arXiv:2601.00472v1 [math.AG] 1 Jan 2026

量子多对数

Alexander B. Goncharov

目录

1 引言 **2**
1.1 二对数与量子二重对数 .21.2 多重多对数 .31.3 量子多对数。.51.4 q–多重多对数的变形 .61.5 量子多对数与多重多对数之间的联系 .6

2 一种新的多重多对数积分表示 8

3 量子多对数的性质10
3.0.1 差分关系.103.0.2 当 $\hbar \to 0$ .103.0.3 分布关系.113.0.4 在 $\hbar = 1$ .123.0.5 $\mathcal{I}$–变体的量子多对数。.133.0.6 微分方程.133.0.7 复共轭.143.0.8 洗牌关系.143.0.9 解析延拓。.163.0.10 例子：基本量子多对数.16

4 量子多对数与多重 q–多对数17
4.1 多重 q–多对数的 q–积分.184.2 作为 2^m 伴随 q–多对数之和的量子多对数. 20

5 深度一例子 **22**
5.1 量子伯努利多项式.225.2 深度一量子多对数.25

6 结语 **28**

摘要

多重多对数是混合塔特动机的变分的周期。人们猜想，它们给出了所有此类周期。

我们引入依赖于参数 $\hbar \in \mathbb{C}$ 的多重多对数变形，并称之为 量子多对数。它们在 $\hbar \to 0$ 时的渐近展开可还原为多重多对数。Barnes 在 19 世纪研究了量子二重对数。其指数出现在数学和物理学的许多领域。

量子多对数满足一个全纯系统，其模差分方程的系数取值于具有动机来源的混合霍奇-泰特结构的变分中。

如果 $\hbar \in \mathbb{Q}$，量子多对数可以用多重多对数表示。

然而，如果 $\hbar \neq \mathbb{Q}$，量子多对数并非混合动机变分的周期，也就是说，它们不能表示为代数簇上的有理微分形式的积分。相反，量子多对数是由有理函数和有理函数的指数函数共同构成的微分形式的积分。我们称之为有理指数积分。

我们认为，量子多对数反映了一种非常普遍的现象：
混合动机变分的周期应当具有量子变形。

1 引言

1.1 二对数与量子二对数

二对数函数由以下幂级数定义：

$$\mathrm{Li}_2(z) := \sum_{k>0} \frac{z^k}{k^2}.$$

它可以继续 解析延拓为定义在 $\mathbb{CP}^1 - \{0, 1, \infty\}$ 的一个覆盖空间上的函数，其定义由积分给出

$$\mathrm{Li}_2(z) := -\int_0^z \log(1-t)\frac{dt}{t}.$$

二对数的 一个关键特征是它满足阿贝尔五项关系。

二对数幂级数存在一种 q–变形：

$$\mathrm{Li}_{1,1}(z;q) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(q^k - q^{-k})k}.$$

其指数是 Pochhammer 符号的倒数。具体来说，令

$$\Psi_q(z) := \frac{1}{(1+qz)(1+q^3z)(1+q^5z)\cdot\ \ldots}.$$

于是有

$$\log \Psi_q(z) = -\mathrm{Li}_{1,1}(-z;q). \tag{1}$$

令 $q = e^{\pi i\hbar}$，并设 $\hbar \to 0$，我们得到渐近展开式

$$\log \Psi_q(z) \sim_{\hbar\to 0} \ -\frac{\mathrm{Li}_2(-z)}{2\pi i\hbar}. \tag{2}$$

它满足由 Faddeev 和 Kashaev 发现的量子五边形关系 [FK]。也就是说，考虑满足关系式 X, Y的变量 $XY = q^2YX$。那么我们有如下q–关于 X的Y交换幂级数恒等式：

$$\Psi_q(X)\Psi_q(Y) = \Psi_q(Y)\Psi_q(X+Y)\Psi_q(X),$$

其准经典极限恢复了二对数的阿贝尔五项关系。

幂级数 $\Psi_q(z)$ 仅在 $|q|<1$ 时收敛。值得注意的是，商

$$\Phi_\hbar(\omega)=\frac{\Psi_q(e^\omega)}{\Psi_{q^*}(e^{\omega/\hbar})},\qquad q=e^{i\pi\hbar},\ \ q^*=e^{-i\pi/\hbar},\ \ \mathrm{Im}\hbar>0 \tag{3}$$

具有优异的解析性质。尤其是，它是关于 ω的亚纯函数，依赖于复参数 $\hbar$。为说明这一点，回顾 Barnes 引入并研究的积分 [Ba]:

$$\mathcal{F}^\hbar(\omega):=\int_{\mathbb{R}+i0}\frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}(\pi p)\mathfrak{sh}(\pi\hbar p)}\frac{dp}{p},\qquad\qquad \mathfrak{sh}(p)=e^p-e^{-p}. \tag{4}$$

积分路径 $\mathbb{R}+i0$是围道 $\mathbb{R}+i\varepsilon,\varepsilon>0$在 $\varepsilon\to 0$ 时的极限。对任意复数值的 $\hbar$，该积分都有定义；当 $\mathrm{Im}(\omega)<\pi(1+|\mathrm{Re}(\hbar)|)$ 时收敛，并且在 ω 平移 $2\pi i$ 和 $2\pi i\hbar$时满足差分关系

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^\hbar(\omega+2\pi i)&=\mathcal{F}^\hbar(\omega)-\log(1+e^{i\pi\hbar}e^{\omega})\\ \mathcal{F}^\hbar(\omega+2\pi i\hbar)&=\mathcal{F}^\hbar(\omega)-\log(1+e^{i\pi/\hbar}e^{\omega/\hbar})\end{aligned} \tag{5}$$

这使得 它可以扩展为关于 $\omega\in\mathbb{C}$ 的多值解析函数。最后，有

$$\Phi_\hbar(\omega)=\exp(-\mathcal{F}^\hbar(\omega)). \tag{6}$$

我们称函数 $\mathcal{F}^\hbar(\omega)$ 为量子二对数，尽管这个名称通常用于它的指数形式。量子二对数及其相关函数出现在统计物理学 [Bax],Liouville 理论[DO], [ZZ], 量子群 [F], 量子高阶Teichmüller理论 [K], [CF],[FKV], [FG1]- [FG2], [GS], 簇簇流形量子化 [FG3], 以及许多其他领域 [V]。量子二对数满足量子五边形关系，这一关系在其应用中发挥着重要作用。具体而言，函数 $\Phi_\hbar(\omega)$ 在实数轴上有定义且为酉函数。考虑 $L_2(\mathbb{R})$ 中的酉算子 K，它由先乘以 $\Phi_\hbar(w)$，再进行傅里叶变换构成:

$$K:f(w)\longrightarrow\int_{\mathbb{R}}f(w)\Phi_\hbar(w)e^{-\frac{i\omega\xi}{2\pi\hbar}}dt.$$

于是 $K^5=c\cdot\mathrm{Id}$，其中 c 是常数， $|c|=1$。其准经典极限给出了二对数的五项关系。函数 $\mathcal{F}^\hbar(\omega)$ 的非凡解析性质，加上五项关系的量子变形，表明它是二对数自然的量子变形。现在让我们来看看二对数函数的推广。

1.2 多重多对数

回顾经典多对数级数:

$$\mathrm{Li}_n(z):=\sum_{k>0}\frac{z^k}{k^n}.$$

对于任意整数 n，它们都有意义。对于 $n\le 0$，它们是关于 z 的有理函数。对于 $n>0$，当 $|z|<1$时它们收敛，并且可以解析延拓到 $\mathbb{CP}^1-\{0,1,\infty\}$ 的一个覆盖空间上。

多重多对数 由幂级数展开式定义 [G94]:

$$\mathrm{Li}_{n_1,\dots,n_m}(z_1,\dots,z_m) := \sum_{0<k_1<k_2<\dots<k_m} \frac{z_1^{k_1} z_2^{k_2}\dots z_m^{k_m}}{k_1^{n_1} k_2^{n_2}\dots k_m^{n_m}}, \tag{7}$$

它们在 收敛。这里， m 是深度，而 $|\mathbf{n}| := n_1+\dots+n_m$ 是权重 .

多重多对数可以用迭代积分表示，从而能够对其进行解析延拓。具体而言，给定 1–在 $\mathbb{C}$上的亚纯 ω_i形式t，以及一条不与它们的极点相交的路径 $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$，回顾一下直线上的迭代积分:

$$\int_\gamma \omega_1(t)\circ\dots\circ\omega_m(t) := \int_{0\le t_1\le\dots\le t_m\le 1} \gamma^*\omega_1(t_1)\wedge\dots\wedge\gamma^*\omega_m(t_m).$$

为了用直线上的迭代积分表示多重多对数，令

$$\mathrm{I}_{n_1,\dots,n_m}(0;z_1,\dots,z_m;z_{m+1}) := \int_0^{z_{m+1}} \underbrace{\frac{dt}{z_1-t}\circ\frac{dt}{t}\circ\dots\frac{dt}{t}}_{n_1 \text{ differentials}}\circ\dots\circ\underbrace{\frac{dt}{z_m-t}\circ\frac{dt}{t}\circ\dots\circ\frac{dt}{t}}_{n_m \text{ differentials}}. \tag{8}$$

这里的迭代积分取遍从 0 到 z_{m+1}的路径。它是点集空间上的多值解析函数，这些点两两不同，即 (0， z_1，.....， z_{m+1}) 属于 $\mathbb{C}$。于是由 [G01，定理 2.2]: [1]

$$\mathrm{I}_{n_1,\dots,n_m}(0;z_1,\dots,z_m;z_{m+1}) \;=\; \mathrm{Li}_{n_1,\dots,n_m}\Big(\frac{z_2}{z_1},\frac{z_3}{z_2},\dots,\frac{z_{m+1}}{z_m}\Big). \tag{10}$$

I在第2节中，我们将为多重多对数建立一种新的积分表示 s:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Li}_{n_1,\dots,n_m}(e^{\omega_1-\omega_2},e^{\omega_2-\omega_3},\dots,-e^{\omega_m}) = \\ &i^{|\mathbf{n}|-m}\int_{(\mathbb{R}+i0)^m}\frac{e^{-ip_1\omega_1}}{\mathfrak{sh}(\pi p_1)}\frac{dp_1}{p_1^{n_1}}\wedge\dots\wedge\frac{e^{-ip_m\omega_m}}{\mathfrak{sh}(\pi p_m)}\frac{dp_m}{(p_1+\dots+p_m)^{n_m}}.\end{aligned} \tag{11}$$

因此，我们有多重多对数的三种不同表示：作为幂级数（8）、通过迭代积分（10），以及使用积分表示（11）。我们注意到，两个积分（8）和（11）是通过幂级数（7）建立联系的，而不是直接相关。

迭代积分表示（10）表明，多重多对数是混合 Tate 动机的周期。猜想地说，它们给出了所有这类周期 [G94，猜想 17]。

我们引入多重多对数的一种变形，称为量子多对数，它依赖于参数 $\hbar\in\mathbb{C}$。利用积分表示（11），我们看到，它在 $\hbar\to 0$ 处的渐近展开恢复了多重多对数。

量子多对数为所有混合 Tate 动机的周期提供了量子变形。我提出，混合动机的任意变分的周期都具有量子变形。

[1]模空间*positive locus* $\mathcal{M}_{0,\ n+3}^{+}$ 是$\mathcal{M}_{0,\ n+3}$ 在 $\mathbb{RP}^1$上有序点配置的集合，再对角 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$-作用取商，其顺序与某一个圆周定向相容。我们有

$$(\infty,z_1,\dots,z_m,1,0)\in\mathcal{M}_{0,n+3}^{+} \quad \text{if and only if} \quad z_1>\dots>z_m>1. \tag{9}$$

反转顺序会保留正区域。迭代积分（8）在正区域上有一个由路径 $\gamma=[0,1]$给出的自然分支。这里的正性仅表示多重对数级数（10）的自变量是大于 0 且小于 1 的数，因此级数收敛。

1.3 量子多对数。

首先介绍一下核函数。

定义 1.1 . 设 a, b 是一对非负整数。核函数定义为

$$K^{\hbar}_{a,b}(p;\omega) := \frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}^a(\pi p)\mathfrak{sh}^b(\pi\hbar p)}. \tag{12}$$

深度为 m 的量子多对数是函数 $\mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\omega_1,\dots,\omega_m)$，定义在 m 个复变量 ω_i 上，并依赖于一组三元组的 m 元整数

$$\mathbf{a}=(a_1,...,a_m),\quad \mathbf{b}=(b_1,...,b_m),\quad \mathbf{n}=(n_1,...,n_m),\qquad a_i,b_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\ n_i\in\mathbb{Z}.$$

定义 1.2. 深度为 m 的量子多对数是积分

$$\mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\omega_1,...,\omega_m) := i^{|\mathbf{n}|-m}\int_{(\mathbb{R}+i0)^m}\bigwedge_{k=1}^{m} K^{\hbar}_{a_k,b_k}(p_k;\omega_k)\frac{dp_k}{(p_1+\ldots+p_k)^{n_k}}. \tag{13}$$

我们将 π 和 ω_j 的权重定义为 *1*，并将量子多对数的权重定义为

$$|\mathbf{n}| := n_1+...+n_m. \tag{14}$$

当 $|$虚部 $\omega_i|<\pi(a_i+b_i|\mathrm{Re}(\hbar)|)$ 时，积分收敛。它借助量子多对数的差分关系(35)，可延拓为关于 $(\omega_1,...,\omega_m)$ 的多值解析函数 $\in\mathbb{C}^m$。

作为 $\hbar$ 的解析函数，$\mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{n}}(\omega_1,\ \ldots\ldots,\ \omega_m)$ 可延拓至去掉负实轴 $\hbar<0$ 后的复平面。只要整数$a_i,\ b_i$ 中有一个为正，积分对任意 $n_i\in\mathbb{R}$ 均收敛。以下是两个例子。

