \overline{d}_{\{i,\dots,j\}} s_j$ *for* $(i,j)^-$.

证明。证明与 [32, 引理 24]的证明完全相同。请注意，Wajnryb 的某些稳定子还包含一个额外的生成元 z_j，它会交换两个连通分支 S_1 和S_2。在我们的情形中，边界分支 C 的存在使这种情况不会发生。□

我们得到以下一组关系。此处及下文中，若 I 只包含一个元素，则 d_I 等于 1。

(A10) ***(a)*** b_1 与 $a_1^2 s$, $t_1 s t_1$, a_2^2, $d_{2,3}$, $d_{-1,1}d_{-1,2}\overline{d}_{1,2}a_1^2$, $d_{-2,2}$, $t_2, \dots, t_{g-1}$交换；***(b)*** $b_1^{\pm 2}$与 $a_1^2 s$, $t_1 s t_1$, a_2^2, $d_{2,3}$, $d_{-1,1}d_{-1,2}d_{1,2}a_1^2$, $d_{-2,2}$, $t_2, \dots, t_{g-1}$交换；***(c)*** $b_j^{\pm 2} r_{i,j}$ 与以下元素交换：

- a_k^2 对于 $k \ne j$;
- t_k 对于 $k > j$ 或 $1 \le k < j-1$ 与 $k \ne -i$;
- s_k 对于 $k > j$ 或 $k \le -i$;
- $\overline{d}_{k,\ m}$对于 $k,\ \ m \in \{i, \dots, j-1\}$或 $k,\ \ m \notin \{-j, i, i+1, \dots, j\}$;

(d) $[b_j^{-2}\overline{r}_{i,j}, a_j^2\overline{d}_{\{i,\dots,j\}}s_j] = 1$, *while*

$$\left(b_j^2\overline{r}_{1,j}\right)^{-1} * \left(a_j^2 s_j \overline{d}_{\{1,\dots,j\}}\right) = a_j^2\overline{d}_{\{1,\dots,j\}}s_j^{-1}a_j^{-2}\overline{d}_{\{1,\dots,j\}}^{-2}\overline{d}_{\{1,\dots,j-1\}}\cdot \cdot\left((t_{j-1}\dots t_1) * \overline{d}_{\{-1,\dots,j\}}\right),$$

and if $i < 0$

$$\left(b_j^2\overline{r}_{i,j}\right)^{-1} * \left(a_j^2 s_j \overline{d}_{\{i,\dots,j\}}\right) = a_j^2\overline{d}_{\{i,\dots,j\}}s_j^{-1}a_j^{-2}\overline{d}_{\{i,\dots,j\}}^{-2}\overline{d}_{\{i,\dots,j-1\}}\cdot \cdot\left((t_{j-1}\dots t_{-i+1}) * \overline{d}_{\{i-1,\dots,j\}}\right).$$

(A10) 的证明。这些关系大多可由定义轻易推出。对于最后一点，请注意，在负情形下我们有

$$s_j^{-1}a_j^{-1}c_{i,j}^{-1}r_{i,j}^{-1}b_j^2a_jc_{i,j}s_jb_j^{-2}r_{i,j} = 1$$

通过辫子关系 T_1，而在正情形下则涉及一条三链：

$$a_j^2c_{i,j}^2s_ja_j^{-1}c_{i,j}^{-1}r_{i,j}^{-1}b_j^{-2}s_ja_jc_{i,j}b_j^2r_{i,j} = (a_jb_jc_{i,j})^4 = = c_{i,j-1}\left((t_{|i|+1}\dots t_{j-1}) * c_{i-1,j}\right).$$ □

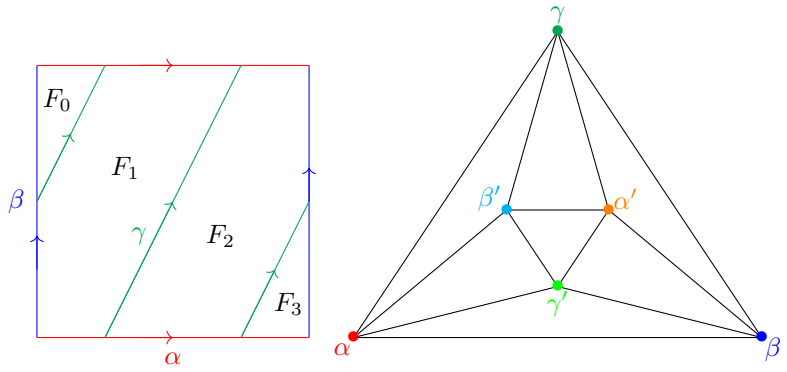
4.6. 面。 最后一组关系来自我们复形中的2-胞腔。我们将建立一列闭边路径 $\mathbf{p}_i$，使得每条闭边路径都是若干与某个$\mathbf{p}_i$共轭的路径之和，即形如$\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_1^{-1}$的路径，其中$\mathbf{q}_1$ 从 v_0 出发，且$\mathbf{q}_2$ 是某个$\mathbf{p}_i$ 在 Mod(Σ_g^1)[ϕ]作用下的像。关系将是与路径$\mathbf{p}_i$相关联的 h-乘积。关于这些关系在 Mod(Σ_g^1)[ϕ]中成立的证明，参见第5.3小节。

三角形。我们应用 Harer 归约过程 [12]。我们将详细说明涉及类型为 $(i,j)^+$ 的边的三角形的这一方法；负情形与此对称。设 p 为一个三角形$v_0 - v_1 - v_2 - v_0$。沿着共有的曲线 $g-1$ 切开 Σ_g^1，得到一个有 $2g-1$ 个孔的环面T，其上有三条曲线 α、β、γ，其中 $\alpha \in v_0$、 $\gamma \in v_1$ 和 $\beta \in v_2$，且类型 (ii) 的边为$\widehat{\ }\langle\alpha\rangle - \langle\gamma\rangle$。将用圆盘封住所有边界分支后得到的闭环面称为 $T\widehat{\ }$。于是， T 的万有覆盖有一个基本区域，它是一个正方形，边沿着 α 和 β，并被 γ 分成 4 个部分。将三条曲线定向，使得 $(\alpha,\beta) = 1$、$(\beta,\gamma) = -1$ 且 $(\alpha,\gamma) = 2$，并按照图24(a)为这 4 个区域命名。注意，同时改变三条曲线的定向会互换 F_0 与 F_3 以及 F_1 与 F_2 的角色。

将T后，我们在每个区域到T_i中得到数覆盖 ℓ_i 的孔。我们将每条曲线 α、 $\widehat{\beta}$ 和 γ略微推离，使原曲线及其推离曲线所形成的三角形具有 ℓ_i的新值。注意，所有推离曲线仍然是自旋的，因为从同调角度看，它们与原曲线的差异仅在于一些自旋边界分支。

引理4.10。 每个三角形都是与具有 $\ell_0 = 0$ 和 $\ell_3 \leq 1$的三角形共轭的路径之和，其中对应于 Σ_g^1 的边界分支的孔位于 F_1中。

证明。 首先，我们证明每个三角形都是与带有$\ell_3 \leq 1$的三角形共轭的路径之和。事实上，如果一个三角形 $\langle\alpha\rangle - \langle\gamma\rangle - \langle\beta\rangle - \langle\alpha\rangle$ 有 $\ell_3 \geq 2$，我们就按照图25a)所示考虑推离 α'、 β' 和 γ'。此时，这些曲线构成8个三角形，它们如图24(b)所示组成一个八面体。这里，除原三角形外，所有三角形在区域 F_3中最多有 $\ell_3 - 1$ 个孔；我们可以迭代这一过程，直到每个三角形在区域 F_3中最多有1个孔。注意， ℓ_0 始终保持不变，因此我们可以交换 F_0 和 F_3 ，并重复这一过程，直到每个三角形在两个区域中都最多有1个孔。



(a) (b)

FIGURE 24. **(a)** T万有覆盖的一个基本区域，其中包含曲线 α、 β 和 γ。**(b)** 曲线 α、 β 和 γ推离后对应的八面体。

我们只需处理 $\ell_0 = \ell_3 = 1$这种情况。按照图25b)所示，考虑推离 α'、 β' 和 γ' 。八面体的所有面（原三角形除外）都具有无孔的 F_0 或 F_3 ；如果其中一个含有两个孔，我们就可以像之前一样进行处理。

只需改变曲线的定向即可完成。注意，如果与 Σ_g^1 的边界分支相对应的孔位于 F_3 （或 F_2）中，我们可以沿整个F_0滑动 γ ，使得在新的构型中，该孔移至 F_2 （F_1），然后重复上述过程；这不会从 F_2 （F_1）中移除任何孔。□

最后，根据注记4.6，每个具有$(i,j)^{\pm}$ 类型边的三角形，模去回溯和不同写法后，都等价于一个具有$(i,j)^{\mp}$类型边的三角形。因此，具有$(i,j)^{-}$ 类型边的三角形所对应的关系已足够。

现在，我们列出所有这类三角形 $\langle\alpha\rangle - \langle\gamma\rangle - \langle\beta\rangle - \langle\alpha\rangle$，其中 v_0从 $\ell_0 = 0$出发并带有$\ell_3 \leq 1$ ，模去 Mod$(\Sigma_g^1)[\phi]$的作用后只需考虑以下情形，并写出相应的关系。模去 $H[\phi]$中的一个适当元素后，我们可以假设 $\alpha = \alpha_j$ 和 $\gamma = b_j^{-2} r_{i,\,j}(\alpha_j)$，其中若 $j = 1$ ，我们令$r_{i,\,j} := 1$。沿着 v_0中的曲线剪开后，我们得到一个带有 $2g$ 个孔的圆盘，并被 γ分成两个连通分支。这些连通分支包含“单个”孔和“成对”孔。模去 $\langle\alpha\rangle - \langle\gamma\rangle$的稳定子作用后， β可以选为一条横跨第 j个把手、沿 α_j 扭转一次的曲线；之后，当 $\ell_3 = 1$时，它还可以环绕一个孔。根据这是“单个”孔还是“成对”孔，以及它所属的连通分支，我们至多得到 5 种可能。这些情形列于图26。

相应的关系如下。请注意，我们采用这样的约定：如果最后一个连续指标小于第一个，则递增的连续指标序列为空；因此，例如，当 $i = 1$时，有 t_1，……，$t_{-i} = 1$。

（*A11*）以下关系成立：

$$(b_1^{-2})^{-1} = b_1 b_1, \qquad b_1^{-2} s_1 \overline{d}_{1,2}^{-1} a_1^2 b_1 s_1^{-1} \overline{d}_{1,2}^{-2} a_1^{-2} b_1 = \overline{d}_{1,2}^{-1} a_2^2.$$

Now, assume that $j \geq 2$. *If* $i = 1$, *we have*

$$b_j^{-2} \overline{r}_{1,j} \cdot \big((t_{j-1} \dots t_1\, \zeta^{-1}) * (a_1^2 b_1\, s_1^{-1} \varphi_2^{-1} \zeta^{-1} s_1\, b_1\, s_1^{-1} a_1^{-2})\big) = 1,$$

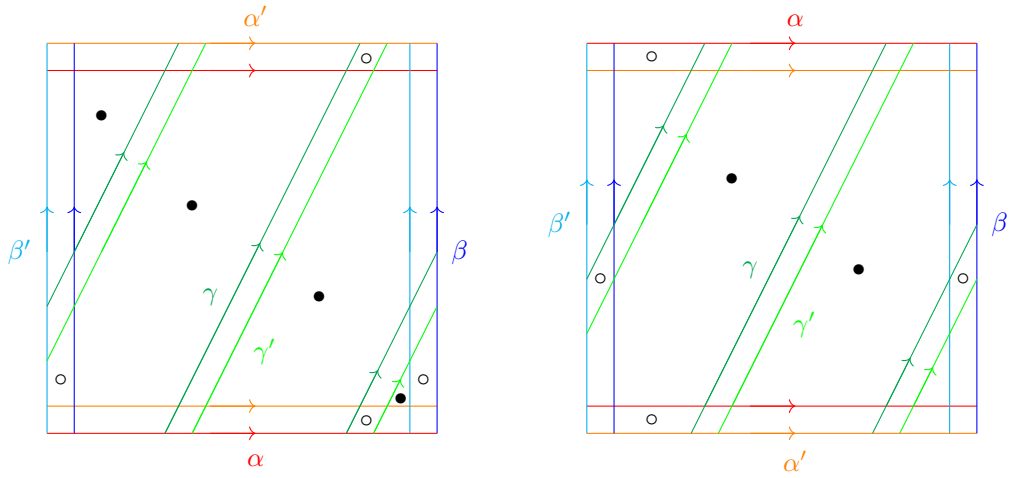


FIGURE 25. 引理 4.10 证明中曲线 α、 β 和 γ 的推离构型。圆圈表示单孔，而点表示某一区域内其余的所有孔。

而当 $i < 1$

$$b_j^{-2}\overline{r}_{i,j} \cdot \big((t_{j-1}\dots t_1\,\zeta^{-1}) * (a_1^2 b_1\, s_1^{-1}\varphi_2^{-1}\varphi_1^{-1} s_1\, b_1\, s_1^{-1} a_1^{-2})\big) = 1,$$

其中 ζ、 φ_1 和 φ_2 是以下映射类的简写，它们对应 d 于沿图26中曲线进行的 *Dehn* 扭转，其次数取决于 a_i^2:

a) $\zeta := \overline{d}_{\{1,\dots,j\}}$, $\varphi_1 := \overline{d}_{\{i,\dots,\widehat{-1},\dots,j\}}$, $\varphi_2 := 1$;

b) $\zeta := (t_{j-1}\dots t_1) * \overline{d}_{\{-1,\dots,j\}}$,
$\varphi_1 := a_j^2 \cdot \big((t_{j-1}\dots t_1) * \overline{d}_{\{i,\dots,\widehat{-2},\dots,j\}}\big)$, $\varphi_2 := s_j * \overline{d}_{1,j}$;

c) $\zeta := \overline{d}_{\{1,\dots,j+1\}}$, $\varphi_1 := \overline{d}_{\{i,\dots,\widehat{-1},\dots,j+1\}}\, a_{j+1}^2$, $\varphi_2 := \overline{d}_{1,j+1}$;

d) $\zeta := \overline{d}_{\{1,\dots,j-1\}}$, $\varphi_1 := \overline{d}_{\{i,\dots,\widehat{-1},\dots,j-1\}}$,
$\varphi_2 := (t_{j-1}^{-1}\dots t_2^{-1} s_1) * \overline{d}_{1,2}$;

e) $\zeta := (t_{-i+1}^{-1}\dots t_{j-1}^{-1}) * \overline{d}_{\{1,\dots,j-1\}}$,
$\varphi_1 := a_{-i+1}^2 \cdot \big((t_{-i+1}^{-1}\dots t_{j-1}^{-1}) * \overline{d}_{\{i,\dots,\widehat{-1},\dots,j-1\}}\big)$,
$\varphi_2 := (t_{-i+1}^{-1}\dots t_{j-1}^{-1}\, t_{j-1}^{-1}\dots t_2^{-1} s_1) * \overline{d}_{1,2}$.

