arXiv:2601.00507v1 [math.ST] 1 Jan 2026

反事实空间

Junhyung Park[1], Fanny Yang[1], 和 Thomas Icard[2]

[1]苏黎世联邦理工
学院[2]斯坦福大学

摘要

我们通过引入两种相关的框架，从数学上公理化了反事实的随机学。这两种框架分别称为反事实概率空间和反事实因果空间，统称为反事实空间。它们分别是概率空间和因果空间，其底层可测空间是由特定于各个世界的可测空间构成的乘积。与建立在因果模型之上、较为熟悉的反事实阐述不同，我们不认为干预是反事实理论的必要组成部分。作为 Pearl 著名的“因果阶梯”的替代方案，我们将反事实与干预视为正交概念，分别通过反事实概率空间和因果空间进行数学化。随后，这两个概念结合起来，形成反事实因果空间。我们理论的核心是世界之间共享信息的概念，它完全由概率测度和因果核编码，其两种极端情形分别以世界的独立性和同步为特征。与现有框架相比，反事实空间能够以数学方式处理范围严格更广的反事实。

1 引言

反事实思维在人类认知、行为和干预中处于核心地位。因此，它受到各个学术领域的广泛关注。可能世界语义学的传统长期以来影响着哲学界对反事实的讨论 [Goodman, 1947, Lewis, 1973, 1986, Stalnaker, 2003],；与此同时，心理学家研究了想象反事实情景如何影响情绪、意图、决策和道德判断 [Byrne and McEleney, 2000, Epstude and Roese, 2008, Buchsbaum et al., 2012, Van Hoeck et al., 2015, Byrne, 2016, Gerstenberg, 2024]。反事实在人类思维和事务中占据如此根本的地位，正如所有具有此种地位的概念一样，值得拥有严谨、公理化的数学基础，以便进行定量分析并指导有原则的应用。这正是本文的目标。

反事实在哲学、逻辑学、心理学、经济学和计算机科学等领域以多种方式得到研究和形式化 [Mandel et al., 2007, Heckman and Leamer, 2007, Halpern, 2016], 对随机性的重视程度各不相同；在本研究中，我们专门关注其随机性方面。因此，我们主要依据 Kolmogorov 最初提出的概率论公理体系 [1933],，该体系此后已成为随机学广泛接受的数学化基础。随机反事实得到重点讨论的一个领域是因果关系，这也是人类认知和科学的另一块基石 [Beebee et al., 2009, Illari et al., 2011, Waldmann, 2017]。在这里，人们关注的是研究干预的效应，而非像“纯粹的”概率论那样被动观察世界。哲学家和统计学家都对因果关系与反事实之间的关系进行了深入研究 [Collins et al., 2004, Pearl, 2000]：在考察某项干预的因果效应时，人们会隐含地或明确地将随之发生的事件与一个“想象中的”世界里的事件进行比较，在那个世界中，原先的干预有所不同。许多现有的反事实数学理论都建立在因果关系的数学框架之上，其中最突出的是采用 Pearl 的所谓结构因果模型（ SCM ） [2009], 或 Rubin 的潜在结果（ POs ） [2005] 的理论。

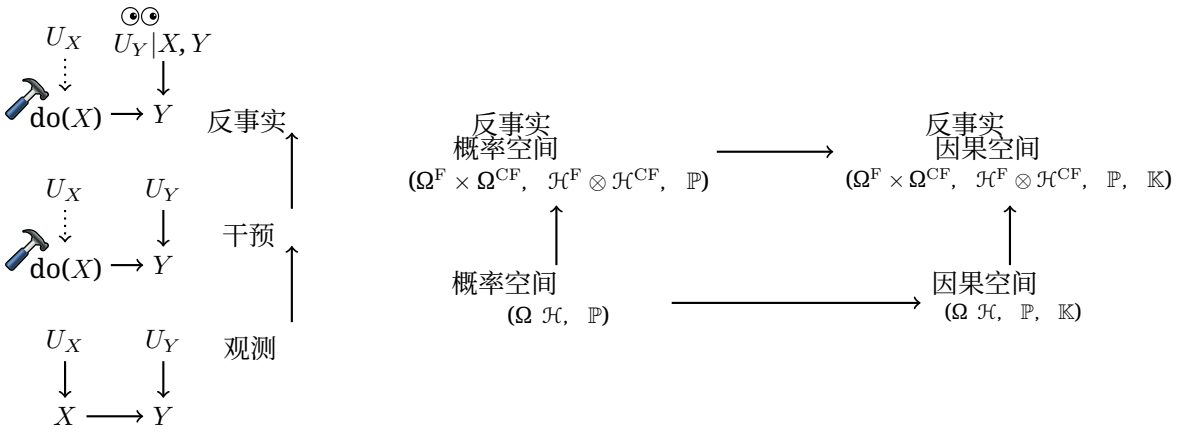

图 1：左：Pearl 的因果阶梯。上层阶梯中的概念是下层阶梯中概念的严格推广。结构因果模型用于计算所有阶梯中的观测分布、干预分布和反事实分布。右：本文探讨的观点。因果空间和反事实概率空间分别是概率空间的正交扩展；将二者结合起来，我们便得到反事实因果空间。

因果推断领域普遍持有的观点，以 Pearl 著名的“因果阶梯”[Pearl and Mackenzie，2018，Bareinboim et al.， 2022], 为代表，认为干预是反事实的基本构成要素（参见图1，左）。我们探讨一种与现有方法显著不同的思路：这些方法将反事实置于因果模型之中。尽管干预性反事实无疑十分重要，但人们也常常会推理一些反事实情景，在这些情景中，所有世界都没有发生任何干预（例如，Byrne 2007）。因此，对此类非干预反事实进行数学化，不必以编码了干预信息的因果模型为基础。与这一观点相反，所有现有方法——即使是那些明确只处理非干预反事实的变体（例如，Lucas and Kemp2015 的扩展结构因果模型，以及von Kügelgen et al. 2023的回溯结构因果模型）——其数学基础仍是为干预而设计的因果模型。

此外，现有的反事实框架往往受到其数学化过程中固有的严格假设的困扰（参见 Park 等人 [2023] 的详细讨论），例如无环性（见例 A.2 其中无环性不成立）、离散性（这严重限制了对连续时间随机过程的处理），以及内生变量不会对外生变量产生因果影响这一假设。后一假设对于结构因果模型框架中的反事实溯因—行动—预测范式至关重要，但不合理的情况却十分常见：例如，经济学中的供给与需求模型不可能囊括所有既会影响供给与需求、又会受到供给与需求影响的变量。

最后，传统方法关注这样一种情形：尽可能多地让各个世界共享相同内容，但仅针对系统中选定的一部分（通常很小）。Lewis 对“相似世界”提出的、颇具影响力的阐述，Lewis [1973], 以及 [Pearl、2009年、Peters 等人， 2017]都以此为指导原则。在后者中，各个世界的所有噪声变量取值相同，且未被干预的结构方程也相同。世界之间的最大相似性不仅是人们所期望的，更是定义所规定的。

本文提出一种不同的视角，将反事实视为与干预正交的概念（参见图1右侧）。具体而言，我们认为，形式化反事实并不需要干预。相反，我们将纳入反事实结果和事件视为反事实研究的核心，而这并不需要引入全新的数学对象。因此，我们将反事实概率空间定义为概率空间的特殊情形，即取两个（或更多）可测空间的乘积，每个空间代表

一个“世界”。本着类似的思路，反事实因果空间被定义为因果空间的特殊情形。因果空间是近期提出的一种干预因果关系的测度论公理化形式体系 [Park 等人， 2023], 其要求底层可测空间是由各个特定世界的分量可测空间构成的乘积。我们用反事实空间作为统称，涵盖反事实概率空间和因果空间。这些定义使干预和反事实能够以彼此正交的方式进行数学化（参见图1右侧）。此外，由于概率空间和因果空间是仅对数据生成过程施加最低限度假设的公理化形式体系，反事实空间也具有同等程度的普适性。

随机反事实的形式化建模带来的一个关键结果是，我们可以任意设定不同世界之间共享多少信息——换言之，设定它们彼此之间的关系。具体而言，在反事实空间中，世界之间的相似性由概率测度和因果机制编码：前者表示观察状态中的共享信息，后者表示干预后的共享信息。不同世界中的事件可以彼此独立——也就是说，不共享任何信息；也可以同步——对应于共享信息最多的情况；或者处于两者之间的任何状态。

由此，反事实空间严格推广了现有框架，同时能够纳入更广泛的反事实类型。通常结构因果模型框架所考虑的反事实类型，是在事实世界中进行条件化，并通过“溯因—干预—预测”过程在反事实世界中实施干预 [Pearl， 2009]。展望本文贯穿始终的例子：学生参加复习课及其考试成绩（例3.4），通常的结构因果模型能够利用上述方案回答的查询形式如下：

“已知学生没有去上课并且没能通过考试，如果他们被强迫去上课，他们会通过考试的概率是多少？”

另一方面，回溯结构因果模型 [Lucas 和 Kemp，2015年，von Kügelgen 等人， 2023] 能够回答以下形式的查询：

“已知 学生没有去上课并且没能通过考试，如果他们曾被观察到去上课？”

虽然上面两个查询看起来相似，但干预与观测有着本质区别，这一区别是整个因果关系概念／领域的基础。相比之下，潜在结果考虑的是反事实世界，每个世界都对应于对处理变量的一次硬干预，并针对这些世界上的联合分布回答查询，例如：

“学生上课时通过、没上课时不通过的概率是多少？”

反事实空间提供了一个统一框架，可以通过在任意组合、任意顺序下对任一或两个世界进行条件化和干预，并在干预前后让世界之间拥有任意数量的共享信息，从而回答上述所有查询，乃至更多问题。

本文的组织结构如下。在第2节介绍概率和因果空间的必要背景后，我们将在第3节定义反事实概率空间，并在第4节定义反事实因果空间。在第5节中，我们将构建反事实空间，以纳入两个以上的平行世界。最后，在第6节中，我们将通过从这些框架的任意规格出发显式构造反事实空间，证明反事实空间严格推广了结构因果模型和潜在结果框架。

2 预备知识与符号表示

本节将介绍本文中使用的符号表示，并回顾概率空间和因果空间的主要概念。我们需要前者来定义反事实概率空间，并强调后者仅适用于反事实因果空间。

2.1 概率论

我们首先回顾概率论的公理。关于全面的介绍，可参见例如 [Çinlar, 2011, Durrett, 2019]。

定义 2.1。 概率空间 是一个三元组 $(\Omega\ \mathcal{H}, \mathbb{P})$，其中 Ω 是一个结果集， $\mathcal{H}$ 是一个由事件构成的 σ-代数，满足

(i) $\Omega\ \in \mathcal{H}$; (ii) $A \in \mathcal{H}\ \Longrightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{H}$; (iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{H}\ \Longrightarrow\ \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H}$;

且 $\mathbb{P}$ 是定义在 $\mathcal{H}$上的概率测度，即满足以下条件的函数 $\mathbb{P}: \mathcal{H} \to [0,1]$

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$; (ii) 对于 $\mathcal{H}$中的任意两两不相交序列 (A_n)， $\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$。

我们将 $\mathbb{E}$ 记作关于测度 $\mathbb{P}$的随机变量的期望。对于 $\omega \in \Omega$，狄拉克测度 $\delta_\omega: \mathcal{H} \to \{0,1\}$ 定义为：当 $\omega \in A$ 时， $\delta_\omega(A) = 1$，否则为 0。类似地，对于任意 $A \in \mathcal{H}$，示性函数 $\mathbf{1}_A: \Omega \to \{0,1\}$ 定义为：当 $\omega \in A$ 时， $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$，否则为 0。