1. 深度一量子多对数由以下积分给出

$$\mathcal{F}^{\hbar}_{a,b,n}(\omega) := i^{n-1}\cdot\int_{\mathbb{R}+i0}\frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}^a(\pi p)\mathfrak{sh}^b(\pi\hbar p)}\cdot\frac{dp}{p^n},\qquad a,b\geq 0.$$

2. 深度二量子多对数由下式给出

$$\mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\omega_1,\omega_2) := \\ i^{|\mathbf{n}|-2}\cdot\int_{(\mathbb{R}+i0)^2}\frac{e^{-ip_1\omega_1}}{\mathfrak{sh}^{a_1}(\pi p_1)\mathfrak{sh}^{b_1}(\pi\hbar p_1)}\frac{e^{-ip_2\omega_2}}{\mathfrak{sh}^{a_2}(\pi p_2)\mathfrak{sh}^{b_2}(\pi\hbar p_2)}\cdot\frac{dp_1}{p_1^{n_1}}\wedge\frac{dp_2}{(p_1+p_2)^{n_2}}. \tag{15}$$

定理 1.3. 有理数 $\hbar\in\mathbb{Q}$ 处的量子多对数是权重相同的混合 *Tate* 动机变分的周期。

定理1.7中给出了精确表述。与此形成鲜明对比的是，无理数 $\hbar\notin\mathbb{Q}$ 处的量子多对数**并非**混合动机变分的周期。

根据定理 3.7，量子多对数满足洗牌积公式，从而具有代数结构。

令 $\omega_1 = ... = \omega_m = 0$ 和 $\mathbf{a} = \mathbf{b} = (1, ..., 1)$，我们得到深度$m$多重 ζ-函数的 $\hbar$–变形。例如，对于深度 2，有

$$\zeta_\hbar(s_1, s_2) := \int_{(\mathbb{R}+i0)^2} \frac{dp_1}{\mathfrak{sh}(\pi p_1)\mathfrak{sh}(\pi\hbar p_1)p_1^{s-1}} \frac{dp_2}{\mathfrak{sh}(\pi p_2)\mathfrak{sh}(\pi\hbar p_2)(p_1+p_2)^{s_2-1}}. \tag{16}$$

这些函数的解析延拓与 [G01 定理 2 中的方法相同。25]当 $s_i = n_i$ 为正整数时，我们得到欧拉多重 $\hbar$–值的一个变形。 ζ

有趣 的 q–多重 ζ–值的变形由 Okounkov [O] 考虑。

1.4 q–多重多对数的变形

约定。我们用拉丁字母 z_i 表示射影直线上各点的坐标，用希腊字母 ω_i 表示相关的对数坐标：$z_i = e^{\omega_i}$。

多重多对数幂级数（7）有一个 q–变形：

定义 1.4. 设$\mathbf{a},\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$。多重 q–多对数是关于 $z_1, ..., z_m$的幂级数 ：

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{n}}(z_1, ..., z_m; q) := \sum_{k_1,...,k_m>0} \frac{z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_m^{k_m}}{[k_1]_q^{a_1}[k_2]_q^{a_2} \dots [k_m]_q^{a_m} \cdot k_1^{n_1}(k_1+k_2)^{n_2} \dots (k_1+...+k_m)^{n_m}}, \quad [n]_q := q^n - q^{-n}. \tag{17}$$

多重 q–多对数级数（17）的权重定义为 $\mathbf{n}$，与（14）中的定义相同。

例子. 二对数 Li 的权重 q–dilogarithm $\mathrm{Li}^{1,1}(z;\ q)$ 和量子二对数 $\mathcal{F}^\hbar(\omega)$ 均为 1。由于 $2\pi\hbar$ 的权重为 1，式（2）中的函数权重为 1，这与（1）一致。

注意，与级数（7）不同，（17）中的求和是在八分体 $k_1, ..., k_m > 0$ 上进行的。因此，级数 $\mathrm{La}_{\mathbf{a},\mathbf{n}}(z_1, ..., z_m;\ q)$ 没有洗牌积公式。

幂级数（17）在 q 为单位根时没有定义。在第4.2 节中，我们用伴随级数对其进行补充。它们的适当求和与量子多对数积分一致，从而推广了关系式（3）中的对数，因此对任意 $\hbar$都收敛。

1.5 量子多对数与多重多对数之间的联系

权重与量子多对数的主要运算相容 ：

- 偏导数会使权重降低 1，见（51）。
- 差分关系保持权重不变，见（35）。

从量子多对数过渡到其指数形式会破坏权重。尤其是，这就是我们称函数 $\mathcal{F}^\hbar(\omega)$ 为量子二重对数，而不称其指数形式 $\Phi_\hbar(\omega)$ 为量子二重对数的原因。

量子多对数与多重多对数存在多种联系：

1. 根据 $\hbar \to 0$，权重 $|\mathbf{n}|$ 量子多对数具有如下形式的渐近展开，其中 $\hbar \to 0$ ，参见定理 3.1：

$$\sum_k (2\pi i\hbar)^{-k} \times \quad \text{sums of multiple polylogarithms of the weight } |\mathbf{n}| + k.$$

渐近展开的所有项具有相同的权重 $|\mathbf{n}|$。

2. 通过 $\hbar = 1$ 特化。我们在定理 3.3中证明：

定理 1.5。 $\mathcal{F}^1_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\omega_1, ..., \omega_m)$ 是函数 $\mathbf{P}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}\left(\frac{\omega_1}{2\pi}, ..., \frac{\omega_m}{2\pi}\right)$ 的乘积，其中 $\mathbf{P}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ 是一个多项式，其系数属于 $\mathbb{Q}$，而多重多对数 $\mathrm{Li}_{n_1,...,n_m}$：

$$\mathcal{F}^1_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\omega_1, ..., \omega_m) = \mathbf{P}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}\left(\frac{\omega_1}{2\pi}, ..., \frac{\omega_m}{2\pi}\right) \cdot \mathrm{Li}_{n_1,...,n_m}\left((-1)^{a_1+b_1} e^{\omega_1}, ..., (-1)^{a_m+b_m} e^{\omega_m}\right). \quad (18)$$

由于 $\frac{\omega}{2\pi}$ 的权重为零，等式两边具有相同的权重 $|\mathbf{n}|$。

（18）右侧是在（$\mathbb{C}^\times$）^{m}上的混合 Tate 动机的变分的一个周期：

$$(18) = \mathbf{P}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}\left(\frac{\log z_1}{2\pi}, ..., \frac{\log z_m}{2\pi}\right) \cdot \mathrm{Li}_{n_1,...,n_m}\left((-1)^{a_1+b_1} z_1, ..., (-1)^{a_m+b_m} z_m\right).$$

3. 通过分布关系。给定一对互素整数 r， s定理 3.2 将 $\frac{r}{s}\hbar$ 处的量子多对数与 $r\hbar$处的一系列类似量子多对数联系起来。具体而言：

定理 1.6。 存在如下分布关系：

$$\begin{aligned} &r^{|\mathbf{n}|-m} \mathcal{F}^{\frac{r}{s}\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(r\omega_1, ..., r\omega_m) = \\ &\sum_{\alpha_j=\frac{1-r}{2}}^{\frac{r-1}{2}} \sum_{\beta_j=\frac{1-s}{2}}^{\frac{s-1}{2}} \mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\ldots, \omega_k + \frac{2\pi i}{r}\sum_{i=1}^{a_k}\alpha_j + \frac{2\pi i\hbar}{s}\sum_{j=1}^{b_k}\beta_j, \ldots). \end{aligned} \quad (19)$$

H当求和上下限为半整数时，求和遍历半整数 α_j、 β_j .

结合定理 1.5 和 1.6，我们将有理数处的量子多对数$\hbar \in \mathbb{Q}$ 表示为同一权重的多重多对数之和：

定理 1.7。 $\hbar \in \mathbb{Q}$ 处的量子多对数函数是混合塔特动机变分的周期，由多重多对数给出。具体而言，令

$$\omega'_k = \omega_k + \frac{2\pi i}{r}\sum_{i=1}^{a_k}\alpha_j + \frac{2\pi i\hbar}{s}\sum_{j=1}^{b_k}\beta_j.$$

那么，使用定理 *1.5*中的记号，我们有

$$\begin{aligned} &r^{|\mathbf{n}|-m} \mathcal{F}^{\frac{r}{s}}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(r\omega_1, ..., r\omega_m) \\ &= \sum_{\alpha_j=\frac{1-r}{2}}^{\frac{r-1}{2}} \sum_{\beta_j=\frac{1-s}{2}}^{\frac{s-1}{2}} \mathbf{P}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}\left(\frac{\omega'_1}{2\pi}, ..., \frac{\omega'_m}{2\pi}\right) \mathrm{Li}_{n_1,...,n_m}(e^{\omega'_1}, ..., e^{\omega'_m}). \end{aligned} \quad (20)$$

4. 通过伴随的 $q-$多对数级数。回忆一下，我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\hbar}(\omega) &\overset{(3)}{=} \log \Psi_q(e^{\omega}) - \log \Psi_{q^*}(e^{\omega/\hbar}) \\ &\overset{(1)}{=} -\mathrm{Li}_{1,1}(-e^{\omega}; q) + \mathrm{Li}_{1,1}(-e^{\omega/\hbar}; q^*). \end{aligned} \quad (21)$$

深度 m 量子多对数是由以下各项求和构成的： 2^m 伴随的 $q-$多对数级数，它们具有相同的权重，是公式（21）的推广。

因此，量子多对数的权重以多种不同方式与多重多对数的权重相容。这十分引人注目，因为多重多对数的权重有着深刻的代数几何起源，而量子多对数则存在于传统代数几何之外。

致谢。本研究得到美国国家科学基金会 DMS-2153059 项目的资助。感谢高等科学研究所在论文准备的各个阶段提供的款待与支持。

2 多重多对数的一种新积分表示

定理 2.1. 假设 $|\text{虚部}\ w_i| < \pi$ 且 $\text{实部}\ w_i < 0$. 则有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Li}_{n_1,\dots,n_m}(e^{w_1},\dots,e^{w_{m-1}},-e^{w_m}) = \\ &i^{|\mathbf{n}|-m}\int_{(\mathbb{R}+i0)^m}\frac{e^{-ip_1w_1}}{\mathfrak{sh}(\pi p_1)}\frac{dp_1}{p_1^{n_1}}\wedge\ldots\wedge\frac{e^{-i(p_1+\ldots+p_m)w_m}}{\mathfrak{sh}(\pi p_m)}\frac{dp_m}{(p_1+\ldots+p_m)^{n_m}}.\end{aligned} \tag{22}$$

证明。 考虑在 $(\Omega_N+i\varepsilon)^m$ 上的积分，其中 $N>0$ 是一个整数，Ω_N 是上半平面中以 $[-N,N]$ 为底边的正方形，而 $(\Omega_N+i\varepsilon)$ 是其平移一个小 $\varepsilon>0$ 后所得的图形。

我们断言此积分收敛，且除底边以外任一边上的积分都随 $N\to\infty$ 指数衰减。事实上，有

$$\begin{aligned}&|e^{-ipw}| = e^{\mathrm{Im}(p)\mathrm{Re}(w)+\mathrm{Re}(p)\mathrm{Im}(w)},\\ &|e^{-ipw}/\mathfrak{sh}(\pi p)| \sim_{p\to\pm\infty} e^{\mathrm{Im}(p)\mathrm{Re}(w)+\mathrm{Re}(p)(\mathrm{Im}(w)\mp\pi)}.\end{aligned} \tag{23}$$

因此 $e^{-ipw}/\mathfrak{sh}(\pi p)$ 在左右两边随 $N\to\infty$ 指数衰减，因为实部 $w<0$。$(\Omega_N+i\varepsilon)^m$ 的顶边上的积分指数衰减，因为 $|\text{虚部}\ w|<\pi$，因此

$$\mathrm{Re}(p)(\mathrm{Im}(w)\mp\pi)\longrightarrow-\infty\ \text{ if }\ p\longrightarrow\pm\infty.$$

事实上，我们有 $\mathrm{Re}(p)\to\infty$ & $\mathrm{Im}(w)-\pi<0$，或 $\mathrm{Re}(p)\to-\infty$ & $\mathrm{Im}(w)+\pi>0$。最后，在我们的围道上 $|p|>\varepsilon$，因此底边上的积分收敛。

因此，我们可以利用留数定理计算积分。留数位于这些点 $(p_1,\dots,p_m)=(ik_1,\dots,ik_m)$，其中 $k_1,\dots,k_m>0$ 是整数。[2] 例如，在深度 2 情形下，点 $(p_1,p_2)=(ik_1,ik_2)$ 处留数的贡献等于 [3]

$$(2\pi i)^2\cdot\frac{i^{-2}}{(2\pi)^2}\frac{(-1)^{k_1+k_2}e^{k_1w_1}e^{w_2(k_1+k_2)}}{k_1^{n_1}(k_1+k_2)^{n_2}} = \frac{e^{k_1w_1}(-e^{w_2})^{k_1+k_2}}{k_1^{n_1}(k_1+k_2)^{n_2}}. \tag{24}$$

$(-1)^{k_1+k_2}$ 意味着在平移 $i\pi k$ 后，$\mathfrak{sh}(\pi p_j)$ 乘以 $(-1)^k$ 。接着，求和 $\sum_{k_1>0,\ k_2>0}$ 给出 $\mathrm{Li}_{n_1,\ n_2}(e^{w_1},\ -e^{w_2})$。由于 $\mathrm{Re}(w_i)<0$，这些级数收敛。

