arXiv:2601.00432v1 [math.CO] 1 Jan 2026

离散 Imset 模型的代数研究

Amira Alkeswani

摘要

Studen ́y 提出的 imset 方法，为条件独立陈述提供了一种几何与组合描述。有限个随机变量上的初等条件独立陈述，可表示为生成多面体锥的矩阵的列向量。与 imset 相关的环面理想可用于列出条件独立关系，并识别随机变量之间的潜在依赖关系。本文考虑定义在三个和四个二元变量集合上的一种适当离散概率分布，以及二元与三元随机变量的组合，并研究与这些关系相关的条件独立理想。此外，我们还研究由初等 imset 锥的面诱导的 imset 模型的理想。

1 引言

一个条件独立（*CI*）陈述描述有限集合中随机变量之间的关系，这些变量由 $[n]$. 编号。它的形式为 $I \perp\!\!\!\perp J|K$，其中 I， J和 K是 $[n]$的互不相交子集。该陈述表示由 I 和 J编号的变量之间的 CI 关系，给定由 K编号的变量的联合概率。对于固定的 n，如果 I 和 J 都恰好包含一个元素，则称 CI 陈述为初等；此类陈述记为 $[i \perp\!\!\!\perp j \mid K]$。否则，该陈述称为非初等。我们用$\boldsymbol{\mathcal{E}}_n$ 表示关于 n个变量的所有初等 CI 陈述的集合。给定 n， $|\boldsymbol{\mathcal{E}}_n| = \sigma_n = \binom{n}{2} 2^{n-2}$.

通过 imset 方法，Studen ́y 为条件独立陈述 [1]提供了纯粹的几何与组合描述。在这种方法中，每个初等条件独立语句 $i \perp\!\!\!\perp j|K$ 都可以视为一个向量或一个$imset,$ 通过以下线性映射 [2]表示:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} : \mathbb{Z}^{\sigma_n} \mapsto \mathbb{Z}^{2^n}$$

$$[i \perp\!\!\!\perp j|K] \longmapsto e_{ijK} + e_K - e_{iK} - e_{jK}$$

$\boldsymbol{\mathcal{A}}$的列向量集合在 $\mathbb{R}^{2^n}$中生成一个维数为 $2^n - n - 1$ [3]的多面体锥。由初等 imset 以非负有理系数张成的锥内的格点称为结构 ***imset***。结构 imset 中有一类至关重要，它代表非初等条件独立性陈述；并且是两个或更多初等 imset 的和。这一特定的结构 imset 集合记为$\boldsymbol{\mathcal{S}}_n$. 将$\boldsymbol{\mathcal{S}}_n$ 中的 $[I \perp\!\!\!\perp J|K]$ 表示为一个向量，其分量在 $\mathbb{Z}^{2^n}$ 中取 -1、0 或 1，这与使用映射$\boldsymbol{\mathcal{A}}$将初等条件独立陈述表示为向量的过程类似。

令 $\mathbb{Q}[\boldsymbol{\mathcal{E}}_n]$ 表示由生成元 $[i \perp\!\!\!\perp j|K]$. Sturm- fels 等人在 [3] 上构成的有理数域上的多项式环。他们证明，环面理想 $I_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_n} \in \mathbb{Q}[\boldsymbol{\mathcal{E}}_n]$，是生成和分析条件独立关系的强大代数工具，能够有效地刻画 imset 的组合结构。其过程如下：该理想由二项式生成，这些二项式可以转化为条件独立关系的推论。这些推论进而对应于 imset 之间成立的代数方程。我们将这些方程称为初等条件独立关系，或等价地称为环面关系。

令 $\mathbb{R}[P_n]$, 为由以 $[n]$. 为索引的离散随机变量的联合概率生成的多项式环。我们将 $I_{[i \perp\!\!\!\perp j|K]}$ 记作 $\mathbb{R}[P_n]$ 中与对应于 $[i \perp\!\!\!\perp j|K]$. 的条件独立陈述相关联的理想。对于有限个条件独立陈述组成的集合，相应的理想 J 定义如下:

$$J = I_{[i_1 \perp\!\!\!\perp j_1|K_1]} + \cdots + I_{[i_m \perp\!\!\!\perp j_m|K_m]}.$$

通过对条件独立理想进行素理想分解并研究相关的独立簇，可以识别分解中与某些条件独立陈述相对应的极小素理想。这种方法为构造条件独立推理提供了一个有用的工具 $[4, 5]$。

本文研究由三个和四个离散随机变量构成的集合，包括纯二元变量以及二元变量与三元变量的混合情形。我们的目标是探究条件独立（CI）陈述的组合结构和几何结构与其内在代数性质之间的联系。在此过程中，我们给出若干计算结果和观察，并认为这些结果值得进一步研究。

特别是，我们探讨由 $I_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_n}$ 产生的条件独立关系能否表示为由$\boldsymbol{\mathcal{S}}_n$生成的关系。若可以，我们将研究与这些关系相关的理想的素理想分解，并考察其极小素理想能否恢复$\boldsymbol{\mathcal{S}}_n$中各条件独立陈述所对应的条件独立理想。

本文结构如下。第 2 节中，我们对 $I_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ 的马尔可夫基和 Graver 基产生的条件独立关系进行分类，并将其与$\boldsymbol{\mathcal{S}}_n$中的条件独立陈述联系起来。我们还根据这些关系的组合结构对其进一步分类，并在命题 2.1 中证明，每个二次二项式都会产生一个非初等条件独立关系。第 3 节中，我们研究与第 2 节计算得到的条件独立关系相关联的条件独立理想。命题 3.1 表明，当所有随机变量的状态数相同时，与初等条件独立关系相关联的条件独立理想彼此同构。最后，第 4 节中，我们展示关于 i mset 模型理想的计算结果。对于 $n = 3$，我们纳入由初等 imset 锥的各个面产生的所有 imset 模型；对于 $n = 4$，我们则提供由与非初等条件独立关系相关联的条件独立陈述生成的模型的代表性例子。

2 环面代数中的条件独立关系

本节中，我们对 $I_{\mathcal{A}}$ 的马尔可夫基和 Graver 基产生的初等条件独立关系进行分类，并阐明这些关系与$\mathcal{S}_n$，中的条件独立陈述之间的联系，尤其关注那些延伸为非初等条件独立关系的情形。

我们使用 *Macaulay2* 中的命令 [toricMarkov] 和 [toricGraver]，计算与$\mathcal{A}$ 及多项式环 $Q[\mathcal{E}_n]$. 相关的基。马尔可夫基中的二项式分量给出一份最小的条件独立关系清单，而 Graver 基 $Gr_{\mathcal{A}_n}$ 则提供一份更大的清单。由于后一个基仅由本原二项式构成，因此每个二项式都生成一个唯一的 条件独立关系；也就是说，该关系不包含在任何其他关系中。

对于 $n > 3$, 马尔可夫基中的二项式元素给出一份简洁的条件独立关系清单，而 $Gr_{\mathcal{A}_n}$ 则提供更全面的集合。由于后一个基仅由本原二项式构成，因此每个二项式都生成一个不同的 条件独立关系。在此语境中，「不同」意味着该关系不包含在任何其他关系中。

