一种深度学习增强的傅里叶方法，用于稀疏远场数据下的多频逆源问题

陈昊*、Yan Chang†、Yukun Guo‡、Yuliang Wang§

arXiv:2601.00427v1 [math.AP] 1 Jan 2026

摘要

本文针对由亥姆霍兹方程描述的多频逆源问题，提出了一种混合计算框架。通过将经典傅里叶方法与深度卷积神经网络相结合，我们应对稀疏且含噪远场数据所带来的挑战。傅里叶方法提供符合物理规律的低频源近似，并将其作为 U-Net 的输入。网络经过训练，可将这一粗略近似映射为高保真度的源重建结果，有效抑制截断伪影并恢复精细的几何细节。为提升计算效率和鲁棒性，我们提出一种高噪声到低噪声迁移学习策略：在高噪声环境下预训练的模型能够捕获全局拓扑特征，为利用低噪声数据进行微调提供稳健的初始化。数值实验表明，该框架在噪声水平高达 100% 时仍能实现准确重建，在稀疏测量条件下显著优于传统谱方法，并能良好地泛化至未见过的源几何结构。

AMS 学科分类：35R30, 76M21, 78A46, 68T07**关键词：**反散射，反源散射，亥姆霍兹方程，稀疏数据，深度学习，迁移学习

1 引言

逆源散射问题旨在根据远场测量值恢复未知源，并支撑医学成像 [1–3], 污染源识别 [4, 5], 和天线综合 [6, 7]等应用。尽管该问题具有重要的实际意义，但其本质上是不适定的：测量值仅在远场获取，而源是局部化的，因此微小扰动也可能导致较大的重建误差。在实际情况下，重建还必须应对稀疏的观测角度和测量噪声，这会进一步降低稳定性和分辨率。这些挑战推动了高效算法的发展，以便从有限且不完美的数据中提取可靠的源信息。

*北京师范大学数学研究中心，中国北京师范大学珠海分校，珠海 519087。*202331130059@mail.bnu.edu.cn*

†哈尔滨工业大学数学学院，中国哈尔滨 150001。*changyan@hit.edu.cn*

‡哈尔滨工业大学数学学院，中国哈尔滨 150001。*ykguo@hit.edu.cn*§通讯作者。温州肯恩大学国际前沿交叉研究院，中国温州 325060。*yulwang@wku.edu.cn*

针对该问题的数值算法通常分为两类：迭代方法和非迭代方法。迭代方法，例如牛顿型方法 [8,9] 和边界积分方法 [10],，通常能够提供较高的精度，但计算成本高，并且对初始化较为敏感。使用多频数据的递归算法 [11–13]有助于缓解局部极小值问题。非迭代方法，包括滤波反投影 [14,15]和特征函数展开 [16], ，具有较高的效率，但通常依赖密集数据。近年来，直接采样方法（DSM） [17,18] 和傅里叶级数展开方法 [19,20] 被用于通过指示函数或谱近似重建目标，但其性能会随着数据稀疏而下降。

深度学习已成为一种强有力的替代方案，能够克服经典求解器在效率和鲁棒性方面的局限。基于深度学习的方法大致可分为三类：监督式端到端学习、物理信息学习和混合方法。监督式端到端方法（例如采用 U-Net [21],SwitchNet [22], 或 Fourier-DeepONet [23]和可逆傅里叶神经算子（iFNO） [24], 等算子学习框架的方法）直接近似逆算子，但往往缺乏物理可解释性。物理信息学习将偏微分方程约束嵌入训练过程，例如用于参数恢复的物理信息神经网络 [25–27]。尽管这些方法严谨，但训练的计算开销可能较大。

将神经网络与经典反演技术相结合的混合算法，因能有效利用领域知识而日益受到关注。针对逆介质问题，将直接采样方法（DSM）与深度学习相结合的方法 [28],或采用两步增强策略的方法 [29], ，在散射体重建方面展现出良好前景。同样，Xu等人 [30] 开发了将对比源反演与卷积神经网络相结合、用于无相位数据的混合方案，而Zhou等人 [31]则采用改进的对比方案，以提升二维和三维重建效果。针对逆源问题，研究人员也探索了混合策略。Li等人 [32] 提出了一种数据辅助混合方法，用于重建随机源的均值和方差。Du等人 [33]开发了一种混合框架，将深度神经网络与贝叶斯反演相结合，以识别点源。

作为对这一混合研究方向的贡献，我们提出了一种用于确定性逆源问题的深度学习增强傅里叶方法。不同于前述针对统计源或离散源的策略，我们的方法处理连续源函数，旨在从稀疏远场数据中恢复精细的几何细节。不同于直接映射函数空间的算子学习框架，我们的方法将物理建模与数据驱动细化解耦。我们利用经典傅里叶方法，从稀疏多频数据中生成粗略的物理信息初始化。该近似结果作为 U-Net 的“热启动”，用于恢复多样的源几何结构并抑制截断伪影。这一表述将学习过程视为伪影校正与超分辨率过程，在稀疏数据约束下显著提升性能。我们进一步提出一种高噪声到低噪声迁移学习策略：在高噪声环境下进行预训练，使模型能够捕获稳健的结构先验，从而加快在低噪声数据上的收敛。

本文其余部分安排如下。第 2 节回顾经典傅里叶方法。第 3 节详细介绍所提出的深度神经网络模型和迁移学习策略。第 4 节通过数值实验验证该方法的有效性。最后，第 5 节总结全文。

2 问题设置

设 $S \in L^2(\mathbb{R}^2)$ 是一个源函数，使得 $\operatorname{supp} S \subset\subset V_0$，其中 V_0 表示以原点为中心的矩形区域。由 S 产生的声波 u 传播过程可由亥姆霍兹方程建模

$$\Delta u + k^2 u = S, \quad \text{in}\,\mathbb{R}^2, \tag{2.1}$$

其中 $k > 0$ 为波数。我们假设 S 与 k无关。 假设波场 u 满足索末菲辐射条件

$$\lim_{r=|x|\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \mathrm{i}ku\right) = 0, \tag{2.2}$$

(2.1)–(2.2) 的解为

$$u(x;k) = -\int_{V_0} \Phi(x,y;k) S(y)\mathrm{d}y,$$

其中

$$\Phi(x,y;k) = \frac{\mathrm{i}}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|)$$