对于事件 $G \in \mathcal{H}$，我们用 $\mathbb{P}_G$ 表示给定 G 时的条件概率，其定义为：对每个事件 $A \in \mathcal{H}$，

$$\mathbb{P}_G(A) = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(G \cap A)}{\mathbb{P}(G)} & \text{if } \mathbb{P}(G) > 0 \\ \text{undefined} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于 $\mathcal{H}$ 的任意子-σ-代数 $\mathcal{G}$，我们用 $\mathbb{P}_\mathcal{G}$ 表示给定 $\mathcal{G}$时的条件概率，其定义为：对每个事件$A \in \mathcal{H}$，它是任意一个 $\mathcal{G}$-可测随机变量 $\omega \mapsto \mathbb{P}_\mathcal{G}(\omega, A)$，满足对任意 $B \in \mathcal{G}$，均有

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_B(\cdot)\mathbb{P}_\mathcal{G}(\cdot, A)\right].$$

在全文中，我们将用 G 和 $\mathcal{G}$ 分别表示作为条件的事件和 σ-代数。注意， $\mathbb{P}_G$ 和 $\mathbb{P}_\mathcal{G}$ 是不同的对象——对于固定的 $A \in \mathcal{H}$，前者是一个单一的正数，而后者是一个 $\mathcal{G}$-可测随机变量，可以证明它在相差一个 $\mathbb{P}$-零事件的意义下唯一存在。更多详情请参见，例如 Çinlar [2011,第四章，第 1]节。

最后，我们回顾（条件）独立性以及事件几乎处处相等的定义。前者表示事件或 σ-代数之间没有共享信息，后者则表示共享了最大程度的信息。这些概念将在我们讨论事实世界和反事实世界之间的共享信息时发挥重要作用。

定义 2.2. 设有一个概率空间 $(\Omega\ \mathcal{H},\ \mathbb{P})$、事件 $A,\ B,\ G \in \mathcal{H}$ 以及子-σ-代数 $\mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2,\ \mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$。

(i) 如果 $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$，我们就称 A 和 B 独立，并记为 $A \perp\!\!\!\perp_\mathbb{P} B$。如果对所有 $A \in \mathcal{F}_1$ 和所有 $B \in \mathcal{F}_2$，都有 $A \perp\!\!\!\perp_\mathbb{P} B$，我们就称 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 独立，并记为 $\mathcal{F}_1 \perp\!\!\!\perp_\mathbb{P} \mathcal{F}_2$。(ii) 如果 $\mathbb{P}(G) > 0$ 且$\mathbb{P}_G(A \cap B) = \mathbb{P}_G(A)\mathbb{P}_G(B)$，我们就称 A 和 B 在给定 G的条件下条件独立，并记为 $A \perp\!\!\!\perp_{\mathbb{P}_G} B$。如果对所有 $A \in \mathcal{F}_1$ 和所有 $B \in \mathcal{F}_2$，都有 $A \perp\!\!\!\perp_{\mathbb{P}_G} B$，我们就称 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 在给定 G的条件下条件独立，并记为 $\mathcal{F}_1 \perp\!\!\!\perp_{\mathbb{P}_G} \mathcal{F}_2$。(iii) 如果对于 $\mathbb{P}$-几乎所有 $\omega \in \Omega$，都有 $\mathbb{P}_\mathcal{G}(\omega, A \cap B) = \mathbb{P}_\mathcal{G}(\omega, A)\mathbb{P}_\mathcal{G}(\omega, B)$，我们就称事件 A 和 B 在给定 $\mathcal{G}$的条件下条件独立，并记为 $A \perp\!\!\!\perp_{\mathbb{P}_\mathcal{G}} B$。如果对所有 $A \in \mathcal{F}_1$ 和所有 $B \in \mathcal{F}_2$，都有 $A \perp\!\!\!\perp_{\mathbb{P}_\mathcal{G}} B$，我们就称 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 在给定 $\mathcal{G}$的条件下条件独立，并记为 $\mathcal{F}_1 \perp\!\!\!\perp_{\mathbb{P}_\mathcal{G}} \mathcal{F}_2$。

定义 2.3。 设有一个概率空间 $(\Omega\ \mathcal{H},\ \mathbb{P})$ 以及事件 $A,\ B,\ G \in \mathcal{H}$。令 $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ 表示 A 和 B 的对称差。我们称 A 和 B 为

(i) 几乎必然相等，并记为 $A \overset{\mathbb{P}}{=} B$，若 $\mathbb{P}(A\Delta B) = 0$;

(ii) 给定 G 几乎必然相等，并记为 $A \overset{\mathbb{P}_G}{=} B$，若 $\mathbb{P}(G) > 0$ 且 $\mathbb{P}_G(A\Delta B) = 0$。

定义2.2(iii) 在定义2.3中的类似表述，即“给定 $\mathcal{G}$几乎处处相等”，是多余的，因为 $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(\omega,\ A\Delta B) = 0$ 对几乎所有 $\omega \in \Omega$ 当且仅当 $A \overset{\mathbb{P}}{=} B$。

2.2 因果空间

我们还回顾了 *Park* 等人提出的因果空间 [Park 等人， 2023]。这里的关键对象是转移概率核。对于可测空间$(E,\ \mathcal{E})$ 和 $(F,\ \mathcal{F})$，若映射 $K:\ E \times \mathcal{F} \to [0,1]$ 满足以下条件，则称其为从$(E,\ \mathcal{E})$ 到 $(F,\ \mathcal{F})$ 的转移概率核:

- 映射 $x \mapsto K(x,\ B)$ 对每个集合 $B \in \mathcal{F}$ 都是可测的，并且
- 映射 $B \mapsto K(x,\ B)$ 对每个 $x \in E$ 都是定义在 $(F,\ \mathcal{F})$ 上的概率测度。

在极为宽松的条件下，条件测度是转移概率核 [Çinlar， 2011，第 150 页，定义 2.4；第 151 页，定理 2。7]。

我们要求该可测空间具有乘积形式。令 T 为乘积的指标集。于是，对每个 $t \in T$，取一个集合 Ω_t 以及 Ω_t上的一个 σ-代数 $\mathcal{E}_t$，便得到乘积可测空间

$$(\Omega, \mathcal{H}) = \otimes_{t\in T}(\Omega_t, \mathcal{E}_t) = (\times_{t\in T}\Omega_t, \otimes_{t\in T}\mathcal{E}_t).$$

在此处及本文其余部分，我们用符号表示 $\otimes$表示乘积 σ-代数；此外，稍微（且普遍地）滥用一下符号表示，我们也用 $\otimes$ 表示可测空间的乘积。

对每个 $S \subseteq T$，我们将由可测矩形 $\times_{t\in T}A_t$生成的 $\mathcal{H}$的子-σ-代数记作 $\mathcal{H}_S$，其中 $A_t \in \mathcal{E}_t$ 对所有 $t \in T$均成立， $A_t = \Omega_t$ 对所有 $t \notin S$均成立，而 $A_t \neq \Omega_t$ 仅对有限多个 $t \in S$成立。特别地，$\mathcal{H}_\emptyset = \{\emptyset, \Omega\}$ 是平凡的子-σ-代数，而 $\mathcal{H}_T = \mathcal{H}$ 是完整的 σ-代数。此外，我们将 Ω_S 表示 Ω 的子空间 $\times_{s\in S}\Omega_s$，对于每个 $\omega = (\omega_t)_{t\in T} \in \Omega$，我们记作 $\omega_S = (\omega_s)_{s\in S} \in \Omega_S$，其中 $\omega_s \in \Omega_s$ 对每个$s \in S$均成立。

因果空间定义如下。

定义 2.4（[Park 等，2023，定义 2.2]）。因果空间定义为四元组 $(\Omega\ \mathcal{H}, \mathbb{P}, \mathbb{K})$，其中 $(\Omega\ \mathcal{H})$ 是具有上述乘积结构的可测空间， $\mathbb{P}$ 是 $(\Omega\ \mathcal{H})$ 上的概率测度，而 $\mathbb{K} = \{K_S :\ S \subseteq T\}$（称为因果机制）是转移概率核 K_S 的集合，这些核从 $(\Omega\ \mathcal{H}_S)$ 映射到 $(\Omega\ \mathcal{H})$，称为 $\mathcal{H}_S$ 上的因果核，并满足以下公理:

(i) 对所有 $A \in \mathcal{H}$ 和 $\omega \in \Omega$，均有 $K_\emptyset(\omega,\ A) = \mathbb{P}(A)$;

(ii) 对所有 $\omega \in \Omega$、 $A \in \mathcal{H}_S$和 $B \in \mathcal{H}$，均有 $K_S(\omega,\ A \cap B) = \mathbf{1}_A(\omega)K_S(\omega,\ B)$。

概率测度 $\mathbb{P}$ 是“观测测度”，而 $\mathbb{K}$ 则编码了因果信息，以及下文定义的干预概念。

定义 2.5（[Park 等，2023，定义 2.3]）。设因果空间 $(\Omega\ \mathcal{H}, \mathbb{P}, \mathbb{K})$、子集 $U \subseteq T$以及定义在 $(\Omega\ \mathcal{H}_U)$ 上的概率测度 $\mathbb{Q}$。通过 $\mathbb{Q}$对 $\mathcal{H}_U$进行干预得到一个新的因果空间 $(\Omega\ \mathcal{H}, \mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}, \mathbb{K}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})})$，其中干预测度 $\mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}$ 是在 $(\Omega\ \mathcal{H})$ 上定义的概率测度，对于 $A \in \mathcal{H}$，其定义为

$$\mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}(A) = \int \mathbb{Q}(d\omega)K_U(\omega, A)$$

且 $\mathbb{K}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})} = \{K_S^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})} :\ S \subseteq T\}$ 是干预因果机制，其干预因果核为

$$K_S^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}(\omega_S, A) = \int \mathbb{Q}(d\omega'_{U\setminus S})K_{S\cup U}((\omega_S, \omega'_{U\setminus S}), A).$$

因此，原始因果空间的因果核精确地编码了干预后新的测度和新的因果核。我们将用 $\mathbb{E}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}$ 表示关于 $\mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}$ 的期望。

我们还要回顾一下因果空间中的因果效应的定义，这对于反事实因果空间的一条公理至关重要（第4节）。

定义 2.6。 [Park 等人 [2023, 定义 B。1]] 设有一个因果空间 $(\Omega\ \mathcal{H},\ \mathbb{P},\ \mathbb{K})$（参见定义 2.4）、一个干预集 $U \subseteq T$、一个事件 $A \in \mathcal{H}$ 以及一个子σ-代数 $\mathcal{F}$，其属于 $\mathcal{H}$（不一定具有 $\mathcal{H}_S$ 对某个 $S \subseteq T$的形式）。

(i) 如果对于所有 $S \in \mathcal{P}(T)$ 和所有 $\omega \in \Omega$，都有 $K_S(\omega, A) = K_{S\setminus U}(\omega, A)$，那么我们称 $\mathcal{H}_U$ 对 A 没有因果效应。如果对于所有 $A \in \mathcal{F}$，$\mathcal{H}_U$ 对 A 没有因果效应，那么我们称 $\mathcal{H}_U$ 对 $\mathcal{F}$ 没有因果效应。(ii) 如果存在 $\omega \in \Omega$，使得 $K_U(\omega, A) \neq \mathbb{P}(A)$，那么我们称 $\mathcal{H}_U$ 对 A 具有主动因果效应。如果 $\mathcal{H}_U$ 对某个 $A \in \mathcal{F}$ 具有主动因果效应，那么我们称 $\mathcal{H}_U$ 对 $\mathcal{F}$ 具有主动因果效应。(iii) 否则，我们称 $\mathcal{H}_U$ 对 A 具有休眠因果效应。如果 $\mathcal{H}_U$ 不对 $\mathcal{F}$ 中的任何事件具有主动因果效应，并且存在某个 $A \in \mathcal{F}$，使得 $\mathcal{H}_U$ 对其具有休眠因果效应，那么我们称 $\mathcal{H}_U$ 对 $\mathcal{F}$ 具有休眠因果效应。