当 $n = 3$ 时，马尔可夫基与 Graver 基等价。二者都由三个属于同一对称类的二次二项式构成，其形式如方程 (2) 所示。这些二项式与半拟阵公理相关，并导出以下条件独立关系。下面给出一个代表性示例；其余两个可由对称性得到：

$$[1 \perp\!\!\!\perp 2|3 + 1 \perp\!\!\!\perp 2|\emptyset] = [1 \perp\!\!\!\perp 3|2 + 1 \perp\!\!\!\perp 2|\emptyset].$$

在 $n = 4$ 的情况下，马尔可夫基由 49 个元素组成，包括二次、三次和四次二项式。其中，24 个是二次式，可分为两个对称类。下面给出每个对称类的示例：

$$\begin{aligned} &\text{Class I} \quad [1 \perp\!\!\!\perp 2|\emptyset \cdot 2 \perp\!\!\!\perp 4|1] - [2 \perp\!\!\!\perp 4|\emptyset \cdot 1 \perp\!\!\!\perp 2|4], \\ &\text{Class II} \quad [3 \perp\!\!\!\perp 4|1 \cdot 2 \perp\!\!\!\perp 3|14] - [2 \perp\!\!\!\perp 3|1 \cdot 3 \perp\!\!\!\perp 4|12]. \end{aligned}$$

它还有四个属于同一对称类的三次式，例如：

$$[2 \perp\!\!\!\perp 3|1 \cdot 3 \perp\!\!\!\perp 4|2 \cdot 1 \perp\!\!\!\perp 3|4] - [3 \perp\!\!\!\perp 4|1 \cdot 1 \perp\!\!\!\perp 3|2 \cdot 2 \perp\!\!\!\perp |4].$$

其余的二项式分量都是四次式，可分为两类。下面给出每一类的代表：

$$[1 \perp\!\!\!\perp 2|4 \cdot 2 \perp\!\!\!\perp 4|3 \cdot 1 \perp\!\!\!\perp 3|2 + 3 \perp\!\!\!\perp 4|1] - [1 \perp\!\!\!\perp 3|4 \cdot 1 \perp\!\!\!\perp 2|3 \cdot 3 \perp\!\!\!\perp 4|2 \cdot 2 \perp\!\!\!\perp 4|1], \text{ and}$$

$$[2 \perp\!\!\!\perp 4|13 \cdot 1 \perp\!\!\!\perp 3|4 \cdot 1 \perp\!\!\!\perp 4|2 \cdot 2 \perp\!\!\!\perp 3|\emptyset] - [1 \perp\!\!\!\perp 4|23 \cdot 2 \perp\!\!\!\perp 3|4 \cdot 2 \perp\!\!\!\perp 4|1 \cdot 1 \perp\!\!\!\perp 3|\emptyset].$$

应注意这些生成元中条件独立陈述的组合结构。特别是在一个二项式中，一个单项式的条件独立陈述所涉及的随机变量，是其他单项式中陈述所涉及随机变量的排列 $\gamma \in S_n$ 。

集合 $Gr_{\mathcal{A}_4}$ 由 3667 个生成元组成。这些元素并非全部齐次；齐次二项式是指其对应向量的各坐标之和为零的二项式。然而，其中有 2,311 个二项式是齐次的，且每个变量的次数均为 1。

线性映射 $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 是一个 $2^n \times \sigma_n$ 矩阵。每个列向量都与一个初等条件独立语句相关联。对这些向量进行基本代数运算，并不总能得到表示条件独立陈述的向量。然而，集合 $\boldsymbol{\mathcal{S}}_n$ 中的每个非初等条件独立性陈述，都是至少两个初等条件独立陈述之和。将 imset s 表示为 $\boldsymbol{\mathcal{S}}_n$ 中若干初等 imset 之和的一种方法，是求解线性方程组 $\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot x = s.$。imset 复杂的组合结构使得 $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{n\cdot}$ 中的每个陈述都有多种表示方式。关于非初等条件独立性陈述特征的研究，见 [6]。

我们运用组合学列出 $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{n\cdot}$ 的元素。在 $n = 3,$ 的情形下，集合 $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ 包含三个饱和语句，它们属于同一个对称类，形式为 $ij \perp\!\!\!\perp k|\emptyset.$ 然而，$\boldsymbol{\mathcal{S}}_4$ 由 31 个陈述组成，可分为四种不同类型。下表列出了每种类型的形式及条件独立陈述的数量。

Type	**Form**	[**计数**]
类型 I	$ij \perp\!\!\!\perp kl\|\emptyset$	[3]
类型 II	$ijk \perp\!\!\!\perp l\|\emptyset$	[4]
类型 III	$ij \perp\!\!\!\perp k\|\emptyset$	[12]
类型 IV	$ij \perp\!\!\!\perp k\|l$	[12]

由于$\boldsymbol{\mathcal{S}}_n$ 中的每个条件独立陈述都是至少两个初等 imset 之和，因此，$I_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_n}$ 中变量次数为 1 的齐次二项式是表示此类 imset 的候选对象。我们使用映射A</style}来验证给定的二项式是否可以扩展为非初等条件独立关系。

命题 2.1 节。 $Gr_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_n}$ 的每个二次二项式都定义了一个非初等条件独立关系 .

证明。 每个二次二项式都与一个半拟阵公理相关联，该公理给出以下方程 [2]

$$[i \perp\!\!\!\perp j|K \cup l + i \perp\!\!\!\perp l|K] = [i \perp\!\!\!\perp j|K + i \perp\!\!\!\perp l|K \cup j],$$

上述方程中条件独立陈述在映射$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 下的像为:

$$[(e_{ijlK} + e_{lK} - e_{ilK} - e_{jlK}) + (e_{ilK} + e_K - e_{iK} - e_{lK})] = [(e_{ijK} + e_K - e_{iK} - e_{jK}) + (e_{ijlK} + e_{jK} - e_{ijK} - e_{jlK})]$$
$$[e_{ijlK} + e_K - e_{iK} - e_{jlK}] = [e_{ijlK} + e_K - e_{iK} - e_{jlK}]$$
$$[i \perp\!\!\!\perp jl|K] = [i \perp\!\!\!\perp jl|K].$$

Thus

$$[i \perp\!\!\!\perp j|K \cup l + i \perp\!\!\!\perp l|K] = [i \perp\!\!\!\perp j|K + i \perp\!\!\!\perp l|K \cup j] = [i \perp\!\!\!\perp jl|K].$$

□

利用 软件 *Macaulay2* 和上述命题，我们得出以下结果。

推论 2.1.1. 对于 $n = 3$，集合 $\boldsymbol{\mathcal{E}}_3$ 与半拟阵公理的集合之间存在双射。

证明。 计算表明， $I_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_3}$ 的马尔可夫基与 $Gr_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_3}$完全相同；二者都由三个形如方程（2）的二次二项式组成。集合$\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ 包含三个形如 $i \perp\!\!\!\perp jk|\emptyset$的陈述。

考虑映射 Φ ，其中 $n = 3$，定义为

$$\Phi : Gr_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_n} \to \boldsymbol{\mathcal{S}}_n.$$

根据命题 2.1，映射 Φ是单射。为证明 Φ^{-1} 是单射，设$\mathbf{s}_i$ 为表示$\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$中一个条件独立陈述的向量。对于每个 $i \in [3]$，我们求解方程组$\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot \mathbf{x}_i = \mathbf{s}_i$。 每个所得的$\mathbf{x}_i$都对应于 Gr_{A_3}中的唯一初始单项式。