[2]另请参见定理 3.3 的证明，其中我们说明，在更一般的设定下，如何将 $p_1=ik_1,\dots,p_m=ik_m$ 处的留数计算，其中 $k_1,\dots,k_m>0$，归结为 $p_1=\ldots=p_m=0$处留数的计算。[3]因子 $i^{|\mathbf{n}|}$ 在 (22) 中与分母中的因子 $i^{|\mathbf{n}|}$ 相消。这就是因子 $i^{|\mathbf{n}|}$ 在 (22) 中以及量子多对数的定义 1.2 中发挥作用的方式。接下来，来自柯西定理的因子 $(2\pi i)^m$ 与 (i^{-m} 中的因子相消22) 和定义1.2中的因子相消。

T在深度为 m 的情形下，论证类似：在 $(ik_1, \ldots\ldots, ik_m)$ 处的留数为

$$\begin{aligned}(2\pi i)^m \cdot \frac{i^{-m}}{(2\pi)^m} \frac{(-1)^{k_1+\ldots+k_m} e^{k_1 w_1} \ldots e^{(k_1+\ldots+k_m)w_m}}{k_1^{n_1} \ldots (k_1+\ldots+k_m)^{n_m}} \\ = \frac{e^{k_1 w_1} e^{(k_1+k_2)w_2} \ldots (-e^{w_m})^{k_1+\ldots+k_m}}{k_1^{n_1}(k_1+k_2)^{n_2} \ldots (k_1+\ldots+k_m)^{n_m}}.\end{aligned} \tag{25}$$

定理得证。 □

设 $\gamma = [0, 1]$。将沿此路径定义的迭代积分记为 $\mathrm{I}^{(\gamma)}_{n_1,\ldots,n_m}(z_1, \ldots, z_m)$。

推论 2.2。假设 |虚部 $\omega_i| < \pi$ 且

$$\mathrm{Re}\ \omega_1 < \mathrm{Re}\ \omega_2 < \ldots < \mathrm{Re}\ \omega_m < 0. \tag{26}$$

于是有

$$\begin{aligned}&\mathrm{I}^{(\gamma)}_{n_1,\ldots,n_m}(0; e^{-\omega_1}, \ldots, e^{-\omega_m}; -1) \overset{(10)}{=} \\ &\mathrm{Li}_{n_1,\ldots,n_m}(e^{\omega_1-\omega_2}, e^{\omega_2-\omega_3}, \ldots, -e^{\omega_m}) = \\ &i^{|\mathbf{n}|-m} \int_{(\mathbb{R}+i0)^m} \frac{e^{-ip_1\omega_1}}{\mathfrak{sh}(\pi p_1)} \frac{dp_1}{p_1^{n_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{e^{-ip_m\omega_m}}{\mathfrak{sh}(\pi p_m)} \frac{dp_m}{(p_1+\ldots+p_m)^{n_m}}.\end{aligned} \tag{27}$$

证明。 第一个等式是基本等式（10）。第二个等式给出了多重多对数的新积分表示（11），并可由（22）立即推出。事实上，（22）和（27）中的被积函数仅相差指数函数；根据恒等式，它们相符

$$e^{-ip_1\omega_1} e^{-ip_2\omega_2} \ldots e^{-ip_m\omega_m} = e^{-ip_1(\omega_1-\omega_2)} e^{-i(p_1+p_2)(\omega_2-\omega_3)} \ldots e^{-i(p_1+\ldots+p_m)\omega_m}. \tag{28}$$

注意，后者等价于恒等式

$$p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + \ldots + p_m\omega_m = p_1(\omega_1-\omega_2) + (p_1+p_2)(\omega_2-\omega_3) + \ldots + (p_1+\ldots+p_m)\omega_m. \tag{29}$$

注意，条　　件 ω_i 见推论2.2 中的条件等价于定理2.1中的条件。 □

因此，我们得到了多重多对数和迭代积分的新积分表示。例如，对于深度 $m = 2$，它们如下所示：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Li}_{n_1,n_2}(e^{w_1}, -e^{w_2}) = i^{|\mathbf{n}|-2} \int_{(\mathbb{R}+i0)^2} \frac{e^{-ip_1w_1}}{\mathfrak{sh}(\pi p_1)} \frac{e^{-i(p_1+p_2)w_2}}{\mathfrak{sh}(\pi p_2)} \frac{dp_1}{p_1^{n_1}} \wedge \frac{dp_2}{(p_1+p_2)^{n_2}}. \\ &\mathrm{I}_{n_1,n_2}(0; e^{-\omega_1}, e^{-\omega_2}; -1) = i^{|\mathbf{n}|-2} \int_{(\mathbb{R}+i0)^2} \frac{e^{-ip_1\omega_1}}{\mathfrak{sh}(\pi p_1)} \frac{e^{-ip_2\omega_2}}{\mathfrak{sh}(\pi p_2)} \frac{dp_1}{p_1^{n_1}} \wedge \frac{dp_2}{(p_1+p_2)^{n_2}}.\end{aligned} \tag{30}$$

备注。 对于实数，条件（26） ω_i 仅表示$e^{-\omega_1} > \ldots > e^{-\omega_m} > 1$。因此，（27）中迭代积分的参数构成了 $m+3$ 个点的正配置。

3 量子多对数的性质

3.0.1 差分关系

回顾核函数

$$K^{\hbar}_{a,b}(p;\omega) := \frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}^a(\pi p)\mathfrak{sh}^b(\pi\hbar p)}. \tag{31}$$

令 $\Delta^{(\omega)}_a$ 为变量 ω 中的差分算子:

$$\Delta^{(\omega)}_a f(\omega) := f(\omega+a) - f(\omega-a), \tag{32}$$

核函数关于 ω 满足两个差分方程:

$$\begin{aligned} \Delta^{(\omega)}_{i\pi} K^{\hbar}_{a,b}(p;\omega) &= K^{\hbar}_{a-1,b}(p;\omega), \\ \Delta^{(\omega)}_{i\pi\hbar} K^{\hbar}_{a,b}(p;\omega) &= K^{\hbar}_{a,b-1}(p;\omega). \end{aligned} \tag{33}$$

事实上，有

$$\begin{aligned} \Delta^{(\omega)}_{i\pi\hbar} e^{-ip\omega} &= \mathfrak{sh}(\pi\hbar p)\cdot e^{-ip\omega}, \\ \Delta^{(\omega)}_{i\pi} e^{-ip\omega} &= \mathfrak{sh}(\pi p)\cdot e^{-ip\omega}. \end{aligned} \tag{34}$$

令 $\mathbf{1}_k :=(0,\ .....,\ 0,\ 1,\ 0,\ .....,\ 0)$，其中 1 位于 k 位。于是，核函数的差分关系（33）蕴含了量子多对数的差分关系：[4]

$$\begin{aligned} \Delta^{(\omega_k)}_{i\pi} \mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\omega_1,...,\omega_m) &= \mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a}-\mathbf{1}_k,\mathbf{b},\mathbf{n}}(\omega_1,...,\omega_m), \\ \Delta^{(\omega_k)}_{i\pi\hbar} \mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\omega_1,...,\omega_m) &= \mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b}-\mathbf{1}_k,\mathbf{n}}(\omega_1,...,\omega_m). \end{aligned} \tag{35}$$

3.0.2 $\hbar\to 0$趋于 0 时的渐近展开

定理 3.1. 当 $\hbar\to 0$ 时，函数 $\mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{n}}(\omega_1,...,\omega_m)$ 在 $2\pi\hbar$中具有渐近洛朗级数展开，其系数是量子多对数之和:

$$\mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\omega_1,...,\omega_m) \sim_{\hbar\to 0} (2\pi\hbar)^{-|\mathbf{b}|}\mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{0},\mathbf{b}+\mathbf{n}}(\omega_1,...,\omega_m)+\dots \tag{36}$$

渐近展开的所有项具有相同的权重。

证明。 核函数（ $\hbar\to 0$ 的渐近展开（31）的首项为

$$\frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}^a(\pi p)\mathfrak{sh}^b(\pi\hbar p)} \ \sim_{\hbar\to 0}\ \frac{1}{(2\pi\hbar)^b}\cdot\frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}^a(\pi p)}\frac{1}{p^b}. \tag{37}$$

这说明了渐近展开首项的结论。例如，在深度为二的情形中，展开式的首项为

$$\frac{i^{|\mathbf{n}|-2}}{(2\pi\hbar)^{|\mathbf{b}|}}\int_{(\mathbb{R}+i0)^2}\frac{e^{-ip_1\omega_1}}{\mathfrak{sh}^{a_1}(\pi p_1)}\frac{e^{-ip_2\omega_2}}{\mathfrak{sh}^{a_2}(\pi p_2)}\frac{dp_1}{p_1^{b_1+n_1}}\frac{dp_2}{p_2^{b_2}(p_1+p_2)^{n_2}}.$$

[4] W我们假设$\mathbf{a}-\mathbf{1}_k$ 和$\mathbf{b}\ -\mathbf{1}_k$ 仍为非负整数，以避免收敛性问题。

为获得渐近展开式的所有项，我们将 $\mathfrak{sh}(\pi\hbar p_k)$ 按 $\pi\hbar p_k$ 展开为洛朗级数。由于 $\pi\hbar p_k$ 的权重为零，权重守恒显而易见。

要得到渐近展开的其余项，我们使用恒等式

$$\frac{1}{p_2(p_1+p_2)} = \frac{1}{p_1}\Big(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1+p_2}\Big). \tag{38}$$

并对 b_2+n_2 进行归纳，直到出现 $b_2=0$ 或 $n_2=0$。如果 $b_2=0$，我们得到双重多重对数。如果 $n_2=0$，我们得到两个深度一多重对数的乘积。

$m>2$ 的情形类似。 □

3.0.3 分布关系

定理 3.2。 有如下分布关系：

$$\begin{aligned} &r^{|\mathbf{n}|-m}\mathcal{F}^{\frac{r}{s}\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(r\omega_1,...,r\omega_m) = \\ &\sum_{\alpha_j=\frac{1-r}{2}}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{\beta_j=\frac{1-s}{2}}^{\frac{s-1}{2}} \mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\ldots,\omega_k+\frac{2\pi i}{r}\sum_{i=1}^{a_k}\alpha_j+\frac{2\pi i\hbar}{s}\sum_{j=1}^{b_k}\beta_j,\ldots). \end{aligned} \tag{39}$$

等价地，底行中的函数 $\mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\zeta_1,...,\zeta_m)$ 的自变量为

$$\zeta_k := \omega_k + \frac{2\pi i}{r}\sum_{i=1}^{a_k}\alpha_j + \frac{2\pi i\hbar}{s}\sum_{j=1}^{b_k}\beta_j, \qquad k=1,...,m.$$

此处求和遍历半整数 α_j,β_j，前提是求和上下限为半整数。

证明。 将恒等式 $\mathfrak{sh}(rx) = \mathfrak{sh}(x)(e^{(r-1)x}+e^{(r-3)x}+\ldots+e^{(1-r)x})$ 写作

$$\frac{1}{\mathfrak{sh}(x)} = \frac{e^{(r-1)x}+e^{(r-3)x}+\ldots+e^{(1-r)x}}{\mathfrak{sh}(rx)}. \tag{40}$$

在核函数中设 $q=pr$：

$$K^{r/s}_{a,b}(p;r\omega) := \frac{e^{-ipr\omega}}{\mathfrak{sh}^a(\pi p)\mathfrak{sh}^b(\pi\hbar p)} = \frac{e^{-iq\omega}}{\mathfrak{sh}^a(\pi q/r)\mathfrak{sh}^b(\pi q/s)}.$$

然后利用（40），将其写作

$$\frac{e^{-iq\omega}\Big(e^{\frac{r-1}{r}\pi q}+e^{\frac{r-3}{r}\pi q}+\ldots+e^{\frac{1-r}{r}\pi q}\Big)^a\Big(e^{\frac{s-1}{s}\pi q}+e^{\frac{s-3}{s}\pi q}+\ldots+e^{\frac{1-s}{s}\pi q}\Big)^b}{\mathfrak{sh}^a(\pi q)\mathfrak{sh}^b(\pi q)} \tag{41}$$

将乘积展开后，结论便立即得出。 □

3.0.4 $\hbar =$ $\hbar = 1$ 时的值

回忆一下基本的量子多对数函数 $\mathcal{F}^{\hbar}_{n_1,...,n_m}(\omega_1,...,\omega_m)$，参见（58 ）.