Park 等人 [2023, 备注 B.2(a)] 证明了，一个 σ-代数 $\mathcal{H}_U$ 不可能对某个事件同时具有无因果效应和主动因果效应 A。不过，无因果效应的定义比无主动因果效应更强。无因果效应意味着，不仅 A 的测度保持不变，等于观测测度 $\mathbb{P}(A)$，而且对任何其他 σ-代数 $\mathcal{H}_S$ 进行干预，等同于仅对 S中不属于 U的那些分量进行干预，也就是说，对 $\mathcal{H}_{S\setminus U}$进行干预。反事实因果空间需要的正是这一更强的概念。

在下面这个简单的玩具示例中，我们将具体构造一个因果空间，并阐释上述关于因果效应的各个概念。

示例 2.7。 设有三个二元结果集 $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \{0,1\}$，因此结果集$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$ 有 8 个元素。令 $\mathbb{P}$ 为均匀观测测度，并按表 1指定一组因果核。Ω_3 上的边缘观测测度（表 1第一行）为

$$\mathbb{P}(\omega_3 = 0) = \mathbb{P}(\omega_3 = 1) = 1/2.$$

对 $\mathcal{H}_1$ 进行干预，使其取值为 $\omega_1 = 0$ 或 $\omega_1 = 1$，会使 $\mathcal{H}_2$ 和 $\mathcal{H}_3$ 上的测度保持均匀（表1的第二行和第三行）：

$$K_1(0, \{\omega_3 = 0\}) = K_1(0, \{\omega_3 = 1\}) = 1/2 = K_1(1, \{\omega_3 = 0\}) = K_1(1, \{\omega_3 = 1\}),$$

因此，$\mathcal{H}_1$ 对 $\mathcal{H}_3$没有主动因果效应。对 $\omega_2 = 0$ 进行干预会对 $\mathcal{H}_3$产生主动因果效应，因为

$$K_2(0, \{\omega_3 = 0\}) = 1/4 \neq 1/2 = \mathbb{P}(\omega_3 = 0).$$

最后，对$\omega_{1、2} = (0，0)$进行干预会对 $\mathcal{H}_3$产生主动因果效应，因为

$$K_{1,2}((0,0), \{\omega_3 = 0\}) = 1/8 \neq 1/2 = \mathbb{P}(\omega_3 = 0),$$

特别是，由于$K_{1,2}((0, 0), \{\omega_3 = 0\}) = 1/8 \neq 1/4 = K_2(0, \{\omega_3 = 0\})$，我们可以得出，$\mathcal{H}_1$对$\{\omega_3 = 0\}$有休眠因果效应：干预 $\omega_1 = 0$ 本身没有主动因果效应，但联合干预$\omega_{1,2} = (0, 0)$与干预 $\omega_2 = 0$不同。若要使 $\mathcal{H}_1$ 对 $\mathcal{H}_3$ 没有因果效应，我们需要对所有 $\omega_1 \in \Omega_1$，、所有 $\omega_2 \in \Omega_2$ 以及所有 $A \in \mathcal{H}_3$，都满足$K_{1,2}((\omega_1, \omega_2)\ A) = K_2(\omega_2, A)$。

正如例 2.7所示，无因果效应和休眠因果效应的概念取决于因果空间中包含哪些其他变量（或可测空间的分量）。另一方面，只要我们希望干预的 σ-代数和我们感兴趣的事件都包含在内，主动因果效应就是模型不变的。换言之，前者对于边缘化

结果	$\omega=(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)$							
	$(0,^{0,\ 0)}$	$(1,^{0,\ 0)}$	$(0,^{1,\ 0)}$	$(0,^{0,\ 1)}$	$(1,^{1,\ 0)}$	$(1,^{0,\ 1)}$	$(0,^{1,1)}$	$(1,^{1,\ 1)}$
$\mathbb{P}$	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8
$K_1(0,\ \cdot)$	1/4	0	1/4	1/4	0	0	1/4	0
$K_1(1,\ \cdot)$	0	1/4	0	0	1/4	1/4	0	1/4
$K_2(0,\ \cdot)$	1/8	1/8	0	3/8	0	3/8	0	0
$K_{1,2}((0,0),\cdot)$	1/8	0	0	7/8	0	0	0	0

表1：在例子中　　例 2.7中，$\mathcal{H}_1$ 对 $\mathcal{H}_3$ 有 $\mathcal{H}_2$ 对 $\mathcal{H}_3$.

[Park and Zhou, 2025], 而后者是如此。在例子 2.7中，如果我们将分量 Ω_2, 边缘化 $\mathcal{H}_1$ 不仅不会对 $\mathcal{H}_3$产生主动因果效应，而且现在对 $\mathcal{H}_3$也没有因果效应。

最后，我们回顾一下（主动）条件因果效应的定义 [Park and Zhou, 2025]。这个定义与典型的反事实查询尤其相关，其形式为：“给定事实世界中的一次观测，反事实世界中的一次干预会产生怎样的因果效应？”我们用 $\mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\delta_\omega)}(\cdot)$ 和 $K_U(\omega,\ \cdot)$ 交替表示——由定义 2.5 可立即得知，它们是同一个测度。

定义 2.8。设有一个因果空间 $(\Omega\ \mathcal{H},\ \mathbb{P},\ \mathbb{K})$、一个干预集 $U\subseteq T$、事件 $A,\ G\in\mathcal{H}$和一个σ-代数 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{H}$。我们称 $\mathcal{H}_U$ 在以 G 为条件时对 A 具有主动因果效应，如果存在某个$\omega\in\Omega$，使得 $\mathbb{P}(G)>0$、$K_U(\omega,\ G)>0$，并且 $\mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\delta_\omega)}{}_G(A)\neq\mathbb{P}_G(A)$。

3 反事实概率空间

本节通过使用可测空间为事实可测空间与反事实可测空间乘积的概率空间，对非干预式反事实推理进行形式化。我们称此类概率空间为反事实概率空间。我们首先给出适用于两个平行世界的定义，随后在第5节将其推广到多个世界。

我们用 Ω^{F} 表示事实结果的集合，用 Ω^{CF} 表示反事实结果的集合。[1] 我们分别为 Ω^{F} 和 Ω^{CF} 配备 σ 代数 $\mathcal{E}^{\mathrm{F}}$ 和 $\mathcal{E}^{\mathrm{CF}}$。由事实可测空间与反事实可测空间的乘积可得整体可测空间 $(\Omega\ \mathcal{H})$，如下所示：

$$(\Omega,\mathcal{H})=(\Omega^{\mathrm{F}}\times\Omega^{\mathrm{CF}},\mathcal{E}^{\mathrm{F}}\otimes\mathcal{E}^{\mathrm{CF}}).$$

对于任意结果 $\omega\in\Omega$，我们用 ω^{F} 和 ω^{CF} 分别表示 ω 到 Ω^{F} 和 Ω^{CF} 的投影，因此ω 可分解为 $\omega=(\omega^{\mathrm{F}},\ \omega^{\mathrm{CF}})$。

我们用 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}}$ 表示 $\mathcal{H}$ 的子-σ 代数，其中包含形如 $A\times\Omega^{\mathrm{CF}}$ 且满足 $A\in\mathcal{E}^{\mathrm{F}}$ 的可测柱集。同样，我们用 $\mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$ 表示 $\mathcal{H}$ 的子-σ 代数，其中包含形如 $\Omega^{\mathrm{F}}\times B$ 且满足 $B\in\mathcal{E}^{\mathrm{CF}}$ 的可测柱集。[2]我们将 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}}$ 中的事件称为事实事件，将 $\mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$ 中的事件称为反事实事件，而既不属于前者也不属于后者的事件称为跨世界事件。只有平凡事件 $\emptyset$ 和 Ω 同时属于 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}}$ 与 $\mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$。我们还将 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}}$ 的子-σ 代数称为事实 σ代数，将 $\mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$ 的子-σ 代数称为反事实 σ代数，而既非前者也非后者的子代数称为跨世界 σ代数。

我们现在可以定义反事实概率空间了。

定义3.1。反事实概率空间定义为三元组 $(\Omega\ \mathcal{H},\mathbb{P})$，其中 $(\Omega\ \mathcal{H})$ 是具有上述乘积结构的可测空间，且 $\mathbb{P}$ 是定义在 $(\Omega\ \mathcal{H})$ 上的概率测度。

[1]本文用上标表示世界，用下标表示世界的分量——例如，参见定义 2.4 之前为因果空间构造的乘积空间。[2]请注意，我们有 $\mathcal{H}=\mathcal{E}^{\mathrm{F}}\otimes\mathcal{E}^{\mathrm{CF}}$，但并没有 $\mathcal{H}=\mathcal{H}^{\mathrm{F}}\otimes\mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$。这意味着 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}}$ 和 $\mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$ 是σ 的子 σ 代数，因此，属于 $\mathcal{H}$ 或 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}}$ 的事件也属于 $\mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$，但 $\mathcal{H}$和 $\mathcal{E}^{\mathrm{F}}$ 并不是 $\mathcal{E}^{\mathrm{CF}}$ 的子 σ 代数。当然，存在与此相应的同构。σ $\mathcal{H}$

从数学角度来说，反事实概率空间不过是概率空间，只是额外要求可测空间是事实可测空间与反事实可测空间的乘积。事实可测空间与反事实可测空间之间不存在数学上的不对称——这些名称只是为了方便。

其解释如下。测度 $\mathbb{P}$ 在事实事件和反事实事件上的边缘分布，就是它们在各自世界中发生的概率。跨世界事件上的测度则更有意思，因为它告诉我们两个世界之间共享了多少信息。对于每一对事件 $A \in \mathcal{H}^{\mathrm{F}}$ 和 $B \in \mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$，如果测度满足 A 和 B 相互独立（见定义 2.2），那么 A 和 B之间就没有共享信息。反过来，如果 A 和 B 几乎必然相等（见定义 2.3），那么信息共享达到最大。在世界层面上：

1. 如果 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}} \perp\!\!\!\perp_{\mathbb{P}} \mathcal{H}_{\mathrm{CF}}$，那么事实世界和反事实世界之间没有共享信息；
2. 如果 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}} \overset{\mathbb{P}}{=} \mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$，也就是说，对每个 $A \in \mathcal{H}^{\mathrm{F}}$，都存在 $B \in \mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$ 使得 $A \overset{\mathbb{P}}{=} B$，反之亦然，那么信息共享达到最大。换言之，以一个世界为条件化依据，就能完全确定另一个世界。

直观而言，反事实世界越接近事实世界（例如，只存在局部修改，或时间范围较短），我们就越预期二者之间共享的信息越多；而距离更远的反事实往往会产生较弱的跨世界依赖。

现在我们来看一些反事实概率空间的例子。

例 3.2。 我们取 $\Omega^{\mathrm{F}} = \Omega^{\mathrm{CF}} = \{H, T\}$，其中

$$\mathbb{P}(\{(H,H)\}) = \mathbb{P}(\{(H,T)\}) = \mathbb{P}(\{(T,H)\}) = \mathbb{P}(\{(T,T)\}) = 0.25.$$

在这个例子中，一枚公平硬币分别在事实世界和反事实世界中抛掷一次。按照测度 $\mathbb{P}$，两个世界中的事件相互独立，即 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}} \perp\!\!\!\perp_{\mathbb{P}} \mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$，并且两个世界之间没有共享信息。我们也可以改为指定 $\mathbb{P}$，使得

$$\mathbb{P}(\{(H,H)\}) = \mathbb{P}(\{(T,T)\}) = 0.5, \qquad \mathbb{P}(\{(H,T)\}) = \mathbb{P}(\{(T,H)\}) = 0.$$

在这个测度下，反事实世界中不会出现事实世界中原本不存在的其他随机性。

例 3.3。 我们取 $\Omega^{\mathrm{F}} = \Omega^{\mathrm{CF}} = \{S, D\}$，其中

		Counterfactual	
	$\mathbb{P}$	S	D
Factual	S	0.89	0.01
	D	0.01	0.09

患有某种疾病的患者有 90% 的存活概率（S）和 10% 的死亡概率（D）。如果观察到某位患者在事实世界中存活，那么此人在反事实世界中存活的概率为 $\frac{0.89}{0.89+0.01} \approx 0.99$。同样，如果观察到某位患者在事实世界中死亡，那么其在反事实世界中也会死亡，概率为 $\frac{0.09}{0.09+0.01} = 0.9$。