□

上述讨论　　表明，对于 $n = 3$ ，唯一的非初等关系采取以下形式　　m

$$[i \perp\!\!\!\perp j|k + i \perp\!\!\!\perp j|\emptyset] = [i \perp\!\!\!\perp k|j + i \perp\!\!\!\perp j|\emptyset] = [i \perp\!\!\!\perp jk|\emptyset]. \tag{1}$$

推论 2。1。1对 $n = 4$. 不成立。映射 Φ 是单射，因为 $|\boldsymbol{\mathcal{S}}_n| > 24$. 。$Gr_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_4}$ 中 I 类和 II类二次二项式产生的条件独立关系分别给出了$\boldsymbol{\mathcal{S}}_n$中的 III 型和 IV 型陈述。下面给出两个代表性例子:

$$[1 \perp\!\!\!\perp 2|\emptyset + 2 \perp\!\!\!\perp 4|1] = [2 \perp\!\!\!\perp 4|\emptyset + 1 \perp\!\!\!\perp 2|4] = [14 \perp\!\!\!\perp 2|\emptyset]. \tag{2}$$

$$[1 \perp\!\!\!\perp 2|3 + 2 \perp\!\!\!\perp 4|13] = [2 \perp\!\!\!\perp 4|3 + 1 \perp\!\!\!\perp 2|34] = [14 \perp\!\!\!\perp 2|3]. \tag{3}$$

我们观察到，与每个二次二项式相关的 $\boldsymbol{\mathcal{S}}_n$ 中条件独立陈述的类型，由排列 $\gamma \in S_n$ 决定；该排列会重新排列其单项式中条件独立陈述所涉及的随机变量。这种类型还取决于被条件化的变量。例如，在方程 (3) 中，陈述 $14 \perp 2 \mid 3$ 中由索引 1 和 4 标记的随机变量，是由于将换位 (1,4) 应用于方程一侧各陈述中的变量而产生的；也就是说，在一个单项式中应用该换位，从而得到另一侧单项式中的变量。此外，陈述 $14 \perp 2 \mid 3$ 仅以 3 为条件，因为 3 是该关系中所有初等条件独立陈述共有的索引。与直接使用线性映射 $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 相比，这一观察提供了一种更高效的方法，可以从 Gr_{A_n} 的二次部分构造非初等关系。

$I_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_4}$ 的马尔可夫基产生的三次和四次二项式不会导出非初等条件独立关系。我们尝试使用 *Macaulay2* 求解 Type I 和 Type II 的 $\boldsymbol{\mathcal{S}}_4$ 中的饱和条件独立陈述，但得到的向量的支集并非 ∓ 1. 。因此，我们使用线性映射 $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ ，手动计算将这些陈述分别表示为初等条件独立陈述之和的方式。附录列出了与每种类型对应的非初等条件独立关系。下面给出两个例子:

$$[2 \perp\!\!\!\perp 4|13 + 1 \perp\!\!\!\perp 4|3\emptyset + 3 \perp\!\!\!\perp 4|\emptyset] = [3 \perp\!\!\!\perp 4|12 + 1 \perp\!\!\!\perp 4|2\emptyset + 2 \perp\!\!\!\perp 4|\emptyset] = [123 \perp\!\!\!\perp 4|\emptyset], \text{ and} \tag{4}$$

$$[1\perp\!\!\!\perp 3|24+1\perp\!\!\!\perp 2|4\emptyset+2\perp\!\!\!\perp 4|3+2\perp\!\!\!\perp 3|\emptyset]=[1\perp\!\!\!\perp 4|23+1\perp\!\!\!\perp 2|3\emptyset+2\perp\!\!\!\perp 3|4+2\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset]=[12\perp\!\!\!\perp 34|\emptyset]. \quad (5)$$

对于 $n=5$, [2] 的附录包含由$I_{\mathcal{A}_5}$的一个马尔可夫基产生的 120 个二次二项式。根据命题 2.1, 这些二项式中的每一个都定义了 $\boldsymbol{\mathcal{S}}_5$. 中的一个条件独立陈述。下面是一个例子:

$$[3\perp\!\!\!\perp 5|12+3\perp\!\!\!\perp 4|125]=[3\perp\!\!\!\perp 4|12+3\perp\!\!\!\perp 5|124]=[45\perp\!\!\!\perp 3|12].$$

在下一节中，我们研究多项式环 $\mathbb{R}[P_n]$ 中与由 $I_{\mathcal{A}}$. 诱导的条件独立关系相关联的条件独立理想

3 环面关系的条件独立理想

本研究的核心是将 imset 方法所描述的条件独立陈述的几何与组合结构，同其代数方面联系起来。Studen´y 的框架表明，条件独立陈述的几何描述可以指导条件独立理想的素理想分解计算，即使在某些情况下，计算机代数系统也无法给出完整结果。为了将由 imset 建模的一组条件独立陈述解释为概率意义上的条件独立陈述，我们假设关于 n 的概率分布属于具有有限多信息的分布类，如 [1] 中所述。

设 $J_i\subset\mathbb{R}[P_n]$ 为理想，它定义为对应于验证方程一侧的条件独立陈述的条件独立理想之和，如方程 4 和 5 所示。本节中，我们刻画 J_1、J_2 以及 J_3 在 $\mathbb{R}[P_n]$ 中的理想，定义如下:

$$\underbrace{I_{[i_{s_1}\perp\!\!\!\perp j_{s_1}|K_{s_1}]}+\cdots+I_{[i_{s_q}\perp\!\!\!\perp j_{s_q}|K_{s_q}]}}_{J_1},\ \underbrace{I_{[i_{t_1}\perp\!\!\!\perp j_{t_1}|K_{t_1}]}+\cdots+I_{[i_{t_r}\perp\!\!\!\perp j_{t_r}|K_{t_r}]}}_{J_2}\ \text{and}\ \underbrace{I_s}_{J_3}.$$

我们在 *Singular* 中使用了库 [primdec.lib] 以及命令 [primdecSY], [、minAssGTZ], [、dim], Equal(ideal I, ideal J)], 和 [degree] ，以计算这些理想的素理想分解、极小素理想、次数和维数。

$$\underbrace{I_{1\perp\!\!\!\perp 2|3}+I_{1\perp\!\!\!\perp 2|\emptyset}}_{J_1},\ \underbrace{I_{1\perp\!\!\!\perp 3|2}+I_{1\perp\!\!\!\perp 2|\emptyset}}_{J_2},\ \text{and}\ \underbrace{I_{1\perp\!\!\!\perp 23|\emptyset}}_{J_3}.$$

对于这些计算，我们首先将所有随机变量视为二元变量，然后考察一个变量为三元变量的混合情形。汇总结果如下表 3.1 所示。

计算得到以下观察结果:

(i) 理想 J_1, J_2 和 J_3 不相等。

(ii) 考察 J_1 和 J_2 的极小素理想集可知，它们的交集恰好包含二项式理想——素理想 J_3。理想 J_3 对应于大小为 $r_1\times r_2$ 的相关概率矩阵的 2×2 阶子式。簇 $V(J_3)$ 是一个射影环面

	(2,2,2)			(3,2,2)			(2,3,2)			(2,2,3)		
	J_1	J_2	J_3	J_1	J_2	J_3	J_1	J_2	J_3	J_1	J_2	J_3
dim	9	9	5	7	7	6	7	8	7	8	7	7
次数	2	2	4	6	6	10	6	2	6	2	6	6
#极小素理想	3	3	1	3	3	1	3	7	1	7	3	1