是亥姆霍兹方程的基本解， $H_0^{(1)}$ 为零阶第一类汉克尔函数。根据 $H^{(1)}{}_0$ [34]的渐近行为， $u(x;\ k)$ 可渐近展开为

$$u(x;k) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}}{\sqrt{|x|}} \left\{ u^\infty(\hat{x};k) + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}, \quad |x| \to \infty, \tag{2.3}$$

在所有方向 $\hat{}x = x/|x|$上一致。 在 (2.3) 中， u^∞ 为远场模式，定义为

$$u^\infty(\hat{x};k) = -\gamma \int_{V_0} S(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\hat{x}\cdot y}\mathrm{d}y,\ \hat{x} \in \mathbb{S},$$

其中$\mathbb{S} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 :\ |x| = 1\right\}$，且 $\gamma = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}}$。

本文关注以下反问题：

问题 2.1（具有远场模式的多频逆源问题）给定有限个频率$\{k\}$，根据远场数据$\{u^\infty(\hat{}x_k;\ k)\}$确定源函数 $S(x)$，其中观测方向$\hat{}x_k$ 取决于 k。

图1示意性地展示了几何设置，其中黄色区域表示 S 的支集，红色方框表示积分区域 $V_0 = \left(-\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)^2$，其选取满足 $S \subset\subset V_0$。定义傅里叶基函数 $\phi_{\boldsymbol{l}}(x) = \exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{a}\boldsymbol{l}\cdot x\right)$，其中 $\boldsymbol{l} \in \mathbb{Z}^2$，$x \in V_0$。源函数 $S(x)$由截断的傅里叶展开近似为

$$S_N(x) = \sum_{|\boldsymbol{l}|_\infty \le N} \hat{s}_{\boldsymbol{l}} \phi_{\boldsymbol{l}}(x), \tag{2.4}$$

其中，$\hat{s}_{\boldsymbol{l}}$ 是傅里叶系数， N 是截断频率。

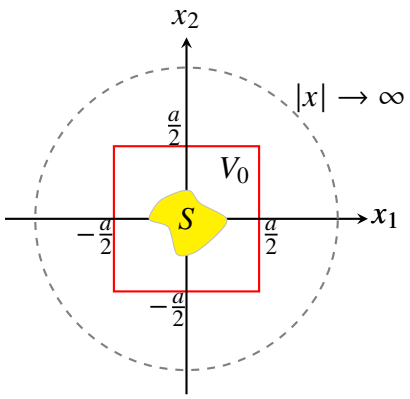


图1：逆源散射问题示意图。

对于 $\boldsymbol{l} \in \mathbb{Z}^2$，定义波数 $k_{\boldsymbol{l}}$ 和观测方向 $\hat{x}_{\boldsymbol{l}}$ 如下：

$$k_{\boldsymbol{l}} = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{a}|\boldsymbol{l}|, & \boldsymbol{l} \in \mathbb{Z}^2\backslash\{\mathbf{0}\}, \\ \dfrac{2\pi}{a}\lambda, & \boldsymbol{l} = \mathbf{0}, \end{cases} \qquad \hat{x}_{\boldsymbol{l}} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}, & \boldsymbol{l} \in \mathbb{Z}^2\backslash\{\mathbf{0}\}, \\ (1,0), & \boldsymbol{l} = \mathbf{0}, \end{cases} \tag{2.5}$$

其中，$\lambda > 0$ 是满足 $\frac{2\pi}{a}\lambda < \frac{1}{2}$ 的常数。根据 [20]，由相应的远场数据 $u^\infty(\hat{x}_{\boldsymbol{l}}; k_{\boldsymbol{l}})$ 计算 $\hat{s}_{\boldsymbol{l}}$ 的公式如下：

$$\hat{s}_{\boldsymbol{l}} = -\frac{u^\infty(\hat{x}_{\boldsymbol{l}}; k_{\boldsymbol{l}})}{a^2\gamma}, \quad \boldsymbol{l} \in \mathbb{Z}^2\backslash\{\mathbf{0}\}, \tag{2.6}$$

$$\hat{s}_{\mathbf{0}} = -\frac{\lambda\pi}{a^2 \sin\lambda\pi}\left(\frac{u^\infty(\hat{x}_{\mathbf{0}}; k_{\mathbf{0}})}{\gamma} + \sum_{1\le|\boldsymbol{l}|_\infty\le N} \hat{s}_{\boldsymbol{l}} \int_{V_0} \phi_{\boldsymbol{l}}(y)\overline{\phi_{\boldsymbol{l}_0}(y)}\mathrm{d}y\right), \quad \boldsymbol{l}_0 = (\lambda, 0). \tag{2.7}$$

显式公式（2.6）–（2.7）提供了一种直接重建傅里叶系数的方法（推导见 [20]）。实际上，如果远场数据受到噪声污染，记为 u^∞_δ，我们将 u^∞_δ 代入（2.6）–（2.7），以获得受扰动的傅里叶系数 $\hat{s}^\delta_{\boldsymbol{l}}$。含噪傅里叶近似定义为 $S^\delta_N(x) = \sum_{|\boldsymbol{l}|_\infty\le N}\hat{s}^\delta_{\boldsymbol{l}}\phi_{\boldsymbol{l}}(x)$。

3 深度学习增强傅里叶方法

尽管经典傅里叶方法能够显式重建源函数，但其精度受到截断频率 N 的严格限制。如（2.4）和（2.5）所示，捕捉精细尺度的细节需要较大的 N，这又要求进行密集的多频率和多角度测量。在许多实际场景中，此类数据要么无法获得，要么受到噪声污染。当受限于稀疏数据（较小的 N）时，截断傅里叶级数 S_N 会产生平滑但低分辨率的近似，从而有效滤除高频细节。虽然增大 N 可以恢复更精细的结构，但通常会在不连续点周围引入振铃伪影（吉布斯现象），并加剧对噪声的敏感性。

为克服经典方法的分辨率限制，我们将问题表述为学习截断算子 A 的逆映射。该算子将真实源 S 映射为其带限近似 $S_N = \mathrm{A}(S)$。我们使用深度神经网络 G_Θ 来近似逆映射 A^{-1}，其参数为 Θ。这被视为图像到图像