正方形。 根据自旋坐标变换原理，自旋映射类群在以 v_0为顶点的正方形集合上传递作用，因此只需考虑与图

$$\begin{array}{ccc} \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle & \text{——} & \langle \alpha_1, \beta_2 \rangle \\ | & & | \\ \langle \beta_1, \alpha_2 \rangle & \text{——} & \langle \beta_1, \beta_2 \rangle\,, \end{array}$$

27(a)中的记号相对应的关系。

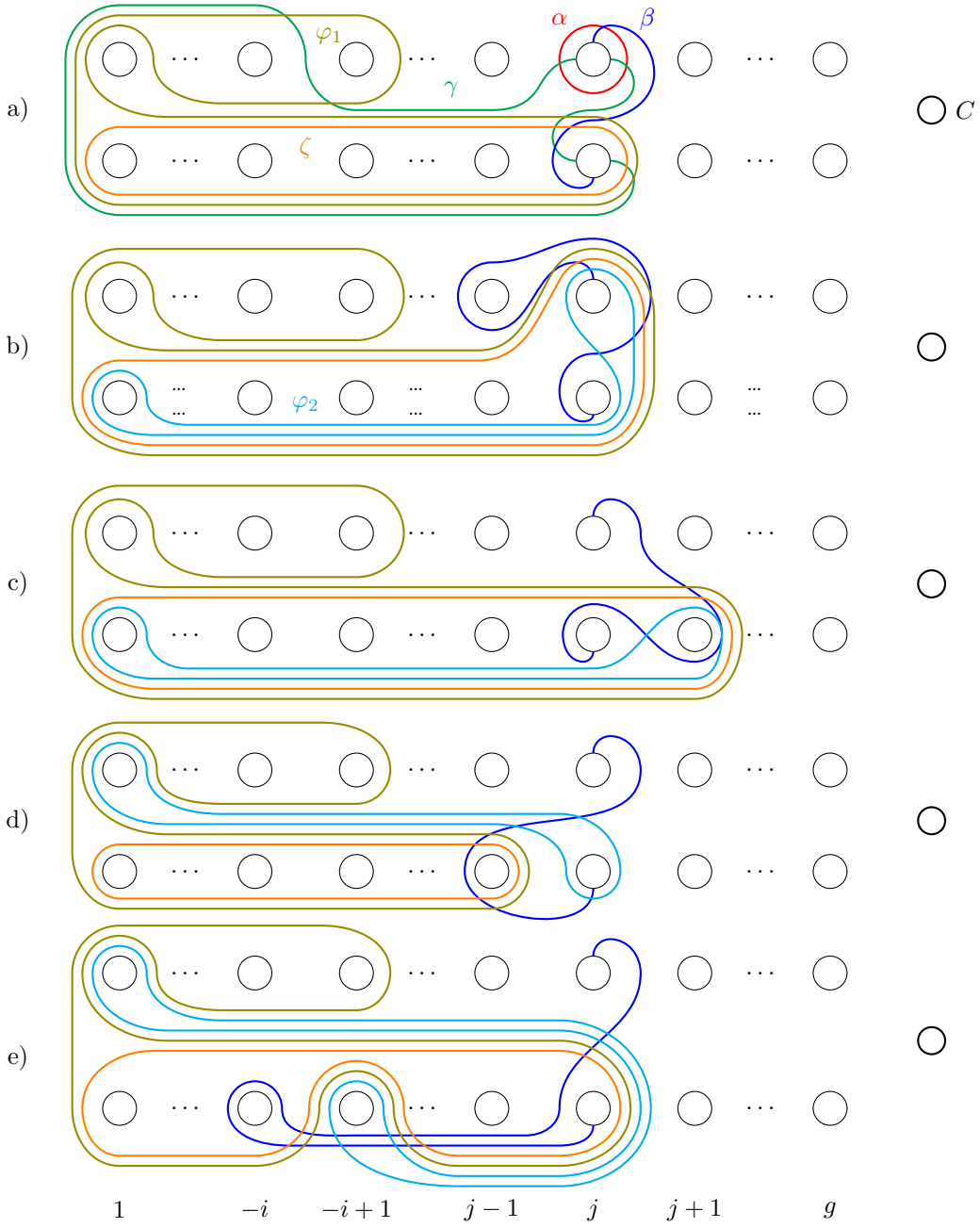


FIGURE 26. 个三角形，从 v_0 开始，带有类型为（i，j）的边⁻。

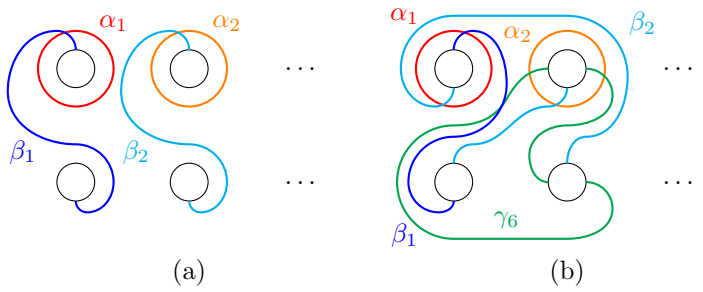


FIGURE 27. (a) 对应关系（A12）的正方形中的曲线。(b) 对应关系（A13）的五边形中的曲线。

我们得到以下关系：

(A12) $(a_1^2 b_1 t_1 \overline{d}_{1,2}^{-1} a_1^2 b_1 t_1 \overline{d}_{-2,-1}^{-1})^2 = a_1^2 s_1 a_2^2 s_2.$

五边形。 在这种情况下，一个关系也足够了。我们的模型五边形将采用图(A12)(b)所示的形式，即

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \overset{(ii)}{-} \langle \alpha_1, \gamma_6 \rangle - \langle \beta_2, \gamma_6 \rangle - \langle \beta_2, \beta_1 \rangle - \langle \alpha_2, \beta_1 \rangle - \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle .$$

引理4.11。 所有五边形在 X_g中都是同伦的。

证明。 考虑 X_g中的另一个五边形。由于它的五条曲线中有四条在 Σ_g^1上构成一个4-链，根据自旋坐标变换，在Mod(Σ_g^1)[ϕ] 的作用下，不妨设其形式为

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \overset{(ii)}{-} \langle \alpha_1, \gamma \rangle - \langle \beta_2, \gamma \rangle - \langle \beta_2, \beta_1 \rangle - \langle \alpha_2, \beta_1 \rangle - \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle ,$$

对于某条曲线 γ。令 γ_5 为沿着 α_2的一条弧对 β_1 和 β_2 取弧和所得的曲线。那么 γ_5 是一条非分离1-曲线，并且我们有 [31，的同伦。图 17]。□

我们得到以下关系：

(A13) $b_2^{-2} \overline{r}_{1,2} \overline{d}_{-2,-1} \overline{d}_{1,2}^{-1} b_1 t_1 a_1^2 b_1 \overline{d}_{-2,-1}^{-3} t_1 b_1 t_1 b_1 s_2 = \overline{d}_{\{-2,-1,1,2\}}.$

双曲椭圆面。 回想一下，根据注记 3.23，一个双曲椭圆面由一条可容许曲线组成的7-链唯一确定。此外，从命题 3.20 的证明和注记 3.25 可知，我们只需要考虑那些将曲面分成两个连通分支的7-链所对应的双曲椭圆面，其中一个连通分支的亏格为0且不与 $\partial\Sigma_g^1$ 相交。根据自旋坐标变换原理，我们只需要一个关系。

我们不必写出冗长的 h-乘积，而可以直接将该关系表述为如下可容许扭转的乘积。固定一条具有上述性质的可容许曲线7-链 γ_1，……， $\gamma_7 \subset \Sigma_g^1$，并令 δ 为$\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_7$的管状邻域的非平凡边界分支。那么，(3)可改述为：

(A14) $(t_{\gamma_1} \dots t_{\gamma_6} t_{\gamma_7}^2 t_{\gamma_6} \dots t_{\gamma_1})^2 = t_\delta.$

4.7. **自旋把手体群的有限表示**。本节最后给出自旋把手体映射类群 Mod(H_g)[ϕ] 的有限表示，其中 H_g 是图20中曲线 α_1，……，α_g 围成圆盘的把手体。我们将使用Nielsen-Schreier方法完成这一点；虽然下文不需要它，但这与 [3]有关。

定理4.12. 自旋把手体映射类群$\mathrm{Mod}(H_g)[\phi]$的表示由生成元 $a_1^2, \dots, a_g^2, s, t_1, \dots, t_{g-1}, d_{i,j}$（对所有满足 $i<j$ 和 $r_{i,j}$ 的 $i,j \in \{\pm 1,\dots,\pm g\}$），以及 d_i（对所有满足 $i=1<j$ 或 $i\le -1$ 和 $-i+1\le j\le g+i$ 的 $i,j\in\{\pm1,\dots,\pm g\}$）构成，并满足以下关系：

(H1) 命题 4.2 的关系 *(A1)-(A8)*；*(H2)* $d_{\{\pm1,\dots,\pm g\}}(a_1\dots a_g)^2=1$; *(H3)* 对所有 $k\in\{\pm1,\dots,\pm g\}$，$d_{\{\pm1,\dots,\pm g\}\setminus\{k\}}(a_1\dots\widehat{a_{|k|}}\dots a_g)^2=1$；

(H4) $\overline{r}_{1,j}^2=(a_1\dots a_{j-1})^{-2}s_jd_{\{1,\dots,j\}}s_jd_{\{1,\dots,j\}}^{-1}$，且若 $i\le -1$，则

$$\overline{r}_{i,j}^2=\left(a_1^2\dots a_{-i}^2a_{-i+1}\dots a_{j-1}\right)^{-2}s_j\overline{d}_{\{i,\dots,j\}}s_j\overline{d}_{\{i,\dots,j\}}^{-1};$$

（*H5*）涉及生成元 $r_{i,j}$ 的共轭元：

(*a*) $[r_{i,j},a_k^2]=1$ 如果 $k\neq j$ 和

$$\overline{r}_{i,j}*a_j^2=c_{i,j}^2=\begin{cases}\overline{d}_{\{1,\dots,j\}}^2(a_1^2\dots a_j^2) & \text{if } i=1,\\ \overline{d}_{\{i,\dots,j\}}^2(a_1^4\dots a_{-i}^4a_{-i+1}^2\dots a_j^2) & \text{if } i\le -1;\end{cases}$$

(*b*) $[\overline{r}_{i,j},t_k]=1$ *if* $k\neq j,j-1$ *and* $k\neq -i$;
(*c*) $[\overline{r}_{i,j},s_k]=1$ *if* $k\le -i$ *or* $k>j$;
(*d*) $[\overline{r}_{i,j},\overline{d}_{k,m}]=1$ *if* $k,m\in\{i,\dots,j-1\}$ *or* $k,m\notin\{-j,i,i+1,\dots,j\}$;
(*e*) $[\overline{r}_{1,g},z_g]=1$, *and* $z_j*\overline{r}_{i,j}=a_1^2\dots a_{-i}^2\overline{r}_{i,j}a_{j+1}^{-2}\dots a_g^{-2}$ *if* $i\le -1$ *and* $j-i=g$;
(*f*) $\overline{r}_{i,j}*\overline{d}_{i,j}=a_i^{-2}\overline{d}_{\{i,\dots,j\}}^{-1}\overline{d}_{\{i,\dots,j\}\setminus\{i\}}$;
(*g*) $\overline{r}_{1,j}*\overline{d}_{-j,-j+1}=\overline{d}_{\{1,\dots,j\}}^{-1}(t_{j-2}t_{j-3}\dots t_1)*\overline{d}_{\{-1,\dots,j\}}$;
(*h*) $\overline{r}_{i,j}*\overline{d}_{-j,-j+1}=\overline{d}_{\{i,\dots,j\}}^{-1}(t_{j-2}t_{j-3}\dots t_{-i+1})*\overline{d}_{\{i-1,\dots,j\}}$ *if* $i\le -1$ *and* $j+i>1$;
(*i*) $\overline{r}_{i,j}^{-1}*\overline{d}_{-j-1,-j}=\overline{d}_{\{i,\dots,j\}}\left(s_{j+1}^{-1}*\overline{d}_{\{i,\dots,j+1\}}\right)$;

（*H6*）$r_{i,j}*t_{j-1}=\left(t_{j-1}^{-1}*r_{i,j}\right)d_{\{i,\dots,j\}}^{-1}$ 如果 $i>-j+1$，以及

$$\overline{r}_{-j+1,j}*t_{j-1}=\left(t_{j-1}^{-1}*\overline{r}_{-j+1,j}\right)(a_1^2\dots a_{j-1}^2)\overline{d}_{\{-j+1,\dots,j\}}^{-2};$$

（*H7*）三角关系：

$$\begin{aligned}\overline{r}_{1,j}=s_j\overline{d}_{\{1,\dots,j\}}s_j\overline{d}_{\{1,\dots,j\}}^{-1}k_{j-1}\overline{d}_{\{1,\dots,j-2\}}t_{j-1}\overline{d}_{\{1,\dots,j-1\}}^{-1}t_{j-1}^{-1}\cdot\\ \cdot\overline{r}_{1,j-1}^{-1}s_{j-1}(a_1\dots a_{j-2})^{-2}Aa_1^{-2}\overline{r}_{1,2}^{-1}A^{-1}k_{j-1}^{-1}\quad \text{for } j\ge 3,\\ \overline{r}_{-1,j}=Ba_1^{-2}\overline{r}_{1,2}^{-1}B^{-1}s_j\overline{r}_{1,j}^{-1}(a_1a_2\dots a_{j-1})^{-2}\overline{d}_{\{-1,\dots,j-1\}}^{-1}\cdot\\ \cdot\overline{d}_{\{1,\dots,j-1\}}s_j\overline{d}_{\{-1,\dots,j\}}s_j\overline{d}_{\{-1,\dots,j\}}^{-1},\\ \overline{r}_{i,j}=Ca_1^{-1}\overline{r}_{1,2}^{-1}C^{-1}s_j(a_1^2\dots a_{-i-1}^2a_{-i}\dots a_{j-1})^{-2}\overline{r}_{i+1,j}^{-1}\overline{d}_{\{i,\dots,j-1\}}^{-1}\cdot\\ \cdot\overline{d}_{\{i+1,\dots,j-1\}}s_j\overline{d}_{\{i,\dots,j\}}s_j\overline{d}_{\{i,\dots,j\}}^{-1}\quad \text{for } i\le -2,\end{aligned}$$

其中

$$A = k_{j-1}^{-1} t_{j-2}^{-1} t_{j-3}^{-1} \dots t_1^{-1} k_{j-1} k_{j-2} \dots k_2,$$
$$B = s_1 k_{j-1} k_{j-2} \dots k_2,$$
$$C = s_{-i} t_{-i-1}^{-1} t_{-i-2}^{-1} \dots t_1^{-1} k_{j-1} k_{j-2} \dots k_2.$$

证明。我们将对 Wajnryb 关于 Mod(H_g) [32,定理 18]的表示应用尼尔森-施赖尔方法。首先，通过考察他的证明，不难看出，一个等价的表示由 Mod(Σ_g^1) 中 $v_0 = \langle \alpha_1, \dots\dots, \alpha_g \rangle$ 的稳定子群的 [31, 命题 27] 所给出的表示，以及生成元 $r_{i,\ j} := b_j a_j c_{i,\ j} b_j$ 和 [32, 定理 18]中的关系 (P3)、(P4)、(P9)、(P10)、(P11) 和 (P12) 构成。事实上，由于 v_0 是 H_g的经线切割系统，其在 Mod(H_g) 和 Mod(Σ_g) 作用下的稳定子群相同，而 [32,定理 18] 中的关系 (P3)、(P4) 来源于用圆盘封闭 Σ_g^1 的边界分支。[32, 定理 18] 中的关系 (P8) 显然由 [31, 命题 27], 中的关系 (P8) 推出，而后者在 Mod(H_g) 中仍然成立。[32, 定理 18]中的最后四个关系，则是通过研究 Mod(H_g) 对经线切割系统复形的作用得到的。

现在，我们完全按照命题 4.2 的证明进行。我们引入新的生成元$d_{i,j}$ 和$r_{i,j}$，以及新的关系 (6) 和 (9)。由 [31, 命题 27]导出的关系，按照命题 4.2 的证明中的方式变化，而其他关系的变化如下。

(P3) 由 (10) 可得 $d_{\{\pm 1,\dots,\pm g\}}(a_1 \dots a_g)^2 = 1$。*(P4)*类似地，我们得到 $d_{\{\pm 1,\dots,\pm g\}\setminus\{k\}}(a_1 \dots \widehat{a_{|k|}} \dots a_g)^2 = 1$。*(P9)* 由 (9) 可得

$$\overline{r}_{i,j}^2 = \begin{cases} (a_1 \dots a_{j-1})^{-2} s_j \overline{d}_{\{1,\dots,j\}} s_j \overline{d}_{\{1,\dots,j\}}^{-1} & \text{if } i = 1, \\ \left(a_1^2 \dots a_{-i}^2 a_{-i+1} \dots a_{j-1}\right)^{-2} s_j \overline{d}_{\{i,\dots,j\}} s_j \overline{d}_{\{i,\dots,j\}}^{-1} & \text{if } i \le -1. \end{cases}$$