表 3.1：关于 $n = 3$. 上条件独立理想计算结果的总结

簇，它由将 $\mathbb{P}^{r_1-1} \times \mathbb{P}^{r_2-1}$ 嵌入 $\mathbb{P}^8$ 的塞格雷嵌入给出。事实上，该簇是 $V(J_1)$ 和 $V(J_2)$ 中唯一与概率单纯形 Δ_7 和 Δ_{11} 有非平凡交集的子簇。其余分支的零点集位于这些单纯形的边界上。因此，以下条件独立推理成立：

$$[i \perp\!\!\!\perp j|k \text{ and } i \perp\!\!\!\perp j|\emptyset] \implies [i \perp\!\!\!\perp jk|\emptyset], \text{ and}$$
$$[i \perp\!\!\!\perp k|j \text{ and } i \perp\!\!\!\perp j|\emptyset] \implies [i \perp\!\!\!\perp jk|\emptyset],$$

J_1 和 J_2. 的素理想分解验证了这些结果。随着 n 以及随机变量取值的增加，*Singular* 计算给定条件独立理想的素理想分解的可能性会降低。尽管在 $n = 3$, 的情况下，当所有变量均为三元时，命令 primdecSY、minAssGTZ 未能得到结果。

当 $n = 4$, 时，我们仅给出与 24 个二次二项式对应的条件独立理想以及马尔可夫基中的部分选定条件独立关系的结果。

从半拟阵公理的二次CI关系开始，我们测试了与4和5相关的条件独立理想，分别考察所有随机变量均为二元以及第二个变量为三元的情况。

$$\underbrace{I_{1 \perp\!\!\!\perp 2|\emptyset} + I_{2 \perp\!\!\!\perp 3|1}}_{P_1}, \underbrace{I_{2 \perp\!\!\!\perp 4|\emptyset} + I_{1 \perp\!\!\!\perp 3|2}}_{P_2}, \text{ and } \underbrace{I_{14 \perp\!\!\!\perp 2|\emptyset}}_{P_3}$$
$$\underbrace{I_{3 \perp\!\!\!\perp 4|1} + I_{2 \perp\!\!\!\perp 3|14}}_{Q_1}, \underbrace{I_{2 \perp\!\!\!\perp 3|1} + I_{2 \perp\!\!\!\perp 4|13}}_{Q_2}, \text{ and } \underbrace{I_{24 \perp\!\!\!\perp 3|1}}_{Q_3}$$

计算理想P_i 和 Q_i 的次数、维数以及极小素理想总数的结果汇总于表 3.2。

	(2,2,2,2)						(2,3,2,2)					
	P_1	P_2	P_3	Q_1	Q_2	Q_3	P_1	P_2	P_3	Q_1	Q_2	Q_3
dim	13	13	13	10	10	10	19	19	18	14	17	12
次数	2	2	4	4	4	4	3	3	10	36	4	100
# 极小素理想	3	3	1	9	9	1	9	9	1	9	49	1

表 3.2：关于 $n = 4$. 上条件独立理想的计算摘要

以下陈述概括了关于这些条件独立理想之间关系的最重要观察结果。

1. 理想 P_1， P_2 和 P_3 彼此不同，理想 Q_1， Q_2 和 Q_3.也彼此不同。2. 当所有变量都是二元变量时，每对理想（P_1， P_2）和（Q_1， Q_2）具有相同的次数和维数，并且分解出的极小素理想数量相同。

3. P_1 和 P_2 的极小素理想中各包含一个与概率单纯形相交的分支。该分支恰好对应于理想 P_3. 。Q_1， Q_2 和 Q_3.之间也存在类似的关系。

4. 对三次关系和四次关系所关联的条件独立理想进行计算的尝试，只得到了它们的维数和次数，因为软件无法完成完整的素理想分解。

对于其余每个都在 E_4中给出一个条件独立陈述的条件独立关系（如方程（4）和（5）所示），计算证实，理想 $I_{123\perp 4|\emptyset}$ 和 $I_{12\perp 34|\emptyset}$ 分别属于条件独立理想 P_1 和 P_2， 以及理想 Q_1 和 Q_2 的极小素理想的交集中。特别地，我们有

$$I_{123\perp 4|\emptyset} \subset \underbrace{I_{2\perp 4|13} + I_{1\perp 4|3\emptyset} + I_{3\perp 4|\emptyset}}_{P_1} \cap \underbrace{I_{3\perp 4|12} + I_{1\perp 4|2\emptyset} + I_{2\perp 4|\emptyset}}_{P_2},$$
$$I_{12\perp 34|\emptyset} \subset \underbrace{I_{1\perp 3|24} + I_{1\perp 2|4\emptyset} + I_{2\perp 4|3} + I_{2\perp 3|\emptyset}}_{Q_1} \cap \underbrace{I_{1\perp 4|23} + I_{1\perp 2|3\emptyset} + I_{2\perp 3|4} + I_{2\perp 4|\emptyset}}_{Q_2}.$$

上述讨论引出了以下推广。

命题 3.1。 考虑一个基本关系，并假设由n 索引的所有随机变量具有相同数量的可能取值。如果 $l = t$ ，且对于每个 $a \in [l]$，条件独立陈述 C_a 都可以通过置换 D_b 中的随机变量得到，某个 $b \in [t]$ 也满足这一条件，那么基本关系两侧陈述所对应的条件独立理想是同构的。

证明。 假设所有随机变量都取相同的值 $r.$ 。关系中每个条件独立陈述对应的概率矩阵都是大小为 $r \times r.$ 的方阵。令 $J_1, J_2 \subset R[P_n]$ 定义如下：

$$J_1 = I_{[i_{l_1} \perp j_{l_1}|K_{l_1}]} + \cdots + I_{[i_{l_q} \perp j_{l_q}|K_{l_q}]}, \qquad J_2 = I_{[i_{t_1} \perp j_{t_1}|K_{t_1}]} + \cdots + I_{[i_{t_r} \perp j_{t_r}|K_{t_r}]}.$$

由于条件独立陈述的数量和类型相同，理想 J_1 和 J_2 具有相同数量的生成元。如果 J_1 的生成元中的不定元具有形式 $p_{r_1 \ldots r_n}$ ，其中 $r_i \in [r]$，那么 J_2 中的不定元为 $p_{\gamma(r_1 \ldots r_n)}$ ，其中某个排列 $\gamma \in S_n.$ 。因此，这两个理想是同构的。 □

在 [7] 中的研究表明，对于可以扩展为非初等条件独立关系的初等关系，方程两边的基本条件独立陈述的集合之间存在一种

随机变量的排列。我们观察到， Gr_{A_4}中只有所有变量的次数均为一的齐次二项式，才会产生这类条件独立关系。使用软件 $Singular$，我们得出了以下结果。

命题 3.2. 对于由 $n = 34$ 标记的一组二元随机变量以及二元和三元混合随机变量，令 J_1、 J_2 和 $J_3 \subset R[P_n]$ 为满足三边条件独立关系的条件独立理想，使得

$$J_1 = I_{[i_{l_1} \perp j_{l_1} | K_{l_1}]} + \cdots + I_{[i_{l_q} \perp j_{s_q} | K_{s_q}]},\ J_2 = I_{[i_{t_1} \perp j_{t_1} | K_{t_1}]} + \cdots + I_{[i_{t_r} \perp j_{t_r} | K_{t_r}]},\ and \quad J_3 = I_s.$$