转换任务，即网络根据傅里叶近似恢复源：

$$S \approx \mathcal{G}_\Theta(S_N).$$

为了学习这一映射关系，我们最小化损失度量 L，以量化网络输出与真实值之间的差异。参数 Θ 通过随机梯度下降进行更新：

$$\Theta \leftarrow \Theta - \frac{1}{|\mathcal{I}|}\sum_{k\in\mathcal{I}} \tau \nabla_\Theta \mathcal{L}\left(\mathcal{G}_\Theta(S_{N,k}), S_k\right),$$

其中，τ 为学习率，I 表示训练数据中一个小批量的索引集。通过接触多样化的示例，网络学会抑制噪声、消除伪影，并恢复带限傅里叶重建中丢失的高频细节。与将远场数据直接映射到源函数的端到端方法相比，这种混合方法结合了傅里叶方法的物理可解释性与深度学习的模式识别能力。因此，在测量值稀疏或含噪等具有挑战性的条件下，可以获得更加准确、稳定的重建结果。需要强调的是，神经网络并非从头学习正向或逆散射算子；相反，它以数值方式近似一个固定的低频傅里叶截断算子的逆，从而使学习任务集中于伪影抑制和分辨率提升。

3.1 训练集

我们使用深度学习来增强初始傅里叶重建。这种方法能否成功，取决于能否构建有效的数据集，其中截断频率 N 的选择起着关键作用。这一选择体现了一个重要的稳定性–分辨率权衡：

- 数据获取的可行性：如（2.5）所述，该方法需要特定波数 k_l 和观测方向 $\hat{x}_l$上的远场数据。所需测量值的数量随 N增长，因此在实际应用中，大规模 N 的成本高得令人难以承受。

- 高频不稳定性：众所周知，高频傅里叶系数极易受到测量噪声的影响。较小的 N 可作为正则化参数，确保初始重建稳定，尽管其分辨率较粗。

3.2 U-Net架构

我们采用 U-Net架构 [35]作为深度学习模型的骨干网络。作为一种全卷积网络，与传统的卷积自编码器相比，U-Net表现出更优异的性能，尤其是在训练数据有限时。图2所示的架构采用对称的 U 形设计，由两条主要路径组成。收缩路径（左侧）由重复的模块组成，每个模块包含两个连续的卷积操作（卷积、批归一化和ReLU激活），随后接一个最大池化层。每经过一次卷积，特征图的空间尺寸减半，通道数则加倍。相反，扩展路径（右侧）与收缩路径相对应，但采用 3×3 转置卷积进行上采样，使尺寸恢复至与收缩路径相应层级一致。至关重要的是，跳跃连接将两条路径相连，把高分辨率特征图传递至扩展路径，以保留下采样过程中丢失的精细空间信息。

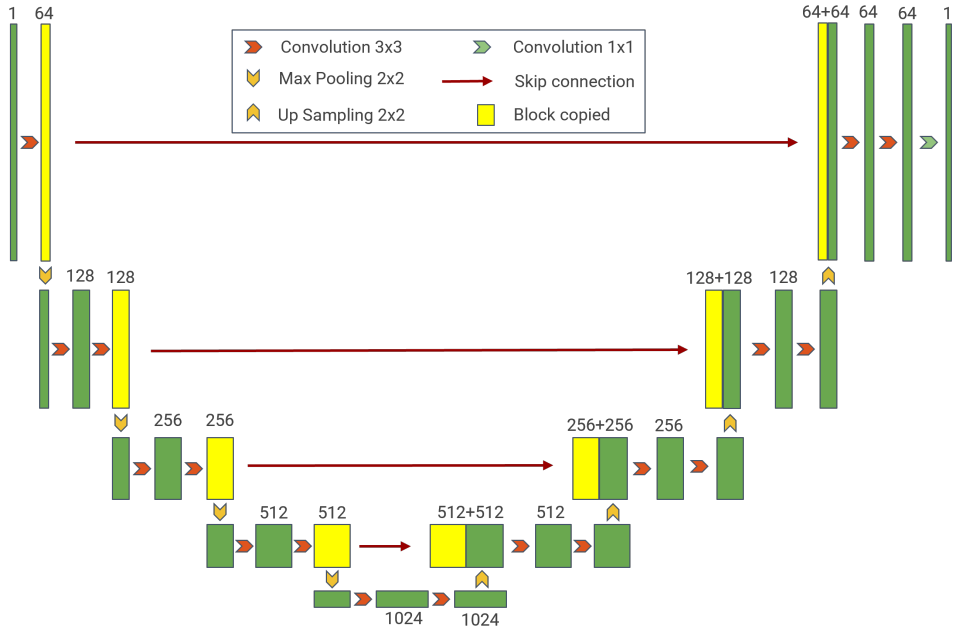


图2：本研究所用 U-Net架构示意图。

令 $\{(S^{\delta}_{N,\,i},\ S_i)\}_{i=1}^{M}$ 为训练数据集。这里，$S^{\delta}_{N,\,i} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是通过傅里叶方法从测量数据计算得到的矩阵（网格尺寸为 $n = 64$），$S_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是离散化的真实值，M 是样本总数。为训练 U-Net G_Θ，我们最小化均方误差（MSE）损失：

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}(\|S - \mathcal{G}_\Theta(S^{\delta}_N)\|^2_{L^2}),$$

其中，$\mathbb{E}$ 表示对训练数据集所诱导分布的期望。实际应用中，通过对一个小批量上的损失取平均来近似该期望。尽管我们也考虑了其他指标，例如 L^1 损失，或确定性正则化项（如总变差），但实验表明，L^2 损失能够带来更优的重建质量。

3.3 迁移学习策略

所提出的框架支持针对固定截断频率 N，在特定噪声水平下进行训练。然而，标准 U-Net模型通常针对训练期间遇到的噪声水平进行专门优化。针对每种新的噪声条件都从头开始训练一个独立模型，计算效率低下，也无法充分利用问题中共享的数学结构。迁移学习通过复用在一个数据集上训练的模型，并以此初始化相关任务的训练，从而提高效率和性能。