这里，共享信息来自一个关于随机选取的患者的查询，该患者在两个世界中具有相同的基础健康状况；但其他同样影响存活的随机性源并未在两个世界之间共享。

示例 3.4。 假设我们要对学生参加复习课并通过随后考试的概率进行建模，情境设定在两个平行世界中：

$$\Omega^{\mathrm{F}}_{\mathrm{Class}} = \Omega^{\mathrm{CF}}_{\mathrm{Class}} = \{Y, N\}, \qquad \Omega^{\mathrm{F}}_{\mathrm{Exam}} = \Omega^{\mathrm{CF}}_{\mathrm{Exam}} = \{P, F\}$$
$$\Omega^{\mathrm{F}} = \Omega^{\mathrm{F}}_{\mathrm{Class}} \times \Omega^{\mathrm{F}}_{\mathrm{Exam}}, \qquad \Omega^{\mathrm{CF}} = \Omega^{\mathrm{CF}}_{\mathrm{Class}} \times \Omega^{\mathrm{CF}}_{\mathrm{Exam}}, \qquad \Omega = \Omega^{\mathrm{F}} \times \Omega^{\mathrm{CF}},$$

分别表示 Y、 N、 P和 F结果“是”、“否”、“通过”和“未通过”。完整的测度 $\mathbb{P}$见表2。利用这一测度，我们可以回答“回溯反事实”查询 [von Kügelgen 等人， 2023], 例如：

		反事实				
	$\mathbb{P}$	$(Y,\ P)$	$(Y,\ F)$	$(N,\ P)$	$(N,\ F)$	Sum
事实	$(Y,\ P)$	0.32	0.04	0.06	0.01	0.43
	$(Y,\ F)$	0.04	0.12	0.01	0.04	0.21
	$(N,\ P)$	0.06	0.01	0.1	0.02	0.19
	$(N,\ F)$	0.01	0.04	0.02	0.1	0.17
	Sum	0.43	0.21	0.19	0.17	1

表2：学生参加课程并通过考试时，事实世界和反事实世界中的测度。

(a) “已知一名学生参加复习课后通过了考试，那么同一名学生如果再次参加同一场考试，通过的概率是多少？”要回答这个问题，我们以第一行为条件，并计算第一列与第三列之和，得到 $\frac{0.32+0.06}{0.43} \approx 0.88$，这高于学生通过考试的边际概率（$0.43 + 0.19 = 0.62$）。(b) “已知一名学生参加了课程，如果时间倒流，这名学生会参加这门课程的概率是多少？”对此，我们以最初两行为条件，并计算最初两列之和：$\frac{0.32+0.04+0.04+0.12}{0.43+0.21} = 0.8125$。同样，这高于学生参加课程的边际概率（$0.43 + 0.21 = 0.64$）。(c) “已知一名学生没有参加课程后未能通过考试，如果观察到同一名学生改为参加了课程，那么他本来会通过同一场考试吗？”要回答这个问题，我们以最后一行和最初两列为条件，并查看第一列：$\frac{0.01}{0.01+0.04} = 0.2$。请注意，这仍远低于通过考试的边际概率 0.62；这是合理的，因为在反事实世界中，学生的能力和考试难度都保持不变。然而，这高于仅仅在事实世界中以该学生没有参加课程且未能通过考试为条件时，该学生通过考试的概率；后者通过以最后一行为条件并对第一列和第三列求和而得：$\frac{0.01+0.02}{0.17} \approx 0.176$。请注意，这与询问“如果他们被强制要求参加课程会怎样？”不同——观测不同于干预。因此，上述讨论并未告诉我们参加课程与通过考试之间的因果关系。要讨论因果关系，我们需要（和一贯的做法一样）引入干预的概念，而反事实概率空间中并未涉及这一概念。我们将在第 4 节中讨论反事实因果空间中的干预，并重新审视这个例子。

当然，这些概念可以直接推广到条件陈述。现在举例说明一种事实事件与反事实事件条件同步的情况。

例 3.5。假设我们对某个特定夜晚观测一颗特定恒星进行建模。我们取

$$\Omega^{\mathrm{F}}_{\mathrm{Sky}} = \Omega^{\mathrm{CF}}_{\mathrm{Sky}} = \{C, O\}, \qquad \Omega^{\mathrm{F}}_{\mathrm{Star}} = \Omega^{\mathrm{CF}}_{\mathrm{Star}} = \{Y, N\},$$
$$\Omega^{\mathrm{F}} = \Omega^{\mathrm{F}}_{\mathrm{Sky}} \times \Omega^{\mathrm{F}}_{\mathrm{Star}}, \qquad \Omega^{\mathrm{CF}} = \Omega^{\mathrm{CF}}_{\mathrm{Sky}} \times \Omega^{\mathrm{CF}}_{\mathrm{Star}}, \qquad \Omega = \Omega^{\mathrm{F}} \times \Omega^{\mathrm{CF}}$$

其中 C、O、Y 和 N 分别表示结果“晴朗”“阴天”“是”和“否”。完整的测度 $\mathbb{P}$ 见表 3。注意以下几点：

- 天空晴朗或阴天的可能性相同，而且事实世界中的天空与反事实世界中的天空相互独立。
- 用于观测恒星的望远镜由两个世界共享，且有 $1/5$ 的故障概率，但在模型中这一因素已被边缘化。如果天空晴朗，使用正常工作的望远镜一定能观测到恒星，但使用故障望远镜则无法观测到。如果天空阴天，观测到恒星的概率为 1/4；若望远镜发生故障，则无法观测到恒星。

		反事实				
	$\mathbb{P}$	$(C,\ Y)$	$(C,\ N)$	$(O,\ Y)$	$(O,\ N)$	Sum
事实	(C, Y)	0.2	0	0.05	0.15	0.4
	(C, N)	0	0.05	0	0.05	0.1
	(O, Y)	0.05	0	0.01	0.04	0.1
	(O, N)	0.15	0.05	0.04	0.16	0.4
	Sum	0.4	0.1	0.1	0.4	1

表3：事实世界和反事实世界中，关于被观测的天空和恒星的测度。

- 我们可以看到，事件 $\{\omega\text{FStar} = Y\}$ 和 $\{\omega\text{CFStar} = Y\}$ 并非几乎必然相等，因为将最后一列的第一行和第三行相加，得到 $\mathbb{P}(\omega\text{FStar} = Y, \omega\text{CFStar} = N) = 0.15 + 0.04 = 0.19 > 0$。我们定义两个世界中的天空都晴朗这一事件： $G = \{\omega\text{FSky} = C, \omega\text{CFSky} = C\}$。那么，在以 G 为条件的情况下（即查看表3左上方的区块），事件 $\{\omega\text{FStar} = Y\}$ 和 $\{\omega\text{CFStar} = Y\}$ 几乎必然相等。由于在以 G 为条件时，每个世界中都只有一个二元变量，这意味着 $\mathcal{H}\text{F} \overset{\mathbb{P}_G}{=} \mathcal{H}\text{CF}$，也就是说，在两个世界中的天空都晴朗这一条件下，事实世界和反事实世界是同步的。这在数学上表示，在晴朗的夜晚，决定能否观测到恒星的唯一随机因素是望远镜，而望远镜由两个世界共享。

在上述示例中，明确说明了两个世界有哪些共同之处（示例 3.2中没有共同之处，示例 3.3中的患者，示例3.4中的学生和考试，以及示例 3.5中的望远镜），但这纯粹是为了让解释更加清晰。从数学上说，测度 $\mathbb{P}$编码了共享信息，而具体共享的实体并不需要（且从数学角度来说也不会）明确指出。此外，该形式体系不受时间限制。一方面，可以将反事实世界理解为回拨时间并再次运行事件（正如我们在示例 3.4的回溯查询中所做的那样）。另一方面，也可以将两个世界都理解为从同一个时间点出发、发生在未来的世界。此时，两个世界距离这个共同起点越远，它们共享的信息就越少。

在 $\mathcal{H}^{\text{F}}$ 和 $\mathcal{H}^{\text{CF}}$ 上的边缘测度在以上所有例子中都相同。一般而言，这并非必然如此；事实上，定义3.1 甚至允许两个世界的可测空间$(\Omega^{\text{F}}, \mathcal{E}^{\text{F}})$ 和$(\Omega^{\text{CF}}, \mathcal{E}^{\text{CF}})$ 不同。不过，两个世界对称这一特殊情形也值得关注。

定义3.6。 设 $(\Omega\ \mathcal{H}, \mathbb{P})$ 是一个反事实概率空间。若 $(\Omega\ \mathcal{H}, \mathbb{P})$ 对称，则称之为对称的：

(a) 两个可测空间相同，即 $(\Omega^{\text{F}}, \mathcal{E}^{\text{F}}) = (\Omega^{\text{CF}}, \mathcal{E}^{\text{CF}})$；(b) 对任意 A, $B \in \mathcal{E}^{\text{F}} = \mathcal{E}^{\text{CF}}$，都有 $\mathbb{P}(A \times B) = \mathbb{P}(B \times A)$。

很容易看出，例3.2 至3.4中的反事实概率空间是对称的。当两个世界拥有相同的信息（无论这些信息是否共享）时，将世界建模为对称是合理的。我们回到例3.3，但采用另一种测度 $\mathbb{P}$ ，使两个世界不对称。

示例 3.7。假设在反事实世界中，医疗保健系统已经崩溃，患有该疾病的患者更有可能死亡。因此，现在的测度为：

		Counterfactual	
	$\mathbb{P}$	S	D
Factual	S	0.6	0.3
	D	0.001	0.099.

事实世界中的边缘测度（医疗保健系统完好无损）保持不变（生存概率为 90%，死亡概率为 10%）。然而，在反事实世界中，边缘测度

生存概率仅为 60.1%，死亡的边缘测度为 39.9%。具有相同基础健康状况的患者仍被视为在两个世界中是同一个人，这意味着，如果观察到他们在事实世界中存活，那么即使医疗保健系统已经崩溃，他们在反事实世界中存活的可能性仍然大于不存活（概率为 $\frac{0.6}{0.6+0.3}=\frac{2}{3}$）。具体而言，这一概率高于反事实世界中 0.601 的生存边际概率。

4 反事实因果空间

在本节中，我们将反事实因果空间定义为因果空间的特殊情形，其可测空间是事实可测空间与反事实可测空间的乘积。这类似于我们在第3节中得到反事实概率空间的方式：它们是可测空间为事实与反事实分量乘积的概率空间。此外，我们还施加一条额外公理，规定不同世界之间不存在因果效应。在第4.1节中，我们将正式引入反事实因果空间及其中的干预。在第4.2节中，我们将再次讨论共享信息的两个极端情形，即反事实因果空间中的独立性与世界同步。

4.1 形式化定义

我们首先构造底层可测空间。与因果空间（定义 2.4）类似，我们要求事实可测空间和反事实可测空间呈乘积形式。我们用 T_{F} 和 T^{CF} 表示事实与反事实指标集，并记作 $T=T_{\mathrm{F}}\cup T_{\mathrm{CF}}$。对于每个 $t\in T_{\mathrm{F}}$，取一个可测空间 $(\Omega_t^{\mathrm{F}},\mathcal{E}_t^{\mathrm{F}})$；对于每个 $t\in T^{\mathrm{CF}}$，取 $(\Omega_t^{\mathrm{CF}},\mathcal{E}_t^{\mathrm{CF}})$。然后，我们分别将事实结果集和反事实结果集定义为 $\Omega^{\mathrm{F}}=\times_{t\in T^{\mathrm{F}}}\Omega_t^{\mathrm{F}}$和 $\Omega^{\mathrm{CF}}=\times_{t\in T^{\mathrm{CF}}}\Omega_t^{\mathrm{CF}}$。此外，记 $\mathcal{E}^{\mathrm{F}}=\otimes_{t\in T^{\mathrm{F}}}\mathcal{E}_t^{\mathrm{F}}$和$\mathcal{E}^{\mathrm{CF}}=\otimes_{t\in T^{\mathrm{CF}}}\mathcal{E}_t^{\mathrm{CF}}$为相应的 σ-代数。接着，整体可测空间 $(\Omega\ \mathcal{H})$ 由事实可测空间与反事实可测空间的乘积构成，如下所示：

$$(\Omega,\mathcal{H})=(\Omega^{\mathrm{F}}\times\Omega^{\mathrm{CF}},\mathcal{E}^{\mathrm{F}}\otimes\mathcal{E}^{\mathrm{CF}}).$$