条件独立理想 J_3 属于 J_1 和 J_2. 的极小素理想的交集。此外，簇 V（J_3） 是唯一与概率单纯形有非平凡交集的集合。

下面的例子说明了由 Gr_{A_4} 产生的一种条件独立关系，它不对应于 E_4 中的任何条件独立陈述:

$$I_{2 \perp 4 | 13} + I_{1 \perp 4 | 3} + I_{4 \perp 3 | \emptyset} = P_1 = I_{4 \perp 3 | 12} + I_{1 \perp 4 | 2} + I_{2 \perp 4 | \emptyset} = P_2.$$

计算结果表明，在二元情形下， P_1 和 P_2 同构；但在其他情形下，它们的次数、维数和极小素理想各不相同。命题 3.2 的逆命题不成立，表 3.2 中的一个反例对此作了说明。

4 Imset 模型的理想

初等 imset 锥的每个面都会诱导出唯一的 imset 模型。在 $n = 3$, 的情形下，每个 imset 模型都可以解释为一个概率模型。然而，对于 $n = 4$, Studen ́y 证明，存在一个结构 imset u，使得对于任意概率分布 $P.$， $M_u \neq M_P$。通过计算初等 imset 锥的面格，可以列出每个模型中的初等条件独立陈述，因为它们对应于每个面的生成元。维数为 d 的面集产生了一组 imset 模型，记为 M_d，其中每个模型 $M_d^\alpha \in M_d$ 至少由 d 个初等条件独立陈述生成。

假设 M_d 由概率模型组成，我们将每个 M_d^α中的条件独立陈述与由 I_A. 诱导的条件独立关系联系起来。我们还考察了 $R[P_n]$ 中与 $n = 3$的每个 imset 模型相对应的条件独立理想， 并分析了 $n = 4$.的一个代表性例子。

我们使用 F VECTOR 和 DIAGRAM $\rightarrow$ FACES 命令，在$Polymake$ 中计算了 $n = 3$和 $n = 4$.的锥的面格。通过考察生成每个面的初等条件独立陈述集合，我们发现，任意条件独立关系一侧的条件独立陈述集合都不能生成该锥的一个面。此外，与每个二次二项式（对应于半拟阵公理）相关联的四个条件独立陈述会生成一个三维面。

对于 $n = 3$, 初等 imset 锥的 f-向量为 (0，6，9，5，1)。该锥的面构成一个偏序集，如图 4 所示。此锥位于 $\mathbb{R}^8$ 中，维数为四。我们将维数为 d 的面集合 F_d 中的模型标记为 M_d. 例如，如图所示

在图 4 中，集合 F_1 产生六个模型，每个模型都由一个初等条件独立陈述组成。 M_d^α 中的下标 α 表示模型 α 在哈斯图中从左至右的位置。例如， $M_2^4 \subset M_2$ 表示包含陈述 $1 \perp 2 \mid 3$和 $1 \perp 2 \mid \emptyset$, 的模型，而 M_3^5由三个饱和语句组成。我们用 $M_3^* = \{M_3^2, M_3^3, M_3^4\}$表示与半拟阵公理相关联的 M_3 中模型的子集，这些模型在图中以双边框节点标出。

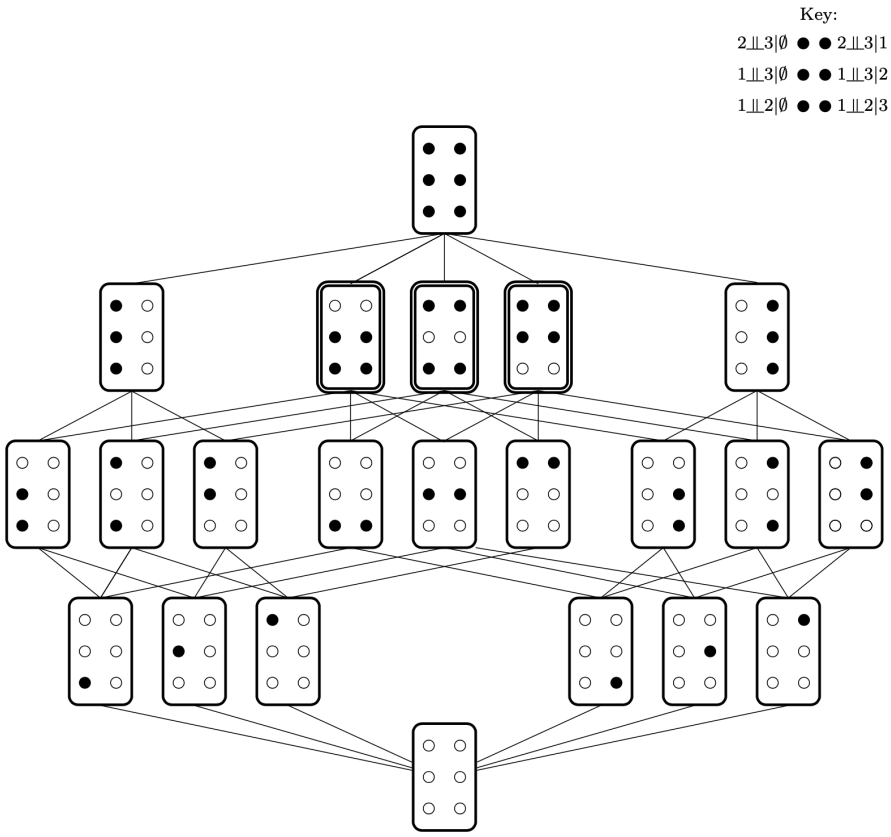


图4.1： $n = 3$. 的条件独立模型格

为了减少分析条件独立理想所需的计算量，我们根据各模型所包含的初等条件独立陈述的类型，将模型集合划分为若干等价类。集合 M_1 由两个等价类组成：一个包含三个边缘陈述，另一个包含三个饱和语句。集合 M_2 和 M_3 各自划分为三个等价类。根据命题 3.1，属于同一等价类的条件独立理想彼此同构，因此我们从每个等价类中选取一个代表模型 M_d^α，以考察其理想 $I_{M_d^\alpha}$.的性质。表 4.1 列出了这些等价类，并总结了所有随机变量均为二元变量时的计算结果。我们还测试了 $I_{M_d^\alpha}$ 混合情形，其中两个变量为二元变量，第三个为三元变量。

完全交叉理想维数		次数	是否为素数	最小素数个数	最小素数维数
$I_{M_1^1}$	7	2	Yes	1	7
$I_{M_1^6}$	6	4	No	1	6
$I_{M_2^1}$	6	4	No	2	6, 6
$I_{M_2^4}$	5	8	No	2	5, 5
$I_{M_2^9}$	5	4	No	3	4, 4, 5
$I_{M_3^1}$	5	8	No	4	5, 5, 5, 5
$I_{M_3^2}$	5	4	Yes	1	5
$I_{M_3^5}$	4	5	Yes	4	2, 2, 2, 4
I_{M_4}	4	6	Yes	1	4

表 4.1：总和　二元模型 M_d^α 在 $n=3$ 上的条件独立理想计算摘要　.