(P10) 我们知道，a_i 彼此交换，且与$d_{i,j}$ 和 s交换，并且$t_i * a_i = \overline{t_{i+1}} * a_i = a_{i+1}$。因此，我们看到 a_i 与所有s_j 以及$c_{i,j}$交换，并且

$$z * a_i = a_{g+1-i}, \qquad z_j * a_i = \begin{cases} a_{g+1-i} & \text{if } i > j \text{ or } j + i < g + 1, \\ a_{g-i} & \text{if } g + 1 - j \le i < j, \\ a_i & \text{if } i = j. \end{cases}$$

我们得到陈述中的关系，但以下情况除外：

(a) $\overline{r_{i,\ j}} * a_j = c_{i,\ j}$ 以及 $[\overline{r_{i,j}}, a_k] = 1$，如果 $k \neq j$。

(P11) 由 (9)，可得所述结论

(P12) 同样，只需代入 (9) 即可得到所述结论。

Schreier横截系仍由 (8) 给出。事实上，注意到由 (P9) 和 (P10)(a)，我们有

$$\overline{r}_{i,j} * c_{i,j} = \overline{r}_{i,j}^2 * a_j = a_j. \tag{12}$$

因此，在由生成元组成的每个词中，我们都可以将所有的 a_i 移到右侧，并采用与之前相同的推理。此外，Schreier生成元归结为陈述中的那些生成元。为了说明这一点，对于 $r_{i,\ j}$，注意到

$$\overline{u_J \overline{r}_{1,j}^{\pm 1}} = \begin{cases} u_{J\setminus\{j\}} & \text{if } j \in J, \\ u_{J\triangle\{1,\dots,j\}} & \text{if } j \notin J, \end{cases}$$

其中，我们用 Δ 表示对称差，并且

$$\overline{u_J \overline{r}_{i,j}^{\pm 1}} = \begin{cases} u_{J\setminus\{j\}} & \text{if } j \in J, \\ u_{J\Delta\{-i+1,\dots,j\}} & \text{if } j \notin J \end{cases}$$

若 $i \leq -1$。

最后，来自 v_0 的稳定子的关系按命题 4.2 中的方式改变，而唯一其他发生改变的关系是 (P10)(a)，它变为 $[r_{i,j}, a_k^2] = 1$ 若 $k \neq j$ 且

$$\overline{r}_{i,j} * a_j^2 = c_{i,j}^2 = \begin{cases} \overline{d}^2_{\{1,\dots,j\}}(a_1^2 \dots a_j^2) & \text{if } i = 1, \\ \overline{d}^2_{\{i,\dots,j\}}(a_1^4 \dots a_{-i}^4 a_{-i+1}^2 \dots a_j^2) & \text{if } i \leq -1. \end{cases}$$

□

推论 4.13. 自旋把手体群 $\mathrm{Mod}(H_g)[\phi]$ 在 $g = 1$ 时同构于 $\mathbb{Z}\left\langle a_1^2 \right\rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\left\langle s a_1^2 \right\rangle$，并由元素 a_1^2、s、$r_{1,2}$、t_1 和 $u := t_1 \cdots t_{g-1}$ 生成；若 $g \geq 2$。

证明. $g = 1$ 的表达式显然。若 $g > 2$，由 $a_1^2, s, r_{1,2}, t_1$ 和 u 生成的 $\mathrm{Mod}(H_g)[\phi]$ 的子群包含所有 t_i，因为根据 (A3)，$u * t_i = t_{i+1}$，因此也包含所有 a_i^2 和 $d_{i,j}$，根据 (A4)、(A7)、(A8) 和 (H6) 可知。由于所有 k_j 和 s_j 都等于生成元 $d_{i,j}$、t_k 和 s 的乘积，(H7) 蕴含所有 $r_{i,j}$ 都是陈述中元素的乘积。□

推论 4.14. 自旋把手体群的阿贝尔化如下：

$$H_1(\mathrm{Mod}(H_g)[\phi]; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{if } g = 1, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{if } g = 2, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{if } g \geq 3. \end{cases}$$

证明. 在阿贝尔化中，根据 (A7)，所有的 a_i^2 都等于一个元素 y；根据 (A8)，所有带有 $i + j \neq 0$ 的 $\overline{d}_{i,j}$ 都等于一个元素 x；根据 (A3)，所有的 t_i 都等于一个元素 t。此外，根据 (A8)，所有的 $d_{-i,i}$ 都相等；再由 (A4) 得到 $d_{-1,1} = s^2 y$。

由 (H5)a) 和 (A4)，我们有 $y = x^{-2}$ 和 $t^2 = x^2$。此外，由 (H6)，所有的 $r_{i,j}$ 都变为 t 和 $\overline{x}$ 的乘积。现在，由 (H4) 和 (H6) 得到 $(tx)^2 = r_{1,2}^2 = x^2 s^2$，因此 $s^2 = x^2$。这表明阿贝尔化由 t、x 和 s 生成。

若 $g = 2$，其余关系便是多余的。

若 $g \geq 3$，则由 (H7)（对于 $r_{1,\,3}$）和 (H6) 可推出 $t = x^3 s$。此外，由 (H5)f)（对于 $i = 1$ 和 $j = 3$）可得 $x = 1$，这意味着 $s^2 = 1$。□

5. Passing to Dehn twist generators

本节中，我们对定理 4.1 的表示应用 Tietze 变换，以找到一个所有生成元都是可容许扭转的表示。

5.1. 伪 3 链。根据 Gervais 的一个定理 [8]，，映射类群中的每个关系都可以用辫子、三链和灯笼来表示。显然，单个三链不可能只包含可容许扭转。不过，可以通过一些灯笼替换来解决这个问题。我们将所得结果称为伪3链。

命题 5.1。 设 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 是自旋曲面 Σ_g，$g \geq 3$上的一个3链。若 $\phi(\gamma_i) = 1$ 对某个 i成立，则可以通过恰好6 次灯笼替换（以及若干次辫子替换），从3链关系 $C(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$构造出一个可容许关系。

证明。 首先，我们将问题归结为两个基本情形。我们将经常不加说明地使用辫子替换。若 $\phi(\gamma_1) = 1$ 或 $\phi(\gamma_3) = 1$，则根据对称性，可以假设 $\phi(\gamma_1) = 1$。若 $\phi(\gamma_2) = 1$，则有

$$t_{\gamma_1} t_{\gamma_2} t_{\gamma_3} = t_{\gamma_2} t_{\gamma_2}^{-1} t_{\gamma_1} t_{\gamma_2} t_{\gamma_3} = t_{\gamma_2} t_{t_{\gamma_2}^{-1}(\gamma_1)} t_{\gamma_3},$$

因此， $C(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ 模去辫子后等价于 $C(t_{\gamma_2}^{-1}(\gamma_1)\ \gamma_2,\ \gamma_3)$。所以，在这种情况下，我们也可以假设 $\phi(\gamma_1) = 1$。这使我们能够通过沿着γ_1扭转，自由选择 $\phi(\gamma_2)$ 的值。

如果 $\phi(\gamma_3) = 0$，那么三链邻域的两个边界分支 $\delta_1,\ \delta_2$ 都是可容许的。假设 $\phi(\gamma_2) = 0$。注意，我们可以将三链关系改写为

$$t_{\gamma_1}^2\, t_{\gamma_2} t_{\gamma_1}^2 t_{\gamma_1}\, t_{\gamma_3} t_{\gamma_2} t_{\gamma_1}^2 t_{\gamma_2} t_{\gamma_3} = t_{\delta_1} t_{\delta_2}.$$

根据 (2)，我们可以对每个 $t_{\gamma_1}^2$ 使用两次灯笼替换，从而得到一个可容许关系。

如果 $\phi(\gamma_3) = 1$，假设 $\phi(\gamma_2) = 1$。我们可以将三链关系改写为

$$(t_{\gamma_2} t_{\gamma_3} t_{\gamma_1} t_{\gamma_2})^2 = t_{\delta_1} t_{\gamma_1}^{-1} t_{\gamma_3}^{-1}\, t_{\delta_2} t_{\gamma_1}^{-1} t_{\gamma_3}^{-1}.$$

注意，右侧有两个基本多重扭曲，根据 (1)，每个都可以通过一次灯笼替换变为可容许。对于左侧，注意到

$$t_{\gamma_2} t_{\gamma_3} t_{\gamma_1} t_{\gamma_2} = t_{t_{\gamma_1}(\gamma_2)} t_{\gamma_1}^2 t_{t_{\gamma_3}(\gamma_2)}. \tag{13}$$

再次使用 (2)，即可得出结论。

注意，在这两种情况下，所有灯笼的符号都相同。 □

我们详细推导一个例子。

例 5.2。 考虑图28中的三链 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 。我们有以下灯笼关系词:

$$\begin{aligned} L_1 &:= t_{y_1} t_{z_1} t_{\delta_1} t_{\gamma_1}^{-1} t_{\gamma_3}^{-1} t_{\varepsilon_1}^{-1} t_{\varepsilon_2}^{-1}, \\ L_2 &:= t_{y_2} t_{z_2} t_{\delta_2} t_{\gamma_1}^{-1} t_{\gamma_3}^{-1} t_{\varepsilon_1}^{-1} t_{\varepsilon_3}^{-1}, \\ L_3 &:= t_{y_3} t_{z_3} t_{\gamma_3} t_{\gamma_1}^{-1} t_{\delta_2}^{-1} t_{y_1}^{-1} t_{\varepsilon_1}^{-1}. \end{aligned}$$

这里， z_1, z_2 和 z_3 可以由其他曲线确定，并且很容易看出它们是可容许的。将 L_2 和 L_3的逆元相乘，得到关系词

$$A := t_{\varepsilon_3} t_{\varepsilon_1} t_{z_2}^{-1} t_{y_2}^{-1} t_{\gamma_1}^2 t_{z_3}^{-1} t_{y_3}^{-1} t_{\varepsilon_1} t_{y_2}.$$

由于 L_1、 L_2 和 A 分别将 $t_{\delta_1} t_{\gamma_1}^{-1} t_{\gamma_3}^{-1}$、 $t_{\delta_2} t_{\gamma_1}^{-1} t_{\gamma_3}^{-1}$和 $t_{\gamma_1}^2$ 包含为子词，且出现的其他所有扭转都可容许，因此我们可以将 L_1、 L_2 和 A^{-1} 的一些共轭元代入$C := C(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$，使所有不可容许的扭转都相互抵消，从而得到伪三链关系词

$$F := t_{\varepsilon_1}^{-1} t_{\varepsilon_2}^{-1} t_{y_1} t_{z_1} \left(t_{t_{\gamma_1}(\gamma_2)} t_{y_2} t_{z_2} t_{\varepsilon_1}^{-1} t_{\varepsilon_3}^{-1} t_{y_2}^{-1} t_{\varepsilon_1}^{-1} t_{y_3} t_{z_3} t_{t_{\gamma_3}(\gamma_2)}\right)^2 t_{\varepsilon_1}^{-1} t_{\varepsilon_3}^{-1} t_{y_2} t_{z_2}.$$

5.2. 新生成元中的初始关系。将 $b_1, \dots, b_g$, $\xi_1, \dots, \xi_{g-1}$, $\eta_2, \dots, \eta_g$记为沿图29中相应曲线的 Dehn 扭转。这将是我们的新生成集。令 ϕ 为 Σ_g^1 上唯一的自旋结构，使得图29中的所有曲线（而不仅仅是蓝色曲线）都是可容许的。

注记 5.3。 Hamenst¨adt 为 Mod(Σ_g)[ϕ] [9] 构造的扭转生成系统不同于我们针对 $g \geq 5$的系统，且基数更小。实际上，我们的生成集并非 [9, 定义 1.2], 意义下的“可容许曲线系”，因为其交图不是一棵树。

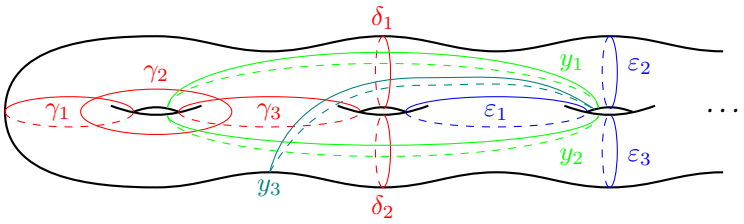


FIGURE 28. 伪三链关系中涉及的曲线。这里，蓝色和绿色曲线是可容许的，红色曲线则不可容许。

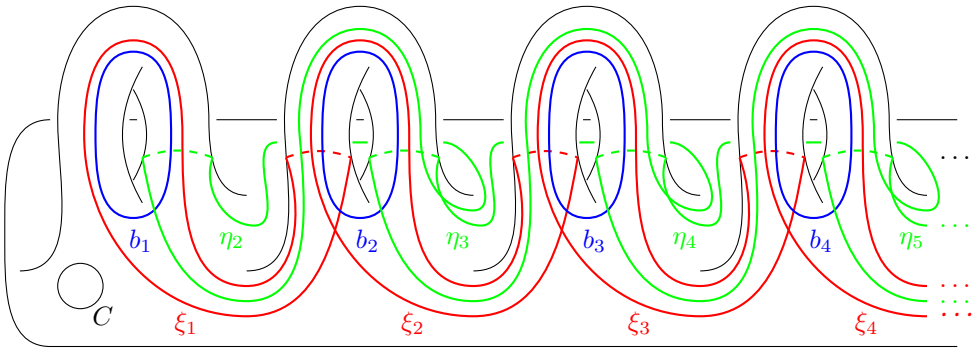


FIGURE 29. 生成元 b_1、…、b_g, ξ_1、…、ξ_{g-1} 和 η_2、…、η_g。图中所有彩色曲线都是可容许的。

首先，我们利用图1中子曲面到 Σ_g^1的显式嵌入，将生成元$d_{1,\,2}$ 和 a_1^2 表示为可容许扭转的乘积。

引理5.4. 考虑 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^1)[\phi]$ 中的以下元素（见图*30*）：

$$H_3 := \xi_2\xi_1 b_2\eta_3\eta_2 b_1^2\eta_2\eta_3 b_2\xi_1\xi_2, \quad m_1 := H_3 * b_3,$$
$$m_2 := (\eta_2\eta_3) * b_2, \quad m_3 := (b_1\eta_2\eta_3 b_2) * \xi_1, \quad m_4 := (\xi_1 b_2\eta_3\eta_2) * b_1.$$

下列关系在$\mathrm{Mod}(\Sigma_g^1)[\phi]$中成立：

(i) $d_{1,\,2} = m_1 m_2\big((\eta_4 m_1 m_2\eta_4) * m_3^{-1}\big)m_3^{-1}$; *(ii)* $d_1^{-1}{}_2 a_1^{-2} = \eta_3 b_3\big((\eta_4\eta_3 b_3\eta_4) * m_4^{-1}\big)m_4^{-1}$; *(iii)* $a_1^2 = m_4\big((\eta_4\eta_3 b_3\eta_4) * m_4\big)\eta_3^{-1}b_3^{-1}m_3\big((\eta_4 m_1 m_2\eta_4) * m_3\big)m_1^{-1}m_2^{-1}$。

证明。 关系 (iii) 由 (i) 和 (ii) 立即推出；它们是图30所示的灯笼关系，并且根据定理 4.1，在 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^1)[\phi]$ 中成立。□

现在我们可以陈述这个表示了。我们用符号 $R_i(x,\ y)$ 表示元素 x 和 y 满足长度为 i的Artin关系，即长度为 i 的词 $xyxy\ldots$ 和$yxyx\ldots$相等。我们只会遇到长度为 2、3 或 4 的关系。此外，为了简化表述，我们将使用上文已经出现过的各种简写。

