arXiv:2601.00463v1 [math.AG] 1 Jan 2026

通过算法和计算分类检测圆锥曲线–直线排列中的 Zariski 对

Meirav Amram[1]和 Gal Goren[2]

[1] 数学系，Shamoon 工程学院，以色列阿什杜德[2] 数学学院，以色列理工学院，以色列海法 meiravt@sce.ac.il, lag@campus.technion.ac.il（通讯作者）

摘要。我们提出了一种用于检测圆锥曲线–直线排列中 Zariski 对的方法。该方法引入了一项组合条件，重新表述了 Zariski 对定义中涉及的管状邻域同胚判据。借此可以将线排列分类为组合等价类，并通过归纳算法系统地生成这些等价类。对于每个等价类，我们利用结构引理、射影等价以及通过 Zariski–van Kampen 定理获得的基本群计算，来考察潜在的 Zariski 对。

关键词： Zariski 对、圆锥曲线–直线排列、组合的等价性、基本群

1 引言

Zariski 对的研究起源于 Zariski [21]，并促使许多研究者对这一现象展开研究。

在介绍本研究的目标和结果之前，我们先给出 [7] 中所述的 Zariski 对的定义。

定义 1。如果满足以下条件，则一对约化平面曲线 $\mathcal{B}_1$、$\mathcal{B}_2 \subseteq \mathbb{CP}^2$ 称为 Zariski 对：

1. 存在管状邻域 $T(\mathcal{B}_1)$ 和 $T(\mathcal{B}_2)$，以及一个同胚 $h\colon T(\mathcal{B}_1) \to T(\mathcal{B}_2)$，满足 $h(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$。*2.* 不存在同胚 $f\colon \mathbb{CP}^2 \to \mathbb{CP}^2$，满足 $f(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$。

我们将约化平面曲线的次数定义为其不可约分量次数之和。本文中，当我们称一对约化平面曲线（$\mathcal{B}_1$，$\mathcal{B}_2$）同胚时，意指存在一个同胚$f\colon \mathbb{CP}^2 \to \mathbb{CP}^2$，使得 $f(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$。本文的主要目标是提出一种在圆锥曲线–直线排列中检测 Zariski 对的方法。我们首先引入一个组合条件来处理这个问题，它是对 Zariski 对定义中出现的管状邻域同胚条件的组合式重新表述。这使我们能够

将所有可能的圆锥曲线–直线排列划分为组合类型的等价类。借助归纳程序，我们系统地生成了本文所研究构型的所有此类等价类。随后，对于每一种得到的组合类型，我们通过综合运用结构引理、射影等价论证和基本群计算，考察 Zariski 对是否存在。根据 Zariski–van Kampen 定理 [14] ，我们可以利用生成元和关系导出这些群的表示。这种技术非常有效，因为许多已知的 Zariski 对实例，其补空间的基本群彼此不同。

在继续之前，我们先概述这一领域已有的研究成果和当前研究进展。Zariski提出了第一个Zariski对：两条六次曲线各有6个尖点，其中第一条曲线的尖点位于一条圆锥曲线上，而第二条曲线的尖点则不在圆锥曲线上 [21]。此后，寻找Zariski对的研究不断发展，尤其是Artal-Bartolo、Cogolludo-Agustin和Tokunaga在 [7], 中的工作，以及Artal-Bartolo在 [2]中的工作。Artal-Bartolo指出，具有同构组合结构但拓扑不同的两条曲线构成一个Zariski对。Shimada将Artal-Bartolo的Kummer 覆盖方法从 [2], 推广，并在 [18]中构造出两个次数递增的无穷级数Zariski对。

在 [11], 中，Degtyarev证明，次数不超过5的曲线的刚性同位类由组合数据决定。特别地，他的工作表明，次数不超过5时不存在Zariski对。他还在 [12] 中对具有简单奇点的六次曲线的同位类进行了分类。