我们采用迁移学习主要是为了加快训练过程，并提出了一种“由高噪声到低噪声”的迁移策略。首先，我们在高噪声数据集（例如，噪声水平为 100%）上训练 U-Net模型，得到模型 G^{δ}_{Θ}，使其学会在强烈干扰中识别源信号。从物理角度来看，在高噪声数据上训练会促使网络忽略局部波动，转而关注源的潜在全局结构和显著拓扑特征。随后，这个预训练模型 G^{δ}_{Θ} 被用作噪声水平较低的新任务 $\delta' < \delta$的初始化。接着，在新数据集上对参数 Θ 进行微调，以生成最终模型 $G^{\delta'}_{\Theta}$。这种策略起到了正则化作用，利用从难度更高的任务中学到的结构先验来引导低噪声任务中的优化，有助于避免陷入较差的局部极小值并加快收敛。

4 数值实验

本节通过一系列数值实验评估所提方法的有效性。为评估稳定性，我们在渐近数据 u^∞中加入随机噪声。含噪数据建模如下:

$$u_\delta^\infty := u^\infty + \delta |u^\infty| r_1 e^{i\pi r_2},$$

其中， r_1 和 r_2 是服从 $[-1,1]$上均匀分布的独立随机变量，$\delta > 0$ 表示噪声水平。

为获取多频远场数据，我们固定截断频率 N，并定义波数集合:

$$\mathbb{K}_N := \{2\pi|\boldsymbol{l}| : \boldsymbol{l} \in \mathbb{Z}^2, 1 \le |\boldsymbol{l}|_\infty \le N\} \cup \{2\pi\lambda\}, \quad \lambda = 10^{-3}.$$

由此得到总计$(2N+1)^2$ 个散射数据点。训练对由像素值分别为 S 和 S_N^δ的图像组成，这些图像在采样域 $V_0 = (-0。5，0。5)^2$上离散为 64×64 均匀网格。

我们的 U-Net 实现采用 3×3 卷积核和批归一化。训练和测试均在 PyTorch 中使用 Adam优化器 [36] 进行，批次大小为 32。所有计算均由 NVIDIA A100 80GB GPU 加速。我们使用归一化均方误差（NMSE）量化重建性能，其定义如下:

$$\text{NMSE} = \frac{\|\mathcal{G}_\Theta(S_N^\delta) - S\|_2^2}{\|S\|_2^2}.$$

4.1 基线验证：圆盘源重建

在第一个示例中，我们模拟由一至三个圆盘组成的源。圆盘的数量、圆心（位于 V_0 内）以及半径（从 [0.1,0.2] 中抽样）均进行均匀采样，仅保留完全包含于 V_0 内的配置。每个圆盘上的 $S(x)$ 强度从 $[-1,1]$ 中均匀抽取，重叠区域则赋予最近添加圆盘的数值。我们设定 $N = 3$，并通过傅里叶方法计算初始源函数$S_N^\delta(x)$。该数据集包含 2000 个样本，其中 1600 个用于训练，400 个用于测试。训练进行 200 个训练轮数，初始学习率为 0.001，并且每 5 个训练轮数衰减为原来的 0.9。噪声水平为 5%、50% 和 100% 时的重建结果如图3所示，同时还与经典傅里叶方法（$N = 10$）进行了比较。正如 [19],所指出的，傅里叶方法在重建分片常数源时通常会受到吉布斯现象的影响。我们的混合方法能够有效抑制这些伪影，清晰地解析尖锐边界和重叠区域。表1中的定量比较表明，U-Net 达到更低的

噪声水平	5%	50%	100%
傅里叶（$N = 10$）	9.24%	12.80%	23。58%
U-Net增强	5.35%	8.48%	9.62%

表1：不同噪声水平下圆盘源重建的归一化均方误差对比（例4.1）。

误差更低，且相比基线具有更强的噪声容忍度，即使后者使用了显著更多的测量值（$N = 10$）。此外，与纯谱方法相比，深度学习增强重建的背景更干净，振荡伪影也显著减少。

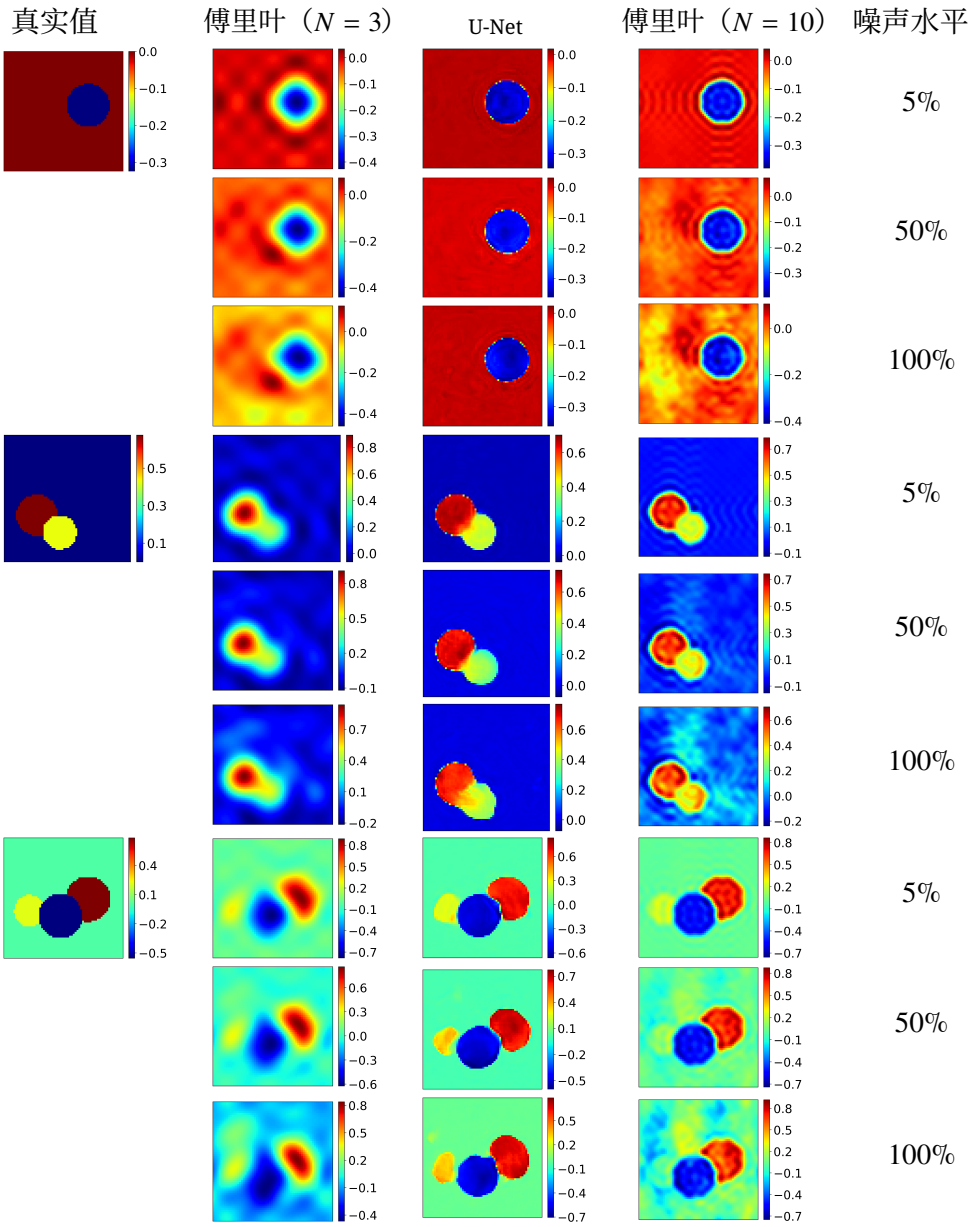
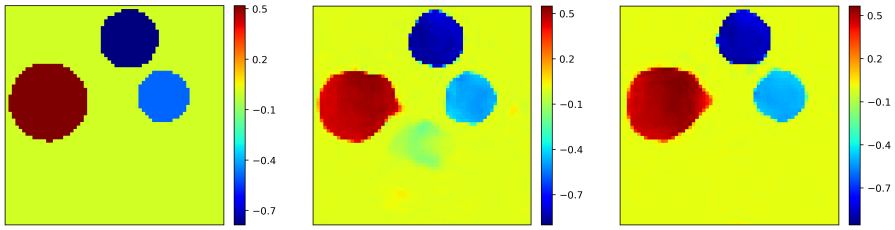