定理 3.3。 函数 $\mathcal{F}^1_{\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{n}}$（$\omega_1$、...、 ω_m）是一个具有有理系数的多项式 $\mathbf{P}_{\mathbf{a},\ \mathbf{b}}\Big(\frac{\omega_1}{2\pi},...,\frac{\omega_m}{2\pi}\Big)$与具有相同深度 & 权重的多重多对数的乘积：

$$\mathcal{F}^1_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\omega_1,...,\omega_m)=\mathbf{P}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}\Big(\frac{\omega_1}{2\pi},...,\frac{\omega_m}{2\pi}\Big)\cdot \mathrm{Li}_{n_1,...,n_m}\Big((-1)^{a_1+b_1}e^{\omega_1},...,(-1)^{a_m+b_m}e^{\omega_m}\Big) \tag{42}$$

证明。有

$$\mathcal{F}^1_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\omega_1,...,\omega_m)=i^{|\mathbf{n}|-m}\int_{(\mathbb{R}+i0)^m}\prod_{j=1}^m\frac{e^{-ip_j\omega_j}}{\mathfrak{sh}^{a_j+b_j}(\pi p_j)}\frac{dp_j}{(p_1+\ldots+p_j)^{n_j}}. \tag{43}$$

设 $\mathrm{Re}(\omega_j)<0$。那么，如果 $\mathrm{Im}(p_j)\to+\infty$，指数函数 $e^{-ip_j\omega_j}$ 会快速衰减。接下来，当 $|\mathrm{Re}(\omega_j)|<\pi(a_j+b_j)$ 时，被积函数在 $|p|\to\infty$处呈指数衰减。因此，假设$-\pi(a_j+b_j)<\mathrm{Re}(\omega_j)<0$，我们将积分计算为 $(2\pi i)^m\times$ 对 k_1、...、 $k_m>0$ 处的留数之和，其中留数位于 $p_1=ik_1$、...、 $p_m=ik_m$。

引理 3.4。 在 $p_1=ik_1,...,p_m=ik_m$ 处的留数等于

$$i^{-m}(-1)^{(a_1+b_1)k_1+...+(a_m+b_m)k_m}\ \mathrm{Res}_{p_1=...=p_m=0}\Big(\prod_{j=1}^m\frac{e^{-ip_j\omega_j}dp}{\mathfrak{sh}^{a_j+b_j}(\pi p_j)}\Big)\cdot\frac{e^{k_1\omega_1}\ldots e^{k_m\omega_m}}{k_1^{n_1}\ldots k_m^{n_m}}. \tag{44}$$

证明。 计算 $p_1=ik_1,...,p_m=ik_m$ 处的留数时，我们使用以下结论：

1. 对 $j=1,...,m$ 作 $p_j\to p_j+i\pi$ 的平移，会使分母 $\prod_{j=1}^m\mathfrak{sh}^{a_j+b_j}(\pi p_j)$ 乘以 $(-1)^{|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|}$。

2. 我们将 $p_j=ik_j+p'_j$ 处的指数函数展开为

$$\prod_{j=1}^m e^{-ip_j\omega_j}=\prod_{j=1}^m e^{-ip'_j\omega_j}\cdot e^{k_1\omega_1}\ldots e^{k_m\omega_m}.$$

3. 由于 $p_j\to ik_j$，我们有

$$p_1^{-n_1}\cdot\ldots\cdot(p_1+...+p_m)^{-n_m}\longrightarrow i^{-|\mathbf{n}|}k_1^{-n_1}\cdot\ldots\cdot(k_1+...+k_m)^{-n_m}.$$

特别地，我们注意到因子 $i^{|\mathbf{n}|}$ 在 (43) 中与 $i^{-|\mathbf{n}|}$（来自 (3)）相消。 □

(44) 中的左因子不依赖于 k_j。因此，对所有 k_1，.....， k_m 求和，我们得到

$$(2\pi)^m\mathrm{Res}_{p_1=...=p_m=0}\Big(\prod_{j=1}^m\frac{e^{-ip_j\omega_j}}{\mathfrak{sh}^{a_j+b_j}(\pi p_j)}\Big)\cdot\mathrm{Li}_{n_1,...,n_m}\Big((-1)^{a_1+b_1}e^{\omega_1},\ldots,(-1)^{a_k+b_k}e^{\omega_m}\Big). \tag{45}$$

左侧的留数可分解为单变量留数的乘积：

$$2\pi\ \mathrm{Res}_{p_j=0}\Big(\frac{e^{-ip_j\omega_j}dp_j}{\mathfrak{sh}^{a_j+b_j}(\pi p_j)}\Big)=2\pi\ \mathrm{Res}_{p_j=0}\Big(\frac{1+(-ip_j\omega_j)+(-ip_j\omega_j)^2/2!+...}{(\pi p_j)^{a_j+b_j}}(1+...)\Big).$$

后者等于若干有理常数与以下项的乘积之和

$$2\pi\ \mathrm{Res}_{p_j=0}\Big(\frac{(-ip_j\omega_j)^m(\pi p_j)^n dp_k}{(\pi p_j)^{a_j+b_j}}\Big),\qquad m+n=a_j+b_j-1.$$

其权重为零，因为 π 和ω_j 的权重都等于 1。

还要注意，$z_j=e^{\omega_j}$ 的权重为零：事实上，我们有 $w_j=\log(z_j)$，因此最终答案中会出现关于 z_j, $\log(z_j)$ 的多项式。

□

3.0.5 量子多对数的 $\mathcal{I}$–变体。

我们将需要量子多对数的 $\mathcal{I}$– 变体:

$$\mathcal{I}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(w_1,...,w_m):=i^{|\mathbf{n}|-m}\int_{(\mathbb{R}+i0)^m}\prod_{k=1}^{m}\frac{e^{-i(p_1+...+p_k)w_k}}{\mathfrak{sh}^{a_k}(\pi p_2)\cdot\mathfrak{sh}^{b_k}(\pi\hbar p_2)}\frac{dp_k}{(p_1+\ldots+p_k)^{n_k}}.\tag{46}$$

例如，在深度二的情形下，我们得到

$$i^{|\mathbf{n}|-2}\int_{(\mathbb{R}+i0)^2}\frac{e^{-ip_1w_1}}{\mathfrak{sh}^{a_1}(\pi p_1)\cdot\mathfrak{sh}^{b_1}(\pi\hbar p_1)}\frac{e^{-i(p_1+p_2)w_2}}{\mathfrak{sh}^{a_2}(\pi p_2)\cdot\mathfrak{sh}^{b_2}(\pi\hbar p_2)}\frac{dp_1}{p_1^{n_1}}\frac{dp_2}{(p_1+p_2)^{n_2}}.$$

函数 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{I}$ 之间的关系为

$$\mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_m)=\mathcal{I}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\omega_1-\omega_2,\omega_2-\omega_3,\ldots,\omega_m).\tag{47}$$

事实上，它们的被 积函数仅在指数函数上有所不同，而这些指数函数由（28）关联。等价地，我们有

$$\mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\zeta_1,\ldots,\zeta_m)=\mathcal{I}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\zeta_1+\ldots\zeta_m,\zeta_2+\ldots+\zeta_m,\ldots,\zeta_m).\tag{48}$$

3.0.6 微分方程

命题 3.5. 量子多对数满足微分方程

$$d\mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\omega_1,...,\omega_m)=\sum_{k=1}^{m}\mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}-1_k}(\omega_1,...,\omega_m)d(\omega_k-\omega_{k+1}).\tag{49}$$

证明。 第 3.0.5 节中引入的函数

$$\mathcal{I}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\xi_1,...,\xi_m)=$$
$$i^{|\mathbf{n}|-m}\int_{(\mathbb{R}+i0)^m}K^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(p_1,...,p_m)\frac{e^{-ip_1\xi_1}e^{-i(p_1+p_2)\xi_2}\ldots e^{-i(p_1+\ldots+p_m)\xi_m}dp_1dp_2\ldots dp_m}{p_1^{n_1}(p_1+p_2)^{n_2}\ldots(p_1+...+p_m)^{n_m}}.\tag{50}$$

显然，[5] 满足以下微分方程:

$$d\mathcal{I}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}}(\xi_1,...,\xi_m)=\sum_{k=1}^{m}\mathcal{I}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}-1_k}(\xi_1,...,\xi_m)d\xi_k.\tag{51}$$

因此，该结论由（47）得出。 □

[5]由于变量 ξ_k 只出现在指数函数中 $e^{-ip_k\xi_k}$

3.0.7 复共轭

我们断言

$$\overline{\mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\omega_1,\dots,\omega_m)} = (-1)^{|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|-m}\mathcal{F}^{\overline{\hbar}}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\overline{\omega}_1,\dots,\overline{\omega}_m).$$

通过变量替换 $q=-p$ 完成，同时改变 $\mathbb{R}+i0$ 的定向。以下是深度一情形的具体过程。

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{F}^{\hbar}_{a,b,n}(\omega)} &= (-i)^{n-1}\int_{\overline{\mathbb{R}+i0}} \frac{e^{i\overline{p}\overline{\omega}}}{\mathfrak{sh}^a(\pi\overline{p})\mathfrak{sh}^b(\pi\overline{\hbar}\overline{p})}\frac{d\overline{p}}{\overline{p}^n} \quad \overset{q=-\overline{p}}{=} \\ &-(-1)^{a+b}i^{n-1}\int_{\mathbb{R}+i0}\frac{e^{-ip\overline{\omega}}}{\mathfrak{sh}^a(\pi p)\mathfrak{sh}^b(\pi\overline{\hbar}p)}\frac{dp}{p^n} = (-1)^{a+b+1}\mathcal{F}^{\overline{\hbar}}_{a,b,n}(\overline{\omega}).\end{aligned} \tag{52}$$

3.0.8 洗牌关系

量子多对数满足洗牌关系，这与表示多重多对数的迭代积分所满足的关系类似。[6] 具体来说，令

$$\mathbf{w}=(\omega_1,...,\omega_m),\quad \mathbf{u}=(u_1,...,u_m),\quad \mathbf{t}=(t_1,...,t_m). \tag{53}$$

考虑关于 $\mathbf{u}$ 的生成级数，其系数是指标为$\mathbf{n}$的量子多对数:

$$\mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\mathbf{w}|\mathbf{u}) := \sum_{n_1,\dots,n_m\geq 1}\mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\mathbf{w}){u_1}^{n_1-1}\dots{u_m}^{n_m-1}. \tag{54}$$

例如,

$$\mathcal{F}^{\hbar}_{a,b}[w|u] = i^{n-1}\int_{\mathbb{R}+i0}\frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}^a(\pi p)\mathfrak{sh}^b(\pi\hbar p)}\ \frac{dp}{p-iu}.$$

然后作代换 $u_k := t_1+...+t_k$ 对于 $k=1,$ ..... m:

$$\mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}[\mathbf{w}|\mathbf{t}^*] := \mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\mathbf{w}|t_1,t_1+t_2,\dots,t_1+\dots+t_m).$$

引理 3.6。 存在如下积分表示:

$$\mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a};\mathbf{b}}[\mathbf{w}|\mathbf{t}^*] = i^{|\mathbf{n}|-m}\cdot\int_{(\mathbb{R}+i0)^m}\prod_{k=1}^{m}K^{\hbar}_{a_k,b_k}(p_k;\omega_k)\frac{dp_k}{(p_1+\dots+p_k)-i(t_1+\dots+t_k)}.$$

证明。 将代换 $u_k := t_1+...+t_k$ 应用于以下恒等式即可得到:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dp_k}{(p_1+\dots+p_k)^n}(iu_k)^{n-1} = \frac{dp_k}{(p_1+\dots+p_k)-iu_k}. \tag{55}$$

□

[6]有趣的是，尽管量子多对数似乎没有迭代积分表示，但它们确实满足与迭代积分相同的洗牌关系。

注意，i　积分（13）对任意整数 n_i收敛，而生成级数使用 $n_i \geq 1$.

给定 $\mathbf{a}:=(a_1, \ldots\ldots, a_k)$ 和 $\mathbf{a}':=(a_{k+1}, \ldots\ldots, a_{k+l})$，以及集合 $\{1, ..., k+l\}$ 的一个置换 σ，令 $\sigma(\mathbf{aa}'):=(a_{\sigma(1)}, \ldots\ldots, a_{\sigma(k+l)})$。

定理 3.7。有

$$\mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}[\mathbf{w}|\mathbf{t}^*] \cdot \mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a}',\mathbf{b}'}[\mathbf{w}'|\mathbf{t}'^*] = \sum_{\sigma \in \Sigma_{k,l}} \mathcal{F}^{\hbar}_{\sigma(\mathbf{aa}'),\sigma(\mathbf{bb}')}[\sigma(\mathbf{ww}')|\sigma(\mathbf{tt}')^*]. \tag{56}$$

The 求和遍历所有将 $\{1, ..., k\}$ 和 $\{k+1, ..., k+l\}$ 洗牌的置换 .

证明。由下列恒等式立即得出 [G01，引理 2。12]:

$$\frac{1}{p_1(p_1+p_2)...(p_1+...+p_k)} \cdot \frac{1}{p_{k+1}(p_{k+1}+p_{k+2})...(p_{k+1}+...+p_{k+l})} = \sum_{\sigma \in \Sigma_{k,l}} \frac{1}{p_{\sigma(1)}(p_{\sigma(1)}+p_{\sigma(2)})...(p_{\sigma(1)}+...+p_{\sigma(k+l)})}. \tag{57}$$

□

例如，利用恒等式

$$\frac{1}{p_1 p_2} = \frac{1}{p_1(p_1+p_2)} + \frac{1}{p_2(p_1+p_2)}$$

我们有

$$\mathcal{F}^{\hbar}_{a_1,b_1,1}(\omega_1) \cdot \mathcal{F}^{\hbar}_{a_2,b_2,1}(\omega_2) = \mathcal{F}^{\hbar}_{(a_1,a_2),(b_1,b_2),(1,1)}(\omega_1,\omega_2) + \mathcal{F}^{\hbar}_{(a_2,a_1),(b_2,b_1),(1,1)}(\omega_2,\omega_1).$$

生成函数的洗牌关系。除了（53）之外，我们还定义

$$\mathbf{r} = (r_1, ..., r_m), \quad \mathbf{s} = (s_1, ..., s_m).$$

将（54）推广后，我们引入量子多对数生成级数:

$$\mathcal{F}^{\hbar}(\mathbf{w}|\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{u}) := \sum_{a_i,b_i,n_i>0} \mathcal{F}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\mathbf{w}) \prod_{k=1}^{m} r_k^{a_k-1} {s_k}^{b_k-1} {u_k}^{n_k-1}.$$

可以用核生成级数重写此式。

引理 3.8。核生成函数由下式给出

$$\mathcal{K}^{\hbar}(p;z|r,s) := \sum_{a,b=1}^{\infty} K^{\hbar}_{a,b} r^{a-1} s^{b-1} = \frac{e^{-ipz}}{(\mathfrak{sh}(\pi p) - r)(\mathfrak{sh}(\pi\hbar p) - s)}.$$

引理 3.9. 量子多对数生成级数由以下积分给出

$$\mathcal{F}^{\hbar}(\mathbf{w}|\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{u}) := \int_{(\mathbb{R}+i0)^m} \prod_{k=1}^{m} \mathcal{K}^{\hbar}(p_k;\omega_k|r_k,s_k) \frac{dp_k}{(p_1+\ldots+p_k) - iu_k}.$$