在 [13, 附录 A], 中，Shustin 使用拼接构造构造了次数为 $\nu(\nu-1)$ 的平面曲线（对于 $3 \leq \nu \leq 10$），这些曲线不可能作为次数为 ν 的曲面的分支轨迹，从而给出了次数为 $d \in \{6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90\}$的 Zariski 对示例。Bannai 和 Tokunaga [10], Artal-Bartolo、Bannai、Shirane 以及 Tokunaga [3,4], ，以及 Takahashi 和 Tokunaga [19] 利用椭圆曲线的算术构造了 Zariski 对和 Zariski 元组的示例。

Oka 直接比较了 [16,17], 中 $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 的补集的基本群 $\pi_1(\mathbb{CP}^2 - \mathcal{B}_1, *)$ 和 $\pi_1(\mathbb{CP}^2 - \mathcal{B}_2, *)$，这也正是 Zariski 对该问题最初的观点。

Artal-Bartolo 和 Dimca [8] 研究了平面曲线的基本群，描述了具有阿贝尔基本群的曲线的拓扑性质。Artal-Bartolo、Carmona 和 Cogolludo-Agustin [5] 表明，仿射平面曲线的辫单调性决定了相关射影平面曲线的拓扑结构，并且可以使用 Zariski—van Kampen 定理计算其基本群。Artal-Bartolo、Carmona、Cogolludo-Agustin、Luengo 和 Melle [6] 进一步回顾了 Zariski--van Kampen 方法，认为它是获得曲线补集基本群表示的关键工具，见 $\mathbb{P}^2$。Namba 和 Tsuchihashi 在 [15], 中利用补集的基本群构造了一个次数为 8 的圆锥曲线–直线排列的 Zariski 对示例；Tokunaga 利用二面体覆盖理论构造了几个次数为 7 的此类示例，见 [20]。

2 约定、示例与动机

在这项工作中，我们聚焦于作为圆锥曲线–直线排列的代数曲线。这一框架自然地推广了对直线排列的研究，并使现有技术能够扩展到更广泛的构型类别。

2.1 约定

定义 2.

1. 一个(n, m)–线排列 是由 n 条直线和 m 条圆锥曲线构成的约化圆锥曲线–直线排列，位于 $\mathbb{CP}^2$ 中。*2.* 约束 是至少三个分支（直线或圆锥曲线）的交点；这类点在我们的组合分类中起着核心作用。*3.* 若不存在真子排列 $\mathcal{B}_1', \mathcal{B}_2'$ 构成 *Zariski* 对，则 *Zariski* 对$(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ 称为极小的 。