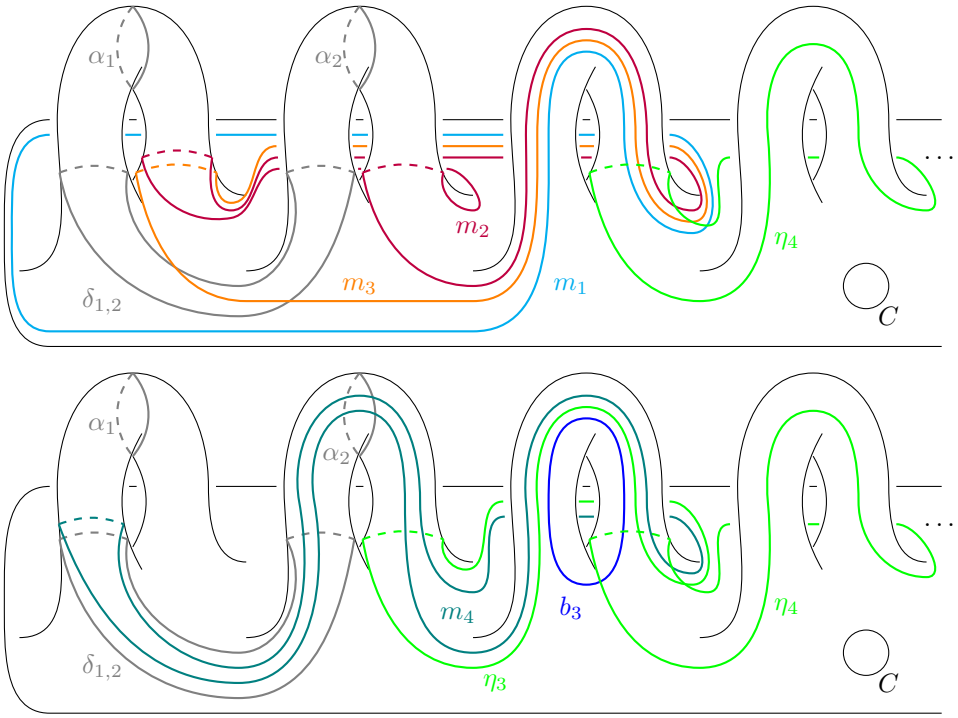


FIGURE 30. 引理 5。4 中的灯笼。这里，灰色曲线的自旋值为 1，其他曲线均为可容许曲线。

注 5.5。 从现在起，符号 $d_{1,\,2}$ 和 a_1^2 将始终作为引理 5.4*(i)* 和 *(iii)*中乘积的简写。我们还将使用以下简写：

- $s_1 := b_1 a_1^2 b_1$ and $t_1 := (b_1^{-1}\eta_2 b_1)a_1^2(b_2^{-1}\xi_1 b_2)$;
- $a_{i+1}^2 := t_i a_i^2 t_i^{-1}$, $s_{i+1} = b_i a_{i+1}^2 b_i$ and

$$t_{i+1} := (b_{i+1}^{-1}\eta_{i+2}b_{i+1})a_{i+1}^2(b_{i+2}^{-1}\xi_{i+1}b_{i+2}) \tag{14}$$

  对所有 $i \geq 1$;
- $\overline{d}_{-1,\,1} := s_1^2 a_1^2$, 以及

$$\overline{d}_{i,j} := \begin{cases} \left(t_{i-1}t_{i-2}\dots t_1 t_{j-1}t_{j-2}\dots t_2\right) * \overline{d}_{1,2} & \text{if } i > 0, \\ \left(t_{-i-1}^{-1}\dots t_1^{-1}s_1^{-1}t_{j-1}\dots t_2\right) * \overline{d}_{1,2} & \text{if } 0 < -i < j, \\ \left(t_{-i-1}^{-1}\dots t_1^{-1}s_1^{-1}t_{j}\dots t_2\right) * \overline{d}_{1,2} & \text{if } 0 < j < -i, \\ \left(t_{-j-1}^{-1}\dots t_1^{-1}t_{-i-1}^{-1}\dots t_2^{-1}s_1^{-1}t_1^{-1}s_1^{-1}\right) * \overline{d}_{1,2} & \text{if } j < 0, \\ \left(t_{j-1}^{-1}\overline{d}_{j-1,j}t_{j-2}^{-1}\overline{d}_{j-2,j-1}\dots t_1^{-1}\overline{d}_{1,2}\right) * \overline{d}_{-1,1} & \text{if } i+j = 0; \end{cases} \tag{15}$$

- $\overline{d}_{\{\,i_1,\dots,i_n\,\}} := (\overline{d}_{i_1,i_2}\overline{d}_{i_1,i_3}\dots\overline{d}_{i_1,i_n}\overline{d}_{i_2,i_3}\dots\overline{d}_{i_2,i_n}\dots\overline{d}_{i_{n-1},i_n})$;
- $\overline{r}_{i,j} := b_j a_j^2 \overline{d}_{\{\,i,\dots,j\,\}} b_j$.

定理 5.6。 若 $g \geq 4$，自旋映射类群 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^1)[\phi]$ 具有如下表示，其生成元为 b_1、……、b_g、ξ_1、……、ξ_{g-1}、η_2、……、η_g，并满足以下关系：

（*S1*）若相应的曲线不相交或相交一次，则两个生成元满足 R_2 或 R_3 ；（*S2*）5-链 $(b_1\eta_2\eta_3b_2\xi_1)^6 = b_3m_1$；（*S3*）双曲关系

$$(b_3\xi_2\xi_1b_2\eta_3\eta_2b_1^2\eta_2\eta_3b_2\xi_1\xi_2b_3)^2 = (b_1\eta_2\eta_3b_2\xi_1\xi_2)^{14};$$

(S4) 伪3链关系 $t_1^2 = d_{1,2}d_{-2,-1}$，

$$a_1^2(b_1a_1^2b_1)(\eta_2b_1a_1^2b_1\eta_2) = b_2H_2b_2H_2^{-1},$$

其中 $H_2 := \eta_3\eta_2b_1a_1^2b_1\eta_2\eta_3$，且

$$\begin{aligned}\overline{r}_{i,j}^2 = a_1^{-4}\dots a_{-i}^{-4}a_{-i+1}^{-2}\dots a_j^{-2}\overline{d}_{\{i,\dots,j\}}^{-2}\cdot\\ \cdot\overline{d}_{\{i,\dots,j-1\}}\big((t_{j-1}\dots t_{-i+1})*\overline{d}_{\{i-1,\dots,j\}}\big)\end{aligned} \tag{16}$$

对所有满足 $i = 1$ 或 $i < 0$、$j + i > 0$ 且 $j - i < g$ 的 i, j；

(S5) $R_3(m_1, \eta_4)$，$[\eta_4, (b_3\xi_2) * m_4] = 1$ 和 $[(\eta_3^{-1}\eta_4^{-1}) * m_4, b_1^{-1} * \eta_2] = 1$；*(S6)* $(\eta_4m_1m_2\eta_4) * m_3$ 与 b_3，η_3 和 η_5 交换，而 $(\eta_4\eta_3b_3\eta_4) * m_4$ 与 m_1，m_2 和 η_5 交换；*(S7)* $[m_3 \cdot (\eta_4m_1m_2\eta_4) * m_3, m_4 \cdot ((\eta_4\eta_3b_3\eta_4) * m_4)] = 1$；*(S8)* $d_{i,i+1} * b_i = (a_i^{-2}s_i^{-1}) * \xi_i$ 和 $(d_{1,2}b_1^{-1}) * \eta_2 = (a_2^{-2}b_2^{-1}) * \xi_1$；*(S9)* $[a_i^2, (\xi_ib_i^{-1}\overline{b}_{i+1}\eta_{i+2}) * \eta_{i+1}] = 1$ 和 $[d_{i-1,i}, (\eta_i\eta_{i+1}) * b_i] = 1$；*(S10)* $[d_{1,2}, a_3^2] = 1$，$[d_{1,2}, d_{3,4}] = 1$，$[d_{1,2}, d_{-3,-1}] = 1$ 和 $[d_{1,2}, t_2d_{1,2}t_2] = 1$；*(S11)* $R_4(a_1^2, b_1)$，$[b_1 * a_1^2, \xi_1 * a_1^2] = 1$ 和 a_1^2 与 b_2，ξ_2 和 η_2 交换；*(S12)* $b_2\big((b_1^{-1}\eta_2^{-1}) * d_{1,2}d_{-2,-1}^{-1}\big) = d_{-1,2}a_1^2b_2$，$d_{-2,-1} * \eta_2 = b_2$ 和

$$\overline{d}_{-2,-1}\overline{d}_{-1,1,2}(t_1 * \overline{d}_{-1,1,2}) = \overline{d}_{1,2}\overline{d}_{\{-2,-1,1,2\}}; \tag{17}$$

(S13) $[a_j^2\overline{d}_{\{i,\dots,j\}}, \overline{r}_{i,j}] = 1$ 以及

$$\overline{r}_{i,j}\overline{d}_{\{i,\dots,j\}} = a_1^{-4}\dots a_{-i}^{-4}a_{-i+1}^{-2}\dots a_{j-1}^{-2}\overline{d}_{\{i,\dots,j\}}^{-1}\overline{r}_{i,j}$$

对所有满足 $i = 1$ 或 $i < 0$、$j + i > 0$ 且 $j - i < g$ 的 i、j；

(S14) 三角关系 $a_1^2b_1d_1^{-1}{}_{,2}b_1^{-1}d_1^{-2}{}_{,2}a_1^{-2}b_1 = d_1^{-1}{}_{,2}a_1^2$，

$$b_j^{-1}a_j^2\overline{d}_{\{1,\dots,j\}}b_j = (t_{j-1}\dots t_1\,\zeta^{-1}) * (b_1^{-1}\varphi_2\zeta a_1^2b_1)$$

并且对于 $i < 0$

$$b_j^{-1}a_j^2\overline{d}_{\{i,\dots,j\}}b_j = (t_{j-1}\dots t_1\,\zeta^{-1}) * (b_1^{-1}\varphi_2\varphi_1a_1^2b_1),$$

其中 ζ、φ_1 和 φ_2 是 *(A11)b)-e)* 中定义的映射类。

备注 5.7。关系 (S14) 几乎是对 (A11) 的重述。不过，右侧元素的共轭元往往是熟悉的映射类。例如，关系 (A11)c) 变为

$$b_j^{-1}a_j^2\overline{d}_{\{i,\dots,j\}}b_j = \xi_j^{-1}\overline{d}_{j,j+1}\overline{d}_{i,\dots,j+1}a_j^2a_{j+1}^2\xi_j.$$

我们将通过对定理 4.1 的表示应用 Tietze 变换来证明定理 5.6。首先，我们在定理 4.1 的表示中加入以下生成元：

$$b_{k+1} := (t_k\overline{d}_{k,k+1}^{-1}) * b_k, \tag{18}$$

$$\xi_k := \overline{d}_{k,k+1}^{-1} * b_k, \quad \eta_{k+1} := t_k^{-1} * b_k. \tag{19}$$

请注意，在这个扩大的表示中，根据定理 4.1，备注 5.5 中的关系成立。这意味着 b_i、 ξ_i 和 η_i 生成 Mod(Σ_g^1)[ϕ]，并且可以从表示中移除 “ 旧 ” 的生成元。不过，我们仍会将它们保留为简写，具体说明见备注 5.5。

接着，我们加入关系 (S1)-(S14)。我们将证明，关系 (18)、(19) 和 (A1)-(A14) 是关系 (S1)-(S14) 的推论。

我们先从 (S1)-(S11) 推导出其他关系，以证明这些关系足以满足要求。首先，我们证明涉及 a_1^2 和 $d_{1,2}$ 的一些基本关系。

引理 5.8。 以下关系可由 *(S1)-(S11)* 推出：

(i) $R_3(m_1, \xi_2)$、 $R_3(m_1, \eta_4)$ 和 m_1 与所有其他生成元交换；*(ii)* $R_3(m_2, b_1)$、 $R_3(m_2, \xi_1)$、 $R_3(m_2, b_2)$、 $R_3(m_2, \eta_2)$、 $R_3(m_2, \eta_4)$ 和 m_2 与所有其他生成元以及 m_1 交换；*(iii)* 当 $i = 3$ 为 *4* 时，有 $R_3(m_i, b_1)$、 $R_3(m_i, \xi_1)$、 $R_3(m_i, \xi_2)$、 $R_3(m_i, \eta_4)$，且 m_i 与所有其他生成元、 m_1 和 m_2 交换；*(iv)* $d_{1,2}$ 与所有 b_k、 ξ_k 和 η_k （其中 $k \geq 3$），以及 m_1、 m_2、 d_1 和 $\bar{2} * \xi_1 = b_1$ 交换；*(v)* a_1^2 与 $d_{1,2}$、 m_1、 m_2、 m_3、 m_4，以及当 $k \geq \bar{2}$ 时的所有 b_k、 ξ_k 和 η_k 交换，并且 $\bar{R}_4(a_1^2, b_1)$、$R_4(a_1^2, \xi_1)$ 成立。

证明。 (*i*) 我们将较为详细地证明这一点，因为下文中我们经常会以更简略的方式进行类似计算。若 k 至少为 4，则根据 (S1)，生成元 b_k、 ξ_k 和 η_{k+1} 与 m_1 的定义中出现的所有生成元交换。也容易看出，根据 (S1)，除 ξ_2 和 b_3 之外， m_1 的定义中出现的所有生成元也都与 m_1 交换。例如，我们有

$$\begin{aligned}\xi_1 * m_1 &= (\xi_2\xi_1\xi_2 b_2\eta_3\eta_2 b_1^2\eta_2\eta_3 b_2\xi_1\xi_2) * b_3 = \\ &= (\xi_2\xi_1 b_2\eta_3\eta_2 b_1^2\eta_2\eta_3 b_2\xi_1\xi_2\xi_1) * b_3 = m_1.\end{aligned}$$

对于 ξ_2，我们有

$$\begin{aligned}m_1 * \xi_2 &= (H_3\, b_3\, \xi_2^{-1}\xi_1^{-1}b_2^{-1}\eta_3^{-1}\eta_2^{-1}b_1^{-2}\eta_2^{-1}\eta_3^{-1}b_2^{-1}\xi_1^{-1}) * \xi_2 = \\ &= (\xi_1\, H_3\, b_3\, \xi_2^{-1}\xi_1^{-1}b_2^{-1}\eta_3^{-1}\eta_2^{-1}b_1^{-2}\eta_2^{-1}\eta_3^{-1}b_2^{-1}) * \xi_1 = \cdots = \\ &= (\xi_1 b_2\eta_3\eta_2 b_1^2\eta_2\eta_3 b_2\, H_3\, b_3) * \xi_2 = \\ &= (\xi_1 b_2\eta_3\eta_2 b_1^2\eta_2\eta_3 b_2\, \xi_2\xi_1\xi_2 b_2\eta_3\eta_2 b_1^2\eta_2\eta_3 b_2\xi_1) * b_3 = \\ &= (\xi_1 b_2\eta_3\eta_2 b_1^2\eta_2\eta_3 b_2\xi_1\xi_2\xi_1) * b_3 = \xi_2^{-1} * m_1.\end{aligned}$$

由 (S2) 可得 $m_1 = b_3^{-1}(b_1\eta_2\eta_3 b_2\xi_1)^6$, ，此处出现的所有生成元都根据 (S1) 与 b_3 和 ξ_3 交换。最后， η_4 所需的关系就是 (S5)。

(*ii*) 显然，当 $k \geq 2$、 $n \geq 3$ 和 $m \geq 5$ 分别满足相应条件时， m_2 分别与 ξ_k 、 b_n 和 η_m 交换。此外，根据 (S1)，$\eta_3 * m_2 = m_2$ 。为了证明 R_3 关系，我们根据 (S1) 调整 m_2 定义中的曲线。例如，要证明 $R_3(m_2,\ b_1)$，注意到 $m_2 = (b_2^{-1}\eta_3^{-1}) * \eta_2$，因此所需的关系就是 $(b_2^{-1}\eta_3^{-1}) * R_3(b_1,\ \eta_2)$。最后，$m_2 * m_1 = m_1$ 这一事实可由 (i) 得出。