与第3节类似，对于任意结果 $\omega\in\Omega$，我们将其在 Ω^{F} 和 Ω^{CF} 上的投影分别记为 ω^{F} 和 ω^{CF}，因此 ω 可分解为 $\omega=(\omega^{\mathrm{F}},\omega^{\mathrm{CF}})$。此外，与第2.2节类似，对于任意 $S\subseteq T$，我们将 Ω_S 记为 Ω_s 的子空间 $\times_{s\in S}$。我们也写作 $\omega_S=(\omega_s)_{s\in S}$；若 $S\subseteq T^{\mathrm{F}}$（分别地，$S\subseteq T^{\mathrm{CF}}$），我们也写作 ω_S^{F}（分别地，ω_S^{CF}）。

对于任意 $S\subseteq T$，我们将由可测矩形 $(\times_{t\in T^{\mathrm{F}}}A_t)\ \times(\times_{t\in T^{\mathrm{CF}}}B_t)$生成的 $\mathcal{H}$ 的子-σ-代数记为 $\mathcal{H}_S$，其中 $A_t\in\mathcal{E}_t^{\mathrm{F}}$ 和 $B_t\in\mathcal{E}_t^{\mathrm{CF}}$ 仅在有限多个满足 $t\in S$ 的 t 上与 Ω_t^{F} 和 Ω_t^{CF} 不同。简记为 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}}=\mathcal{H}_{T^{\mathrm{F}}}$ 和 $\mathcal{H}^{\mathrm{CF}}=\mathcal{H}_T$ CF。与第3节一样，我们将 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}}$ 中的事件称为事实事件，将 $\mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$ 中的事件称为反事实事件，而将既不属于前者也不属于后者的事件称为跨世界事件。我们还将 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}}$ 的子-σ-代数称为事实 σ-代数，将 $\mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$ 的子-σ-代数称为反事实 σ-代数，而将既非前者也非后者的子代数称为跨世界 σ-代数。

我们终于可以定义反事实因果空间了。

定义 4.1。反事实因果空间是一个四元组 $(\Omega\ \mathcal{H},\mathbb{P},\mathbb{K})$，其中 $(\Omega\ \mathcal{H})$ 是具有上述乘积结构的可测空间，$\mathbb{P}$ 是 $(\Omega\ \mathcal{H})$ 上的概率测度，而 $\mathbb{K}=\{K_S\colon S\subseteq T\}$ 称为因果机制，是一组从 $(\Omega\ \mathcal{H}_S)$ 到 $(\Omega\ \mathcal{H})$ 的转移概率核 K_S，称为 $\mathcal{H}_S$ 上的因果核，满足以下公理：

(i) 对所有 $\omega\in\Omega$ 和 $A\in\mathcal{H}$，均有

$$K_\emptyset(\omega,A)=\mathbb{P}(A);$$

(ii) 对所有 $\omega\in\Omega$、所有 $S\in\mathcal{P}(T)$ 和所有 $A\in\mathcal{H}^{\mathrm{F}}$，均有

$$K_S(\omega,A)=K_{S\cap T^{\mathrm{F}}}(\omega,A),$$

同样，对于所有 $\omega\in\Omega$、所有 $S\in\mathcal{P}(T)$ 以及所有 $B\in\mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$，我们有

$$K_S(\omega,B)=K_{S\cap T^{\mathrm{CF}}}(\omega,B);$$

(iii) 对于所有 $\omega \in \Omega$、 $A \in \mathcal{H}^S$ 和 $B \in \mathcal{H}$，我们有

$$K_S(\omega, A \cap B) = \mathbf{1}_A(\omega) K_S(\omega, B) = \delta_\omega(A) K_S(\omega, B);$$

特别地，对于 $A \in \mathcal{H}^S$，我们有

$$K_S(\omega, A) = \mathbf{1}_A(\omega) K_S(\omega, \Omega) = \mathbf{1}_A(\omega).$$

在定义反事实因果空间中的干预后，我们将立即说明这个定义和公理的直观含义：

定义 4.2。设反事实因果空间 $(\Omega\ \mathcal{H}, \mathbb{P}, \mathbb{K})$（定义 4.1）、干预集$U \subseteq T$以及 $(\Omega\ \mathcal{H}_U)$ 上的概率测度 $\mathbb{Q}$。通过 $\mathbb{Q}$ 对 $\mathcal{H}_U$ 进行干预，将得到一个新的反事实因果空间 $(\Omega\ \mathcal{H}, \mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}, \mathbb{K}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})})$，其中干预测度 $\mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}$ 是 $(\Omega\ \mathcal{H})$ 上的概率测度，其定义为：对于 $A \in \mathcal{H}$,

$$\mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}(A) = \int \mathbb{Q}(d\omega) K_U(\omega, A)$$

以及 $\mathbb{K}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})} = \{K_S^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})} : \ S \subseteq T\}$ 是干预因果机制，其干预因果核为

$$K_S^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}(\omega_S, A) = \int \mathbb{Q}(d\omega'_{U\setminus S}) K_{S\cup U}((\omega_S, \omega'_{U\setminus S}), A).$$

在下面的评注中，我们将说明定义 4.1 中给出的反事实因果空间中因果核公理的直观含义4.1。

注 4.3。 设 $(\Omega\ \mathcal{H},\ \mathbb{P},\ \mathbb{K})$ 是一个反事实因果空间。

- 公理 （i）告诉我们，如果我们不进行任何干预，那么测度将保持为初始测度 $\mathbb{P}$。

- 公理 （ii）告诉我们，不可能存在跨世界因果效应（定义 2.6 中的含义），即事实 σ-代数对反事实事件没有因果效应，反之亦然。
- 公理 （iii）告诉我们，在进行干预后，所得测度在 σ-代数上的限制，应与进行干预时所使用的测度一致。

公理 （i）和 （iii）与因果空间（定义 2.4）的公理完全相同。因此，正如反事实概率空间是概率空间的特殊情形一样，反事实因果空间也是因果空间的特殊情形，只是多了一个因果空间中不存在的额外公理。此外，当然还可以通过忽略因果机制，将反事实因果空间视为反事实概率空间。

我们必须验证，干预后得到的反事实因果空间确实是一个反事实因果空间，即 $(\Omega\ \mathcal{H},\ \mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})},\ \mathbb{K}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})})$ 满足定义 4.1中的公理。该结论的证明是定理 5.4的一个特例；在该定理中，我们证明了 N路反事实因果空间的类似结果。

定理 4.4. 干预因果机制 $\mathbb{K}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}$ 满足定义 *4.1*中的公理 .

关于反事实因果空间和干预，我们再作几点补充说明。

备注 4.5。 (i) 同样，事实世界与反事实世界之间不存在数学上的不对称——这些名称只是为了方便和直观。

（ii）公理（ii）并未告诉我们跨世界事件的因果效应。事实上，这正是干预后共享信息的编码方式，而它可能不同于干预前各世界之间共享的信息。

		反事实				
	$K_{\text{Class}^{\text{CF}}}(Y,\ \cdot)$	$(Y,\ P)$	$(Y,\ F)$	(N,P)	(N,F)	Sum
事实	$(Y,\ P)$	0.39	0.04	0	0	0.43
	$(Y,\ F)$	0.05	0.16	0	0	0.21
	$(N,\ P)$	0.16	0.03	0	0	0.19
	$(N,\ F)$	0.04	0.13	0	0	0.17
	Sum	0.64	0.36	0	0	1

表 4：因果关系　　反事实世界中，针对学生参加课程的干预核。

		反事实				
	$K_{\text{Class}^{\text{CF}}}(N,\ \cdot)$	$(Y,\ P)$	$(Y,\ F)$	$(N,\ P)$	$(N,\ F)$	Sum
事实	$(Y,\ P)$	0	0	0.37	0.06	0.43
	$(Y,\ F)$	0	0	0.05	0.16	0.21
	$(N,\ P)$	0	0	0.15	0.04	0.19
	$(N,\ F)$	0	0	0.03	0.14	0.17
	Sum	0	0	0.6	0.4	1

表5：在反事实世界中干预学生不去上这门课程的因果核。

(iii) 对反事实因果空间进行边缘化，只要没有将整个世界边缘化掉，所得结果仍是另一个反事实因果空间。这是因为显然，如果较大的反事实因果空间中的一个 σ-代数 $\mathcal{H}_U$ 对某个事件 A 没有因果效应，那么在较小的空间中，它也不会对 A产生因果效应。因此，无跨世界因果效应公理（定义4.1(ii)）也得以保留，所以边缘化过程的结果仍是另一个反事实因果空间。

最后，我们仿照对称反事实概率空间（定义*3.6*），定义对称反事实因果空间。在这里，我们不仅要求概率测度 $\mathbb{P}$ 是对称的，也要求所有因果核都是对称的。

定义4.6。 设反事实因果空间 $(\Omega\ \mathcal{H}, \mathbb{P}, \mathbb{K})$如定义4.1所述。若$(\Omega\ \mathcal{H}, \mathbb{P}, \mathbb{K})$ 满足以下条件，则称其为对称的

(a) 两个指标集相同，即 $T\mathrm{F} = T^{\mathrm{CF}}$，且每个可测集也相同，即对于所有 $t \in T^{\mathrm{F}} = T\mathrm{CF}$，我们有 $(\Omega_t^{\mathrm{F}}, \mathcal{E}_t^{\mathrm{F}})$ $= (\Omega_t^{\mathrm{CF}}, \mathcal{E}_t^{\mathrm{CF}})$ （这意味着 $(\Omega^{\mathrm{F}}, \mathcal{E}^{\mathrm{F}})$ $= (\Omega^{\mathrm{CF}}, \mathcal{E}^{\mathrm{CF}})$); (b) 对于任意事件 $A, B \in \mathcal{E}^{\mathrm{F}} = \mathcal{E}^{\mathrm{CF}}$，我们有 $\mathbb{P}(A \times B)$ $= \mathbb{P}(B \times A)$; (c) 对于任意事件 $A, B \in \mathcal{E}^{\mathrm{F}} = \mathcal{E}^{\mathrm{CF}}$、任意子集 $S \subseteq T^{\mathrm{F}}$, $S' \subseteq T\mathrm{CF}$，以及任意结果 $\omega = (\omega'$, $\omega'') \in \Omega$，我们有 $K_{S \cup S'}((\omega', \omega'')\ A \times B) = K_{S' \cup S}((\omega'', \omega')\ B \times A)$。

根据我们实施的干预，反事实因果空间在干预后不一定仍然对称。例如，如果只在其中一个世界实施干预，那么后续的反事实因果空间通常显然不对称。此外，当且仅当在每个世界中边缘化掉可测空间的相同分量时，对称的反事实因果空间在边缘化后仍然对称。

下面给出一个反事实因果空间的例子，在反事实概率空间 inExample3.4 上赋予一个因果机制。

例 4.7。 我们在可测空间上指定因果机制（的一个子集）。因果核$K_{\text{Class}^{\text{CF}}}$ 对应于在反事实世界中让学生参加（Y）或不参加（N）某门课程的干预，具体见表 4 和 5。我们可以将 $K_{\text{Class}^{\text{F}}}$ 指定为对称的，即表 4和5的转置。