示例 *1.* 按照上述约定，我们给出一个 (4,1)–排列的示例。见图 1。

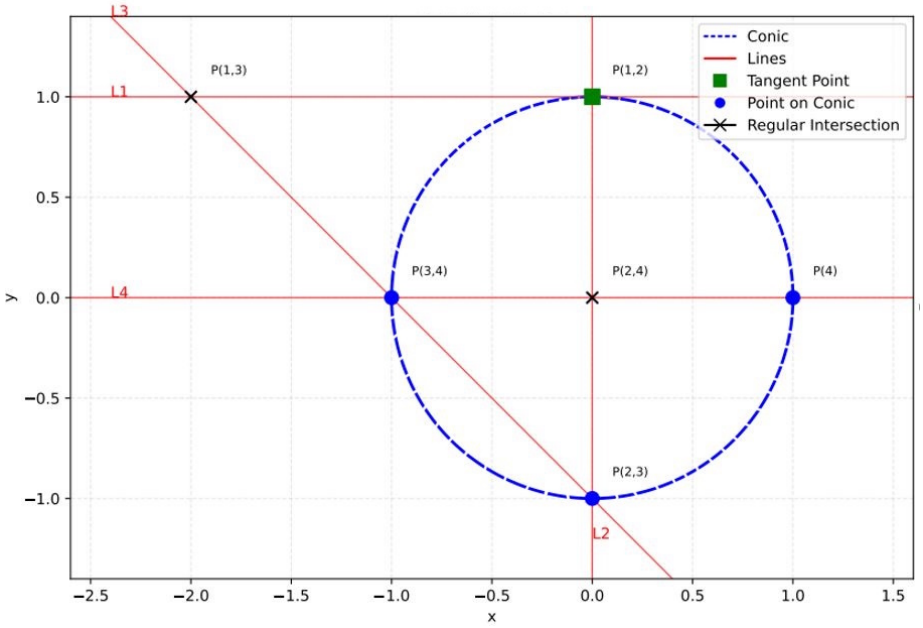


图 1. 一个 (4,1)–排列的示例

2.2 已知例子

大多数已知的 Zariski 对都由不可约曲线构成。但我们可以尝试在另一个极端——低次数曲线的并集中寻找 Zariski 对。

关于圆锥曲线–直线排列，已有不少有意义的研究，以下例子便是说明。

例 *2.* Tokunaga 的线排列是 Zariski 对的一个很好的例子。Tokunaga 在 [20] 中证明，图 2 和图 3 中的两对圆锥曲线–直线排列是 Zariski 对。随后，在 [1], 中也通过基本群证明了这一结果。

上方的两种圆锥曲线–直线排列是 (3,2)–排列。其中一种排列可以通过连续旋转其中一条直线而得到另一种排列。在这一过程中，奇点类型保持不变。

下方的两种 (1,3)-排列也构成一对 Zariski 对。每条曲线都由三条圆锥曲线和一条直线组成，同样可以通过连续旋转这条直线，从一种排列得到另一种。

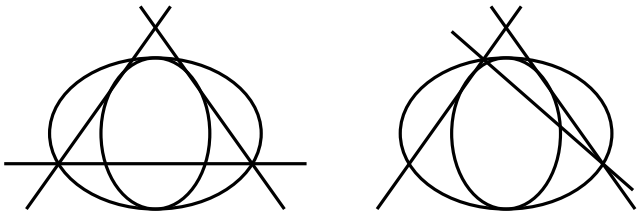


图 2。 由两条圆锥曲线和 3 条直线组成的一个 Zariski 对

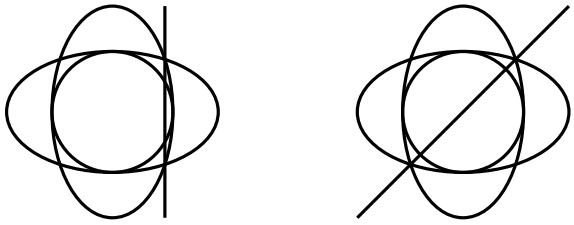


图 3。 由三条圆锥曲线和一条直线组成的一个 Zariski 对

此外，我们认为有必要介绍一项关于圆锥曲线配置的研究，以此作为研究圆锥曲线–直线排列的动机。

例*3.* Namba 与 Tsuchihashi 利用 [15] 补集的基本群构造了一个次数为 8 的圆锥曲线配置的 Zariski 对的例子，见图 4。

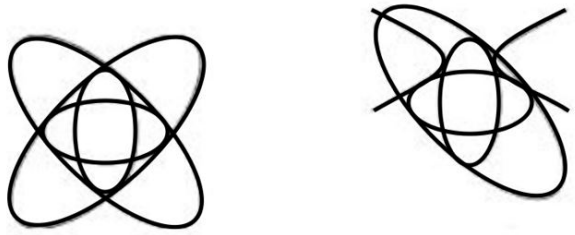


图 4. 一个次数为 8 的圆锥曲线配置的 Zariski 对

正如例3所示，这类结果对于寻找具有 $m \geq 4$ 的 $(n,\ m)$–线排列非常有帮助。

第一作者与 Shwartz、Sinichkin、Tan 和 Tokunaga 的一项合作研究给出了一个新的圆锥曲线–直线排列的 Zariski 对，如下例所述。

例*4.* 在 [1] 中发现了一对新的、由三条圆锥曲线和两条直线组成的圆锥曲线–直线排列的 Zariski 对。每条曲线都是一个 (2,3)– 排列。它们都由 Tokunaga 的 (1,3)– 排列组成，见图5。