(iii) 交换子可像上文一样直接由 (S1) 得出。关系 R_3 可用与 (ii) 中相同的方法由 (S1) 得出。*(iv)* 显然，根据 (i)、(ii)、(iii) 和 (S1)，$d_{1,\ 2}$ 与 b_k 在 $k \geq 4$ 时、与 ξ_n 在 $n \geq 3$ 时、与 η_m 在 $m \geq 6$ 和 m_1 时，以及与 m_2 交换。此外，根据 (S6)，它也与 η_3 和 η_5交换。对于 η_4，我们

have

$$\overline{d}_{1,2} * \eta_4 = (m_1 m_2 \eta_4 m_1 m_2 \eta_4 m_3^{-1} \eta_4^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1} \eta_4^{-1} m_3^{-1}) * \eta_4 = \\ = (m_1 m_2 \eta_4 m_1 m_2 \eta_4 m_3^{-1} \eta_4^{-1}) * m_3 = (m_1 \eta_4 m_2 \eta_4 m_1) * \eta_4 = \eta_4.$$

对于 ξ_1，注意到 $m_3^{-1} * \xi_1 = (b_1 \eta_2 \eta_3 b_2 \xi_1^{-1} b_2^{-1}) * \xi_1 = b_1 * m_2 = m_2^{-1} * b_1$。因此，

$$\overline{d}_{1,2} * \xi_1 = (m_1 m_2 \eta_4 m_1 m_2 \eta_4 m_3^{-1} \eta_4^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1} \eta_4^{-1} m_2^{-1}) * b_1 = \\ = (\eta_4 m_1 m_2 \eta_4 m_3^{-1} \eta_4^{-1} m_2^{-1}) * b_1 = (\eta_4 m_1 m_2 m_3^{-1} \eta_4^{-1}) * \xi_1 = b_1.$$

(v) 由 (S7) 可推出 a_1^2 与 $d_{1,2}$ 交换。此外，由 (S6) 和前述各点可知，对于 $k \geq 3$，a_1^2 也与 b_k、ξ_k 和 η_k 交换，并且与所有 m_i交换。其他关系为 (S11)，但 $a_1^2 \xi_1 a_1^2 \xi_1 = \xi_1 a_1^2 \xi_1 a_1^2$ 除外；$a_1^2 \xi_1 a_1^2 \xi_1 = \xi_1 a_1^2 \xi_1 a_1^2$ 是将 b_1 的相应关系用 $d_{1\,2}^{-1}$,共轭得到的。□

由引理 5.8 出发，我们现在开始推导更复杂的关系。我们将经常使用以下简写

$$E_i := b_{i+1}^{-1} * \xi_i, \qquad N_{i+1} := b_i^{-1} * \eta_{i+1}.$$

(S1) 可立即推出以下关系成立：

- $R_3(E_i, E_{i+1})$、$R_3(E_i, \xi_i)$、$R_3(E_i, \eta_{i+2})$ 和 E_i 满足与 ξ_i 和其他所有生成元相同的关系 R_2 和 R_3；
- $R_3(N_i,\ N_{i+1})$、$R_3(N_i,\ \eta_i)$、$R_3(N_i,\ \xi_{i-2})$ 以及 N_i 与 η_i 满足相同的关系 R_2 和 R_3，并且与所有其他生成元的关系也相同；

对所有 $i,\ j$，• $R_2(E_i,\ N_j)$。

注意，根据（14），$t_i = N_{i+1} a_i^2 E_i$。

(E1) $R_2(a_i^2,\ X_j)$ 对于 $i \neq j$ 成立，以及 $R_4(a_i^2,\ X_i)$ 对于 $i \geq 1$成立，其中 $X \in \{b, \xi, \eta\}$；**(E2)** $t_i * \eta_{i+1} = b_i$，$t_i * \xi_i = b_{i+1}$；**(E3)** $a_{i+1}^2 = (\eta_{i+1} b_i b_{i+1}^{-1} \xi_i^{-1}) * a_i^2$ 以及 $t_i * a_{i+1}^2 = a_i^2$；

（*E1*）-（*E3*）的证明。我们对 i 使用归纳法。对于 $i = 1$，（E1）是引理 5.8(v)。我们证明，对于固定的 $i \geq 1$，由索引不超过 i 的（$E1$）可推出（E2）和（E3）。关系 $R_2(a_i^2,\ \eta_{i+1})$ 和$R_2(a_i^2,\ b_{i+1})$ 蕴含

$$t_i * \eta_{i+1} = (b_i^{-1} \eta_{i+1} b_i) * \eta_{i+1} = b_i, \\ t_i * \xi_i = \left((b_i^{-1} \eta_{i+1} b_i) a_i^2\right) * b_{i+1} = b_{i+1}.$$

再利用 $R_4(a_i^2, \xi_i)$，我们得到

$$a_{i+1}^2 = t_i * a_i^2 = (b_i^{-1} \eta_{i+1} b_i b_{i+1}^{-1} a_i^2 \xi_i) * a_i^2 = \\ = (\eta_{i+1} b_i \eta_{i+1}^{-1} b_{i+1}^{-1} \xi_i^{-1}) * a_i^2 = (\eta_{i+1} b_i b_{i+1}^{-1} \xi_i^{-1}) * a_i^2.$$

此外，关系 $R_4(a_i^2,\ E_i)$ 和 $R_4(a_i^2,\ N_{i+1})$ 可由 (E1) 和 (S1) 轻易推出，因此

$$t_i * a_{i+1}^2 = t_i^2 * a_i^2 = (N_{i+1} a_i^2 N_{i+1} E_i a_i^2 E_i) * a_i^2 = \\ = (N_{i+1} a_i^2 N_{i+1}) * a_i^2 = a_i^2.$$

为了开始归纳法，我们还需要证明 $i=2$ 的 (E1)。显然，当 $k\geq 3$ 时，它对 b_k、ξ_k 和 η_{k+1} 成立。由 $i=1$ 的 (E2) 和 (E3)，我们得到

$$R_2(a_2^2,\xi_1)=t_1^{-1}*R_2(a_1^2,b_2),\quad R_2(a_2^2,b_1)=t_1*R_2(a_1^2,\eta_2),$$
$$R_4(a_2^2,\eta_2)=t_1^{-1}*R_4(a_1^2,b_1),\quad R_4(a_2^2,b_2)=t_1*R_4(a_1^2,\xi_1).$$

最后，由 (E3) 可得

$$R_2(a_2^2,\eta_3)=(\eta_2b_1b_2^{-1}\xi_1^{-1})*R_2(a_1^2,m_4),$$
$$R_4(a_2^2,\xi_2)=(\eta_2b_1b_2^{-1}\xi_1^{-1})*R_4(a_1^2,\xi_2^{-1}*\xi_1),$$

因此，由引理 5.8(v) 和 $i=1$ 的 (E1) 可得出结论。然后，$i=2$ 的关系 (E2) 和 (E3) 可由上述论证推出。

现在假设已证明某个 $i\geq 2$ 的所有关系。由上文可知，只需证明 $i+1$ 满足 (E1)。显然，当 $k\geq i+2$ 或 $k\leq i-1$ 时，b_k 满足该关系；当 $\ell\geq i+2$ 或 $\ell\leq i-2$ 时，ξ_ℓ、$\eta_{\ell+1}$ 满足该关系。关系 $R_2(a_{i+1}^2,\xi_i)$、$R_2(a_{i+1}^2,b_i)$、$R_4(a_{i+1}^2,\eta_{i+1})$ 和 $R_4(a_{i+1}^2,b_{i+1})$ 是 a_i^2 的关系在 $t_i^{\pm 1}$ 下的共轭元。对于其余关系，首先注意到

$$R_4(a_{i+1}^2,\xi_{i+1})=(\eta_{i+1}b_ib_{i+1}^{-1}\xi_i^{-1})*R_4(a_i^2,\xi_{i+1}^{-1}*\xi_i),$$
$$R_2(a_{i+1}^2,\xi_{i-1})=\big((\eta_{i+1}b_ib_{i+1}^{-1}\xi_i^{-1})(\eta_ib_{i-1}b_i^{-1}\xi_{i-1}^{-1})\big)*R_2(a_{i-1}^2,\xi_i),$$
$$R_2(a_{i+1}^2,\eta_i)=\big((\eta_{i+1}b_ib_{i+1}^{-1}\xi_i^{-1})(\eta_ib_{i-1}b_i^{-1}\xi_{i-1}^{-1})\big)*R_2(a_{i-1}^2,\eta_{i+1}).$$

对于 η_{i+2}，我们使用 (S9):

$$(\eta_{i+1}b_ib_{i+1}^{-1}\xi_i^{-1})*R_2\big(a_i^2,(\xi_ib_i^{-1}b_{i+1}\eta_{i+2})*\eta_{i+1}\big)=R_2(a_{i+1}^2,\eta_{i+2}).\qquad\square$$

注意到，(18) 和 (19) 由 (E2) 和引理 5.8(iv) 立即得到。

(E4) $[a_i^2,a_j^2]=1$、$s_j*a_i^2=a_i^2$对所有 i，j以及 $t_k*a_i^2=a_i^2$对 $i\neq k$，$k+1$均成立。

证明。对于 $i=1$，注意到 $s_1*a_1^2=a_1^2$ 恰好是 $R_4(a_1^2,\ b_1)$，并且

$$[a_1^2,a_2^2]=[a_1^2,(\eta_2b_1b_2^{-1}\xi_1^{-1})*a_1^2]=(\eta_2b_2^{-1}\xi_1^{-1})*[\xi_1*a_1^2,b_1*a_1^2]=1$$

由 (E3) 和 (S11) 得到。利用 (E1) 和归纳法，我们得到对于 $k\geq 2$，$s_k*a_1^2=a_1^2$、$t_k*a_1^2=a_1^2$ 以及$[a_1^2,a_{k+1}^2]=1$。

对于 $i\geq 2$，证明类似：由 (E1) 和归纳法可得，当 $j\leq i$ 时有 $s_j*a_i^2=a_i^2$，当 $k<i-1$ 时有 $t_k*a_i^2=a_i^2$和$t_{i-1}*a_{i+1}^2=a_{i+1}^2$，因此我们得到

$$R_2(a_i^2,a_{i+1}^2)=t_{i-1}*R_2(a_{i-1}^2,a_{i+1}^2)$$

而其他关系可按情形 $i=1$ 推得。$\square$

由 (E1) 还可得到关系 $R_4(a_i^2,E_{i-1})$、$R_4(a_i^2,E_i)$、$R_4(a_i^2,N_i)$、$R_4(a_i^2,N_{i+1})$ 以及 $R_2(a_i^2,E_j)$、$R_2(a_i^2,N_{j+1})$，对每个 $j\neq i,i-1$ 均成立。另一个有用的观察是

$$t_i=E_ia_{i+1}^2N_{i+1}.\tag{20}$$

事实上，由 (E3) 和 $R_4(a_i^2,N_{i+1})$ 可得

$$E_ia_{i+1}^2N_{i+1}=E_it_i^{-1}a_i^2t_iN_{i+1}=a_i^{-2}N_{i+1}^{-1}a_i^2N_{i+1}a_i^2N_{i+1}E_i=N_{i+1}a_i^2E_i.$$

(E5) $[\overline{d}_{1,2},t_j]=1$ 对所有 $j\neq 2$ 和 $[d_{i,j},\overline{a}_k^2]=1$ 对所有 i，j，k。

证明。 我们首先证明 $[d_{1,2},\overline{t}_1]=1$。根据 (S8)，有 $d_{1,\ 2}*N_2=a_2^{-2}*E_1$。此外，根据 (18)，有 $d_{1,\ 2}*b_2=\overline{t}_1*b_1$。现在，利用引理 5。8(iv)，得到

$$\begin{aligned}\overline{d}_{1,2}*E_1=(t_1b_1^{-1}t_1^{-1})*b_1=(N_2a_1^2E_1b_1^{-1}E_1^{-1}a_1^{-2}N_2^{-1})*b_1=\\=(N_2a_1^2b_1^{-1}a_1^{-2})*\eta_2=(N_2a_1^2)*N_2=a_1^{-2}*N_2.\end{aligned}\tag{21}$$

因此，

$$\begin{aligned}\overline{d}_{1,2}*t_1=a_2^{-2}E_1a_2^2N_2a_1^2=a_2^{-2}E_1t_1a_1^2t_1^{-1}N_2a_1^2=\\=a_2^{-2}N_2E_1a_1^2E_1a_1^2E_1^{-1}=a_2^{-2}N_2a_1^2E_1a_1^2=a_2^{-2}t_1a_1^2=t_1.\end{aligned}$$

由于由 (S10) 可得 $[d_{1,2},\overline{a_3^2}]=1$，其余部分便可由 (E4) 和引理 5.8(iv) 推出。□

由 (E5) 和 (18) 可知

$$\overline{d}_{1,2}*b_2=t_1*b_1=(b_1^{-1}\eta_2a_1^{-2})*b_1=s_1^{-1}*\eta_2.\tag{22}$$

(E6) $t_i*t_{i+1}=t_{i+1}^{-1}*t_i$ 对所有 i, $[t_i,t_k]=1$，若 $|i-k|>1$ 且 $[t_i,s_j]=1$，则对 $i\neq j$。

证明。 除第一条关系外，其余关系均可由 (E1) 和 (E4) 轻易推出。第一条关系可利用 (20) 重写为

$$(t_i*N_{i+2})a_i^2(t_i*E_{i+1})=(t_{i+1}^{-1}*N_{i+1})a_i^2(t_{i+1}^{-1}*E_i).$$

我们将证明 $t_i*N_{i+2}=t_{i+1}^{-1}*N_{i+1}$ 和 $t_i*E_{i+1}=t_{i+1}^{-1}*E_i$。我们有$t_i*N_{i+2}=(N_{i+1}a_i^2E_i)*N_{i+2}=N_{i+1}*N_{i+2}$并且

$$\begin{aligned}t_{i+1}^{-1}*N_{i+1}=(E_{i+1}^{-1}a_{i+1}^{-2}N_{i+2}^{-1})*N_{i+1}=\\=(E_{i+1}^{-1}N_{i+1}a_i^2E_ia_i^2E_i^{-1}a_i^{-2}N_{i+1}^{-1}N_{i+1})*N_{i+2}=N_{i+1}*N_{i+2}.\end{aligned}$$

对于另一个等式，我们有

$$\begin{aligned}t_{i+1}^{-1}*E_i=(E_{i+1}^{-1}a_{i+1}^{-2})*E_i=(E_{i+1}^{-1}E_i^{-1}a_i^{-2}N_{i+1}^{-1}a_i^{-2}N_{i+1}a_i^2E_i)*E_i=\\=(E_{i+1}^{-1}E_i^{-1}N_{i+1}a_i^{-2}N_{i+1}^{-1})*E_i=(N_{i+1}E_{i+1}^{-1}E_i^{-1}a_i^{-2})*E_i=\\=(N_{i+1}E_{i+1}^{-1}a_i^2)*E_i=t_i*E_{i+1}.\end{aligned}$$

□

(E7) 对于 $i>0$，我们有

$$\begin{aligned}\overline{d}_{i,i+1}=(t_{i-1}t_it_{i-2}t_{i-1}\dots t_1t_2)*\overline{d}_{1,2},\\\overline{d}_{-i-1,-i}=(t_{i-1}^{-1}t_i^{-1}t_{i-2}^{-1}t_{i-1}^{-1}\dots t_1^{-1}t_2^{-1})*\overline{d}_{-2,-1}.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\overline{d}_{i,i+1}=(t_{i-1}t_i)*\overline{d}_{i-1,i},\quad \overline{d}_{-i-1,-i}=(t_{i-1}^{-1}t_i^{-1})*\overline{d}_{-i,-i+1}$$

对于 $i>1$，且 $t_k*\overline{d}_{i,\ i+1}=\overline{d}_{i,\ i+1}$ 若 $|k-i|\neq 1$。

证明。 这可由 (15)、(E5) 和 (E6) 直接得到。 □

回忆一下， $H_2:=\eta_3\eta_2b_1a_1^2b_1\eta_2\eta_3$。

（E8） $H_2*b_2=H_2^{-1}*b_2$ 和 $[H_2*b_2,b_2]=1$。

证明。 反复应用关系 (S1) 和 (E1)，我们可以看到 H_2 和 b_2 都与$a_1^2(b_1a_1^2b_1)(\eta_2b_1a_1^2b_1\eta_2)$可交换。然后，利用 (S4)，我们可以进行与 [31, (9)] 相同的证明。□