首先请注意，根据干预确定性公理（定义 4.1(iii)），在反事实世界中，对学生进行干预使其上课（分别为不上课）后，该学生不上课（分别为上课）的事件测度为零

。还请注意，根据无跨世界因果效应公理（定义4.1(ii)），事实事件上的边缘测度保持不变，仍与边缘观测测度相同（“总和”列）。

因果机制 $\mathbb{K}$ 的完整规范还会涉及更多因果核，例如对应于在事实世界或反事实世界中对考试结果进行干预的因果核（例如$K_{\text{Exam}^{\text{CF}}}(P,\ \cdot)$；参见示例 A.2 和表 6），或在两个世界中对这两个变量进行任意组合干预的因果核（例如 $K_{\text{Class}^{\text{CF},\ \text{考试}^{\text{F}}}}(\{Y,\ F\},\ \cdot)$，等等）。尤其是，表 4 和表 5 中的因果核仅表明世界之间不存在主动因果效应。为了满足无跨世界因果效应公理（定义 4.1(ii)），必须构造对应于在两个世界中同时进行干预的因果核，使其满足该公理，例如 $K_{\text{Class}^{\text{F}},\ \text{课程}^{\text{CF}}}(\{Y,\ Y\}\ A) = K_{\text{Class}^{\text{CF}}}(Y,\ A)$ 对所有反事实事件 A 均成立。

有了这些因果核，我们可以从表格（底部的“总和”行）读出：在反事实世界中通过干预使学生上课后，通过考试的概率为 0.64，略高于通过考试的边缘观测概率，$0.43 + 0.19 = 0.62$。同样，在干预阻止学生上课后，通过考试的概率为 0.6，略低于通过考试的边缘观测概率。根据定义 2.6(ii)，这意味着 $\mathcal{H}_{\text{Class}^{\text{CF}}}$ 对学生在反事实世界中通过考试这一事件具有主动因果效应。

让我们看看在这个反事实因果空间中可以回答的一些问题。我们特别关注条件因果效应（定义2.8）这一问题——给定事实世界中的一项观测，我们要问：如果在反事实世界中进行干预，是否会产生因果效应。

（a）“已知某学生没有参加复习课且考试不及格，如果强制该学生参加复习课，其通过考试的概率会是多少？”要回答这个问题，我们以表4的最后一行为条件：$\frac{0.04}{0.04+0.13} \approx 0.24$。这仍低于学生通过考试的边缘观测概率（0.62），但高于同一学生若自行决定是否参加复习课时通过同一场考试的概率（$\frac{0.01+0.02}{0.17} \approx 0.176$，表2的最后一行以及第一列和第三列）。

根据定义2.8，上述计算意味着 $\omega^{\text{CF}}_{\text{Class}} = Y$ 在条件为观测到学生没有参加复习课且在事实世界中考试不及格的情况下，对“学生在反事实世界中考试及格”这一事件有主动因果效应。

(b)“已知一名学生考试及格，那么如果阻止他参加课程，他及格的概率会是多少？”我们以表5的第一行和第三行为条件，并对第三列求和：$\frac{0.37+0.15}{0.43+0.19} \approx 0.838$。这仍远高于 0.62 的边缘观测概率，反映出这样一个事实：在事实世界中有能力通过考试的学生，即使无法参加复习课，也很可能再次通过考试。不过，这个概率略低于以学生通过考试为条件的观察概率（$\frac{0.32+0.06+0.06+0.1}{0.43+0.19} \approx 0.87$），这意味着在反事实世界中，学生仍可自行决定是否参加复习课。最后，如果观测到学生在事实世界中考试及格，并且在反事实世界中被迫参加复习课，那么通过考试的概率可通过以表4 的第一行和第三行为条件并对第一列求和来计算，结果为 $\frac{0.39+0.16}{0.43+0.19} \approx 0.89$——还要略高一些。

根据定义2.8，上述定义告诉我们，$\omega^{\text{CF}}_{\text{Class}} = Y$ 和 $\omega^{\text{CF}}_{\text{Class}} = N$ 对事件“学生在反事实世界中通过”在事件“学生在事实世界中通过”的条件下具有主动因果效应。

(c) 例如，在观察到学生在事实世界中上了课并通过考试后，除了询问如果阻止学生上课会发生什么，我们还可以询问如果在反事实世界中强迫学生上课会发生什么。乍看之下，学生通过考试的概率似乎应该与我们在反事实世界中完全没有进行干预时相同——毕竟，学生在两个世界中都上了课。然而，与结构因果模型框架不同，在事实世界中观察到学生上了课，并不

能保证学生在反事实世界中会再次上课，即使我们没有明确干预来阻止学生在反事实世界中上课。换句话说，在事实世界中观察到学生上了课（并通过了考试）后，再干预使学生在反事实世界中上课，仍然可能对考试结果产生（条件）因果效应。

事实上，以表格 2 和 4的前几行作为条件，我们可以看到，在第一种情况下，通过考试的概率是 $\frac{0.32+0.06}{0.43} \approx 0.88$，而在后一种情况下，通过考试的概率是 $\frac{0.39}{0.43} \approx 0.91$。因此，根据定义 2.8，结果 $\omega^{\mathrm{CF}}_{\mathrm{Class}} = Y$ 对反事实世界中学生通过考试这一事件具有因果效应，条件是该学生在事实世界中出席课程并通过考试。

(d) 另一方面，假设观测到学生在事实世界中缺席复习课并且未通过考试。我们可以以表格 2的最后一行作为条件，得知在事实世界中有这一观测的条件下，该学生在反事实世界中通过考试的概率为 $\frac{0.01+0.02}{0.17} \approx 0.18$。如果我们进一步进行干预，阻止学生在反事实世界中出席课程，那么通过考试的概率可以通过再次以表格 5的最后一行作为条件读出：$\frac{0.03}{0.17} \approx 0.18$。所以在这种情况下，这两个概率相同。这意味着，根据定义 2.8，令 G 表示学生在事实世界中未出席课程且未通过考试这一事件，并令 A 表示学生在反事实世界中通过考试这一事件，结果 $\omega^{\mathrm{CF}}_{\mathrm{Class}} = N$ 对 A没有主动因果效应，条件是 G。

然而，如果我们转而在反事实世界中干预，使学生参加这门课程，那么我们可以根据表 4 的最后一行进行条件化，得知 A 的概率为 $\frac{0.04}{0.17} \approx 0.24$。因此，在以 G, 为条件时，结果 $\omega^{\mathrm{CF}}_{\mathrm{Class}} = Y$ 确实对 A 有主动因果效应 G。

我们指出，定义 2.6 和 2.8 中（条件）因果效应的定义采用二元陈述，即是否存在任何因果效应。讨论因果效应的性质和强度不在本文的讨论范围内，但从上文 (b) 可以看出，以事实世界中学生通过考试为条件时，参加这门课程的（条件）因果效应虽然存在，却非常微弱。

还应注意，在反事实因果空间中可能存在跨世界条件因果效应。乍看之下这或许令人惊讶，因为在反事实因果空间中，因果机制在公理上被要求不得产生任何跨世界因果效应（定义 4.1(ii)）。但这完全合乎情理，因为对事实世界的干预可能会创造、消除或改变世界之间共享信息的性质和/或强度。用数学语言来说，设 $U \subseteq T^{\mathrm{F}}$，使得 $\mathcal{H}_U$是一个事实 σ-代数，并设 $A \in \mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$ 是一个反事实事件。那么 $\mathcal{H}_U$ 不可能对 A产生任何因果效应；但如果它对 G有因果效应，那么 $\mathcal{H}_U$ 在给定 G的条件下，确实对 A 具有条件因果效应。正如上文 (b) 所示，在事实世界中对课程进行干预后，反事实世界中通过考试的观察概率并未改变；但是，以考试结果为条件时，同一干预确实会影响反事实世界中的考试结果。

当然，如果我们在一个世界中进行干预，而只在另一个世界中进行条件化，那么就不可能存在任何跨世界条件因果效应。证明见第 C节。

命题 4.8。设反事实因果空间为$(\Omega\ \mathcal{H}, \mathbb{P}, \mathbb{K})$，取其子集 $U \subseteq T^{\mathrm{F}}$（因此 $\mathcal{H}_U$是一个事实 σ-代数），以及反事实事件 A、$G \in \mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$。则在以 G 为条件时，$\mathcal{H}_U$ 对 A 无因果效应。

显然，反过来这个结果也成立——如果干预发生在反事实世界中，条件化发生在事实世界中，而我们关注的是一个事实事件。

4.2 世界的同步与独立性

忽略因果机制后，反事实因果空间可以视为反事实概率空间，因此第 3 节中关于事实世界和反事实世界（条件）独立以及它们（条件）同步的定义同样适用。我们还可以定义它们的对应概念

以及因果核，它们将代表干预之后 世界间信息共享的两个极端。

我们首先回顾因果独立性的概念，它是条件独立性在干预情形下的直接类比。

定义 4.9。 [Buchholz 等人 [2024, 定义 3。4]] 取一个因果空间 $(\Omega\ \mathcal{H},\ \mathbb{P},\ \mathbb{K})$ 如定义 2.4所述。那么对于 $U \subseteq T$，两个事件 $A,\ B \in \mathcal{H}$ 在 上因果独立 $\mathcal{H}_U$，记作 $A \perp\!\!\!\perp_{K_U} B$，如果对所有 $\omega \in \Omega$,

$$K_U(\omega, A \cap B) = K_U(\omega, A)K_U(\omega, B).$$

我们称两个子-σ-代数 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 在上因果独立 $\mathcal{H}_U$，记作 $\mathcal{F}_1 \perp\!\!\!\perp_{K_U} \mathcal{F}_2$，如果$A \perp\!\!\!\perp_{K_U} B$ 对所有 $A \in \mathcal{F}_1$ 和 $B \in \mathcal{F}_2$均成立。

请注意，与条件独立性不同，对于因果独立性，我们要求上述性质对所有 $\omega \in \Omega$都成立，而不只是几乎必然成立。这是因为，在干预过程中，可以对 $\mathcal{H}_U$ 施加一种测度，使得此前测度为零的事件获得正测度。

我们还定义了因果版本的事件几乎必然相等、确定性以及σ代数的同步（参见定义 2.3）。

定义 4.10。 设有一个因果空间 $(\Omega\ \mathcal{H},\ \mathbb{P},\ \mathbb{K})$、事件 $A,\ B \in \mathcal{H}$、子-σ-代数 $\mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{H}$ 以及一个子集 $U \subseteq T$。

(i) 若 $K_U(\omega,\ A\Delta B) = 0$ 对所有 $\omega \in \Omega$ 均成立，则称 A 和 B 在 $\mathcal{H}_U$上因果相等，记作 $A \overset{K_U}{=} B$。

(ii) 若对每个 $A \in \mathcal{F}_1$，都存在 $B \in \mathcal{F}_2$ 使得 $A \overset{K_U}{=} B$，反之亦然，则称 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 在 上因果同步，记作 $\mathcal{F}_1 \overset{K_U}{=} \mathcal{F}_2$。

同样，关系 $\overset{K_U}{=}$ 是事件和 σ-代数之间的等价关系。

回到反事实因果空间，我们可以对干预之后事实世界与反事实世界之间共享信息量的两个极端情形给出精确的数学定义。设 $\mathcal{F}^{\mathrm{F}} \subseteq \mathcal{H}^{\mathrm{F}}$ 为一个事实 σ-代数，$\mathcal{F}^{\mathrm{CF}} \subseteq \mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$ 为一个反事实 σ-代数。

1. 如果 $\mathcal{F}^{\mathrm{F}} \perp\!\!\!\perp_{K_U} \mathcal{F}^{\mathrm{CF}}$，那么对 $\mathcal{H}_U$进行干预后，$\mathcal{F}^{\mathrm{F}}$ 和 $\mathcal{F}^{\mathrm{CF}}$ 之间没有共享信息。

2. 如果 $\mathcal{F}^{\mathrm{F}} \overset{K_U}{=} \mathcal{F}^{\mathrm{CF}}$，那么对 $\mathcal{H}_U$ 进行干预后，$\mathcal{F}^{\mathrm{F}}$ 和 $\mathcal{F}^{\mathrm{CF}}$ 之间的信息共享达到最大。