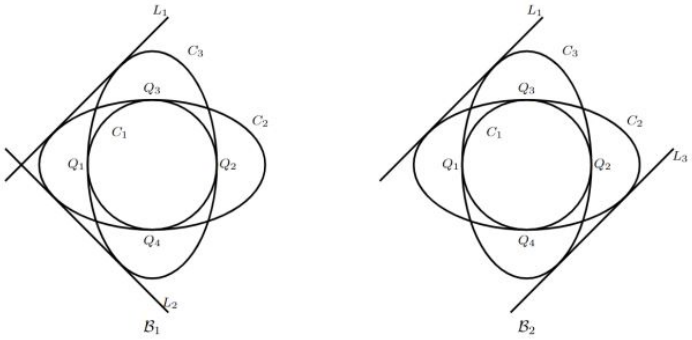


图 5. 一个新的 (2,3)–线排列的 Zariski 对

2.3 动机

我们的目标是发现大量新的例子，或者至少为一种方法奠定基础，最终实现对 (n, m)–排列的完整分类。

对于 $(n,1)$–排列，人们所知甚少。直到最近，人们才发现了此类 Zariski 对的首个实例。为实现圆锥曲线–直线排列中 Zariski 对的完整分类这一更广泛的目标，我们首先考察 $(n,1)$–排列的情形。此类首个实例由 Bannai、Guerville-Ball´e 和 Shirane 在 [9]，中发现，他们构造了源自 (7,1)–排列的 Zariski 对，见图 6。

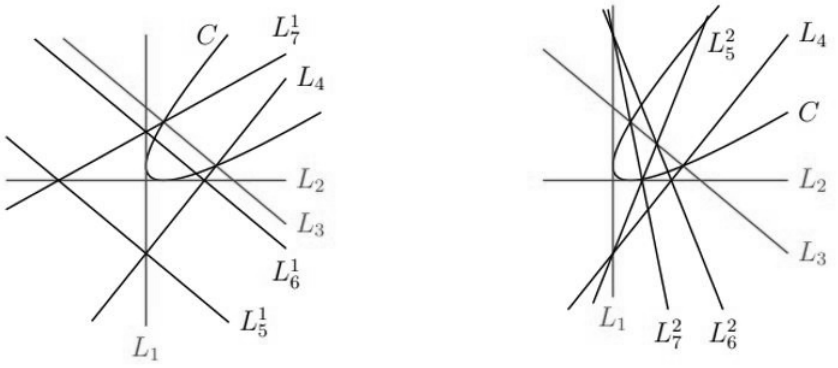


图 6. 在 [9] 中发现的 (7,1)–排列。

迄今为止，人们只发现了零星的圆锥曲线–直线 Zariski 对实例，也没有系统的方法来生成或分类它们。在下一节中，我们将介绍计算框架，该框架通过归纳生成 $(n,1)$–排列，并检验它们是否等价。

3 计算与结果

我们引入组合等价的概念，以体现 Zariski 对定义中的第一个条件。这个组合框架为归纳程序奠定基础，该程序生成所有在等价意义下的 $(n,1)$–线排列，并由此形成一个集合，供之后从中识别潜在的 Zariski 对。