(E9) $s_1t_1s_1t_1=t_1s_1t_1s_1$。

证明。 我们需要证明 $(s_1t_1)* s_1 = t_1^{-1} * s_1$。由于

$$(s_1t_1) * a_1^2 = s_1 * a_2^2 = a_2^2 = t_1^{-1} * a_1^2$$

由 (E4) 可知，只需证明 $(st_1) * b_1$ 等于 $t_1^{-1} * b_1 = \eta_2$。我们有

$$(s_1t_1) * b_1 = (b_1a_1^2b_1b_1^{-1}\eta_2b_1a_1^2E_1) * b_1 = (b_1\eta_2a_1^2b_1a_1^2) * b_1 = \eta_2. \qquad \square$$

(E10) $s_1t_1s_1 = t_1w_1 = w_1t_1$，其中 $w_1 := (\eta_2a_2^2N_2a_1^2N_2\eta_2)$。

证明。 </style}思路与 [31, (10)] 类似。由 (E2) 和 (E1)，我们有

$$t_1w_1 = t_1\eta_2t_1^{-1}a_1^2t_1N_2a_1^2\eta_2b_1 = b_1a_1^2t_1\eta_2b_1a_1^2b_1 = b_1a_1^2b_1t_1b_1a_1^2b_1 = s_1t_1s_1.$$

由 (E9)， $st_1s = t_1st_1st_1^{-1}$，因此另一个等式也成立。 $\square$

(E11) $t_1^2 = \overline{d}_{1,\,2}\overline{d}_{-2,\,-1}$, $\overline{[d_{1,2}, d_{-2,-1}]} = 1$ 和

$$\overline{d}_{-2,-1} = w_i^{-1} * \overline{d}_{1,2} = w_i * \overline{d}_{1,2}$$

对于 $i = 1,\ 2,\ 3$，其中

$$w_2 := N_3a_2^2N_2a_1^2N_2N_3, \quad w_3 := E_2E_1a_1^2E_1a_2^2E_2.$$

证明。 第一个关系是 (S4)，第二个关系很容易得出。对于第三个关系，由 (E5) 和 (E10) 可得 $\overline{d}_{-2,\,-1} = (st_1s)^{-1} * \overline{d}_{1,\,2} = (t_1w_1)^{-1} * \overline{d}_{1,\,2} = w_1^{-1} * \overline{d}_{1,\,2}$。另一方面，

$$w_1 * \overline{d}_{1,2} = w_1 * (t_1^2\overline{d}_{-2,-1}^{-1}) = t_1^2(w_1 * \overline{d}_{-2,-1}^{-1}) = t_1^2\overline{d}_{1,2}^{-1} = \overline{d}_{-2,-1}.$$

通过 $m_2 = (\eta_2\eta_3) * b_2$ 的共轭作用，我们得到关于 $i = 2$的最后一个关系。事实上，首先注意到

$$w_1 = \eta_2N_2a_1^2E_1a_1^2E_1^{-1}N_2\eta_2, \quad w_2 = N_3N_2a_1^2E_1a_1^2E_1^{-1}N_2N_3;$$

那么，只需应用引理 5。8(iv)。由于 m_2 与 $\overline{d}_{1,\,2}$ 和 t_1交换，因此它也与 $\overline{d}_{-2,\,-1} = t_1^2\overline{d}_{1\,2}^{-1}$，交换。

对于 $i = 3$，我们断言 w_3 是 w_2 经过以下元素共轭的结果

$$\psi := \big((E_2\eta_4\overline{d}_{1,2}) * N_3\big)^{-1} \cdot \eta_4\overline{d}_{1,2}.$$

首先，由 (22) 得到 $\overline{d}_{1,\,2} * N_3 = (\eta_3s_1^{-1}) * \eta_2$。这显然意味着关系 $R_3(\eta_4,\ \overline{d}_{1,\,2} * N_3)$ 和 $R_2(E_2^{-},\ \overline{d}_{1,\,2} * N_3)$ 成立。因此，

$$\psi * N_3 = \big(E_2\eta_4 \cdot (\overline{d}_{1,2} * N_3)^{-1}(E_2 * \eta_4)^{-1})\big) * (\overline{d}_{1,2} * N_3) = (E_2\eta_4E_2) * \eta_4 = E_2.$$

现在，应用引理 5.8(iii)，得到

$$\overline{d}_{1,2}^{-1} * E_2 = (\eta_4\eta_3b_3\eta_4m_4^{-1}\eta_4^{-1}b_3^{-1}\eta_3^{-1}\eta_4^{-1}m_4^{-1}) * \xi_2 = (\eta_4m_4^{-1}\eta_3b_3\eta_4^{-1}b_3^{-1}\eta_3^{-1}\eta_4^{-1}m_4^{-1}) * \xi_2 =$$
$$= (\eta_4m_4^{-1}\eta_3\eta_4^{-1}\eta_3^{-1}b_3^{-1}\eta_4^{-1}m_4^{-1}) * \xi_2 = (m_4^{-1}\eta_4^{-1}m_4\eta_3^{-1}b_3^{-1}\eta_4^{-1}b_3\xi_2) * m_4.$$

由于根据 (S5)， η_4 与 $(b_3\xi_2) * m_4$ 交换，因此得到

$$\overline{d}_{1,2}^{-1} * E_2 = (m_4^{-1}\eta_4^{-1}m_4\xi_2) * m_4 = m_4^{-1} * \xi_2$$

因此，由 (S5) 和 (S8) 可得

$$\psi * N_2 = (E_2\eta_4\overline{d}_{1,2}\,N_3^{-1}\,\overline{d}_{1,2}^{-1}\eta_4^{-1}E_2^{-1}\,a_2^{-2}) * E_1 = (E_2\overline{d}_{1,2}\,N_3^{-1}\eta_4^{-1}N_3\,\overline{d}_{1,2}^{-1}E_2^{-1}\,a_2^{-2}) * E_1 =$$
$$= (\overline{d}_{1,2}\xi_2m_4\xi_2^{-1}\,N_3^{-1}\eta_4^{-1}N_3\,\xi_2m_4^{-1}\xi_2^{-1}\overline{d}_{1,2}^{-1}\,a_2^{-2}) * E_1 =$$
$$= (\overline{d}_{1,2}b_2^{-1}\xi_2m_4\,\eta_3^{-1}\eta_4^{-1}\eta_3\,m_4^{-1}) * N_2 = (\overline{d}_{1,2}b_2^{-1}\xi_2) * N_2 = a_2^{-2} * E_1.$$

这证明了 $\psi * w_2 = w_3$。现在，很容易看出 ψ 与 $d_{1,2}$ 及 t_1 可交换，因此也与$d_{-2,-1}$可交换。□

(E12) $\overline{d}_{i+1,i+2} = (t_i^{-1}t_{i+1}^{-1}) * \overline{d}_{i,i+1}$ for all $i = 1, \ldots, g-2$.

证明。由 (E7)，只需证明 $(t_{i+1}t_i^2t_{i+1}) * d_{i,i+1} = d_{i,i+1}$。我们对 i 使用归纳法。对于 $i = 1$，注意到

$$t_2t_1^2t_2 = N_3a_2^2E_2N_2a_1^2E_1N_2a_1^2E_1N_3a_2^2E_2 = N_3a_2^2N_2a_1^2N_2N_3E_2E_1a_1^2E_1a_2^2E_2 = w_2w_3.$$

因此，由 (E11) 可得 $(t_2t_1^2t_2) * d_{1,2} = \overline{(w_2w_3)} * d_{1,2} = \overline{w_2} * d_{-2,-1} = \overline{d}_{1,2}$。归纳步骤见 [31,(13)]。□

(E13) $t_i^2 = \overline{d}_{i,i+1}\overline{d}_{-i-1,-i}$ for all $i = 1, \ldots, g-1$.

证明。见 [31, (14)]。□

注意，到目前为止，我们已将关系 (A1)、(A3)、(A4)、(A5)、(A6) 和 (A7) 推导为 (S1)-(S14) 的推论。

5.3. **更多关系**。现在我们从 (S1)-(S14) 推导关系 (A2) 和 (A8)。证明中的许多步骤与 [31] 中的类似。请注意，Wajnryb 所考虑的对称性概念并不真正适用于我们的情形，这主要是 (14) 中的不对称性所致。不过，将 Wajnryb 的论证调整到额外的情形并不困难。

(E14) $[b_1, \overline{d}_{-2,2}] = 1$.

证明。如 [31, (16)], 所示，我们发现 $\overline{d}_{-2,2} = a_2^2((\overline{d}_{1,2}t_1^{-1}) * s_1^2)$。我们必须证明 b_1 与 $(d_{1,2}t_1^{-1}) * s_1^2$ 交换。我们有

$$(b_1\overline{d}_{1,2}t_1^{-1}) * s_1^2 = (\overline{d}_{1,2}\xi_1\, E_1a_1^{-2}N_2^{-1}) * s^2 = (\overline{d}_{1,2}E_1\, b_2a_1^{-2}N_2^{-1}) * s^2 = (\overline{d}_{1,2}t_1^{-1}) * s^2. \quad \square$$

(E15) $\xi_k = (b_{k+1}t_{k-1}t_kb_k^{-1}) * \xi_{k-1}$ 以及 $\eta_{k+1} = (b_kt_{k-1}t_kb_{k-1}^{-1}) * \eta_k$，对所有 $k \geq 2$ 均成立。

证明。该陈述等价于 $E_k = (t_{k-1}t_k) * E_{k-1}$ 和 $N_{k+1} = (t_{k-1}t_k) * N_k$。利用 (20)，我们得到

$$(t_{k-1}t_k) * E_{k-1} = (N_ka_{k-1}^2E_{k-1}E_ka_{k+1}^2N_{k+1}) * E_{k-1} = (N_ka_{k-1}^2E_{k-1}E_k) * E_{k-1} = E_k.$$

由于对所有 i 都有 $N_{i+1} = t_iE_i^{-1}a_i^{-2}$，第二个关系可由 (E6) 和第一个关系推出。□

(E16) $d_{i,i+1} * E_i = a_i^{-2} * N_{i+1}$ 以及 $d_{i,i+1} * N_{i+1} = a_{i+1}^{-2} * E_i$，对所有 i 均成立。

证明。我们对 i 进行归纳。基例是 (S8) 和 (21)。一般而言，由 (E7) 和 (E15)，我们得到

$$\overline{d}_{i,i+1} * E_i = (t_{i-1}t_i\overline{d}_{i-1,i}t_i^{-1}t_{i-1}^{-1}) * E_i = (t_{i-1}t_i\overline{d}_{i-1,i}) * (E_{i-1}) = (t_{i-1}t_ia_{i-1}^{-2}) * N_i = a_i^{-2} * N_{i+1}$$

and

$$\overline{d}_{i,i+1} * N_{i+1} = (t_{i-1}t_i\overline{d}_{i-1,i}t_i^{-1}t_{i-1}^{-1}) * N_{i+1} = (t_{i-1}t_i\overline{d}_{i-1,i}) * N_i = (t_{i-1}t_ia_i^{-2}) * E_{i-1} = a_{i+1}^{-2} * E_i.$$

□

(E17) $[s_k, \overline{d}_{i,i+1}] = 1$ 若 $k \neq i,\ i+1$ 且 $[s_i, \overline{d}_{i,i+1}s_i\overline{d}_{i,i+1}] = 1$。

证明。对于第一个关系，只需证明：若 $k \neq i,\ i+1$，则 $d_{i,\ i+1} * b_k = b_k$。显然，$d_{i,\ i+1}$ 与 b_k 交换，其中 $k \geq i+2$。对于其余部分，我们对 i 作归纳法。基例是引理 5.8(iv)。假设对于 $k < i-1$，有 $d_{i-1,\ i} * b_k = b_k$。那么根据 (E7)，对于$k < i-1$，也有 $d_{i,\ i+1} * b_k = b_k$。对于 $k = i-1$，只需证明 $d_{i-1,\ i}$ 与 $(t_i^{-1}t_{i-1}^{-1})*b_{i-1}$交换。注意，由 (20) 可得

$$(t_i^{-1}t_{i-1}^{-1}) * b_{i-1} = (N_{i+1}^{-1}a_{i+1}^{-2}E_i^{-1}) * \eta_i = N_{i+1}^{-1} * \eta_i = (\eta_i\eta_{i+1}) * b_i,$$

因此，所需的关系为 (S9)。

第二个关系由 (S8) 得出。事实上，我们有

$$(s_i\overline{d}_{i,i+1}) * b_i = (b_i a_i^2 b_i a_i^{-2} b_i^{-1} a_i^{-2}) * \xi_i = a_i^{-2} * \xi_i = (a_i^{-2}\overline{d}_{i,i+1}^{-1}) * b_i,$$

然后便可直接得出结论。 □

(E18) $[t_j, \overline{d}_{i,i+1}t_j\overline{d}_{i,i+1}] = 1$ for $j = i \pm 1$.

证明。我们对 i 作归纳。基例为 (S10)。于是，由 (E6) 和 (E7) 可得

$$[t_i, \overline{d}_{i+1,i+2}t_i\overline{d}_{i+1,i+2}] = (t_it_{i+1}t_i) * [t_{i+1}, \overline{d}_{i,i+1}t_{i+1}\overline{d}_{i,i+1}]$$

and

$$[t_{i+2}, \overline{d}_{i+1,i+2}t_{i+2}\overline{d}_{i+1,i+2}] = (t_it_{i+1}t_{i+2}) * [t_{i+1}, \overline{d}_{i,i+1}t_{i+1}\overline{d}_{i,i+1}].$$ □

引理 5.9。关系 *(A8)* 可由 *(S1)-(S14)* 得出。

证明。证明与 [31, 引理 33]相同；注意，所需的所有关系要么是 (S1)-(S14)，要么已在上文证明。 □

现在我们继续讨论关系 (A2)。

(E19) $[\overline{d}_{i,j}, \overline{d}_{-1,1}] = 1$若 $i,\ j \neq \pm 1$，且 $[\overline{d_{i,j}}, \overline{d_{k,k+1}}] = 1$若 $i,\ j \neq k,\ k+1$。

证明。见 [31, (20)]。回顾一下，根据 (S10)，$d_{1,\ 2}$ 与$\overline{d}_{3,\ 4}$ 交换，且 $d_{-3,\ -1}$。 □

引理 5.10 ([31,引理 34])。以下关系成立：

(a) $t_k^{-1}\overline{d}_{k,k+1}$ *commutes with* $\overline{d}_{i,j}$ *if* $i, j \neq \pm k, \pm(k+1)$;
(b) $t_k^{-1}\overline{d}_{k,k+1}$ *commutes with* $\overline{d}_{k,k+1}$ *and* $\overline{d}_{-k-1,-k}$;
(c) $(t_k^{-1}\overline{d}_{k,k+1}) * \overline{d}_{i,\pm k} = \overline{d}_{i,\pm k\pm 1}$ *if* $i \neq -k-1$ *and* $i+k \neq 0$;
(d) $(t_k^{-1}\overline{d}_{k,k+1}) * \overline{d}_{\pm k,j} = \overline{d}_{\pm k\pm 1,j}$ *if* $j \neq k+1$ *and* $-k+j \neq 0$;
(e) $(t_k^{-1}\overline{d}_{k,k+1}) * \overline{d}_{-k,k} = \overline{d}_{-k-1,k+1}$;

引理 5.11。关系 *(A2)* 可由 *(S1)-(S14)* 推出。

证明。见 [31, (21), (22), (23), (24)]。 □

为了完成定理 4.1 的证明，我们只需处理由 $\mathsf{Mod}(\Sigma_{g,1})[\phi]$ 对 X_g 的边的作用所产生的关系。

我们从关系 (A10) 开始。注意，我们有

$$(t_1s_1t_1) * b_1 = (t_1b_1\eta_2a_1^2b_1a_1^2) * b_1 = (t_1) * \eta_2 = b_1$$

and

$$\overline{d}_{-1,1}\overline{d}_{-1,2}\overline{d}_{1,2}a_1^2 = a_1^4s_1\overline{d}_{1,2}s_1\overline{d}_{1,2},$$