以下关于 $n=3$ 上 imset 模型的陈述是通过计算证明的。

(i) 对于任何包含至少一个饱和条件独立语句的模型 M_d^α（其中 $d>1$），其理想 $I_{M_d^\alpha}$ 的素理想分解至少包含一个二项式分量。这些二项式分量等于某些 $s\in$ 的 $I_s\,\boldsymbol{\mathcal{S}}_{n\cdot}$。这些分量的形式和数量取决于这些模型与格结构中由方程 4 所述的四个初等条件独立陈述生成的三个模型 M_3^* 之间的关系。以下列表展示了这些模型中最具代表性的例子。

- 我们从 M_3^*. 中三个模型的一个代表开始

$$M_3^2=\{1\perp 2\mid\emptyset,\ 2\perp 3\mid 1,\ 2\perp 3\mid\emptyset,\ 1\perp 2\mid 3\}.$$

Th该集合的元素涉及以下非初等条件独立关系：

$$1\perp 2\mid 3+1\perp 3\mid\emptyset=1\perp 3\mid 2+1\perp 2\mid\emptyset=12\perp 3\mid\emptyset.$$

计算表明，　$I_{M_3^2}$ 的素理想分解包含以下二项式理想：

$$I_{12\perp 3|\emptyset}=\langle p_{212}p_{221}-p_{211}p_{222},\ p_{122}p_{212}-p_{112}p_{222},\ p_{121}p_{212}-p_{111}p_{222},$$
$$p_{122}p_{211}-p_{112}p_{221},\ p_{121}p_{211}-p_{111}p_{221},\ p_{112}p_{121}-p_{111}p_{122}\rangle.$$

在二元情形下，　$I_{M_3^2}=I_{12\perp 3|\emptyset}$.我们使用$Macaulay2$ 中的命令 gens gb I 来计算 $I_{M_3^2}$. 的 Gr¨obner 基。计算结果证实，　$I_{12\perp 3|\emptyset}$ 的生成元构成了 $I_{M_3^2}$ 关于字典序项序的 Gr¨obner 基。对于随机变量取值的其他配置，理想 $I_{M_3^2}$ 不是素理想；每个非二项式极小素理想的簇都与概率单纯形的边界相交 Δ_{11}.

• 在二元情形下，完整模型 $M_4 = M_3^2 \cup M_3^3 \cup M_3^4$ 是环面理想 [4]。这个理想恰好就是二项式理想

$$I_{\mathfrak{E}} = I_{13\perp 2|\emptyset} + I_{12\perp 3|\emptyset} + I_{23\perp 1|\emptyset}.$$

此外，相对于字典序项序， $I_{\mathfrak{E}}$ 的二项式构成了 I_{M_4} 的 Gr¨obner 基。当其中一个随机变量为三元时，理想 $I_{\mathfrak{E}}$ 仍是 I_{M_4} 的素理想分解中唯一一个其簇满足$\boldsymbol{\mathcal{V}}(I_{\mathfrak{E}}) \subset \Delta_{11} \setminus \{0\}$.的分量

• 一个有趣的观察是，对于模型 M_3^5，$I_{M_3^5} \subset I_{M_4}$由其素理想分解中包含 $I_{\mathfrak{E}}$ 的三个初等饱和条件独立陈述组成。

• 关于 $\alpha > 3$ 的模型 M_2^α： $I_{M_2^\alpha}$的素理想分解中二项式理想的类型取决于模型 $M_3^\beta \in M_3^*$，使得 $M_2^\alpha \subset M_3^\beta$.例如，考虑以下模型:

$$M_2^4 = \{1 \perp 2 \mid 3,\ 1 \perp 2 \mid \emptyset\},$$
$$M_2^6 = \{1 \perp 2 \mid 3,\ 1 \perp 3 \mid 2\}.$$

模型 M_2^4是 M_3^2和 M_3^3.的子模型。计算结果表明，二项式理想 $I_{12\perp 3|\emptyset}$ 和 $I_{23\perp 1|\emptyset}$ 出现在 $I_{M_2^4}$. 的素理想分解中。由于模型 M_2^6仅是 M_3^2的子模型，根据 Sturmfels [8],，我们预期 $I_{M_2^6}$会分解为更多二项式分量，其中包括 $I_{12\perp 3|\emptyset}$. 。然而， $I_{12\perp 3|\emptyset}$ 是素理想分解中唯一出现的二项式分量。这一观察支持了这样一种观点：通过 imset 对条件独立陈述进行代数与组合表示，能够有效识别相关条件独立理想的极小素理想。关于这些模型的条件独立推理，参见 [4]中的 §6.7。

（ii）仅由边缘陈述组成的模型的理想，例如 $I_{M_2^1}$、$I_{M_2^2}$、$I_{M_2^3}$、和$I_{M_3^1}$，都是完全交。 [9] 中的定理 4.3.5 对与这些理想相关的簇进行了详细描述。

在 $n = 4$ 的情形下，面总数为 22108。 以下是与 $\boldsymbol{\mathcal{A}}_4$ 相关的初等 imset 锥的 f-向量:

$$(1, 24, 228, 1128, 3212, 5560, 5980, 3985, 1596, 356, 37, 1).$$

已有研究表明，并非每个 imset 模型都能视为概率模型。具体而言，初始模型的数量多于概率模型。Studen´y 将这些模型称为面模型。他通过 [1], 中的反例——例 4.1——证明，存在一个结构 imset u ，使得对于任意概率分布 $P.$ ，$\mathrm{M}_u \neq \mathrm{M}_P$ 。我们计算了第 3 节中通过马尔可夫基找到的半拟阵所对应模型及其子模型的条件独立理想，考虑了随机变量的两种

取值组合：全部为二元，以及第二个变量为三元。在二元情形下，由于命题 3.1 证明了理想同构，我们选取以下两个模型来代表 I 类：

$$M_3^1 = \{2 \perp 4 \mid 1,\ 2 \perp 3 \mid 14,\ 2 \perp 3 \mid 1,\ 2 \perp 4 \mid 13\},$$

$$M_3^2 = \{2 \perp 4 \mid 1,\ 3 \perp 4 \mid 12,\ 3 \perp 4 \mid 1,\ 2 \perp 4 \mid 13\}.$$