3.1 组合等价

设 C 为一个 $(n,1)$–配置，并令 $I(C)$ 为 C 中所有交点的集合。

定义 3. 对于每个 $p \in I(C)$，我们关联一个特征三元组

$$\mathrm{char}(p) = (\chi_1, \chi_2, \chi_3),$$

定义如下：

1. 如果 p 是切点，则为 $\chi_1 = 1$；否则为 $\chi_1 = 0$。*2.* 如果 p 位于圆锥曲线上，则为 $\chi_2 = 1$；否则为 $\chi_2 = 0$。*3.* 经过 p 且不在 p 处相切的不同直线的数量为 $\chi_3 =$ 。

定理 1。 对于一对 (C_1, C_2) 的 $(n,1)$–排列，以下条件等价：

1. 存在管状邻域 $T(C_1)$ $T(C_2)$ 以及同胚 $h: T(C_1) \to T(C_2)$，使得 $h(C_1) = C_2$。
2. 分别对 C_1 和 C_2 中的直线进行指标编排，并存在双射 $b:$ $I(C_1) \to I(C_2)$，使得对于每个 $p \in I(C_1)$：– $char(b(p)) = char(p)$ – 经过 p 的直线指标集合与经过 $b(p)$ 的直线指标集合相同；如果某条直线在 p 处相切，则具有相同指标的直线在 $b(p)$ 处相切。

C 中所有交点的特征三元组所组成的多重集称为弱数值类型。

例 *5*。 图 7 展示了所有在组合等价意义下的 (3，1)–线排列。对于具有 $n \leq 3$ 的 $(n$，1)–线排列，弱数值类型已经能够确定其组合结构。

具体考虑图 7 左上方的例子。这个 (3，1)–线排列由一条圆锥曲线和三条切线组成。其中有两类交点：切点（记作 P_1）以及直线之间的简单交点（记作 P_2）。对于任意 $p_1 \in P_1$，我们有 $\mathrm{char}(p_1) = (1, 1, 0)$；对于任意 $p_2 \in P_2$，我们有 $\mathrm{char}(p_2) = (0, 0, 2)$。

3.2 算法方法

我们构建了一个归纳程序，用于生成并检验所有可能的 $(n$，1)–线排列：

1. 从唯一的 (0,1)–线排列开始，该线排列仅由一条圆锥曲线组成。2. 在每一步 j 中，通过以所有可能的方式向每个 $(j-1$,1)– 线排列添加一条新直线，生成所有 (j,1)–线排列。3. 每一步之后，按照组合等价关系移除重复项。