因此，由 (S8) 和 (E17) 可得

$$(a_1^4s_1\overline{d}_{1,2}s_1\overline{d}_{1,2}) * b_1 = (a_1^2s_1\overline{d}_{1,2}) * \xi_1 = (a_1^2s_1) * b_1 = b_1.$$

这证明了 a)，而 b) 立即可得。容易看出，关系 c) 可由上述内容推出。对于 d)，注意到第一个关系等价于

$$[a_j^2\overline{d}_{i,\dots,j},\overline{r}_{i,j}]=1, \tag{23}$$

这是 (S13) 的前半部分。我们稍后再处理 d) 的最后部分。

现在考虑关系 (A9)。我们只处理 $i<0$ 的情形，另一种情形类似。由 (23)，得到

$$b_j^{+2}\overline{r}_{i,j}\overline{d}_{\{\,i,\dots,j\,\}}a_j^2b_j^{-2}\overline{r}_{i,j}=b_j^{+2}\overline{d}_{\{\,i,\dots,j\,\}}a_j^2\overline{r}_{i,j}b_j^{-2}\overline{r}_{i,j}=b_j^{+2}\overline{d}_{\{\,i,\dots,j\,\}}a_j^2b_j\overline{d}_{\{\,i,\dots,j\,\}}a_j^2\overline{d}_{\{\,i,\dots,j\,\}}a_j^2b_j.$$

因此，写出 s_j 的定义后，该关系变为

$$b_j\overline{d}_{\{\,i,\dots,j\,\}}a_j^2b_ja_j^2\overline{d}^2_{\{\,i,\dots,j\,\}}=a_1^{-4}\dots a_{-i}^{-4}a_{-i+1}^{-2}\dots a_{j-1}^{-2}a_j^2b_ja_j^2\overline{d}_{\{\,i,\dots,j\,\}}b_j.$$

再次应用 (23)，得到 (S13) 的后半部分。

现在考虑 $i<0$ 的关系 (A10)d)。应用 (A9)，有

$$\begin{aligned}s_ja_j^{-2}\overline{d}^{-1}_{\{\,1,\dots,j\,\}}\overline{r}^{-1}_{i,j}b_j^{-2}a_j^2s_j\overline{d}_{\{\,i,\dots,j\,\}}b_j^2\overline{r}_{i,j}&=a_1^4\dots a_{-i}^4a_{-i+1}^2\dots a_{j-1}^2s_jb_j^{-2}\overline{r}_{i,j}s_j^{-1}b_j^2\overline{r}_{i,j}=\\&=a_1^4\dots a_{-i}^4a_{-i+1}^2\dots a_{j-1}^2\overline{r}^2_{i,j}.\end{aligned}$$

该关系变为

$$\overline{r}^2_{i,j}=a_1^{-4}\dots a_{-i}^{-4}a_{-i+1}^{-2}\dots a_j^{-2}\overline{d}^{-2}_{\{\,i,\dots,j\,\}}\cdot\overline{d}_{\{\,i,\dots,j-1\,\}}\big((t_{j-1}\dots t_{-i+1})*\overline{d}_{\{\,i-1,\dots,j\,\}}\big),$$

这就是（S4）。

对于三角形，我们已经注意到，关系（S14）很容易推出（A11）。关系（A12）由（E11）得出:

$$(a_1^2b_1t_1\overline{d}^{-1}_{1,2}a_1^2b_1t_1\overline{d}^{-1}_{-2,-1})^2=(a_1^2b_1a_2^2b_2t_1\overline{d}^{-1}_{1,2}t_1\overline{d}^{-1}_{-2,-1})^2=(a_1^2b_1a_2^2b_2)^2=a_1^2s_1a_2^2s_2.$$

Ob注意，应用引理 5.8(iv)、（E2）和（E11）后，关系（A13）可简化如下 s:

$$\begin{aligned}&s_2b_2^{-2}\overline{r}_{1,2}\overline{d}_{-2,-1}\overline{d}^{-1}_{1,2}b_1t_1a_1^2b_1\overline{d}^{-3}_{-2,-1}t_1b_1t_1b_1\overline{d}^{-1}_{\{\,-2,-1,1,2\,\}}=\\&\quad=b_2a_2^2\overline{d}_{1,2}a_2^2b_2\overline{d}_{-2,-1}\overline{d}^{-1}_{1,2}b_1t_1a_1^2b_1\overline{d}_{1,2}t_1^{-1}\overline{d}^{-2}_{-2,-1}t_1\eta_2b_1\overline{d}^{-1}_{\{\,-2,-1,1,2\,\}}=\\&\quad=b_2a_2^2\overline{d}_{1,2}a_2^2b_2\overline{d}_{-2,-1}\overline{d}^{-1}_{1,2}b_1\overline{d}_{1,2}a_2^2b_2\overline{d}^{-2}_{-2,-1}t_1\eta_2b_1\overline{d}^{-1}_{\{\,-2,-1,1,2\,\}}=\\&\quad=b_2a_2^2\overline{d}_{1,2}a_2^2b_2\overline{d}_{-2,-1}\xi_1a_2^2b_2t_1^{-1}\overline{d}_{1,2}\overline{d}^{-1}_{-2,-1}\eta_2b_1\overline{d}^{-1}_{\{\,-2,-1,1,2\,\}}=\\&\quad=b_2a_2^2\overline{d}_{1,2}a_2^2b_2\overline{d}_{-2,-1}a_2^2a_1^{-2}\eta_2b_2b_1^{-1}\eta_2^{-1}t_1^{-1}\overline{d}_{1,2}\overline{d}^{-1}_{-2,-1}\eta_2b_1\overline{d}^{-1}_{\{\,-2,-1,1,2\,\}}.\end{aligned}$$

现在，应用（S12），最后一项等于

$$\begin{aligned}&b_2a_2^2\overline{d}_{1,2}a_2^2b_2\overline{d}_{-2,-1}a_2^2a_1^{-2}\eta_2b_2b_1^{-1}\eta_2^{-1}t_1^{-1}\overline{d}_{1,2}\overline{d}^{-1}_{-2,-1}\eta_2b_1\overline{d}^{-1}_{\{\,-2,-1,1,2\,\}}=\\&\quad=b_2a_2^2\overline{d}_{1,2}a_2^2b_2\overline{d}_{-2,-1}a_2^2a_1^{-2}\eta_2\overline{d}_{-1,1,2}a_1^2b_2\overline{d}^{-1}_{\{\,-2,-1,1,2\,\}}=\\&\quad=b_2a_2^2\overline{d}_{1,2}a_2^2b_2a_2^2b_2\overline{d}_{-2,-1}\overline{d}_{-1,1,2}\overline{d}^{-1}_{\{\,-2,-1,1,2\,\}}b_2=\\&\quad=b_2a_2^2\overline{d}_{1,2}b_2a_2^2b_2a_2^2\overline{d}_{1,2}(t_1*\overline{d}_{-1,1,2})^{-1}b_2=\overline{r}_{1,2}a_2^2\overline{r}_{1,2}(t_1*\overline{d}_{-1,1,2})^{-1}.\end{aligned}$$

注意，由（S13）可得

$$\overline{r}_{1,2}a_2^2\overline{r}_{1,2}=\overline{r}_{1,2}a_2^2\overline{d}_{1,2}\overline{d}^{-1}_{1,2}\overline{r}_{1,2}=\overline{r}^2_{1,2}a_1^2a_2^2\overline{d}^2_{1,2},$$

根据 (S4)，我们知道

$$\overline{r}^2_{1,2}=a_1^{-2}a_2^{-2}\overline{d}^{-2}_{1,2}(t_1*\overline{d}_{-1,1,2}).$$

这就证明了 (A13)。

最后，(A14) 可由 (S3) 轻易推出。

6. The case of closed surfaces

在本节中，我们最终确定闭曲面的自旋映射类群的一个有限表示。存在一个标准步骤，可将 Σ_g^1 的映射类群与 Σ_g 的映射类群联系起来：首先用一个带一个标记点的圆盘封闭边界分支 ∂，得到曲面 $\Sigma_{g,\,1}$，然后忘却标记点 p。这两个步骤分别对应于两个众所周知的群的正合列（见 [7, 命题 3.19 和定理 4.6]）：

$$1 \longrightarrow \langle t_\partial \rangle \longrightarrow \mathrm{Mod}(\Sigma_g^1) \xrightarrow{Cap} \mathrm{Mod}(\Sigma_{g,1}) \longrightarrow 1,$$
$$1 \longrightarrow \pi_1(\Sigma_g, p) \xrightarrow{Push} \mathrm{Mod}(\Sigma_{g,1}) \xrightarrow{Forget} \mathrm{Mod}(\Sigma_g) \longrightarrow 1.$$

第二个正合列称为 Birman正合列。根据 [7, 事实 4.7], , $Forget$ 的核由形如 $t_\gamma t_{\gamma'}^{-1}$ 的映射类生成，其中 γ 和 γ' 围成一个包含 p的环带，即 Birman 的“自旋映射” [4]。

现在考虑 Σ_g^1 上的一个偶自旋结构 ϕ。根据我们的假设，$\phi(\partial) = 1$，因此 $\Sigma_{g,\,1}$ 和Σ_g 继承了良定义的自旋结构，我们仍将其记为 ϕ。此外，很明显，映射 Cap 和 $Forget$ 限制为稳定子子群之间的满射。由于两个核中的所有映射类都容易看出保持 ϕ 不变，我们得到类似的正合列

$$1 \longrightarrow \langle t_\partial \rangle \longrightarrow \mathrm{Mod}(\Sigma_g^1)[\phi] \xrightarrow{Cap} \mathrm{Mod}(\Sigma_{g,1})[\phi] \longrightarrow 1, \tag{24}$$
$$1 \longrightarrow \pi_1(\Sigma_g, p) \xrightarrow{Push} \mathrm{Mod}(\Sigma_{g,1})[\phi] \xrightarrow{Forget} \mathrm{Mod}(\Sigma_g)[\phi] \longrightarrow 1. \tag{25}$$

现在我们可以得到 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)[\phi]$ 的一个表示，其中 ϕ 是前几节中的偶自旋结构。

定理6.1. 自旋映射类群 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)[\phi]$ 有生成元 $b_1, \dots, b_g, \xi_1, \dots, \xi_{g-1}, \eta_2, \dots, \eta_g$ 及关系 ***(S1)-(S14)*** 和以下关系所构成的表示：

(S15) $\overline{d}_{\{-g,\dots,g\}} a_1^2 \dots a_g^2 = 1$;

(S16) $\overline{d}_{\{-g,\dots,-1\}} = \overline{d}_{\{1,\dots,g\}}$.

证明. 注意，在图23的记号中，$\partial = \delta_{\{-g,\dots,g\}}$。因此，

$$t_\partial = d_{\{-g,\dots,g\}} = \overline{d}_{\{-g,\dots,g\}} a_1^2 \dots a_g^2$$

由 (11)，并将 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^1)[\phi]$ 对 (S15) 取商，我们根据 (24) 得到 $\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,1})[\phi]$。

为了得到 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)[\phi]$，我们必须对由上述映射类 $t_\gamma t_{\gamma'}^{-1}$ 生成的子群取商。显然，$\mathrm{Mod}(\Sigma_g^1)[\phi]$ 对这些元素的作用有两个轨道，分别对应于 γ 和 γ' 的自旋值。一对自旋值为 1 的 γ, γ' 是 $\delta_{\{-g,\dots,-1\}}$ 和 $\delta_{\{1,\dots,g\}}$，而关系 (S16) 意味着

$$d_{\{1,\dots,g\}} d_{\{-g,\dots,-1\}}^{-1} = \overline{d}_{\{1,\dots,g\}} \overline{d}_{\{-g,\dots,-1\}}^{-1} = 1.$$

图31 中的曲线 β_g 和 β_g' 给出了一对可容许的 γ, γ'。请注意

$$\beta_g' = \big(\overline{d}_{\{-g,\dots,-1\}}^{-1} \overline{d}_{\{1,\dots,g\}}\big)(\beta_g) = \beta_g$$

由（S16）得证。证明至此结束。 □

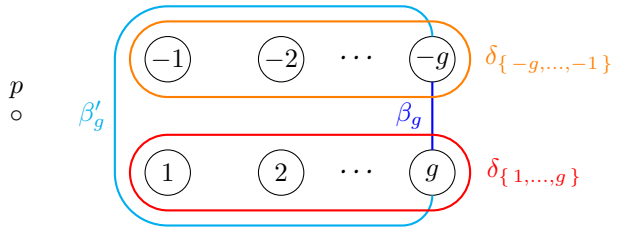


FIGURE 31. 界定一个包含标记点 p的环带的一对曲线。

注 6.2. 根据 [8], , 定理 5.6 和定理 6.1 中出现的所有关系都可以用辫子、链和灯笼来表示。（S1）和（S2）显然如此。由（3）之后的注释可知，（S3）是两个正 7-链和两个负 6-链的组合。此外，（S5）至（S11）都是 Artin关系，因此显然可以表示为灯笼的乘积，其总指数模辫子为零。

对于其余关系，回顾注释 4.5：若 $|I| = n$，则 d_I 可写成恰好使用 $(n-1)(n-2)/2$ 个灯笼的 $d_{i,j}$ 的乘积。由于每个 $d_{i,j}$ 都可以通过与一个负灯笼取乘积写成可容许扭转的乘积，我们可知 d_I可以分解为使用 $1-|I|$ 个灯笼的乘积（按重数计）。例如，根据命题 5.1，一个伪 3 链涉及一个 3 链和 6 个灯笼。对于 (S4) 的前两个关系，这一点显然成立。对于 (16)，左边有 $2(3-(j-i))$ 个灯笼，右边有 $-2(j-i)$ 个灯笼，因此这一点仍然成立。

按这种方式对灯笼计数并计入符号后，我们看到，(S12)–(A11) 和 (S16) 中出现的每个关系所涉及的灯笼总数均为零。注意，(17) 来自 Mod(Σ_g) 中的一个灯笼，因此还额外涉及一个（正）灯笼。

对于 (S16)，我们得到总计 $1-2g+2g=1$ 个灯笼。注意，由于曲线 $\delta_{\{-g,\ldots,g\}}$ 在 Σ_g 上围成一个圆盘，剩下的灯笼有一个平凡的边界分支。

推论 6.3 (Randal-Williams [23], Sierra [26])。 偶自旋映射类群的阿贝尔化为 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$，其中 $g \geq 4$。

证明。 取定理 5.6 的表示，并加入所有交换子。关系 (S1) 表明，所有生成元都变为相等于某个 x。关系 (S5)–(S11) 变为平凡关系。由关系 (S2) 可得 $28x = 0$，而关系 (S3) 给出 $56x = 0$。

对于其余关系，我们必须将 s_i、t_i、a_i^2、d_I 和 $r_{i,j}$ 的类写入阿贝尔化中。根据引理 5.4，$d_{1,2}$ 和 a_1^2 变为零，它们的共轭元 a_i^2 和 $d_{i,j}$（其中 $i \neq j$）也如此。因此，我们得到 $s_j = t_j = r_{1,j} = 2x$，对所有 j 均成立。最后，$d_{-1,1}$ 及其共轭元 $d_{-j,j}$ 均变为 $4x$。因此，对于 $i < 0$ 和 $j > -i$，有 $d_{\{i,\ldots,j\}} = 4|i|x$ 和 $r_{i,j} = 4|i|x + 2$。

因此，关系 (S4) 给出 $4x = 0$，而 (S13)-(S16) 并未对 x 的阶施加其他限制。证明至此完成。□

6.1. **低亏格曲面**。本节给出亏格为 1、2 和 3 的曲面的偶自旋映射类群表示。我们从环面的情形开始，其表示可以通过手工推导得出。

命题 6.4. 环面的偶自旋映射类群由下式给出

$$\mathrm{Mod}(\Sigma_1)[\phi] = \left\langle a^2, b \,\middle|\, (a^2b)^2 = (ba^2)^2,\ (a^2b)^4 = 1 \right\rangle,$$