图3：噪声水平分别为 5%、50% 和 100% 时圆盘源的重建结果。从左到右各列依次为：真实源、经典傅里叶重建（$N = 3$）、U-Net增强重建（$N = 3$）和经典傅里叶重建（$N = 10$）。

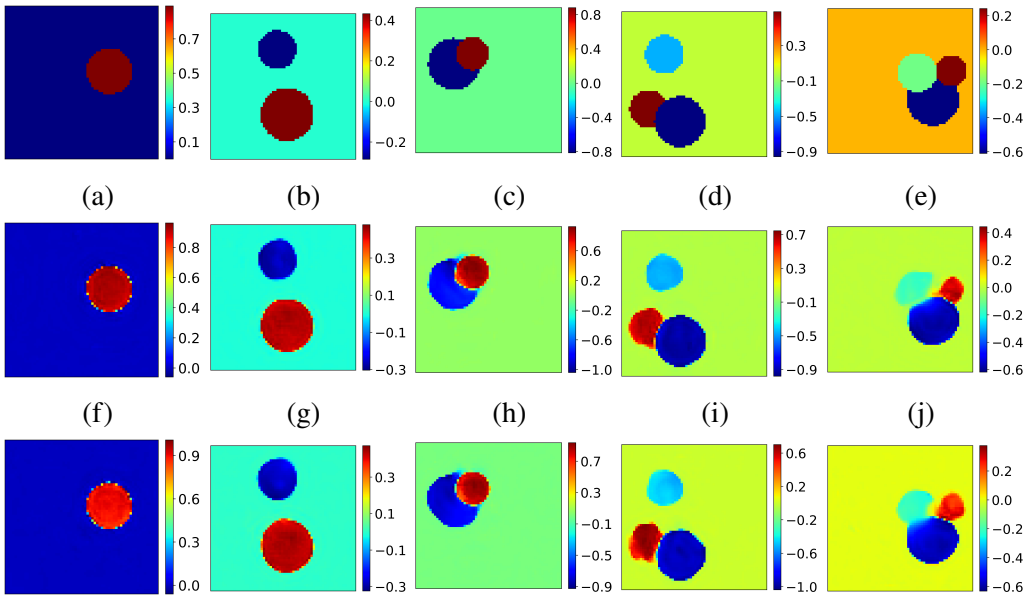
4.2 迁移学习验证：高噪声到低噪声策略



(a) (b) (c)

图4：在100%噪声数据上训练的网络应用于低噪声数据时的泛化性能。从左至右：真实源、噪声水平为5%时的重建，以及噪声水平为50%时的重建。

如图4所示，仅使用100%噪声数据训练的U-Net模型 G_Θ 直接应用于噪声水平为5%和50%的数据时，表现出很强的泛化能力。这表明，在极端噪声条件下训练有助于网络学习结构先验，使其在不同数据保真度下仍然有效。基于这一观察，我们研究了高噪声到低噪声的迁移学习策略：将100%噪声模型用作低噪声区域的预训练初始化。微调时，初始学习率设为0。0005，每5个训练轮数衰减一次，衰减因子为0。5；训练仅进行30个训练轮数，其他超参数保持不变。



(a) (b) (c) (d) (e)

(f) (g) (h) (i) (j)

(k) (l) (m) (n) (o)

图5：使用高噪声到低噪声迁移学习策略得到的微调重建结果。从上到下各行依次为：真实源、5%噪声重建结果和50%噪声重建结果。

所得重建结果及相关误差汇总于图5和表 2 中。迁移学习增强模型达到了与从头开始训练的模型相当的保真度。重要的是，预训练初始化使网络能够在显著更少的迭代次数内收敛，从而减少了训练时间和计算开销。这些结果证实，在高噪声数据上进行训练能够有效捕捉潜在的几何

方法	噪声水平	归一化均方误差	训练轮数
从头开始训练	5%	5.35%	200
迁移学习	5%	5。62%	30
从头开始训练	50%	8。48%	200
迁移学习	50%	7.44%	30