对 $j \leq n$ 重复此过程，即可得到所有在组合等价意义下的 $(n$，1)–线排列的完整集合。

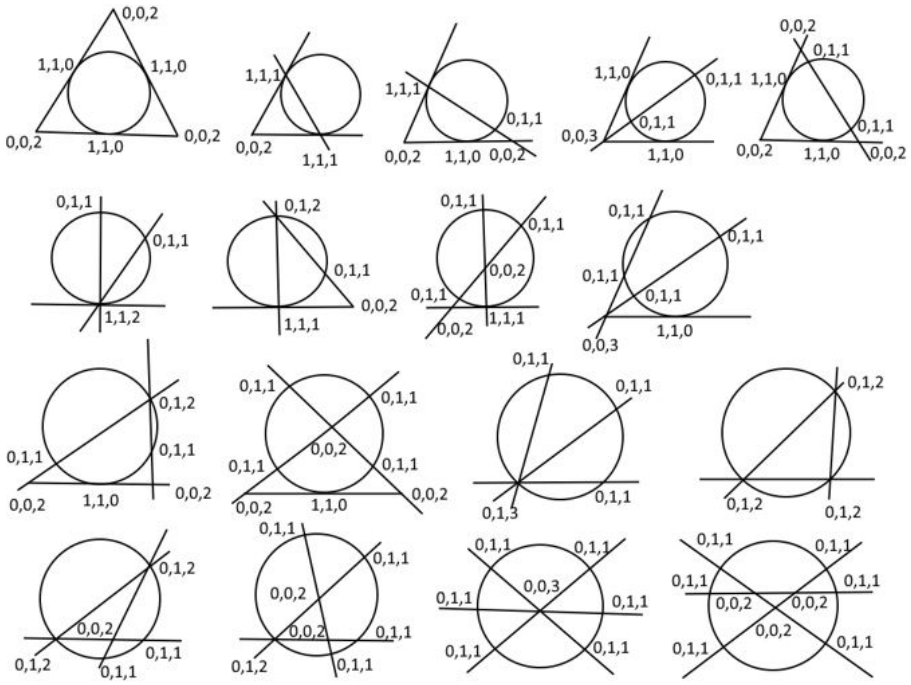


图 7. 所有此类组合等价的 (3,1)–线排列

3.3 识别 Zariski 对的方法

为确定一对线排列是否确实构成 Zariski 对，我们采用以下方法:

– 应用关于极小 Zariski 对的已知引理和新引理。– 通过 $PGL(3,\mathbb{C})$ 的作用检验射影等价。– 计算补空间的基本群。

关键引理。 设 $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ 是 $(n,1)$–线排列的一个极小 Zariski 对，且 $L \in B_1$ 是一条直线。现在我们陈述关键的极小性判据，这些判据使我们能够在不进行群计算的情况下排除许多组合候选项。

引理 1. 直线 L 必须经过至少一个约束。

证明。 假设 L 不满足任何约束。令 L' 为 B_2 中与 L对应的直线，此对应关系由 B_1 与 B_2之间固定的组合识别给出。设 $C_1 = B_1 \setminus L$和 $C_2 = B_2 \setminus L'$。根据构造，C_1 和 C_2 具有相同的组合结构。由于（B_1, B_2）是极小的， C_1 和 C_2 同胚。因此，不失一般性，我们可以假设 $C_1 = C_2$。现在，我们可以轻易找到一个连续

变形，将 L 变为 L'，并在整个变形过程中保持组合结构不变。因此 $B_1 \simeq B_2$，矛盾。

引理 2. 如果一条非切线 L 恰好有一个约束 p，那么 p 在 $B_1 \setminus L$ 中的特征至少还会在 $B_1 \setminus L$的另一点出现。

证明。 反设 p 的特征在 $B_1 \setminus L$中是唯一的。设 L' 是 B_2 中对应于 L的直线，因此 $B_1 \setminus L \simeq B_2 \setminus L'$。由于 p 在 $B_1 \setminus L$ 中的特征是唯一的，且 L 不是圆锥曲线的切线，因此，除去保持组合结构的连续变形外，只有一种方式可以向 $B_1 \setminus L$ 添加一条直线，从而恢复 B_1的组合结构。因此

$$B_1 = \overline{B_1 \setminus L} \cup L \simeq \overline{B_2 \setminus L'} \cup L' = B_2,$$

这就产生了矛盾。

注 *1.* 如果 L 与圆锥曲线相切，那么其唯一约束点的特征并不能确定切向方向。因此，添加回被移除直线的过程并非唯一（即使考虑同伦也是如此），所以上述论证不适用。

引理 3。 若直线 L 恰有两个约束 p、q，则 $B_1 \setminus L$ 中 p 和 q 的特征至少还会在 $B_1 \setminus L$ 中另一对点处出现。

证明。 论证与引理 2 相同。

射影等价。 我们利用 $PGL(3, \mathbb{C})$ 的三重传递性，检验两个构型是否射影等价。

若存在这样的变换，则这些线排列射影等价（因而拓扑等价）。

基本群。 我们计算补空间的基本群，以进一步区分这些线排列。如果两个线排列具有相同的组合结构，但基本群不同构，那么它们构成一个 Zariski 对。即使这些群同构，我们仍可能得到一个 Zariski 对。