注意， M_3^1 由公式 2 三边关系中出现的初等条件独立陈述生成。图 4 展示了这些模型及其子模型的节点。

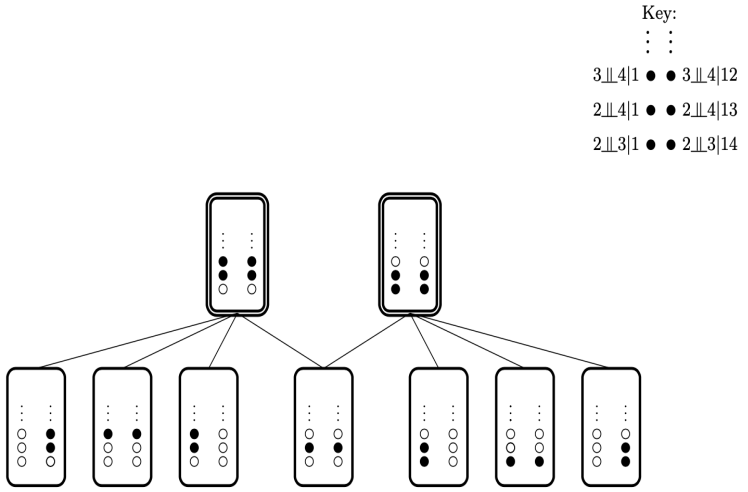


图 4.2： $n = 4$.的条件独立模型子格

我们得到了与 $n = 3$. 类似的结果。下面总结最重要的发现。

(i) 在二元情形下，通过计算验证了以下等式：

$$I_{M_3^1} = I_{34\perp 2|1}, \qquad I_{M_3^2} = I_{32\perp 4|1}.$$

(ii) 每个至少包含一个饱和条件独立状态的子模型 $I_{M_2^\alpha}$，其素分解都包含二项式分量，具体而言是 $I_{32\perp 4|1}$ 和 $I_{34\perp 2|1}$.。该分解取决于偏序集结构，尤其取决于每个子模型与 M_3^2和 M_3^3.的关联。例如，$I_{M_2^4}$ 的素分解由四个二项式组成，其中两个是 $I_{32\perp 4|1}$和 $I_{34\perp 2|1}$.。然而，在 $I_{M_2^7}$， 的分解中，$I_{32\perp 4|1}$ 是唯一的二项式，尽管该理想本身是二项式理想。

(iii) 我们还考察了以下模型：它们由 I 类的初等条件独立陈述生成，并导出公式 3 中描述的三边条件独立关系：

$$M_3^3 = \{1 \perp 2 \mid \emptyset,\ 2 \perp 4 \mid 1,\ 2 \perp 4 \mid \emptyset,\ 1 \perp 2 \mid 4\},$$

$$M_3^4 = \{1 \perp 2 \mid \emptyset,\ 1 \perp 4 \mid 2,\ 1 \perp 4 \mid \emptyset,\ 1 \perp 2 \mid 4\}.$$

理想 $I_{14\perp 2|\emptyset}$ 和 $I_{24\perp 1|\emptyset}$ 分别出现在 $I_{M_3^3}$ 和 $I_{M_3^4}$，的素理想分解中。这些相同的二项式分量也出现在 M_3^3 和 M_3^4 的每个子模型的分解中，但仅由边缘条件独立陈述生成的子模型除外。

我们旨在扩展命题 3.1，并证明以下关于任意给定 $n.$ 的猜想

猜想 4.1. 设 M_d^α 表示由 $n.$ 上初等 *imset* 锥各面的模型。对于每个包含关系 $M_d^\alpha \subset M_{d+1}^\beta$，其中 M_{d+1}^β 由构成非初等条件独立关系的初等条件独立陈述生成，$I_{M_{d+1}^\beta}$ 的素理想分解，以及所有包含饱和条件独立语句或并非仅由边缘化语句生成的 $I_{M_d^\alpha}$ 的素理想分解，均等于 $I_E.$

5 结论

总之，本研究确立了条件独立性（CI）陈述的代数、组合与几何结构之间的明确对应关系。通过分析条件独立理想的素理想分解及其与 imset 模型的关系，我们证明，某些二项式分量，尤其是等于 I_E 的分量，是理解非初等条件独立关系的基本构件。关于 $n = 3$ 和 $n = 4$ 的计算证据支持了这一猜想：相同的结构行为会延伸至更高维数。

我们的研究结果表明，imset 及其相关锥为识别极小素理想、理解不同维数下条件独立模型的层级提供了有效框架。此外，初等 imset 锥的面与条件独立理想的代数性质之间呈现出的对应关系，进一步强化了对独立关系的几何解释。

未来的研究将致力于推广命题 3.1，并正式证明适用于任意$n.$ 的猜想。我们还计划探索利用 imset 组合结构的计算技术，以提高素理想分解和模型分类的效率，并将这些方法扩展到混合离散系统和更高维的情形。

致谢

我们感谢 Bernd Sturmfels 博士给予我们参加他所开设课程的机会，该课程以他的著作《$Gr\ddot{}$ <style id='4'>obner Bases and Convex Polytopes》为基础。他的见解与指导对本研究极为宝贵，他在非线性代数领域的开创性工作也同样如此。感谢您，Sturmfels 博士。

参考文献

[1] Milan Studen´y。《概率条件独立结构》。信息科学与统计学。施普林格，伦敦，2005年。

[2] Raymond Hemmecke、Jason Morton、Anne Shiu、Bernd Sturmfels 和 Oliver Wienand。关于半拟图的三个反例。组合学、概率与计算，17(2):239–257，2008年。[3] Takuya Kashimura、Tomonari Sei、Akimichi Takemura 和 Kentaro Tanaka。初等 imset 锥与超模函数：综述及若干新结果。《格罗布纳基与现代工业社会的和谐》，第 117–152 页，2012年。[4] Mathias Drton、Bernd Sturmfels 和 Seth Sullivant。《代数统计学讲义》，第 39 卷。Springer Science & Business Media，2008年。[5]Bernd Sturmfels。《多项式方程组的求解》，CBMS 数学区域会议系列第 97 卷。由数学科学会议委员会出版，华盛顿特区；美国数学会出版，罗得岛州普罗维登斯，2002年。[6] Takuya Kashimura、Tomonari Sei、Akimichi Takemura 和 Kentaro Tanaka。半初等 imset 作为初等 imset 之和的性质。arXiv 预印本 arXiv:1105.6027，2011年。[7] Takuya Kashimura、Tomonari Sei、Akimichi Takemura 和 Kentaro Tanaka。半初等 imset 作为初等 imset 之和的性质。代数统计学杂志，2(1):14–35，2011年。[8] David Eisenbud 和 Bernd Sturmfels。二项式理想。杜克数学杂志，84(1):1–45，1996年。[9] Seth Sullivant。《代数统计学》，第 194 卷。美国数学会，2018年。

附录：n=4的条件独立关系示例。

I 类二次CI关系：每个关系都与 $\mathfrak{C}_4$中的III型陈述相连

$$[1\perp\!\!\!\perp 2|\emptyset+2\perp\!\!\!\perp 3|1] = [2\perp\!\!\!\perp 3|\emptyset+1\perp\!\!\!\perp 2|3] = [13\perp\!\!\!\perp 2|\emptyset]$$
$$[1\perp\!\!\!\perp 3|\emptyset+1\perp\!\!\!\perp 2|3] = [1\perp\!\!\!\perp 2|\emptyset+1\perp\!\!\!\perp 3|2] = [23\perp\!\!\!\perp 1|\emptyset]$$
$$[1\perp\!\!\!\perp 3|\emptyset+2\perp\!\!\!\perp 3|1] = [2\perp\!\!\!\perp 3|\emptyset+1\perp\!\!\!\perp 3|2] = [12\perp\!\!\!\perp 3|\emptyset]$$
$$[1\perp\!\!\!\perp 2|\emptyset+2\perp\!\!\!\perp 4|1] = [2\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset+1\perp\!\!\!\perp 2|4] = [14\perp\!\!\!\perp 2|\emptyset]$$
$$[1\perp\!\!\!\perp 2|\emptyset+1\perp\!\!\!\perp 4|2] = [1\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset+1\perp\!\!\!\perp 2|4] = [24\perp\!\!\!\perp 1|\emptyset]$$
$$[1\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset+2\perp\!\!\!\perp 4|1] = [2\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset+1\perp\!\!\!\perp 4|2] = [12\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset]$$
$$[1\perp\!\!\!\perp 3|\emptyset+1\perp\!\!\!\perp 4|3] = [1\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset+1\perp\!\!\!\perp 3|4] = [34\perp\!\!\!\perp 1|\emptyset]$$
$$[3\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset+1\perp\!\!\!\perp 3|4] = [1\perp\!\!\!\perp 3|\emptyset+3\perp\!\!\!\perp 4|1] = [14\perp\!\!\!\perp 3|\emptyset]$$
$$[3\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset+1\perp\!\!\!\perp 4|3] = [1\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset+3\perp\!\!\!\perp 4|1] = [13\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset]$$
$$[2\perp\!\!\!\perp 3|\emptyset+3\perp\!\!\!\perp 4|2] = [3\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset+2\perp\!\!\!\perp 3|4] = [24\perp\!\!\!\perp 3|\emptyset]$$
$$[2\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset+2\perp\!\!\!\perp 3|4] = [2\perp\!\!\!\perp 3|\emptyset+2\perp\!\!\!\perp 4|3] = [34\perp\!\!\!\perp 2|\emptyset]$$
$$[3\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset+2\perp\!\!\!\perp 4|3] = [2\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset+3\perp\!\!\!\perp 4|2] = [23\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset]$$