表 2：采用“从头开始训练”与以 100% 噪声模型初始化的迁移学习时，重建性能和训练效率的比较。

分布，为在更清洁的数据环境中进行细化提供了更优的起点。

4.3 复杂几何结构：MNIST 基准数据集

本实验使用手写数字 MNIST 数据集作为几何基准，评估该方法在极端稀疏和噪声条件下的鲁棒性。原始 28×28 图像被调整大小为 64×64 并归一化为$[0, 1]$。为抑制背景噪声，将低于 0.1 的值置零。我们设置最小截断频率为 $N = 2$，并生成 5000 个样本（4500 个用于训练，500 个用于测试）。模型训练 50 个训练轮数，初始学习率为 0.001，每 5 个训练轮数按 0.5 的因子衰减。为在逐像素误差之外量化结构保真度，我们采用结构相似性指数（SSIM） [37]:

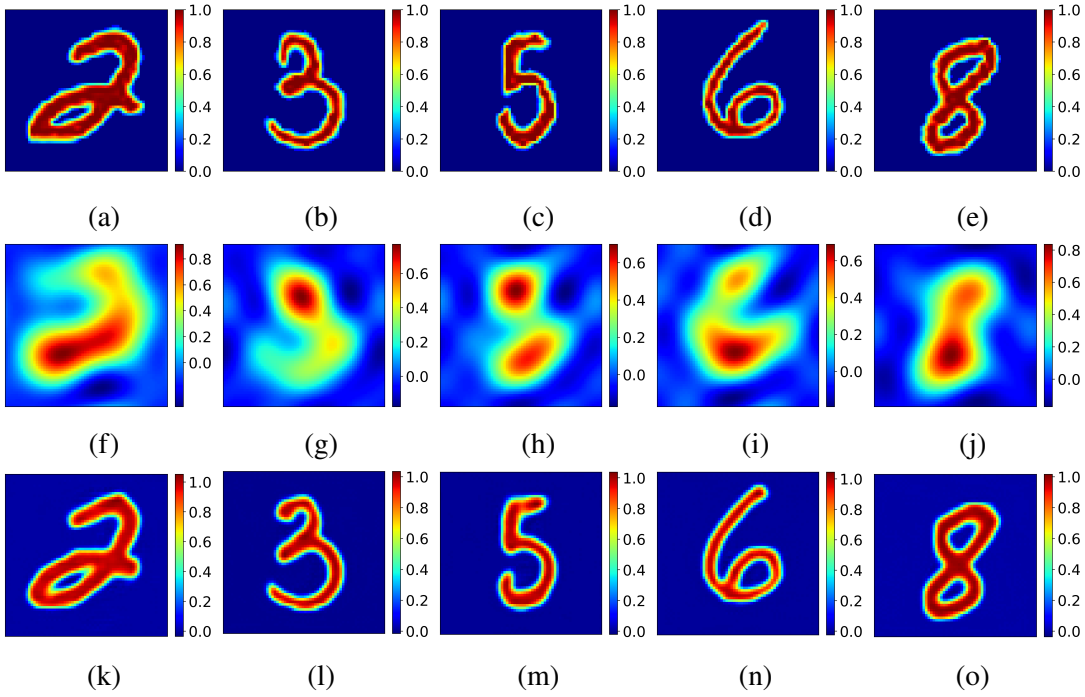
$$\mathrm{SSIM}(X, Y) = \frac{(2\mu_X\mu_Y + C_1)(2\sigma_{XY} + C_2)}{(\mu_X^2 + \mu_Y^2 + C_1)(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + C_2)},$$

其中，μ 和 σ 分别表示均值和标准差，σ_{XY} 表示协方差。常数 $C_1 = (K_1 L_X)^2$和 $C_2 = (K_2 L_X)^2$用于确保零值附近的数值稳定性，参数固定为 $L_X = 1$、$K_1 = 0.01$ 和 $K_2 = 0.03$。

如图6和图7所示，即使在高噪声和测量值极少的情况下（N =2），所提出的方法仍能成功恢复复杂的手写结构。图7中的统计结果直接对比了初始傅里叶重建与 U-Net 增强后的输出。尽管作为网络输入的初始傅里叶重建图像严重模糊且充斥伪影，U-Net 增强模型在 50%噪声下显著提升了保真度，平均归一化均方误差达到 0.07，结构相似性指数达到 0.92。这些结果表明，即使在强干扰和初始物理估计较差的情况下，该方法仍能保持稳定的性能。

4.4 分布外泛化：“Letter”数据集

为评估所提出方法的分布外泛化能力，我们在“Letter”数据集上对模型进行评估，该数据集由英文字母表中的字母图像组成。与训练时使用的数字相比，这些字符具有不同的几何拓扑结构和边缘分布。图8展示了噪声水平为 50% 时代表性样本的定性结果。尽管存在分布偏移和显著噪声，网络仍能根据极为有限的 $N = 2$ 初始输入保留字母复杂的拓扑特征。这表明，即使在初始物理估计较差的严峻条件下，模型也学到了具有良好泛化能力的结构先验。图9总结的定量性能进一步印证了这一观察：在整个数据集上，归一化均方误差始终较低，结构相似性指数始终较高。

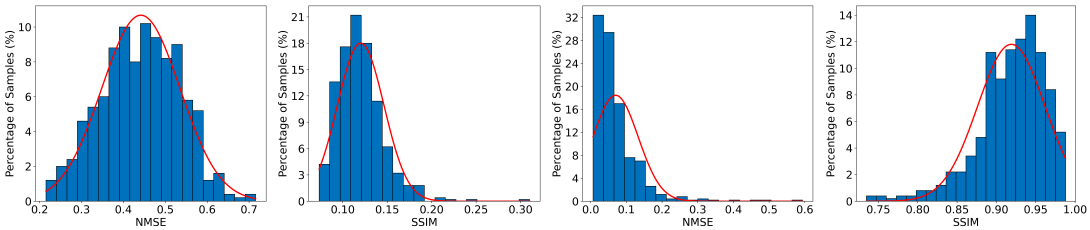


(a) (b) (c) (d) (e)

(f) (g) (h) (i) (j)

(k) (l) (m) (n) (o)

图6：50%噪声下 MNIST 手写数字的重建结果。从上到下依次为：真实源、傅里叶重建（$N = 2$，作为第三行 U-Net 的输入）和 U-Net 增强重建。



(a) (b) (c) (d)