我们也可以不考察两个世界中的子σ代数 $\mathcal{F}^{\mathrm{F}}$ 和 $\mathcal{F}^{\mathrm{CF}}$，而是说，如果 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}} \perp\!\!\!\perp_{K_U} \mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$，那么对 $\mathcal{H}_U$ 进行干预后，整个世界之间没有共享信息。然而，如果 $U \cap T^{\mathrm{F}} \neq \emptyset$且 $U \cap T^{\mathrm{CF}} \neq \emptyset$，那么就不可能有 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}} \overset{K_U}{=} \mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$，因为对于任意 $A \in \mathcal{H}_{U\cap T^{\mathrm{F}}}$和 $B \in \mathcal{H}_{U\cap T^{\mathrm{CF}}}$，干预确定性公理（定义4.1(iii)）给出

$$\begin{aligned} K_U(\omega, A \cap B) = \mathbf{1}_{A\cap B}(\omega) &\neq \mathbf{1}_A(\omega) = K_U(\omega, A) \\ &\neq \mathbf{1}_B(\omega) = K_U(\omega, B), \end{aligned}$$

除非 $A = \Omega$ 或 $B = \Omega$。这与因果独立性相反，因为对于任意 $A \in \mathcal{H}_{U\cap T^{\mathrm{F}}}$ 和$B \in \mathcal{H}_{U\cap T^{\mathrm{CF}}}$，再次根据干预确定性公理，我们有

$$K_U(\omega, A \cap B) = \mathbf{1}_{A\cap B}(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_B(\omega) = K_U(\omega, A)K_U(\omega, B),$$

因此 A 和 B 始终具有因果独立性。

以下结果讨论的是，干预后因果独立性如何转化为（条件）独立性。证明见第C节。

命题 4.11。 设 $\mathcal{C} = (\Omega\ \mathcal{H},\ \mathbb{P},\ \mathbb{K})$ 是一个反事实因果空间（定义 *4.1*），并设 $\mathcal{C}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})} = (\Omega\ \mathcal{H},\ \mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}, \mathbb{K}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})})$ 是对 $\mathcal{H}_U$ 进行测度干预后得到的反事实因果空间$\mathbb{Q}$ （定义*4.2*）。

(i) 设 A，$B \in \mathcal{H}$ 是事件。若 $A \perp\!\!\!\perp_{K_U} B$ 在 $\mathcal{C}$ （参见定义 4.9）中成立，则 A 和 B 在给定 $\mathcal{H}_U$ 的条件下，在 $\mathcal{C}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}$中条件独立。

(ii) 如果 $\mathcal{H}_{U\cap T^{\mathrm{F}}} \perp\!\!\!\perp_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}_{U\cap T^{\mathrm{CF}}}$ 和 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}} \perp\!\!\!\perp_{K_U} \mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$ 属于 $\mathcal{C}$，那么 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}} \perp\!\!\!\perp_{\mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}} \mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$。

换言之，如果 A 和 B 在原始因果空间 $\mathcal{H}_U$ 中因果独立，那么在对 $\mathcal{H}_U$进行干预后，给定 $\mathcal{H}_U$ 时，它们条件独立。作为命题 4.11(i) 的直接推论，对于两个子σ代数 $\mathcal{F}_1$，$\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{H}$，如果 $\mathcal{F}_1 \perp\!\!\!\perp_{K_U} \mathcal{F}_2$，那么对于 $\mathcal{H}_U$ 上的任意测度 $\mathbb{Q}$，它们在测度 $\mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}$ 下给定 $\mathcal{H}_U$ 时条件独立。此外，命题 4.11(ii) 告诉我们，如果事实世界和反事实世界在因果上独立，并且我们用 $\mathbb{Q}$ 上的测度 $(\Omega\ \mathcal{H}_U)$ 进行干预，且在该测度下这些世界相互独立，那么在所得空间中，这些世界（无条件地）独立。

下一个结果讨论因果同步如何转化为干预后的同步。证明同样见第 C 节。

命题 *4.12.* 设 $\mathcal{C} = (\Omega\ \mathcal{H}, \mathbb{P}, \mathbb{K})$ 是一个反事实因果空间（定义 *4.1*），而 $\mathcal{C}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})} = (\Omega\ \mathcal{H}, \mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}, \mathbb{K}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})})$ 是在 $(\Omega\ \mathcal{H}_U)$ 上以测度$\mathbb{Q}$对 $\mathcal{H}_U$ 进行干预后得到的反事实因果空间（定义 *4.2*）。设 $A, B \in \mathcal{H}$ 为事件。若 $A \overset{K_U}{=} B$ 在 $\mathcal{C}$ 中成立，则 $A \overset{\mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}}{=} B$ 在 $\mathcal{C}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}$中成立。

换言之，若在原始因果空间中，A 和 B 在 $\mathcal{H}_U$ 上因果相等，则在相应的干预后，它们几乎必然相等。直接推论是，对于两个子-σ-代数 $\mathcal{F}_1$，$\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{H}$，若它们在 $\mathcal{H}_U$ $(\mathcal{F}_1 \overset{K_U}{=} \mathcal{F}_2)$ 上因果同步，则对 $\mathcal{H}_U$进行干预后，它们便同步（$\mathcal{F}_1 \overset{\mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}}{=} \mathcal{F}_2$）。

5 多个反事实世界

在第 3 节和 4节中，我们定义了两个世界的反事实空间。本节旨在将其推广到多个世界。

5.1 N 路反事实概率空间

我们首先定义 N 路反事实概率空间。

我们取 N 个结果集 Ω^1，……，Ω^N，并为每个 Ω^j, $j = 1$，……，N 配备一个 σ-代数 $\mathcal{E}^j$。然后，整体可测空间 $(\Omega\ \mathcal{H})$ 通过对所有可测空间取乘积而得到，如下所示：

$$(\Omega, \mathcal{H}) = (\times_{j=1}^{N} \Omega^j, \otimes_{j=1}^{N} \mathcal{E}^j).$$

对于任意结果 $\omega \in \Omega$，我们用 ω^j 表示 ω 到 Ω^j 的投影，因此 ω 可分解为 $\omega = (\omega^1, \ldots\ldots, \omega^N)$。此外，对于每个 $j = 1$，……，N，我们用 $\mathcal{H}^j$ 表示 $\mathcal{H}$ 中由柱集 $\Omega^1 \times \ldots \times \Omega^{j-1} \times A \times \Omega^{j+1} \times \ldots \times \Omega^N$ 构成的子-σ-代数。

现在可以定义 N元反事实概率空间了。

定义 5.1。 N元反事实概率空间 定义为三元组 $(\Omega\ \mathcal{H},\ \mathbb{P})$，其中 $(\Omega\ \mathcal{H})$ 是具有上述乘积结构的可测空间，而 $\mathbb{P}$ 是 $(\Omega\ \mathcal{H})$ 上的概率测度。

再次从数学角度来说，N路反事实概率空间，只是在可测空间 $(\Omega\ \mathcal{H})$上具有上述乘积结构的概率空间。1路反事实概率空间没有任何限制，而2路反事实概率空间正是第 3.1节中定义 3所给出的概率空间。对不属于单个 $\mathbb{P}$ 的事件指定测度 $\mathcal{H}^j$，可以告诉我们这些世界之间共享了多少信息。

5.2 N 路反事实因果空间

现在，我们将反事实因果空间推广到 N 个世界。

我们取 N指标集 T^1、……、T^N，并令$T = \cup_{j=1,...,N} T^j$。对于每个 $j = 1$，...，N以及每个 $t \in T^j$，我们取一个结果集 Ω_t^j，并为其配备一个 σ-代数 $\mathcal{E}_t^j$（回想脚注 1 中的说明：我们用上标表示世界，用下标表示世界的分量）。对于每个 $j = 1$，...，N，我们将 $\Omega^j = \times_{t\in T^j}\Omega_t^j$定义为 j^{th}世界中的结果集，并令 $\mathcal{E}^j = \otimes_{t\in T^j}\mathcal{E}_t^j$为相应的 σ-代数。随后，整体可测空间 $(\Omega\ \mathcal{H})$ 通过将所有可测空间作如下乘积得到：

$$(\Omega, \mathcal{H}) = (\times_{j=1,...,N}\Omega^j, \otimes_{j=1,...,N}\mathcal{E}^j),$$

对于任意结果 $\omega \in\Omega$，我们用 ω^j 表示从 ω 到 Ω^j的投影，因此结果 ω 可分解为 $\omega = (\omega^1, ……, \omega^N)$。每个 ω^j 还可以进一步分解为 $\omega^j = (\omega_t^j)_{t\in T^j}$，其中，对于每个 $t \in T^j$，我们用 ω_t^j表示从 ω^j到 Ω_t^j的投影。对于任意 $S \in \mathcal{P}(T)$，我们用 $\mathcal{H}_S$表示由可测矩形$\times_{j=1,\ ……,\ N}(\times_{t\in T^j} A_t^j)$生成的 $\mathcal{H}$ 的子-σ-代数，其中 $A_t^j \in \mathcal{E}_t^j$仅在有限多个$t$处不同于 Ω_t^j，且满足 $t \in S$。作为简写，对于每个 $j = 1$，……，N，我们记作 $\mathcal{H}^j = \mathcal{H}_{T^j}$。

我们现在可以定义一个 N 元反事实因果空间。

定义 5.2. 一个 N元反事实因果空间 定义为四元组 $(\Omega\ \mathcal{H},\ \mathbb{P},\ \mathbb{K})$，其中 $(\Omega\ \mathcal{H})$ 是具有上述乘积结构的可测空间，$\mathbb{P}$是 $(\Omega\ \mathcal{H})$ 上的概率测度，而$\mathbb{K} = \{K_S :\ S \subseteq T\}$ 是称为因果机制的一组从 $(\Omega\ \mathcal{H}_S)$ 到 $(\Omega\ \mathcal{H})$ 的转移概率核 K_S，称为 $\mathcal{H}_S$ 上的因果核，并满足以下三条公理：

(i) 对所有 $\omega \in\Omega$ 和 $A \in \mathcal{H}$，我们有

$$K_\emptyset(\omega, A) = \mathbb{P}(A);$$

(ii) 对每个 $j = 1$，...，N，所有 $\omega \in\Omega$、所有 $\omega \in\Omega$、所有 $S \in \mathcal{P}(T)$ 以及所有 $A \in \mathcal{H}^j$，我们有

$$K_S(\omega, A) = K_{S\cap T^j}(\omega, A);$$

(iii) 对所有 $A \in \mathcal{H}_S$ 和 $B \in \mathcal{H}$，我们有

$$K_S(\omega, A \cap B) = \mathbf{1}_A(\omega)K_S(\omega, B) = \delta_\omega(A)K_S(\omega, B);$$

特别地，对于 $A \in \mathcal{H}_S$，我们有

$$K_S(\omega, A) = \mathbf{1}_A(\omega).$$

再次指出，N路反事实因果空间是因果空间的特殊情形，并额外满足无跨世界因果效应公理。显然，1路反事实因果空间只是因果空间，除了因果空间通常的公理外没有其他限制，而2路反事实因果空间正是第4.1节中定义4的内容。

为求完整，我们以类似于定义 N路反事实因果空间中的干预，方式定义干预4.2。

定义 5.3。取一个 N路反事实因果空间$(\Omega\ \mathcal{H},\ \mathbb{P},\ \mathbb{K})$，如定义5.2所述；取子集$U \subseteq T$以及在 $\mathbb{Q}$上的概率测度$(\Omega\ \mathcal{H}_U)$。通过 $\mathcal{H}_U$对 $\mathbb{Q}$进行干预，得到一个新的 N路反事实因果空间

$$(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{P}^{\text{do}(U,\mathbb{Q})}, \mathbb{K}^{\text{do}(U,\mathbb{Q})}),$$