证明. 利用（55）可立即得出。 □

例如，深度一量子多对数生成级数为

$$\mathcal{F}^{\hbar}(\omega|r,s,u) := \int_{\mathbb{R}+i0} \frac{e^{-ip\omega}}{(\mathfrak{sh}(\pi p)-r)(\mathfrak{sh}(\pi\hbar p)-s)} \frac{dp}{p-iu}.$$

定理3.7 立即推出如下结论

定理 3.10. 有

$$\mathcal{F}^{\hbar}[\mathbf{w}|\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t}^*]\cdot\mathcal{F}^{\hbar}[\mathbf{w}'|\mathbf{r}',\mathbf{s}',\mathbf{t}'^*] = \sum_{\sigma\in\Sigma_{k,l}} \mathcal{F}^{\hbar}[\sigma(\mathbf{w}\mathbf{w}')|\sigma(\mathbf{r}\mathbf{r}'),\sigma(\mathbf{s}\mathbf{s}'),\sigma(\mathbf{t}\mathbf{t}')^*].$$

3.0.9 解析延拓。

量子多对数可解析延拓到$\mathcal{M}_{0,\ m+3}(\mathbb{C})$的一个覆盖上，其表达式为

$$(w_1,...,w_m) \longrightarrow (\infty,-1,0,e^{w_1},...,e^{w_m}) \in \mathcal{M}_{0,m+3}(\mathbb{C}).$$

积分表示（27）在条带上收敛

$$|\mathrm{Im}\ \omega_i| < \pi a_i + \pi\hbar b_i.$$

我们使用差分关系（35）将其从该条带延拓至 $\mathbb{C}^m$，并通过对 $|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$进行归纳来论证。首先，形式地通过归纳可检查

$$\Delta^{(\omega_l)}_{i\pi\hbar}\Delta^{(\omega_k)}_{i\pi}\mathcal{I}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\mathbf{w}) = \Delta^{(\omega_k)}_{i\pi}\Delta^{(\omega_l)}_{i\pi\hbar}\mathcal{I}^{\hbar}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}}(\mathbf{w}).$$

其中每一边都通过两次应用差分关系（35）来定义。

3.0.10 一个例子：基本量子多对数

我们通过令 $a_j = b_j = 1$ 来定义基本量子多对数。因此，在深度 m 的情形下

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}^{\hbar}_{n_1,...,n_m}(\omega_1,...,\omega_m) := \\ &i^{|\mathbf{n}|-m}\int_{(\mathbb{R}+i0)^m} \frac{e^{-ip_1\omega_1}}{\mathfrak{sh}(\pi p_1)\mathfrak{sh}(\pi\hbar p_m)}\frac{dp_1}{p_1^{n_1}}\wedge\ldots\wedge\frac{e^{-ip_1\omega_1}}{\mathfrak{sh}(\pi p_m)\mathfrak{sh}(\pi\hbar p_m)}\frac{dp_m}{(p_1+\ldots+p_m)^{n_m}}.\end{aligned} \tag{58}$$

定理 3.11。 函数 $\mathcal{F}^{\hbar}_{n_1,\ ...,\ n_m}(\omega_1,\ ...,\ n_m)$ 具有以下性质：

1. 当 $\hbar\to 0$ 时的渐近展开：

$$\mathcal{F}^{\hbar}_{n_1,...,n_m}(\omega_1,...,\omega_m) \ \sim\ \frac{1}{(2\pi i\hbar)^m}\cdot\mathrm{Li}_{n_1+1,...,n_m+1}(e^{\omega_1-\omega_2},e^{\omega_2-\omega_3},\ldots,-e^{\omega_m})+\ldots$$

2. 差分关系，将其与多重多对数联系起来：

$$\begin{aligned}\Delta^{(\omega_1)}_{i\pi\hbar}\ldots\Delta^{(\omega_m)}_{i\pi\hbar}\mathcal{F}^{\hbar}_{n_1,...,n_m}(\omega_1,...,\omega_m) &= \mathrm{Li}_{n_1,...,n_m}(e^{\omega_1-\omega_2},e^{\omega_2-\omega_3},\ldots,-e^{\omega_m}).\\ \Delta^{(\omega_1)}_{i\pi}\ldots\Delta^{(\omega_m)}_{i\pi}\mathcal{F}^{\hbar}_{n_1,...,n_m}(\omega_1,...,\omega_m) &= \hbar^{|\mathbf{n}|-m}\mathrm{Li}_{n_1,...,n_m}(e^{\frac{\omega_1-\omega_2}{\hbar}},e^{\frac{\omega_2-\omega_3}{\hbar}},\ldots,-e^{\frac{\omega_m}{\hbar}}).\end{aligned} \tag{59}$$

3. 在 $\hbar = 1$ 处的值:

$$\mathcal{F}^1_{n_1,\dots,n_m}(\omega_1,\dots,\omega_m) = \mathbf{P}_{\mathbf{1},\mathbf{1}}\Big(\frac{\omega_1}{2\pi}\dots,\frac{\omega_m}{2\pi}\Big)\cdot \mathrm{Li}_{n_1,\dots,n_m}\Big(e^{\omega_1},\dots,e^{\omega_m}\Big).$$

4. 分布关系:

$$\begin{aligned} &r^{|\mathbf{n}|-m}\mathcal{F}^{\frac{r}{s}\hbar}_{n_1,\dots,n_m}(r\omega_1,\dots,r\omega_m) = \\ &\sum_{\alpha_k=\frac{1-r}{2}}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{\beta_k=\frac{1-s}{2}}^{\frac{s-1}{2}}\mathcal{F}^{\hbar}_{n_1,\dots,n_m}(\omega_1+\frac{2\pi i}{r}\alpha_1+\frac{2\pi i\hbar}{s}\beta_1,\dots,\omega_k+\frac{2\pi i}{r}\alpha_k+\frac{2\pi i\hbar}{s}\beta_k). \end{aligned} \tag{60}$$

5. 微分:

$$d\mathcal{F}^{\hbar}_{n_1,\dots,n_m}(\omega_1,\dots,\omega_m) = \sum_{j=1}^{m}\mathcal{F}^{\hbar}_{n_1,\dots,n_k-1,\dots,n_m}(\omega_1,\dots,\omega_m)d(\omega_k-\omega_{k+1}).$$

6. $\hbar \longleftrightarrow 1/\hbar$ 对称性:

$$\mathcal{F}^{\hbar}_{n_1,\dots,n_m}(\omega_1,\dots,\omega_m) = \hbar^{|\mathbf{n}|-m}\mathcal{F}^{\frac{1}{\hbar}}_{n_1,\dots,n_m}\Big(\frac{\omega_1}{\hbar},\dots,\frac{\omega_m}{\hbar}\Big).$$

证明。 1) 利用 (36) 和 (22)，得到 $\hbar \to 0$ 渐近展开式的首项:

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}^{\hbar}_{n_1,\dots,n_m}(\omega_1,\dots,\omega_m) \ \sim_{\hbar\to 0} \\ &\frac{i^{|\mathbf{n}|}}{(2\pi i\hbar)^m}\int_{(\mathbb{R}+i0)^m}\frac{e^{-ip_1\omega_1}}{\mathfrak{sh}(\pi p_1)}\frac{dp_1}{p_1 p_1^{n_1}}\wedge\ldots\wedge\frac{e^{-ip_m\omega_m}}{\mathfrak{sh}(\pi p_m)}\frac{dp_m}{p_m(p_1+\ldots+p_m)^{n_m}} \\ &\overset{(22)}{\sim}{}_{\hbar\to 0}\ \frac{1}{(2\pi i\hbar)^m}\mathrm{Li}_{n_1,\dots,n_m}(e^{\omega_1-\omega_2},e^{\omega_2-\omega_3},\dots,-e^{\omega_m})+\dots. \end{aligned} \tag{61}$$

2) 对于 第二个恒等式，令 $q_i = p_i\hbar$，并使用积分 (11)。其余部分显而易见 d. □

4 量子多对数与多重 $q-$多对数

回顾多重多对数的定义 $q-$:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{n}}(x_1,\dots,x_m;q) := \\ &\sum_{k_1,\dots,k_m>0}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_m^{k_m}}{[k_1]_q^{a_1}[k_2]_q^{a_2}\dots[k_m]_q^{a_m}\cdot k_1^{n_1}(k_1+k_2)^{n_2}\dots(k_1+\dots+k_m)^{n_m}}. \end{aligned} \tag{62}$$

若 $\mathbf{a} = 0$，我们得到多重多对数 $\mathbf{Lin}(z_1,\dots,z_m) = \mathbf{Li}_{n_1,\dots,n_m}(z_1,\dots,z_m)$。M

重 $q-$多对数同时满足微分方程与差分方程 :

微分。 给定一个$\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_m)$，我们设$\mathbf{x}^* := (x_1\dots x_m, x_2\dots x_m,\dots x_m)$。然后

$$d\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{n}}(\mathbf{x}^*;q) = \sum_{k=1}^{m}\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{n}-\mathbf{1}_k}(\mathbf{x}^*;q)d\log x_k.$$

差分关系。 通过设定定义的 q–差分算子

$$\mathbf{\Delta}_{x,q} f(x) := f(qx) - f(q^{-1}x).$$

我们有以下差分关系

$$\mathbf{\Delta}_{x_k,q} \mathrm{L}_{\mathbf{a},\mathbf{n}}(\mathbf{x};q) = \mathrm{L}_{\mathbf{a}-\mathbf{1}_k,\mathbf{n}}(\mathbf{x};q). \tag{63}$$

4.1 通过积分定义多重 q–多对数

定义 4.1. 给定一个幂级数 $f(x)$ 和一个整数 $a \geq 0$， q–积分 $\mathbb{I}_x^a f(x)$ 定义如下：

$$(\mathbb{I}_x^a f)(x) := (-1)^{a-1} \sum_{k\geq 0} \binom{k+a-1}{a-1} f(q^{2k+a}x).$$

称为 q–积分，理由如下引理所示。

引理 4.2. 设 $a > 0$。则有：

$$\mathbf{\Delta}_{x,q} \circ \mathbb{I}_x^a f(x) = \mathbb{I}_x^{a-1} f(x).$$

证明。 由一个相当标准的计算即可得出：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{I}_x^a f(qx) - \mathbb{I}_x^a f(q^{-1}x) = \\
&(-1)^{a-1} \sum_{k\geq 0} \binom{k+a-1}{a-1} \Big(f(q^{2k+a+1}x) - f(q^{2k+a-1}x) \Big) = \\
&(-1)^{a-1} \sum_{k\geq 0} \Big(\binom{(k+1)+a-2}{a-1} f(q^{2(k+1)+a-1}x) - \binom{k+a-1}{a-1} f(q^{2k+a-1}x) \Big) = \\
&(-1)^{a-1} \sum_{k>0} \Big(\binom{k+a-2}{a-1} - \binom{k+a-1}{a-1} \Big) (q^{2k+a-1}x) - (-1)^{a-1} f(q^{a-1}x) = \\
&(-1)^{a-2} \sum_{k\geq 0} \binom{k+a-2}{a-2} f(q^{2k+a-1}x) = \\
&\mathbb{I}_x^{a-1} f(x).
\end{aligned} \tag{64}$$

□

命题 4.3。 存在如下幂级数等式：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{n}}(x_1,...,x_m;q) = (\mathbb{I}_{x_1}^{a_1} \dots \mathbb{I}_{x_m}^{a_m} \mathrm{Li}_{\mathbf{n}})(x_1,\dots,x_m) = \\
&\sum_{k_1,\dots,k_m \geq 0} (-1)^{|\mathbf{a}|-m} \binom{k_1+a_1-1}{a_1-1} \dots \binom{k_m+a_m-1}{a_m-1} \mathrm{Li}_{\mathbf{n}}(q^{2k_1+a_1}x_1,\dots,q^{2k_m+a_m}x_m).
\end{aligned} \tag{65}$$

证明。 由引理4.2 和（63）可得

$$\mathbf{\Delta}_{x_1,q}^{a_1} \circ \dots \circ \mathbf{\Delta}_{x_1,q}^{a_1} \Big(\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{n}}(x_1,...,x_m;q) - (\mathbb{I}_{x_1}^{a_1} \dots \mathbb{I}_{x_m}^{a_m} \mathrm{Li}_{\mathbf{n}})(x_1,\dots,x_m) \Big) = 0.$$

两个级数在 $x_1 = ... = x_m = 0$ 处都为零。 □

例子

1. 这些 q-多对数是以 x为变量的幂级数:

$$\mathrm{Li}_{a,n}(x;q) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(q^k - q^{-k})^a \ k^n}, \qquad a, n \in \mathbb{Z}.$$

它们同时满足微分与差分方程:

$$\begin{aligned} d\mathrm{Li}_{a,n}(x;q) &= \mathrm{Li}_{a,n-1}(x;q) d\log x. \\ \mathbf{\Delta}\mathrm{Li}_{a,n}(qx;q) &= \mathrm{Li}_{a-1,n}(x;q). \end{aligned} \tag{66}$$

2. 高阶 *Pochhammer* 符号 $\Psi_{a+1}(x;q)$ 是由无穷乘积给出的幂级数

$$\Psi_{a+1}(x;q) := \prod_{n\geq 0} (1+q^{2n+1}x)^{(-1)^{a+1}\binom{n+a}{a}}.$$

例如,

$$\begin{aligned} \Psi_1(x;q) &= \frac{1}{(1+qx)(1+q^3x)(1+q^5x)(1+q^7x)\cdot\ldots}, \\ \Psi_2(x;q) &= (1+qx)(1+q^3x)^2(1+q^5x)^3(1+q^7x)^4\cdot\ldots. \end{aligned} \tag{67}$$

它们是 x, q 中满足递归关系的唯一幂级数

$$\frac{\Psi_a(qx;q)}{\Psi_a(q^{-1}x;q)} = \Psi_{a-1}(x;q), \qquad \Psi_0(x;q) := 1+x.$$