图7：50%噪声下 MNIST测试集的归一化均方误差和结构相似性指数的统计分布。前两个子图表示傅里叶重建（$N = 2$），后两个表示 U-Net 增强重建结果。直方图采用正态密度函数拟合。

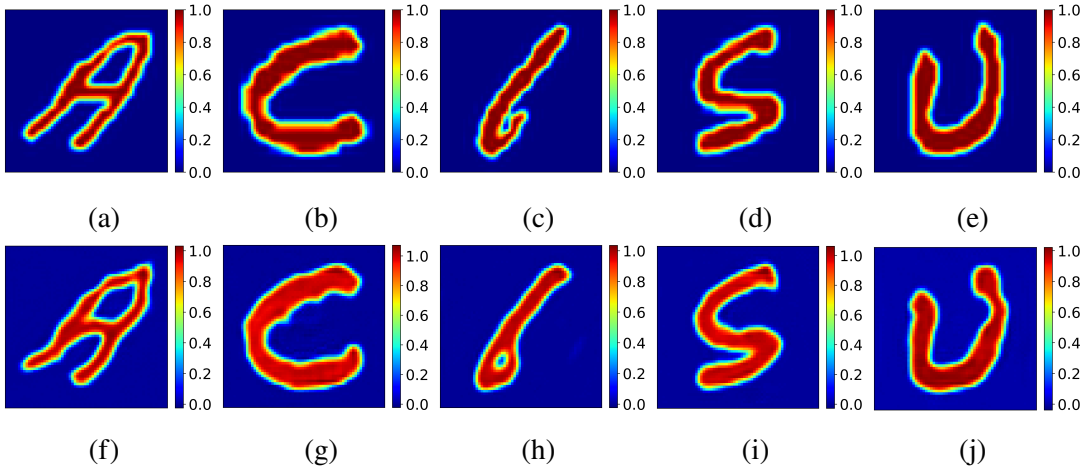


图8：“Letter”数据集在50%噪声下的重建结果。模型在MNIST数字上训练，彰显了其跨域泛化能力。从上到下各行依次为：真实源和U-Net增强重建。

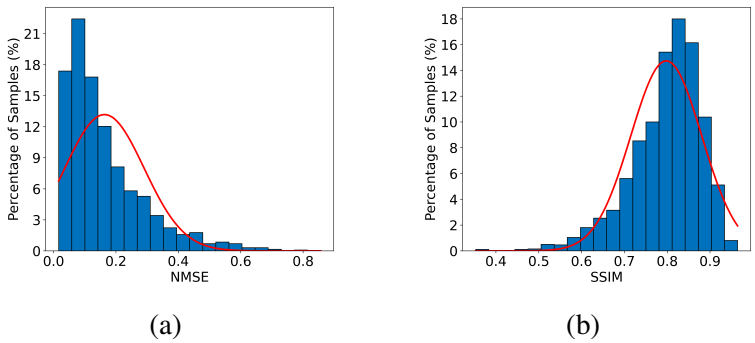


图9：“Letter”数据集在50%噪声下的归一化均方误差和结构相似性指数的统计分布。拟合结果表明，模型在分布外样本上表现稳定。

数值实验验证了该方法在各种条件下的准确性和效率。训练完成后，所提出的方法只需进行一次低成本的傅里叶重建，随后通过网络进行一次前向传播。与传统迭代求解器相比，这降低了计算成本，使得即使在数据稀疏的情况下也能快速完成重建。因此，我们的框架为数据有限条件下的逆源散射问题提供了一种稳健且计算高效的解决方案。

5 结论

本文提出了一种深度学习增强傅里叶方法，旨在缓解逆源散射问题的不适定性和对大量数据的需求。通过将U-Net架构与经典傅里叶方法相结合，我们的方法学习图像到图像映射，将易产生伪影的初始重建转化为高保真度的源表示。大量数值实验表明，所提出的混合框架利用稀疏的低频数据即可实现准确且稳定的重建，并且在极高噪声水平下仍表现良好。该模型还能泛化至分布外的源几何结构，并受益于由高到低的迁移学习策略，从而加快不同噪声条件下的收敛。

通过将谱方法的物理可解释性与深度神经网络的非线性逼近能力相结合，该框架为涉及不完整且含噪测量值的反问题提供了一种可行的方法。未来的工作将探讨定量数值误差分析、向三维构型的扩展，以及更广泛类别的波传播模型。

致谢

Yan Chang 获得国家自然科学基金委员会（NSFC；项目编号：12501584 和 12571452）及中国博士后科学基金会（项目编号：GZC20252762）的资助。Yukun Guo 获得国家自然科学基金委员会（NSFC；项目编号：11971133 和 12571452）的资助。Yuliang Wang 获得广东与香港高校“1+1+1”联合研究合作计划（项目编号：2025A0505000007）及广东省基础与应用基础研究基金一般项目（项目编号：2025A1515010201）的资助。

参考文献

[1] João M. Felício、José M. Bioucas-Dias、Jorge R. Costa 和 Carlos A. Fernandes。采用干式配置的微波乳腺成像。*IEEE*《计算成像汇刊》，6(1):167–180，2020。[2] Gang Bao、Habib Ammari 和 John L. Fleming。脑磁图中麦克斯韦方程组的逆源问题。《*SIAM*应用数学杂志》，62(4):1369–1382，2002。[3] Simon R Arridge。医学成像中的光学层析成像。《逆问题》，15(2):R41–R93，1999。[4] Maryam Barati Moghaddam、Mehdi Mazaheri 和 Jamal Mohammad Vali Samani。用于污染源识别的地表水和地下水污染物运移反演建模：综述。