II类　　二次CI关系：每个关系都与 $\mathfrak{C}_4$中的IV型陈述相连

$$[3\perp\!\!\!\perp 4|1+2\perp\!\!\!\perp 3|14] = [2\perp\!\!\!\perp 3|1+3\perp\!\!\!\perp 4|12] = [24\perp\!\!\!\perp 3|1]$$
$$[2\perp\!\!\!\perp 4|1+2\perp\!\!\!\perp 3|14] = [2\perp\!\!\!\perp 3|1+2\perp\!\!\!\perp 4|13] = [34\perp\!\!\!\perp 2|1]$$
$$[2\perp\!\!\!\perp 4|1+3\perp\!\!\!\perp 4|12] = [3\perp\!\!\!\perp 4|1+2\perp\!\!\!\perp 4|13] = [23\perp\!\!\!\perp 4|1]$$
$$[1\perp\!\!\!\perp 3|2+3\perp\!\!\!\perp 4|12] = [3\perp\!\!\!\perp 4|2+1\perp\!\!\!\perp 3|24] = [14\perp\!\!\!\perp 3|2]$$
$$[1\perp\!\!\!\perp 3|2+1\perp\!\!\!\perp 4|23] = [1\perp\!\!\!\perp 4|2+1\perp\!\!\!\perp 3|24] = [34\perp\!\!\!\perp 1|2]$$
$$[3\perp\!\!\!\perp 4|2+1\perp\!\!\!\perp 4|23] = [1\perp\!\!\!\perp 4|2+3\perp\!\!\!\perp 4|12] = [13\perp\!\!\!\perp 4|2]$$
$$[1\perp\!\!\!\perp 2|3+1\perp\!\!\!\perp 4|23] = [1\perp\!\!\!\perp 4|3+1\perp\!\!\!\perp 2|34] = [24\perp\!\!\!\perp 1|3]$$
$$[1\perp\!\!\!\perp 4|3+2\perp\!\!\!\perp 4|13] = [2\perp\!\!\!\perp 4|3+1\perp\!\!\!\perp 4|23] = [12\perp\!\!\!\perp 4|3]$$
$$[1\perp\!\!\!\perp 2|3+2\perp\!\!\!\perp 4|13] = [2\perp\!\!\!\perp 4|3+1\perp\!\!\!\perp 2|34] = [14\perp\!\!\!\perp 3|2]$$
$$[1\perp\!\!\!\perp 3|4+2\perp\!\!\!\perp 3|14] = [2\perp\!\!\!\perp 3|4+1\perp\!\!\!\perp 3|24] = [12\perp\!\!\!\perp 3|4]$$
$$[1\perp\!\!\!\perp 2|4+1\perp\!\!\!\perp 3|24] = [1\perp\!\!\!\perp 3|4+1\perp\!\!\!\perp 2|34] = [23\perp\!\!\!\perp 1|4]$$
$$[1\perp\!\!\!\perp 2|4+2\perp\!\!\!\perp 3|14] = [2\perp\!\!\!\perp 3|4+1\perp\!\!\!\perp 2|34] = [13\perp\!\!\!\perp 2|4]$$

三次CI关系：每个关系都与 $\mathfrak{C}_4$中的I型陈述相连

$$[2\perp\!\!\!\perp 4|13+1\perp\!\!\!\perp 4|3+4\perp\!\!\!\perp 3|\emptyset] = [3\perp\!\!\!\perp 4|12+1\perp\!\!\!\perp 4|2+2\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset] = [123\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset]$$
$$[2\perp\!\!\!\perp 3|14+1\perp\!\!\!\perp 3|4+4\perp\!\!\!\perp 3|\emptyset] = [4\perp\!\!\!\perp 3|12+1\perp\!\!\!\perp 3|2+2\perp\!\!\!\perp 3|\emptyset] = [124\perp\!\!\!\perp 3|\emptyset]$$
$$[1\perp\!\!\!\perp 2|34+1\perp\!\!\!\perp 3|4+1\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset] = [2\perp\!\!\!\perp 3|14+1\perp\!\!\!\perp 3|4+3\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset] = [123\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset]$$
$$[2\perp\!\!\!\perp 3|14+1\perp\!\!\!\perp 2|4+4\perp\!\!\!\perp 2|\emptyset] = [2\perp\!\!\!\perp 3|14+1\perp\!\!\!\perp 2|4+4\perp\!\!\!\perp 2|\emptyset] = [134\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset]$$

四次CI关系：每个关系都与 $\mathfrak{C}_4$中的II型陈述相连

$$[1\perp\!\!\!\perp 3|24+1\perp\!\!\!\perp 4|2+2\perp\!\!\!\perp 4|3+2\perp\!\!\!\perp 3|\emptyset] = [1\perp\!\!\!\perp 4|23+1\perp\!\!\!\perp 3|2+2\perp\!\!\!\perp 3|4+2\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset] = [12\perp\!\!\!\perp 34|\emptyset]$$
$$[1\perp\!\!\!\perp 3|24+1\perp\!\!\!\perp 4|2+2\perp\!\!\!\perp 4|3+2\perp\!\!\!\perp 3|\emptyset] = [1\perp\!\!\!\perp 4|23+1\perp\!\!\!\perp 3|2+2\perp\!\!\!\perp 3|4+2\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset] = [12\perp\!\!\!\perp 34|\emptyset]$$
$$[1\perp\!\!\!\perp 2|34+1\perp\!\!\!\perp 3|4+3\perp\!\!\!\perp 4|2+2\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset] = [2\perp\!\!\!\perp 4|13+1\perp\!\!\!\perp 3|2+3\perp\!\!\!\perp 4|1+1\perp\!\!\!\perp 2|\emptyset] = [14\perp\!\!\!\perp 23|\emptyset]$$
$$[2\perp\!\!\!\perp 3|14+1\perp\!\!\!\perp 2|4+1\perp\!\!\!\perp 4|3+3\perp\!\!\!\perp 4|\emptyset] = [3\perp\!\!\!\perp 4|12+1\perp\!\!\!\perp 2|3+1\perp\!\!\!\perp 4|2+3\perp\!\!\!\perp 2|\emptyset] = [14\perp\!\!\!\perp 23|\emptyset]$$