命题 4.4. 有

$$\log \Psi_a(x;q) = -\mathrm{Li}_{a-1,1}(-x;q) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{(q^k - q^{-k})^{a-1} k}. \tag{68}$$

证明。两个幂级数满足相同的差分方程，并且在 $x = 0$ 处都等于 0 .
或者，下面给出 $\Psi_1(x;q)$ 的经典情形的直接计算。在这种情形下，公式（68）如下所示:

$$\mathrm{Li}_{1,1}(-x;q) = \sum_{n\geq 0} \log(1+q^{2n+1}x).$$

为证明这一点，我们使用对数 $1+x \ = -\sum_{k>0} \ {}^{(-x)}{}_{k}{}^{k}$ 的展开式:

$$\begin{aligned} &\sum_{n\geq 0} \log(1+q^{2n+1}x) = -\sum_{n\geq 0}\sum_{k>0} \frac{(-q^{2n+1}x)^k}{k} = \\ &-\sum_{k>0}\sum_{n\geq 0} \frac{q^{2nk}q^k(-x)^k}{k} = -\sum_{k>0} \frac{q^k(-x)^k}{(1-q^{2k})\cdot k} = \mathrm{Li}_{1,1}(-x;q). \end{aligned} \tag{69}$$

□

3. 考虑对经典多对数幂级数的一个小修改：

$$\mathrm{L}_n(z) := -\mathrm{Li}_n(-z) = -\sum_{k>0} \frac{(-z)^k}{k^n}, \quad |z| < 1.$$

因此 $\mathrm{L}_1(z) = \text{对数}(1+z)$ 和 $\mathrm{L}_0(z) = \frac{z}{1+z}$。根据命题 4.3，

$$\mathrm{Li}_{a,n}(-x;q) = (-1)^a \sum_{k\geq 0} \binom{k+a-1}{a-1} \mathrm{L}_n(q^{2k+a}x).$$

4. 比较 q-多对数与椭圆多对数 [BL]很有意思。后者是通过对经典多对数在 $\mathbb{Z}$ 上的正则化加权平均得到的，而前者则是通过类似的加权平均，但取平均对象为非负整数得到的。例如，从 $\log(1+x)$ 开始，在 $\mathbb{Z}$ 上的正则化加权平均给出 θ函数的对数，而在 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 上取平均则得到 q-指数函数的负对数。

4.2 量子多对数作为 2^m 伴随 q–多对数之和

回顾一下，量子二对数函数可以写成两个级数之差：

$$\mathcal{F}_1^\hbar(w) = -\mathrm{Li}_{1,1}(-e^w;q) + \mathrm{Li}_{1,1}(-e^{w/\hbar};q^\vee). \tag{70}$$

在第 4.2节中，我们将展示量子多对数具有类似的表示形式。我们将详细阐述深度为 m 基本量子多对数的情形。我们证明，它们是2^m 个伴随多对数级数之和。其中一个是量子 q–多对数级数，另一个是量子 $q^\vee$–多对数级数，其余 2^m-2 个伴随级数则由更一般的级数给出。

回顾深度为 m 基本量子多对数：

$$\mathcal{F}^\hbar_{n_1,\dots,n_m}(\omega_1,\dots,\omega_m) := i^{|\mathbf{n}|-m} \int_{(\mathbb{R}+i0)^m} \prod_{k=1}^m \frac{e^{-ip_i\omega_k}}{\mathfrak{sh}(\pi p_k)\mathfrak{sh}(\pi\hbar p_k)} \frac{dp_k}{(p_1+\ldots+p_k)^{n_k}}.$$

还要回顾基本量子多对数的 $\mathcal{I}$–变体（46）：

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^\hbar_{n_1,\dots,n_m}(w_1,\dots,w_m) &:= i^{|\mathbf{n}|-m} \int_{(\mathbb{R}+i0)^m} \prod_{k=1}^m \frac{e^{-i(p_1+\ldots+p_k)w_k}}{\mathfrak{sh}(\pi p_k)\mathfrak{sh}(\pi\hbar p_k)} \frac{dp_k}{(p_1+\ldots+p_k)^{n_k}} \\ &= \mathcal{F}^\hbar_{n_1,\dots,n_m}(w_1-w_2, w_2-w_3, \dots, w_m).\end{aligned} \tag{71}$$

我们将积分（71）计算为留数之和。该和分解为 2^m 个级数之和，这些级数定义在由 m 份锥的直和构成的锥 $\mathbb{Z}_{>0}$ 或 $\hbar^{-1}\mathbb{Z}_{>0}$上。我们将得到的级数称为伴随多对数级数。它们由以下序列参数化

$$\underline{\varepsilon} := (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m), \quad \varepsilon_j \in \{1, \hbar^{-1}\}.$$

对于每个这样的 $\underline{\varepsilon}$，我们赋予其伴随锥：

$$\mathrm{C}_{\underline{\varepsilon}} := \mathbb{Z}_{>0}\varepsilon_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{>0}\varepsilon_m \in \mathbb{C}^m.$$

回顾 $q = e^{i\pi\hbar}$ 和 $q^\vee = e^{i\pi/\hbar}$。我们还使用一种记号

$$[k]_{q_\varepsilon} := \begin{cases} q^k - q^{-k} & \varepsilon = 1 \\ (q^\vee)^k - (q^\vee)^{-k} & \varepsilon = \hbar^{-1}. \end{cases} \tag{72}$$

定义 4.5. ε–伴随多对数级数定义如下

$$\begin{aligned} &\mathrm{Li}^\hbar_{\mathbf{a},\mathbf{n}}(\underline{\varepsilon}; w_1, ..., w_m) := \\ &\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m \sum_{k_1,\dots,k_m>0} \frac{e^{k_1\omega_1\varepsilon_1} \dots e^{(k_1+\dots+k_m)\omega_m\varepsilon_m}}{[k_1]^{a_1}_{q_{\varepsilon_1}} \dots [k_m]^{a_m}_{q_{\varepsilon_m}} \cdot (\varepsilon_1 k_1)^{n_1} \dots (\varepsilon_1 k_1 + \dots + \varepsilon_m k_m)^{n_m}}. \end{aligned} \tag{73}$$

ε–伴随多对数级数 (73) 是对数级数 (q–62) 的推广。事实上:

$$\mathrm{Li}^\hbar_{\mathbf{a},\mathbf{n}}(\underline{\varepsilon}; \omega_1, ..., \omega_m) = \begin{cases} \mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{n}}(e^{\omega_1}, ..., e^{\omega_m}; q) & \text{if } \underline{\varepsilon} = (1, \dots, 1), \\ \hbar^{|\mathbf{n}|-m}\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{n}}(e^{\omega_1/\hbar}, ..., e^{\omega_m/\hbar}; q^\vee) & \text{if } \underline{\varepsilon} = (\hbar^{-1}, \dots, \hbar^{-1}). \end{cases} \tag{74}$$

定理 4.6. 假设 $\hbar > 0$。假设 $\mathrm{Re}(\omega_i) < 0$ 且 $|\text{虚部}(\omega_i)| < \pi$。则有

$$\mathcal{I}^\hbar_{\mathbf{n}}(w_1, \dots, w_m) = \sum_{\underline{\varepsilon}} \mathrm{Li}^\hbar_{\mathbf{1},\mathbf{n}}(\underline{\varepsilon}; w_1, w_2, \dots, w_m). \tag{75}$$

在继续证明之前，我们先详细说明两个例子。

1. $m = 1$。我们得到两个伴随锥： $\mathbb{Z}_{>0}$ 和 $\hbar^{-1}\mathbb{Z}_{>0}$. 相关的伴随级数为

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{>0}: &\quad \sum_{k>0} \frac{(-1)^k e^{kw}}{[k]_q\ k^n} \quad = \quad \mathrm{Li}_{1,n}(-e^w; q). \\ \hbar^{-1}\mathbb{Z}_{>0}: &\quad \hbar^{n-1} \sum_{k>0} \frac{(-1)^k e^{kw/\hbar}}{[k]_{q^\vee}\ k^n} = \hbar^{n-1}\mathrm{Li}_{1,n}(-e^{w/\hbar}; q^\vee). \end{aligned} \tag{76}$$

因此 $\mathcal{I}^\hbar_n(w)$ 是两个伴随级数 (76) 之和:

$$\mathcal{I}^\hbar_n(w) = \mathrm{Li}_{1,n}(-e^w; q) + \hbar^{n-1}\mathrm{Li}_{1,n}(-e^{w/\hbar}; q^\vee). \tag{77}$$

当 $n = 1$ 我们恢复公式（70）。

2. $m = 2$。我们得到四个伴随锥:

$$\mathbb{Z}_{>0} \oplus \mathbb{Z}_{>0}, \quad \hbar^{-1}\mathbb{Z}_{>0} \oplus \mathbb{Z}_{>0}, \quad \mathbb{Z}_{>0} \oplus \hbar^{-1}\mathbb{Z}_{>0}, \quad \hbar^{-1}\mathbb{Z}_{>0} \oplus \hbar^{-1}\mathbb{Z}_{>0}.$$

相关的伴随级数为:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{>0} \oplus \mathbb{Z}_{>0}: &\quad \sum_{k_1,k_2>0} \frac{e^{-k_1w_1}e^{-k_2w_2}}{[k_1]_q[k_2]_q} \frac{1}{k_1^{n_1}(k_1+k_2)^{n_2}}. \\ \hbar^{-1}\mathbb{Z}_{>0} \oplus \mathbb{Z}_{>0}: &\quad \hbar^{-1} \sum_{k_1,k_2>0} \frac{e^{-k_1w_1/\hbar}e^{-k_2w_2}}{[k_1]_{q^\vee}[k_2]_q} \frac{1}{(\hbar^{-1}k_1)^{n_1}(\hbar^{-1}k_1+k_2)^{n_2}}. \\ \mathbb{Z}_{>0} \oplus \hbar^{-1}\mathbb{Z}_{>0}: &\quad \hbar^{-1} \sum_{k_1,k_2>0} \frac{e^{-k_1w_1}e^{-k_2w_2/\hbar}}{[k_1]_q[k_2]_{q^\vee}} \frac{1}{k_1^{n_1}(k_1+\hbar^{-1}k_2)^{n_2}}. \\ \hbar^{-1}\mathbb{Z}_{>0} \oplus \hbar^{-1}\mathbb{Z}_{>0}: &\quad \hbar^{-2} \sum_{k_1,k_2>0} \frac{e^{-k_1w_1/\hbar}e^{-k_2w_2/\hbar}}{[k_1]_{q^\vee}[k_2]_{q^\vee}} \frac{1}{(\hbar^{-1}k_1)^{n_1}(\hbar^{-1}k_1+\hbar^{-1}k_2)^{n_2}}. \end{aligned} \tag{78}$$

因此 $\mathcal{I}^\hbar_{n_1,\ n_2}(w_1,\ w_2)$ 是四个伴随多对数级数（78）。

证明。我们详细说明 讨论伴随锥 $\hbar^{-1}\mathbb{Z}_{>0}\oplus\hbar^{-1}\mathbb{Z}_{>0}$ 的情形。令 $\mathbf{n}:=(n_1,\ n_2)$。那么

$$\mathcal{I}^{\hbar}_{\mathbf{n}}(w_1,w_2):=\int_{(\mathbb{R}+i0)^2}\frac{e^{-ip_1w_1}}{\mathfrak{sh}(\pi p_1)\mathfrak{sh}(\pi\hbar p_1)}\frac{e^{-i(p_1+p_2)w_2}}{\mathfrak{sh}(\pi p_2)\mathfrak{sh}(\pi\hbar p_2)}\frac{dp_1}{p_1^{n_1}}\frac{dp_2}{(p_1+p_2)^{n_2}}.$$

在 $p_1=ik_1/\hbar, p_2=ik_2/\hbar$ 处的留数的贡献，其中 $k_1,k_2>0$ 给出

$$\begin{aligned}&\hbar^{-2}\sum_{k_1,k_2>0}\frac{(e^{w_1/\hbar})^{k_1}}{[k_1]_{q^\vee}}\frac{(-e^{w_2/\hbar})^{k_1+k_2}}{[k_2]_{q^\vee}}\frac{1}{(\hbar^{-1}k_1)^{n_1}\ (\hbar^{-1}(k_1+k_2))^{n_2}}\\&=\hbar^{|\mathbf{n}|-2}\mathrm{Li}_{\mathbf{1},\mathbf{n}}(e^{w_1/\hbar},-e^{w_2/\hbar};q^\vee).\end{aligned}\tag{79}$$

□

任意量子多对数的定理4.6 可通过类似的留数计算得到。由于函数 $\mathfrak{sh}^{a_s}\ \pi p_s^{\ 1}\ ()\mathfrak{sh}^{b_s}(\pi\hbar p_s)$ 在 $p_s=ik_s, ik_s/\hbar$ 处具有高阶零点，其中 $k_s>0$，因此我们得到乘以 ω_s的幂的伴随级数之和。在 $p_s=ik_s/\hbar$ 处计算留数时，我们会遇到以下导数，然后在 $p_s=ik_s/\hbar$ 处对其求值：

$$\left(\frac{d}{dp_s}\right)^{b_s-1}\frac{1}{\mathfrak{sh}^{a_s}(\pi p_s)}\prod_{j=s}^{m}\frac{e^{-i(p_1+\ldots+p_j)z_j}}{(p_1+\ldots+p_j)^{n_j}}.\tag{80}$$

对于 $p_s=ik_s$ 处的留数，我们得到类似的导数，在 $p_s=ik_s$处将 a_s 与 b_s互换：

5 深度一例子

我们考虑不同轮廓 α对应的深度一积分：

$$i^{n-1}\cdot\int_{\alpha}\frac{e^{-ipz}}{\mathfrak{sh}^{a}(\pi p)\mathfrak{sh}^{b}(\pi\hbar p)}\frac{dp}{p^n}.$$

若 $\alpha:=\alpha_0$ 是一个围绕零点逆时针定向的小 闭环，我们会得到关于 z的多项式，它们是伯努利多项式的推广。若 $\alpha:=\mathbb{R}+i0$，我们会得到深度一量子多对数。

5.1 量子伯努利多项式

回顾伯努利多项式 $B_n(x)$：

$$\frac{te^{tx}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

定义 **n 5.1.** 量子伯努利多项式是关于 ω 和 $\hbar^{\pm1}$ 的多项式，定义如下：

$$B^{\hbar}_{a,b,n}(\omega):=i^{n-1}\int_{\alpha_0}\frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}^{a}(\pi p)\mathfrak{sh}^{b}(\pi\hbar p)}\frac{dp}{p^n}.$$

为了陈述多项式$B^{\hbar}_{a,b,n}(\omega)$的性质，我们需要一个多项式

$$Q_m(\omega)=\frac{\Big(\omega-\pi i(m-1)\Big)\Big(\omega-\pi i(m-3)\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(\omega-\pi i(1-m)\Big)}{(2\pi i)^m m!}.$$

它是唯一一个具有以下两个性质的次数为 m 的多项式：

- 它满足差分关系

$$\Delta_{i\pi} Q_m(\omega) = Q_{m-1}(\omega), \quad Q_0(\omega) = 1. \tag{81}$$

- 定 $Q_m(\omega)$的根构成一个等差数列，步长为 $2\pi i$，中心位于 0 .