其中 $a^2 = t_{\alpha_1}^2$ 和 $b = t_{\beta_1}$ 采用图*20*中的记号。

证明。 只需证明 $\mathrm{Mod}(\Sigma_1)[\phi]$ 由 a^2 和 b生成；然后利用尼尔森-施赖尔方法即可轻松得出结论。

元素 $\varphi \in \mathrm{Mod}(\Sigma_1)$可表示为词 $a^{k_1}b^{\ell_1}\dots a^{k_n}b^{\ell_n}$，其中$k_1, \ell_1, \dots, k_n, \ell_n$为某些整数。若 φ保持 ϕ不变，我们将对 n进行归纳，证明 φ可写成 a^2和 b的乘积。基例是引理 2.12(b)。对于归纳步骤，注意若 φ保持 ϕ不变，则 $\varphi b^{-\ell_n} = a^{k_1}b^{\ell_1}\dots b^{\ell_{n-1}}a^{k_n}$也如此。若 k_n为偶数，则由归纳法得出结论。否则，

$$\varphi b^{-\ell_n}a^{-k_n+1} = a^{k_1}b^{\ell_1}\dots a^{k_{n-1}}b^{\ell_{n-1}}abb^{-1} = a^{k_1}b^{\ell_1}\dots a^{k_{n-1}+1}ba^{\ell_{n-1}}b^{-1}$$

保持 ϕ不变。若 ℓ_{n-1} 为偶数，则由归纳法得出结论。否则，

$$\varphi b^{-\ell_n}a^{-k_n+1}ba^{-\ell_{n-1}+1} = a^{k_1}b^{\ell_1}\dots b^{\ell_{n-2}}a^{k_{n-1}+1}ba = a^{k_1}b^{\ell_1}\dots b^{\ell_{n-2}+1}ab^{k_{n-1}+1}$$

保持 ϕ不变，因此由归纳法得出结论。 □

对于 2 属也可以进行类似的推理，但在这种情况下，我们应用定理 4.1 和定理 6.1。

推论 6.5。 偶自旋映射类群$\mathrm{Mod}(\Sigma_2)[\phi]$ 有如下生成元表示： a_1^2, b_1, t_1, $d_{1,\,2}$，以及以下关系：

(i) $[a_1^2, t_1 * a_1^2] = 1$, $[a_1^2, \overline{d}_{1,2}] = 1$, $[t_1 * a_1^2, b_1] = 1$ *and* $[b_1, (t_1\overline{d}_{1,2}^{-1}) * b_1] = 1$;
(ii) $R_4(a_1^2, b_1)$ *and* $R_4(b_1a_1^2b_1, t_1)$;
(iii) $t_1^2 = \overline{d}_{1,2}^2$;
(iv) $R_2(t_1, \overline{d}_{1,2})$ *and* $R_4(b_1a_1^2b_1, \overline{d}_{1,2})$;
(v) $b_1 = (t_1b_1a_1^2b_1t_1) * b_1$, $[a_1^2\overline{d}_{1,2}, b_1\overline{d}_{1,2}a_1^2b_1] = 1$ *and*

$$t_1b_1\overline{d}_{1,2}a_1^2b_1\overline{d}_{1,2} = a_1^{-2}t_1\overline{d}_{1,2}^{-1}b_1\overline{d}_{1,2}a_1^2b_1;$$

(vi) $(t_1\overline{d}_{1,2}^{-1}b_1\overline{d}_{1,2}a_1^2b_1\overline{d}_{1,2}t_1^{-1})^2 = \overline{d}_{1,2}^{-2}a_1^{-2}(t_1 * a_1^2)^{-2}$;
(vii) $b_1^{-1}a_1^2b_1\overline{d}_{1,2}^{-1}b_1^{-1}\overline{d}_{1,2}^{-2}a_1^{-2}b_1 = \overline{d}_{1,2}^{-1}(t_1 * a_1^2)$ *and*

$$\overline{d}_{1,2}^{-1}b_1^{-1}\overline{d}_{1,2}a_1^2b_1\overline{d}_{1,2} = b_1^{-1}\big((t_1^{-1}b_1^{-1}a_1^{-2}b_1^{-1}) * \overline{d}_{1,2}\big)a_1^2b_1;$$

(viii) $t_1\overline{d}_{1,2}^{-1}b_1\overline{d}_{1,2}a_1^4b_1\overline{d}_{1,2}t_1^{-1}b_1t_1a_1^2b_1\overline{d}_{1,2}^{-1}t_1^{-1}b_1t_1b_1a_1^2(t_1 * a_1^2) = 1$;
(ix) $\overline{d}_{1,2} = (b_1a_1^2b_1t_1b_1a_1^2b_1) * \overline{d}_{1,2}$;
(x) $\overline{d}_{-2,-1,1,2}a_1^2(t_1 * a_1^2) = 1$.

证明。 写出定理 4。1 中关于 $g = 2$ 的表示，加入关系 (S15) 和 (S16)，并去掉 $a_2^2 = t_1 * a_1^2$ 和 $s_1 = b_1a_1^2b_1$。利用 (A4) 和 (A8)，可以消去除 $d_{1,\,2}$ 以外的所有 $d_{i,\,j}$。然后，在关系 (A1)、(A3)、(A6) 和 (A7) 中，只有 (i) 和 (ii) 保留下来。利用 (ix)，关系 (A4) 化为 (iii)。关系 (A8) 和 (A2) 如第5.3节所示化为 (iv)。(A9) 和 (A10) 分别变为 (v) 和 (vi)，而 (A12) 如第5.3小节所示由 (iii) 推出。最后，(A11) 和 (A13) 化为 (vii) 和 (viii)。□

最后，我们转向亏格 3 的情形。在这种情况下，我们能够证明偶自旋映射类群由可容许德恩扭转生成，这一点此前尚不为人所知。请注意，根据 [9]，生成集中的曲线的交图不可能是一棵树。

我们的生成集将由定理 5.6 中的 Dehn 扭转，以及 z_1、z_2 给出；后两者是沿图32中相应曲线的扭转。我们得到引理 5.8 的如下重述。

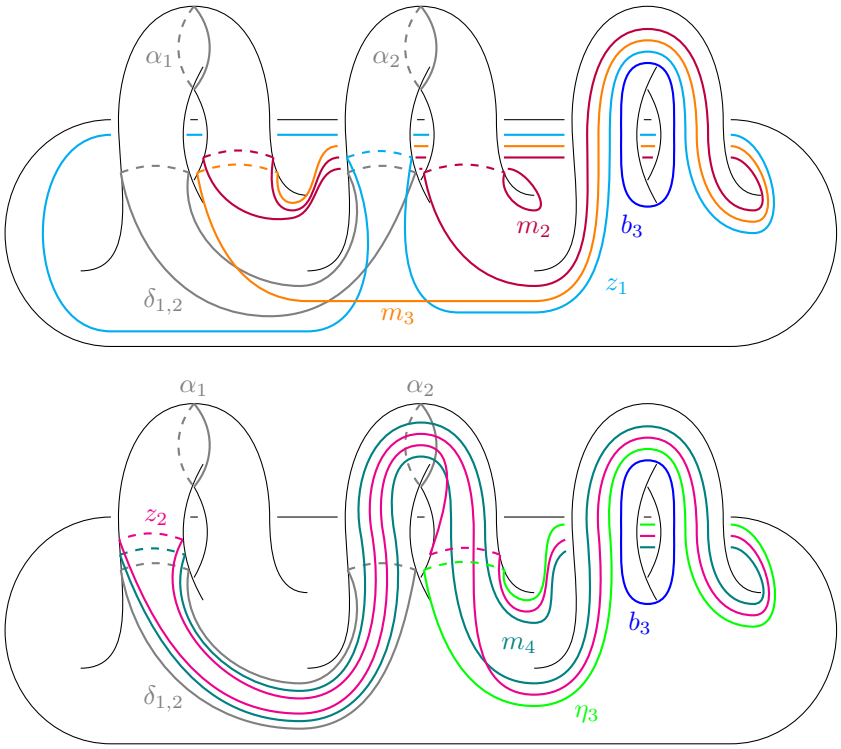


FIGURE 32. Mod(Σ_3) 的额外生成元及相应的灯笼。这里，灰色曲线的自旋值为 1，其余曲线均为可容许曲线。

引理6.6。 在引理 5.8 和图*32*的记号下，以下关系在 $\mathrm{Mod}(\Sigma_3)[\phi]$ 中成立：

(i) $d_{1,\ 2} = b_3 m_2 z_1^{-1} m_3^{-1}$；*(ii)* $d_1^{-1-}{}_{,\ 2} a_1^{-2} = \eta_3 b_3 z_2^{-1} m_4^{-1}$；*(iii)* $a_1^2 = m_4 z_2 \eta_3^{-1} b_3^{-1} m_3 z_1 b_3^{-1} m_2^{-1}$。

由定理 6.1 可立即得到以下推论（另参见注 5.5）。

推论 6.7。 偶自旋映射类群$\mathrm{Mod}(\Sigma_3)[\phi]$ 有一个表示，其生成元为 $b_1, b_2, b_3, \xi_1, \xi_2, \eta_2, \eta_3, z_1, z_2$，关系如下：

(i) 生成元之间显然的交换关系和辫子关系；*(ii)* 关系 *(S2)*、*(S4)* 和 *(S8)–(S14)*；*(iii)* 双曲关系 $(b_3\xi_2\xi_1 b_2 \eta_3 \eta_2 b_1^2 \eta_2 \eta_3 b_2 \xi_1 \xi_2 b_3)^2 = 1$；*(iv)* $[z_2, m_2] = 1$ 和 $[m_3 z_1, m_4 z_2] = 1$。

由此，我们可以计算每个亏格下偶自旋映射类群的阿贝尔化。Sierra [26] 使用 GAP 对 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^1)[\phi]$ 得出了类似结果。

推论 6.8. $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)[\phi]$ 在 $g \le 3$ 下的阿贝尔化如下：

$$H_1\big(\mathrm{Mod}(\Sigma_g)[\phi];\mathbb{Z}\big) = \begin{cases} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \text{if } g=1,\\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{if } g=2,\\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \text{if } g=3. \end{cases}$$

证明。我们从 $g=1$ 开始。考虑命题 6.4 的表示，并加入交换子 $[a^2,b]=1$。关系 $R_4(a^2,b)$ 变得冗余，而 a^2b 的阶为 4。这便得出所述结论。

对于 $g=2$，我们从推论 6.5 的表示开始，并加入所有交换子。关系 (viii) 给出 $t_1=(b_1^6a_1^{10})^{-1}$，由 (v) 可得 $a_1^2=d_{1\,2}^{-2}$。因此，阿贝尔化由 $d:=d_{1,2}$ 和 $b:=b_1$ 生成。关系 (vi) 得出 $(b^2\bar{d^{-3}})^2=1$，其余所有关系都变得多余。

对于 $g=3$，证明与推论 6.3 的证明完全相同。 □

References

[1] R. İ. Baykur, N. Hamada, *Lefschetz fibrations with arbitrary signature*, 欧洲数学会杂志 26 (2024), no. 8, 2837 2895 – [2] R. I. Baykur, K. Hayano, N. Monden, *Unchaining surgery and topology of symplectic 4–manifolds*, Math. Z. 303 2023 77 ( ) art. id. F. Bianchi, *LH splittings and the signature of spin 4-manifolds*, in preparation [4] J.S. [3] Birman, *Mapping class groups and their relationship to braid groups*, Comm. Pure Appl. Math. 22 (1969 213 238), – A. *Higher spin mapping class groups and strata of Abelian differentials over Te-* [5] Calderon, N. Salter, *ichmüller space* 389 2021 , 107926 Adv. Math. ( ), Paper No. [6] A. Calderon, N. Salter, *Framed mapping class groups and the monodromy of strata of abelian differentials*, 欧洲数学会杂志 (2022), (to appear) [7] B. Farb, D. Margalit, *A Primer on Mapping Class Groups*, 普林斯顿大学出版社 (2011) [8] S. Gervais, *Presentation and central extensions of mapping class groups*, 美国数学会汇刊 348 (1996), 3097-3132 [9] U. Hamenst¨adt, *Generating the spin mapping class group by Dehn twists*, 亨利·勒贝格年刊 4 (2021), 1619-1658 [10] J. L. Harer, *Stability of the homology of the moduli spaces of Riemann surfaces with spin structure*, Math. Ann. 287 1990 323 334 ( ), – J. L. Harer, *The rational Picard group of the moduli space of Riemann surfaces with spin structure*, in “映射类群与黎曼曲面模空间 (G¨ottingen, 1991/西雅图, WA, 1991)”, 当代数学 150, 1993 107 136 美国数学会 [12] ( ), - J. L. Harer, *The second homology group of the mapping class group of an orientable surface*, 数学发明 72 1983 221 239 ( ), – A. Hatcher, W. P. Thurston, *A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface*, 拓扑学 19 1980 221 237 ( ), - S. Hirose, *On diffeomorphisms over surfaces trivially embedded in the 4-sphere*, Algebr. [14] Geom. Topol. 2 (2002 791 824), – S. Hirose, *Surfaces in the complex projective plane and their mapping class groups*, Algebr. Geom. Topol. 5 2005 577 613 ( ), – S. P. Humphries, D. Johnson, [16] *A generalization of winding number functions on surfaces*, Proc. Lond. Math. Soc. (3 58 2 1989 366 386) ( ) ( ), – N. V. Ivanov, *Fifteen problems about the mapping class groups* *Problems on mapping class groups and* , *related topics* 71 80, 74, in , – 纯数学专题讨论会论文集, 美国数学会, Providence, RI [18] *Spin structures and quadratic forms on surfaces* 22 1980 365 373 D. Johnson, , J. Lond. [19] *Presentation du groupe de diffeotopies d'une surface compacte orientable* Math. Soc. ( ), - F. Laudenbach, , in Thurston 关于曲面的著作, Asterisque 66 67 1979 267 282 - ( ), – J. W. Milnor, , 数学教学 9 (1963), 198-203 [20] *Spin structures on manifolds*

[21] A. Putman, *A note on the abelianizations of finite-index subgroups of the mapping class group*, Proc. Amer. Math. Soc. 138 2010 2, 753 758 ( ), no. – O. Randal-Williams,
[22] *Homology of the moduli spaces and mapping class groups of framed r-Spin and Pin ,*, J. Topol. ( ), no. – *surfaces* 7 2014 1, 155 186
[23] O. Randal-Williams, *The Picard group of the moduli space of r-Spin Riemann surfaces*, Adv. Math. 231(1) (2012 482 515), - V. A. Rokhlin, *New results in the theory of four-dimensional manifolds*, 苏联科学院院刊 84 ([24] 1952 221 224), – N. Salter,
[25] *Monodromy and vanishing cycles in toric surfaces* 216 2019 1, 153 213 , 数学发明 ( ), no. – I. Sierra, ,
[26] *Homological stability of spin mapping class groups and quadratic symplectic groups* preprint (2022 2211 06219) arXiv . P. Sipe,
[27] *Rotats of the canonical bundle of the universal Teichmüller curve and certain subgroups of the mapping class group* 260 1982 1, 67 , Math. Ann. ( ), no. – 92
[28] *Some finite quotients of the mapping class group of a surface*P. Sipe, , Proc. Amer. Math. Soc. 97 (1986), no.3, 515–524
[29] *Spin structures on Lefschetz fibrations* 33 4 2001 466 472 A. Stipsicz, , Bull. Lond. Math. Soc.
[30] *The Kazhdan property of the mapping class groups of closed surfaces and the first coho-* ( ) ( ), - F. Taherkhani, *mology group of their cofinite subgroups* 9, 2 2000 261 , J ournal of Experimental Mathematics No. ( ), - 274
[31] *An elementary approach to the mapping class group of a surface* 3 1 1999 B. Wajnryb, , Geom. Topol. ( ) ( ), 405-466[32] B. Wajnryb, *Mapping class group of a handlebody*, Fundam. Math. 158 (1998), 195-228

Dipartimento di Matematica、 Università di Pisa、 Pisa、 Italy*Email address*: fil.bianchi5@gmail.com