同构检验依赖由 Gebhardt 开发的代数算法，这些算法使我们能够严格比较群表示。

3.4 迄今取得的成果

– 我们证明了对于 $n \leq 4$，不存在 (n,1)–线排列 Zariski 对。– 我们的程序对 $n \leq 5$ 的所有 (n,1)–线排列进行了分类。– 我们发现了新的引理，以排除潜在的 Zariski 对。– 我们开发了用于分析基本群并检测 Zariski 对的算法。

3.5 重新审视圆锥曲线–线排列示例

让我们重新考察一个 (4,1)–配置的例子，见图 1。将此配置记为 C。其组合类型如下表所示。

点特征	
P(1，2)	特征为 (1, 1, 1)，直线为 1、2，相切数为 1
P(4)	特征为 (0, 1, 1)，直线为 4
P(2，4)	特征为 (0, 0, 2)，直线为 2、4
P(2，3)	的特征为 (0, 1, 2)，直线为 2、3
P(3，4)	的特征为 (0, 1, 2)，直线为 3、4
P(1，3)	的特征为 (0, 0, 2)，直线为 1、3
P(1，4)	的特征为 (0, 0, 2)，直线为 1、4

表1。图 1 中的点及其特征

注意， L_4 恰好经过一个约束，即 $P(3,4)$。如果移除 L_4，那么 $C \setminus L_4$ 中 $(3,4)$ 的特征是唯一的。根据引理 2，此组合类型不存在 Zariski 对。

3.6 总结

我们已经:

– 定义了 Zariski 对，并阐述了其在代数曲线研究中的作用。– 将寻找所有 Zariski 对候选对象的问题，从拓扑问题转化为组合问题。– 介绍了我们的程序所使用的归纳算法，该算法能够生成某些自然 n 下所有可能的 (n,1)–线排列。– 讨论了用于判定候选对象是否确为 Zariski 对的方法，包括射影等价和基本群。– 报告了当前结果，特别是指出在 (4,1)–线排列中不存在 Zariski 对。– 重新考察了一个特定的 (4,1)– 线排列，并展示了如何运用我们的组合判据和引理，排除这一情形下存在 Zariski 对的可能性。

3.7 后续步骤

我们概述了继续这项研究的两个主要方向。

更多直线 随着直线数量增加，排列空间的复杂性迅速增长。新的交模式不断出现，需要采用超越低次数情形中所用技术的额外处理方法。一个关键挑战是候选构型数量的组合爆炸。因此，我们计划优化算法并改进添加直线的过程，以便高效处理更大的 n值。

多个圆锥曲线 存在多个圆锥曲线会显著增加必须考虑的几何关系和交类型的数量。当前的组合等价定义必须加以扩展，以纳入多个圆锥曲线之间以及圆锥曲线与直线之间的相互作用。我们计划提高方法的算法效率，以管理这一更广泛情形下所需处理的更多案例和比较。

致谢

本研究与 Uriel Sinichkin（特拉维夫大学）和 Volker Gebhardt（西悉尼大学）合作完成。我们感谢他们在项目开展过程中给予的指导、数学见解以及许多有益的讨论。