$Q_m(\omega)$的权重为 0。例如

$$Q_0(\omega) = 1, \quad Q_1(\omega) = \frac{\omega}{2\pi i}, \quad Q_2(\omega) = \frac{(\omega - i\pi)(\omega + i\pi)}{2! \cdot (2\pi i)^2}. \tag{82}$$

定理 5.2。 量子伯努利多项式 $B^{\hbar}_{a,\ b,\ n}(\omega)$ 具有以下性质。

1. $B^{\hbar}_{a,\ b,\ n}(\omega)$ 是关于 ω 的次数为 $a+b+n-1$ 的多项式。

2. 微分与差分方程：

$$\begin{aligned} dB^{\hbar}_{a,b,n}(\omega) &= B^{\hbar}_{a,b,n-1}(z)d\omega. \\ \Delta_{i\pi\hbar} B^{\hbar}_{a,b,n}(\omega) &= B^{\hbar}_{a,b-1,n}(\omega), \\ \Delta_{i\pi} B^{\hbar}_{a,b,n}(\omega) &= B^{\hbar}_{a-1,b,n}(\omega). \end{aligned} \tag{83}$$

3. 当 $\hbar \to 0$ 时的渐近展开：

$$B^{\hbar}_{a,b,n}(\omega) \ \sim_{\hbar\to 0} \ \frac{1}{(2\pi i\hbar)^b} B_{a,0,b+n}(\omega) + \dots.$$

4. $\hbar = 1$ 处的值：

$$B^{1}_{a,b,n}(\omega) = B_{a+b,0,n}(\omega).$$

5. 与伯努利多项式 $B_n(\omega)$ 和多项式 $Q_n(\omega)$的关系：

$$\begin{aligned} B^{\hbar}_{1,0,n}(\omega) &= \frac{(2\pi i)^{n-1}}{(n-1)!} B_{n-1}\left(\frac{\omega}{2\pi i} + \frac{1}{2}\right), \\ B^{\hbar}_{a,0,1}(\omega) &= Q_{a-1}(\omega). \end{aligned} \tag{84}$$

6. 模性质，或 $\hbar \leftrightarrow 1/\hbar$ 对称性：对于任意 $\hbar \in \mathbb{C}^{\times}$，有：

$$B^{\hbar}_{a,b,n}(\omega) = \hbar^{n-1} B^{1/\hbar}_{b,a,n}(\omega/\hbar).$$

7. 复共轭：

$$\overline{B^{\hbar}_{a,b,n}(\omega)} = (-1)^{a+b+1} B^{\overline{\hbar}}_{a,b,n}(\overline{\omega}).$$

8. $\omega \longleftrightarrow -\omega$ 对称性：

$$B^{\hbar}_{a,b,n}(\omega) = (-1)^{a+b+n} B^{\hbar}_{a,b,n}(-\omega).$$

9. 生成函数

$$B^{\hbar}(\omega | r, s, u) := \int_{\alpha_0} \frac{e^{-ip\omega}}{(\mathfrak{sh}(\pi p) - r)(\mathfrak{sh}(\pi\hbar p) - s)} \frac{dp}{p - iu}.$$

证明。 仅当论证并非完全显而易见时，我们才给出论证。

1) 留数计算。**5)** 第一个断言很容易计算得出。第二个断言由下面的引理证明。

引理 5.3。 对于 $m \geq 0$[7]，有

$$-i\int_{\alpha_0}\frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}^m(\pi p)}dp = Q_{m-1}(\omega). \tag{85}$$

例如，

$$-i\int_{\alpha_0}\frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}(\pi p)}dp = 1, \qquad -i\int_{\alpha_0}\frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}^2(\pi p)}dp = \frac{\omega}{2\pi i}.$$

证明。 积分 (85) 满足递归关系 (81)，由此可知，除一个常数外，每一项都由前一项唯一确定。此外，$Q_m(\omega) = (-1)^m Q_m(-\omega)$, 这表明 $Q_{2k+1}(\omega)$ 可被 ω整除。然而，这并未完成证明，因此我们给出一个基于不同思路的证明。令

$$\mathrm{I}_m(\omega) := -i\int_{\alpha_0}\frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}^m(\pi p)}dp.$$

于是有递归关系

$$\mathrm{I}_{m+1}(\omega) = \frac{\omega - i\pi(m-1)}{2\pi i m}\mathrm{I}_m(\omega + i\pi). \tag{86}$$

事实上，分部积分可得

$$\int_{\alpha_0} e^{-ip\omega}\frac{d}{dp}\mathfrak{sh}^{-m}(\pi p)dp = \omega \mathrm{I}_m(z).$$

由于

$$-\frac{d}{dp}\mathfrak{sh}^{-m}(\pi p) = \frac{\pi m\cdot(e^{\pi p}+e^{-\pi p})}{\mathfrak{sh}^{m+1}(\pi p)} = \frac{\pi m}{\mathfrak{sh}^m(\pi p)} + \frac{2\pi m\cdot e^{-\pi p}}{\mathfrak{sh}^{m+1}(\pi p)},$$

我们得到 $(\omega - i\pi m)\cdot \mathrm{I}_m(\omega) = 2\pi i m\cdot \mathrm{I}_{m+1}(\omega - i\pi)$。这等价于（86）。因此

$$\mathrm{I}_{m+1}(\omega) = Q_m(z)\mathrm{I}_1(\omega + i\pi m) = Q_m(\omega).$$

□

6) 通过变量替换 $q = p/\hbar$ 完成，并保持围道 α_0 的同伦类不变。

7) 通过变量替换 $q = -p$ 完成，改变 α_0 的定向：

$$\begin{aligned}
&\overline{B^{\hbar}_{a,b,n}(\omega)} = (-i)^{n-1}\int_{\overline{\alpha_0}}\frac{e^{i\overline{p}\overline{\omega}}}{\mathfrak{sh}^a(\pi\overline{p})\mathfrak{sh}^b(\pi\overline{\hbar}\overline{p})}\frac{d\overline{p}}{\overline{p}^n} \overset{q=-\overline{p}}{=}\\
&(-1)^{a+b+1}i^{n-1}\int_{\alpha_0}\frac{e^{-ip\overline{\omega}}}{\mathfrak{sh}^a(\pi p)\mathfrak{sh}^b(\pi\overline{\hbar}p)}\frac{dp}{p^n} = (-1)^{a+b+1}B^{\overline{\hbar}}_{a,b,n}(\overline{\omega}).
\end{aligned} \tag{87}$$

额外的 $-$ 符号相当于改变围道的定向。

8）它是获得通过变量替换 $q = -p$ 定义。它不会改变围道 α_0。 □

[7] $-i$ 因子正是情形 $n = 0$ 中的因子 i^{n-1}。

5.2 深度一量子多重对数

它们是以下积分:

$$\mathcal{F}^{\hbar}_{a,b,n}(\omega) := i^{n-1}\int_{\mathbb{R}+i0}\frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}(\pi p)^a\mathfrak{sh}(\pi\hbar p)^b}\frac{dp}{p^n},\qquad a,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\ n\in\mathbb{Z}.$$

下一个引理说明，当 $b=0$ 时，它们可化为经典多对数。

引理 5.4。 *i)* 对于 $a>0$、 $m\geq 0$，有:

$$i^{-m-1}\int_{\mathbb{R}+i0}\frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}^a(\pi p)}p^m dp=\left(\frac{d}{d\omega}\right)^m\Big(Q_{a-1}(\omega)\mathrm{Li}_0(e^{\omega+\pi ia})\Big).\tag{88}$$

特别地，它是 z 中的单值亚纯函数

ii) 对于 $a>0$、 $n>0$，有:

$$i^{n-1}\int_{\mathbb{R}+i0}\frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}^a(\pi p)}\frac{dp}{p^n}\ =\ i^n\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}\left(-\frac{d}{d\omega}\right)^k Q_{a-1}(\omega)\cdot\mathrm{Li}_{n+k}\left(e^{\omega+\pi ia}\right).\tag{89}$$

公式（89）对于生成级数 $\mathrm{Li}\left(x;\ t\right)$ 看起来更为简单：$=\sum_{n>0}\mathrm{Li}_n\left(x\right)t^{n-1}$

$$\sum_{n>0}t^{n-1}\int_{\mathbb{R}+i0}\frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}^a(\pi p)}\frac{dp}{p^n}\cdot t^{n-1}\ =\ i^n\left(1+t^{-1}\frac{d}{dw}\right)^{-1}Q_{a-1}(\omega)\cdot\mathrm{Li}\left(e^{\omega+\pi ia};t\right).\tag{90}$$

例子。 1. 注意，$\mathrm{Li}_0(e^\omega)\ =\ \frac{d}{d\omega}\mathrm{Li}_1(e^\omega)\ =\frac{e^\omega}{1-e^\omega}$。于是有

$$i^{-1}\int_{\mathbb{R}+i0}\frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}^a(\pi p)}dp\ =\ Q_{a-1}(\omega)\mathrm{L}_0(e^{\omega+\pi ia})\ =\ Q_{a-1}(\omega)\frac{e^{\omega+\pi ia}}{1-e^{\omega+\pi ia}}.\tag{91}$$

例如,

$$\begin{aligned}
&i^{-1}\int_{\mathbb{R}+i0}\frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}(\pi p)}dp=\frac{-e^\omega}{1+e^\omega},\\
&i^{-1}\int_{\mathbb{R}+i0}\frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}^2(\pi p)}dp=\frac{\omega}{2\pi i}\frac{e^\omega}{1-e^\omega},\\
&i^{-1}\int_{\mathbb{R}+i0}\frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}^3(\pi p)}dp=\frac{\omega^2+\pi^2}{2!(2\pi i)^2}\frac{-e^\omega}{1+e^\omega}.
\end{aligned}\tag{92}$$

2. 88式中 $m=0$ 为

$$i^{-1}\int_{\mathbb{R}+i0}\frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}^a(\pi p)}\frac{dp}{p}=\sum_{k\geq 0}\left(-\frac{d}{d\omega}\right)^k Q_{a-1}(\omega)\cdot\mathrm{Li}_k\left(e^{\omega+\pi ia}\right).\tag{93}$$

证明。 i) 我们从 $m=0$ 情形开始。使用留数定理计算积分 (91)，假设 $\mathrm{Re}(\omega)<0$，取略高于实轴的矩形围道 Ω_N。留数位于以下点

ik、 $k>0$。在 $p=ik$ 处的留数等于 $p=0$ 处的留数乘以 $(-1)^{ka}e^{k\omega}$。引理 5.3 计算了沿 $p=0$的积分。因此得到

$$Q_{a-1}(\omega)\cdot\sum_{k>0}(-1)^{ka}e^{k\omega}=Q_{a-1}(\omega)\cdot\sum_{k>0}e^{k(\omega+i\pi a)}=Q_{a-1}(\omega)\frac{e^{(\omega+i\pi a)}}{1-e^{(\omega+i\pi a)}}.$$

公式（88）由此对 ω求微分即可得到。

ii）我们利用90等式左侧应用 $1+t^{-1}\frac{d}{d\omega}$，并使用以下事实来证明该式：

$$i^n\frac{d}{d\omega}\int_{\mathbb{R}+i0}\frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}^a(\pi p)}\frac{dp}{p^n}=i^{n-1}\int_{\mathbb{R}+i0}\frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}^a(\pi p)}\frac{dp}{p^{n-1}}.$$

□

定理 5.5。 深度一量子多对数 $\mathcal{F}^{\hbar}_{a,b,n}(\omega)$ 具有以下性质：

1. 微分与差分方程：

$$\begin{aligned}d\mathcal{F}^{\hbar}_{a,b,n}(\omega)&=\mathcal{F}^{\hbar}_{a,b,n-1}(\omega)d\omega,\\ \Delta_{i\pi\hbar}\mathcal{F}^{\hbar}_{a,b,n}(\omega)&=\mathcal{F}^{\hbar}_{a,b-1,c}(\omega),\\ \Delta_{i\pi}\mathcal{F}^{\hbar}_{a,b,n}(\omega)&=\mathcal{F}^{\hbar}_{a-1,b,n}(\omega).\end{aligned}\tag{94}$$