《可持续发展地下水》，15:100651，2021。[5] Igor Malyshev。热方程的逆源问题。《数学分析与应用杂志》，142(1):206–218，1989。[6] Anthony J. Devaney、Edwin A. Marengo 和 Mei Li。非均匀背景介质中的逆源问题。《*SIAM*应用数学杂志》，67(5):1353–1378，2007。[7] Alexander G Ramm。多维逆散射问题。载于*DIPED- 99.* 电磁与声波理论的正问题与逆问题。第四届国际研讨会/专题讨论会论文集（*IEEE*目录号*99TH8402*），第22页。IEEE，1999。[8] Carlos Alves、Rainer Kress 和 Pedro Serranho。声波逆源问题的迭代方法和值域检验方法。《逆问题》，25(5):055005，2009。[9] Nuno FM Martins。使用基本解法解决位势问题中的源函数迭代形状重建。《科学与工程中的逆问题》，20(8):1175–1193，2012。[10] Rainer Kress 和 William Rundell。逆源问题的非线性积分方程与迭代算法。《积分方程与应用杂志》，27(2):179–198，2015。[11] Gang Bao、Peijun Li、Junshan Lin 和 Faouzi Triki。多频率逆散射问题。《逆问题》，31(9):093001，2015。[12] Gang Bao、Junshan Lin 和 Faouzi Triki。具有多频率数据的逆源问题。《法国科学院数学报告》，349(15-16):855–859，2011。[13] Gang Bao、Shuai Lu、William Rundell 和 Boxi Xu。多频声学逆源问题的递归算法。《*SIAM*数值分析杂志》，53(3):1608–1628，2015。[14] Roland Griesmaier、Martin Hanke 和 Thorsten Raasch。亥姆霍兹方程逆源问题与窗函数傅里叶变换。*SIAM JournalonScientificComputing*，34(3):A1544–A1562，2012。[15] Roland Griesmaier、Martin Hanke 和 Thorsten Raasch。亥姆霍兹方程逆源问题与窗函数傅里叶变换 II。*SIAM Journal onScientificComputing*，35(5):A2188–A2206，2013。[16] Matthias Eller 和 Nicolas P Valdivia。利用多频信息进行声源识别。《逆问题》，25(11):115005，2009。[17] Xiaodong Liu 和 Qingxiang Shi。弹性源和电磁源的定量采样方法。《计算物理学杂志》，539:114251，2025。[18] Deyue Zhang、Yukun Guo、Jingzhi Li 和 Hongyu Liu。使用直接采样方法定位多个多极声源。《计算物理通讯》，25(5):1328–1356，2019。[19] Deyue Zhang 和 Yukun Guo。求解亥姆霍兹方程多频逆源问题的傅里叶方法。《逆问题》，31(3):035007，2015。

[20] Xianchao Wang、Yukun Guo、Deyue Zhang 和 Hongyu Liu。利用傅里叶方法从多频远场数据中恢复声源。《逆问题》，33(3):035001，2017年。[21] Zhun Wei 和 Xudong Chen。用于全波非线性逆散射问题的深度学习方案。*IEEE Transactions on Geoscienceand Remote Sensing*，57(4):1849–1860，2019年。[22] Yuehaw Khoo 和 Lexing Ying。SwitchNet：一种用于正向和逆散射问题的神经网络模型。*SIAMJournal onScientificComputing*，41(5):A3182– A3201，2019年。[23] Min Zhu、Shihang Feng、Youzuo Lin 和 Lu Lu。Fourier-DeepONet：增强傅里叶特征的深度算子网络，用于提升全波形反演的准确性、泛化能力和鲁棒性。*ComputerMethods in Applied Mechanics andEngineering*，416:116300，2023年。[24] Da Long、Zhitong Xu、Qiwei Yuan、Yin Yang 和 Shandian Zhe。用于同时解决正向和反问题的可逆傅里叶神经算子。载于第*28*届人工智能与统计国际会议，第258卷，页码3043–3051，2025年。[25] Yuyao Chen、Lu Lu、George Em Karniadakis 和 Luca Dal Negro。用于纳米光学和超材料反问题的物理信息神经网络。*OpticsExpress*，28(8):11618–11633，2020年。[26] Majid Rasht-Behesht、Christian Huber、Khemraj Shukla 和 George Em Karniadakis。用于波传播和全波形反演的物理信息神经网络（PINNs）。*Journal ofGeophysical Research: Solid Earth*，127(5):e2021JB023120，2022年。[27] Yuxuan Chen、Ce Wang、Yuan Hui、Nirav Vasant Shah 和 Mark Spivack。利用物理信息神经网络从电磁场中恢复表面轮廓。*RemoteSensing*，16(22):4124，2024年。[28] Jianfeng Ning、Fuqun Han 和 Jun Zou。一种用于介质逆散射问题的基于直接采样的深度学习方法。《逆问题》，40(1):015005，2024年。[29] Hai-Ming Yao、Wei-En Jiang 和 Hua Zhang。一种用于电磁逆散射问题的两步增强深度学习方法。*IEEE AntennasandWireless Propagation Letters*，18(11):2254–2258，2019年。[30] Kuiwen Xu、Liang Wu、Xiuzhu Ye 和 Xudong Chen。利用无相位数据求解逆散射问题的基于深度学习的反演方法。*IEEETransactions on Antennas andPropagation*，68(11):7457–7470，2020年。[31] Yulong Zhou、Yu Zhong、Zhun Wei、Tiantian Yin 和 Xudong Chen。一种用于求解二维和三维逆散射问题的改进深度学习方案。*IEEETransactions on Antennas andPropagation*，69(5):2853–2863，2021年。[32] Peijun Li、Ying Liang 和 Yuliang Wang。一种用于随机源逆问题的数据辅助两阶段方法。*SIAM JournalonImaging Sciences*，16(4):1929–1952，2023年。

[33] Hang Du、Zhaoxing Li、Juan Liu、Yanfang Liu 和 Jiguang Sun。使用少量单频测量求解逆点源问题的分治深度神经网络方法。《逆问题》，39(11):115006，2023年。[34] David L Colton 和 Rainer Kress。声学与电磁逆散射理论。施普林格，Cham，第4版，2019年。[35] Olaf Ronneberger、Philipp Fischer 和 Thomas Brox。U-Net：用于生物医学图像分割的卷积网络。载于医学图像计算与计算机辅助干预——*MICCAI 2015*：第*18*届国际会议，慕尼黑，德国，*2015*年*10*月*5*日至*9*日，论文集，第*III*部分*18*，页码234–241，2015年。[36] Diederik P Kingma 和 Jimmy Ba。Adam：一种随机优化方法。*arXiv*预印本 *arXiv:1412.6980*，2014年。[37] Zhou Wang、Eero P Simoncelli 和 Alan C Bovik。用于图像质量评估的多尺度结构相似性。载于*2003*年第三十七届阿西洛马会议：信号、系统与计算机，第2卷，页码1398–1402。IEEE，2003年。