参考文献

1. Amram, M., Shwartz, R., Sinichkin, U., Tan, S.L., Tokunaga, H.o.：通过基本群研究次数为 7 和 8 的圆锥曲线—直线配置的 Zariski 对（2025）2. Artal-Bartolo, E.：论 Zariski 对（sur les couples de Zariski）。《代数几何杂志》**3**，223 14026 3 247 1994 0524 – ( )。DOI Zbl . . Artal-Bartolo, E., Bannai, S., Shirane, T., Tokunaga, H.o.：平面曲线的扭子除子与 Zariski 对。代数与分析 **34**(5)，1–22（2022）。DOI 10.1090/spmj/ 1776 4. Artal-Bartolo, E., Bannai, S., Shirane, T., Tokunaga, H.o.：具有极大挠点的平面曲线的扭子除子与 Zariski 对。《数学新闻》**296**(6)，2214–2235（2023 202000319 5 10 1002 ）。DOI . /mana. . Artal-Bartolo, E., Carmona Ruber, J., Cogolludo-Agustin, J.：平面曲线的辫单值化与拓扑学。Duke Math. J. **118**，261–278（2003）。DOI DOI: 10 2 6 1215 0012 7094 03 11823 . /S - - - - . Artal-Bartolo, E., Carmona Ruber, J., Cogolludo Agustin, J., Luengo Velasco, I., Melle Hernandez, A.：平面曲线的基本群及相关不变量。载于：数学论文集：献给 D. Joaqu´ın Arregui Fern´andez 教授的纪念文集。Editorial Complutense，马德里，第 77–104 页（2021）。DOI https://docta.ucm.es/rest/api/core/bitstreams/d583f115-5bfc-4a2c-b708-e2eea41a074d/content 7. Artal-Bartolo, E., Cogolludo-Agustin, J., Tokunaga, H.o.：Zariski 对综述。载于《东亚代数几何——河内 2005》：第二届东亚代数几何国际会议论文集，越南河内，2005 年 10 月 10–14 日，第 1–100 页。东京：日本数学会（2008）。DOI 10 05010001 8 2969. /aspm/ . Artal-Bartolo, E., Dimca, A.：论平面曲线补空间的基本群。Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat. **61**，255–262（2004）。DOI https://doi.org/10.1007/s11565-015-0231-x 9. Bannai, S., Guerville-Ball´e, B., Shirane, T.：具有唯一圆锥曲线的圆锥曲线—直线配置的 Zariski 对（2024）10. Bannai, S., Tokunaga, H.o.：光滑三次曲线及其切线的 Zariski 元组。《日本学士院纪要 A 辑：数学科学》**96**(2)，18–21（2020）。DOI 10.3792/pjaa.96.004

11. Degtyarev, A.：次数为 5 的复射影平面曲线的同位分类。代数与分析 **1**，78–101（1989）12. Degtyarev, A.：奇异平面六次曲线的变形。《代数几何杂志》**17**，101 135 2008 10 1090 1056 3911 07 00469 – ( )。DOI . /S - - - -9 13. Friedman, M., Leyenson, M., Shustin, E.：射影平面的分歧覆盖 I：对塞格雷理论的诠释（附 Eugenii Shustin 的附录）。国际数学杂志 **22** 11006945 14 2011 10 1142 0129167 ( )。DOI . /S X . Kampen, E.R.V.：论代数曲线的基本群。美国数学杂志 **55**2371128 15 1 255 260 1933 ( )，– ( )。DOI http://www.jstor.org/stable/ 。Namba, M., Tsuchihashi, H.：论射影平面伽罗瓦覆盖空间的基本群。几何奉献 **105**，85–105（2004）。DOI 10.1023/B: GEOM.0000024693.88450.d9 16. Oka, M.：挠曲线及其应用。几何奉献 **75**，67–100（1999）。DOI 10 1005004123844 17 1023. /A: . Oka, M.：一个新的亚历山大等价的扎里斯基对。越南数学学报 **27**，349–357（2002）18. Shimada, I.：关于 Zariski 对的注记。组合数学 **104** （1995）。DOI 10.48550/ arXiv.alg-geom/9505007 19. Takahashi, A., Tokunaga, H.o.：通过除法和 Zariski 元组显式构造与光滑三次曲线具有 n-接触的曲线。北海道数学杂志 **51**(3)，389–405（2022 391 20 10 14492 2020 ）。DOI . /hokmj/ - . Tokunaga, H.o.：椭圆曲面的截面及通过二面体覆盖得到的圆锥曲线—直线配置的 Zariski 对。《日本数学会杂志》**66**(2)，613–640（2014）。DOI 10 06620613 21 2969. /jmsj/ 。Zariski, O.：论存在具有给定分支曲线的二元代数函数这一问题。美国数学杂志 **51**(2)，305–328（1929）。DOI http://www.jstor.org/stable/2370712