2. 当 $\Re z\to-\infty$ 时，沿平行于实轴的直线取极限：

$$\lim_{\Re z\to-\infty}\mathcal{F}^{\hbar}_{a,b,n}(z)=0.$$

3. 设 $a,b\geq 0$ 和 $n\geq 1$。则 $\mathcal{F}^{\hbar}_{a,b,n}(\omega)$ 是一个多值解析函数，其奇点位于两个积分正锥：

$$\left\{\pm\pi i\Big((2m+a)+(2n+b)\hbar\Big)\mid m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\right\}.$$

4. 当 $\hbar\to 0$ 时的渐近展开：

$$\mathcal{F}^{\hbar}_{a,b,n}(\omega)\ \sim_{\hbar\to 0}\ \frac{i^n}{(2\pi\hbar)^b}\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}\left(-\frac{d}{d\omega}\right)^k Q_{a-1}(\omega)\cdot\mathrm{Li}_{b+n+k}\left(e^{\omega+\pi ia}\right)+\dots.\tag{95}$$

5. $\hbar=1$ 处的值：

$$\mathcal{F}^{1}_{a,b,n}(\omega)=i^{n+b}\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}\left(-\frac{d}{d\omega}\right)^k Q_{a+b-1}(\omega)\mathrm{L}_{n+k+b}\left(e^{\omega+\pi i(a+b)}\right).\tag{96}$$

6. 复共轭：

$$\overline{\mathcal{F}^{\hbar}_{a,b,n}(\omega)}=(-1)^{a+b-1}\mathcal{F}^{\hbar}_{a,b,n}(\overline{\omega}).$$

7. $\omega\longleftrightarrow-\omega$ 对称性：

$$\mathcal{F}^{\hbar}_{a,b,n}(\omega)+(-1)^{a+b+n-1}\mathcal{F}^{\hbar}_{a,b,n}(-\omega)=B_{a,b,n}(\omega;\hbar).$$

8. $\hbar \longleftrightarrow 1/\hbar$ 对称性：

$$\mathcal{F}^{\hbar}_{a,b,n}(\omega) = \hbar^{n-1}\mathcal{F}^{1/\hbar}_{b,a,n}(\omega\hbar). \tag{97}$$

9. 分布关系：

$$r^{n-1}\mathcal{F}^{\frac{r}{s}\hbar}(r\omega) = \prod_{\alpha=\frac{1-r}{2}}^{\frac{r-1}{2}} \prod_{\beta=\frac{1-s}{2}}^{\frac{s-1}{2}} \mathcal{F}^{\hbar}(\omega + \frac{2\pi i}{r}\alpha + \frac{2\pi i\hbar}{s}\beta).$$

证明。我们仅在论证不显然时给出证明。

3) 若 $\hbar \in \mathbb{R}_{>0}$ 当 $|\text{虚部} z| < 1 + \hbar$ 时，积分收敛。该结论由递推关系（94）得出，并在归一化中用到了性质 2)。具体而言，令 $n = 1$。由引理 5.4

1) 函数 $\mathcal{F}^{\hbar}_{a,\,0,\,1}(z)$ 在射线 $\pm\pi i(2\mathbb{Z}_{\geq 0} + a)$ 上有简单极点。

2) 函数 $\mathcal{F}^{\hbar}_{0,\,b,\,1}(z)$ 在射线 $\pm\pi i\hbar(2\mathbb{Z}_{\geq 0} + b)$ 上有简单极点。

注意，多项式 $Q_{a-1}(z)$ 和 $Q_{b-1}(z/\hbar)$ 的根会消去以 0 为中心、长度分别为 $a-2$ 和 $b-2$、步长分别为 $2\pi i$ 和 $2\pi i\hbar$ 的线段上的极点。

通过对 z 积分可得到 $n > 1$ 的情形，因此可由 $n = 1$ 的情形推出。当 $\hbar \in \mathbb{C} - (-\infty,\ 0]$ 时，可通过解析延拓得到。

4）由（89）可得自

$$\mathcal{F}^{\hbar}_{a,b,n}(\omega) \ \sim_{\hbar\to 0}\ \frac{i^{n-1}}{(2\pi\hbar)^b}\int_{\mathbb{R}+i0}\frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}(\pi p)^a}\frac{dp}{p^{b+n}} + \dots \tag{98}$$

5）由（89）可得。

7）作变量替换 $q = -p$。积分路径 γ 变为 $-\gamma$。它们的和是一个绕 0 的顺时针围道。

□

例子：基本　　深度一量子多对数。它们由以下积分给出

$$\mathcal{F}^{\hbar}_{n}(\omega) := i^{n-1}\int_{\mathbb{R}+i0}\frac{e^{-ip\omega}}{\mathfrak{sh}(\pi p)\mathfrak{sh}(\pi\hbar p)}\frac{dp}{p^n}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

并具有以下性质：

1. 与 n-对数的渐近关系

$$\mathcal{F}^{\hbar}_{n}(\omega) \ \sim_{\hbar\to 0}\ \frac{\mathrm{L}_{n+1}(-e^{\omega})}{2\pi\hbar}.$$

2. 微分关系和差分关系：

$$\begin{aligned} &d\mathcal{F}^{\hbar}_{n}(\omega) = \mathcal{F}^{\hbar}_{n-1}(\omega)d\omega \\ &\Delta_{i\pi\hbar}\mathcal{F}^{\hbar}_{n}(\omega) = \mathrm{L}_n(-e^{\omega}), \\ &\Delta_{i\pi}\mathcal{F}^{\hbar}_{n}(\omega) = \hbar^{n-1}\mathrm{L}_n(-e^{\omega/\hbar}). \end{aligned} \tag{99}$$

3. 模性质：

$$\mathcal{F}^{\hbar}_{n}(\omega) + \hbar^{1-n}\mathcal{F}^{-1/\hbar}_{n}(\omega/\hbar) = 0.$$

等价地，生成级数 $\mathcal{F}(\omega;\ \hbar;\ t) := \sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{F}^{\hbar}_{m}(\omega)t^{m-1}$ 满足

$$\mathcal{F}(\omega;\hbar;t) + \mathcal{F}(\omega/\hbar;-1/\hbar;t/\hbar) = 0.$$

4. 与 q-多对数的关系：

$$\mathcal{F}_n^{\hbar}(\omega) \;=\; \mathrm{L}_{1,n}(e^{-\omega};e^{i\pi\hbar}) - \hbar^{n-1}\mathrm{L}_{1,n}(e^{-\omega/\hbar};e^{i\pi/\hbar}). \tag{100}$$

等价地，生成级数 $\mathrm{L}(e^z;e^{i\pi\hbar};t) := \sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{L}_{1,m}(e^z;e^{i\pi\hbar})t^{m-1}$ 满足

$$\mathcal{F}(\omega;\hbar;t) = \mathrm{L}(e^{\omega};e^{i\pi\hbar};t) - \mathrm{L}(e^{\omega/\hbar};e^{-i\pi/\hbar};\hbar t).$$

5. 分布关系：

$$\sum_{\alpha=\frac{1-r}{2}}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{\beta=\frac{1-s}{2}}^{\frac{s-1}{2}}\mathcal{F}_n^{\hbar}(\omega+\frac{2\pi i}{r}\alpha+\frac{2\pi i\hbar}{s}\beta) = r^{n-2}\mathcal{F}_n^{\frac{r}{s}\hbar}(r\omega).$$

6 总结

SUYM 理论中的散射振幅可以用多对数及其推广形式表示。例如，MHV 粒子 L 圈散射振幅是构形空间 $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{CP}^3)$ 上权重为 2L 的函数，其中 $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{CP}^3)$ 是由 $\mathbb{CP}^3$ 中的 n 个点组成的集合构成的空间，并对群 PGL_4 的对角作用取商。它在点的循环移位下保持不变。空间 $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{P}^3)$ 带有典范的簇泊松结构，该结构在循环移位下保持不变；相关空间 $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{C}^4)$ 则带有簇簇结构。

What 散射振幅的角色是 $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{P}^3)$ 上的簇泊松结构 ?

任何簇泊松簇 $\mathscr{X}$ 都允许进行簇量子化 [FG3], 其中，量子化的函数代数 $\mathcal{O}_q(\mathscr{X})$ 在簇希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{\mathscr{X}}$中以无界算子的形式作用。希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{\mathscr{X}}\otimes\mathcal{H}_{\mathscr{X}}$ 对于给定的簇坐标系 $\mathbf{c}$ 实现为希尔伯特空间 $\mathrm{L}_2(\mathscr{A}(\mathbb{R}_{>0}))$，即定义在簇 K_2-簇 $\mathscr{A}(\mathbb{R}_{>0}$的实正点空间上的函数空间。不同簇坐标系对应的这些希尔伯特空间通过量子二对数交织算子相联系。

假设希尔伯特空间中单个簇坐标系$\mathbf{c}$ 下向量 $\varphi_{\hbar}^{\mathbf{c}}$ 关于 $\hbar\to 0$ 的渐近展开写作

$$\varphi_{\hbar}^{\mathbf{c}} \sim e^{F_{\mathbf{c}}(a,\hbar)/\hbar}, \quad \text{where } F_{\mathbf{c}}(a,\hbar) \text{ is a function on } \mathscr{A}(\mathbb{R}_{>0}) \text{ depending on } \hbar. \tag{101}$$

两个不同簇 $\mathbf{c}$ 和 $\mathbf{c}'$ 对应的向量 $\varphi_{\hbar}^{\mathbf{c}}$ 和 $\varphi_{\hbar}^{\mathbf{c}'}$ 由量子二重对数交织算子联系起来。因此，驻相法表明，任意簇坐标系 $\mathbf{c}$ 中向量 $\varphi_{\hbar}^{\mathbf{c}}$ 的 $\hbar\to 0$ 渐近形式都可以写成式 (101)。此外，对于任意两个簇 $\mathbf{c}$ 和 $\mathbf{c}'$，函数 $F_{\mathbf{c}}(a,\hbar)|_{\hbar=0}$ 和 $F_{\mathbf{c}'}(a,\hbar)|_{\hbar=0}$ 是$\mathscr{A}(\mathbb{R}_{>0})$上的同一个函数，只是分别用簇 $\mathbf{c}$ 和 $\mathbf{c}'$ 的簇坐标表示。

我建议散射振幅应当具有一种 $\hbar-$变形，成为簇分布空间中的向量$\mathcal{A}_{n,\,\mathrm{L}}^{\hbar}$。这些向量应通过量子多对数及其推广形式来表示。在给定的簇坐标系$\mathbf{c}$中，向量 $\mathcal{A}_{n,\,\mathrm{L}}^{\hbar}$ 的渐近展开应具有如下形式

$$\mathcal{A}_{n,\mathrm{L}}^{\hbar} \sim e^{\alpha_{\mathbf{c},\mathrm{L}}(a,\hbar)/\hbar}, \quad \text{where } \alpha_{\mathbf{c},\mathrm{L}}(a,\hbar) \text{ is a function on } \mathrm{Conf}_n(\mathbb{R}^4_{>0}). \tag{102}$$

应有

$$\alpha_{n,\mathrm{L}}(a,\hbar)_{|\hbar=0} = \textit{the } \mathrm{L}-\textit{loop scatterring amplitude.}$$

Liouville 理论和 Toda 理论中关联函数的类似猜想性簇描述，见 [GS，第 6]节。

参考文献

[Ba] Barnes E.W.：双伽马函数的起源。《伦敦数学学会会刊》31（1899）358-381。[Bax] Baxter R.：《统计力学中的精确可解模型》。Academic Press，1982。[BL] Beilinson A.A.、Levin A.M.：椭圆多对数。《纯数学专题讨论会论文集》，1994年，第55卷，第2部分。[CF] Chekhov L.、Fock V.：量子 Teichmüller 空间。arXiv:math/9504111。[DO] Dorn H.、Otto H.-J.：Liouville 理论中的二点和三点函数，arXiv:hep- th/9403141。[F] Faddeev L.：离散 Heisenberg-Weyl 群与模群。《数学物理快报》34（1995）第3期，249-254。[FK] Faddeev L.、Kashaev R.：《现代物理快报》A 9 427（1994）。arXiv:math/9310070。[FKV] Faddeev L.、Kashaev R.、Volkov A.：强耦合量子离散 Liouville 理论。I：代数方法与对偶性。《数学物理通讯》219（2001）199-219。arXiv-hep- th:/0006156。[FG1] Fock V.V.、Goncharov A.B.：局部系统模空间与高阶 Teichmüller 理论。《高等科学研究所数学出版物》第103卷（2006）1-211。arXiv:math/0311149。[FG2] Fock V.V.、Goncharov A.B.：簇系综、量子化与二对数。《法国高等师范学院科学年刊》第42卷第6期，2009年，第865-930页。arXiv:math/0311245。[FG3] Fock V.V.、Goncharov A.B.：量子二重对数与簇簇的表示。《数学发明》175（2009）223-286。arXiv:math/0702397。[G94]Goncharov A. B.：算术与几何中的多对数。1994年国际数学家大会论文集，苏黎世，第1卷，374-387。https:users.math.yale.edu/users/goncharov/icm.pdf。[G01] Goncharov A.B.：多重多对数与混合 Tate 动机。arXiv:0103059。[G07] Goncharov, A. B.：量子二重对数与量子化 $M_{0,5}$ 的五边形关系。arXiv:0706.4054。[GS] Goncharov, A. B.、Shen L.：局部系统模空间的量子几何与表示论。arXive 1904.10491。即将发表于 Asterisque。[K] Kashaev R.：Teichmüller 空间的量子化与量子二重对数。《数学物理快报》43（1998）第2期，105-115。arXiv:q-alg/9705021。[O] Okounkov A.：希尔伯特概形与多重 q-ζ 值。arXiv:1404.3873。[V] Volkov A.：非交换超几何。arXive:math0312084。[ZZ] Zamolodchikov A.、Zamolodchikov Al.：Liouville 场论中的结构常数与共形自举。arXiv:hep-th/9506136。