其中，干预测度 $\mathbb{P}^{\text{do}(U,\mathbb{Q})}$ 是定义在 $(\Omega\ \mathcal{H})$ 上的概率测度，对于 $A \in \mathcal{H}$，定义为

$$\mathbb{P}^{\text{do}(U,\mathbb{Q})}(A) = \int \mathbb{Q}(d\omega)K_U(\omega, A)$$

且 $\mathbb{K}^{\text{do}(U,\mathbb{Q})} = \{K_S^{\text{do}(U,\mathbb{Q})} :\ \ S \subseteq T\}$ 是其 干预因果机制，其 干预因果核为

$$K_S^{\text{do}(U,\mathbb{Q})}(\omega_S, A) = \int \mathbb{Q}(d\omega'_{U\setminus S})K_{S\cup U}((\omega_S, \omega'_{U\setminus S}), A).$$

必须检查，干预后得到的 N路反事实因果空间确实是一个 N路反事实因果空间，即干预因果机制 $\mathbb{K}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}$ 满足定义 5.2中的公理。以下定理证明了这一点，并由此证明定理 4.4 是 2路反事实因果空间的一个特例。证明见第 C节。

定理 5.4。 定义 $\mathbb{K}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}$ 中给出的干预因果机制 *5.3* 满足定义 *5.2*中给出的因果机制公理。

6 相关工作

在可能世界语义传统中，哲学家对反事实进行了广泛研究，其中具有影响力的论述包括 Goodman [1947], 、Stalnaker [1968]和 Lewis [1973]的观点。此外，心理学家研究了反事实思维在儿童发展、成人知觉与推理中所发挥的重要作用，以及它对决策、情绪和偏差的影响 [Byrne，2016，Waldmann， 2017]。反事实也广泛应用于众多领域，例如公平性 [Kusner 等，2017，Garg 等，2019，Rosenblatt 和 Witter， 2023], 伤害 [Richens 等，2022，Beckers 等，2022、2023，Straitouri 等， 2024], 通过反事实解释和算法补救实现可解释机器学习 [Guidotti，2024，Dissanayake 和 Dutta，2024，Verma 等， 2024], 反事实图像编辑[Pan 和 Bareinboim， 2024], 以及反事实采样与生成 [Ribeiro 等，2023，Hao 等，2024，Melistas 等，2024，Jung 等，2024，Raghavan 和 Bareinboim， 2024], 并应用于临床[DeGrave 等，2023，Lee 和 Topol， 2024]。为反事实建立严谨的公理化数学框架是一项至关重要的工作，它为任何涉及反事实概率估计或推理的定量研究奠定了基础。

在本节余下部分，我们对相关形式体系的综述主要聚焦于引言（第 1 节）中提到的两种主要反事实（实际上是因果关系）框架，即结构因果模型和潜在结果。我们将展示，从结构因果模型或潜在结果框架的规范出发，可以构造一个反事实空间，这表明反事实空间严格推广了现有的形式体系。

备注 6.1。 在一系列论文中，Dawid [1999, 2000, 2006] 明确区分了原因的效应与效应的原因。他认为，对于原因的效应，反事实考量既无必要，也可能产生误导，只需考虑干预（为此他提出了一个决策理论框架）。他还认为，推断效应的原因——这需要思考反事实——无法通过数据加以证实；而且，由于这并不适合进行经验研究，因此没有必要为此发展理论。我们承认，若无假设，反事实不可能得到现实世界验证，也承认反事实往往与因果关系无关，正如我们的正交视角（图 1）所示。然而，我们不同意这足以成为彻底否定反事实形式体系的理由；尽管经验验证可能无法实现，但正如我们将要讨论的，对人类思维这一基本组成部分进行公理化，仍然是值得追求的。

6.1 结构因果模型（结构因果模型）

Pearl 的结构因果模型 [Pearl，2009年，Peters 等人， 2017] 仍是研究反事实以及整体因果关系时最具影响力、应用最广泛的数学框架之一，并衍生出若干变体，以满足不同的需求 [Hiddleston，2005，Rips，2010，Fisher，2017年，Lee，2017年，Bongers 等人， 2021]然而，尽管这一框架优点众多、性质引人注目，但正如引言（第1节）所述，作为基础公理化体系，它仍存在一些广为人知的重大局限。因此，尽管我们认为结构因果模型是处理某一特定类型反事实的有价值工具，但我们反对Pearl[2000] 的断言，即

> “函数模型以非参数结构方程的形式，为反事实的完整数学理论提供了形式语义和概念基础。”

现在让我们回顾一下结构因果模型（SCM）的数学定义。结构因果模型是一个三元组 $\mathrm{M} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{F})$，其中 $\mathrm{U} = \{U_1, ..., U_m\}$ 是一组外生变量，$\mathrm{V} = \{V_1, ..., V_n\}$ 是一组内生变量，每个V_i 都取值于可测空间 $(\Omega_i, \mathcal{E}_i)$，其中 $i = 1, ..., n$；$\mathrm{F} = \{f_1, ..., f_n\}$ 是结构方程，满足 $V_i = f_i(\mathrm{PA}_i, \mathrm{U}_i)$，其中 $i = 1, ..., n$，且 $\mathrm{PA}_i \subseteq \mathrm{V} \setminus \{V_i\}$，$\mathrm{U}_i \subseteq \mathrm{U}$。因此，内生变量 $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{V}$ 的任意子集都是外生变量 U 的确定性函数。给定 U 的一个特定值 $\boldsymbol{u}$，我们将 X 的取值记为 $\mathrm{X}(\boldsymbol{u})$，该值由 $\boldsymbol{u}$确定。

我们通过在$\mathbf{U}$上施加测度 $\mathbb{P}^{\mathbf{U}}$，使模型具有概率性；这会在$\mathbf{V}$ 上诱导出一个推前测度。具体而言，对于事件 $A \in \otimes_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i$,

$$\mathbb{P}(A) = \int \mathbb{P}^{\mathbf{U}}(d\boldsymbol{u}) \mathbf{1}\{\mathbf{V}(\boldsymbol{u}) \in A\}.$$

稍微滥用一下符号表示，对于 V 的子集 X，我们将 $\Omega_{\mathbf{X}} = \times_{i \in [n], V_i \in \mathrm{X}} \Omega_i$ 和 $\mathcal{E}_{\mathbf{X}} = \otimes_{i \in [n], V_i \in \mathrm{X}} \mathcal{E}_i$ 记作。对于 X 的一个实现值 $\boldsymbol{x}$，M 的子模型 $\mathrm{M}_{\mathbf{X}=\boldsymbol{x}} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{F}_{\mathbf{X}=\boldsymbol{x}})$ 由 $\mathrm{F}_{\mathbf{X}=\boldsymbol{x}} = \{f_i : V_i \notin \mathrm{X}\} \cup \{\mathrm{X} = \boldsymbol{x}\}$ 给出；在噪声值 $\boldsymbol{u}$ 下，对干预 $\mathrm{do}(\mathrm{X} = \boldsymbol{x})$，$\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{V}$ 的潜在响应记为 $\mathrm{Y}_{\mathbf{X}=\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{u}) \in \Omega_{\mathbf{Y}}$。

利用该模型，反事实的概率计算如下。考虑两个相同的结构因果模型$\mathcal{M} = (\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{F})$和$\mathcal{M}^* = (\mathbf{U}^*, \mathbf{V}^*, \mathbf{F}^*)$。对于任意变量集$\mathbf{Y}^*, \mathbf{X}^* \subseteq \mathbf{V}^*$和$\mathbf{Z}, \mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ 以及事件 $A \in \mathcal{E}_{\mathbf{Y}^*}$ 和 $B \in \mathcal{E}_{\mathbf{Z}}$，有

$$\mathbb{P}(\mathbf{Y}^*_{\mathbf{X}^*=\boldsymbol{x}^*} \in A, \mathbf{Z}_{\mathbf{W}=\boldsymbol{w}} \in B) = \int \mathbb{P}^{\mathbf{U}}(d\boldsymbol{u}) \mathbf{1}\{\mathbf{Y}^*_{\mathbf{X}^*=\boldsymbol{x}^*}(\boldsymbol{u}) \in A\} \mathbf{1}\{\mathbf{Z}_{\mathbf{W}=\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{u}) \in B\},$$

其中，$\mathbf{Y}^*_{\mathbf{X}^*=\boldsymbol{x}^*}$ 和$\mathbf{Z}_{\mathbf{W}=\boldsymbol{w}}$ 是分别来自子模型$\mathcal{M}^*_{\mathbf{X}^*=\boldsymbol{x}^*}$ 和$\mathcal{M}_{\mathbf{W}=\boldsymbol{w}}$ 的潜在响应，这些子模型共享外生变量$\mathbf{U}$的相同取值。

在此框架中，最常考虑的反事实形式为 $\mathbb{P}_{\sigma\mathbf{Z}}(\mathbf{Y}^*_{\mathbf{X}^*=\boldsymbol{x}^*} \in A)$，其中 $\sigma\mathbf{Z}$是由随机变量$\mathbf{Z}$生成的 σ-代数（即所谓的溯因–行动–预测程序）。干预$\mathbf{X}^* = \boldsymbol{x}^*$ 与观测$\mathbf{Z}$ 可能并不相容。具体做法只是取给定 $\sigma\mathbf{Z}$ 和子模型 $\mathcal{M}_{\mathbf{X}^*=\boldsymbol{x}^*}$的条件分布 $\mathbb{P}^{\mathbf{U}}_{\sigma\mathbf{Z}}(\cdot)$:

$$\mathbb{P}_{\sigma\mathbf{Z}}(\mathbf{Y}^*_{\mathbf{X}^*=\boldsymbol{x}^*} \in A) = \int \mathbb{P}^{\mathbf{U}}_{\sigma\mathbf{Z}}(d\boldsymbol{u}) \mathbf{1}\{\mathbf{Y}^*_{\mathbf{X}^*=\boldsymbol{x}^*}(\boldsymbol{u}) \in A\}.$$

假设我们有一个如上所述的SCM的任意指定形式。那么，我们按如下方式指定一个反事实因果空间（Ω $\mathcal{H}, \mathbb{P}, \mathbb{K}$）。

- 令 $T_{\mathrm{F}} = T_{\mathrm{CF}} = [n]$，并取 $T = T_{\mathrm{F}} \cup T_{\mathrm{CF}}$。再令$\Omega_{\mathrm{F}} = \Omega_{\mathrm{CF}} = \times_{i=1}^{n} \Omega_i$，以及$\Omega = \Omega_{\mathrm{F}} \times \Omega_{\mathrm{CF}}$。最后，令 $\mathcal{E}_{\mathrm{F}} = \mathcal{E}_{\mathrm{CF}} = \otimes_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i$，以及 $\mathcal{H} = \mathcal{E}_{\mathrm{F}} \otimes \mathcal{E}_{\mathrm{CF}}$。
- 对于任意 $A \times B \in \mathcal{H}$ 满足 $A \in \mathcal{E}_{\mathrm{F}}$ 和 $B \in \mathcal{E}_{\mathrm{CF}}$的可测矩形，我们有

$$\mathbb{P}(A \times B) = \int \mathbb{P}^{\mathbf{U}}(d\boldsymbol{u}) \mathbf{1}\{\mathbf{V}(\boldsymbol{u}) \in A\} \mathbf{1}\{\mathbf{V}^*(\boldsymbol{u}) \in B\}.$$

这以通常的方式扩展到所有 $\mathcal{H}$ 。

- 取任意 $S \in \mathcal{P}(T)$，并将事实世界和反事实世界中分别被干预的变量记为 $\mathbf{X} = \{V_i \in \mathbf{V} : i \in T_{\mathrm{F}} \cap S\}$ 和 $\mathbf{X}^* = \{V_i \in \mathbf{V}^* : i \in T_{\mathrm{CF}} \cap S\}$。那么，对于 $A \times B \in \mathcal{H}$ 满足 $A \in \mathcal{E}_{\mathrm{F}}$ 和 $B \in \mathcal{E}_{\mathrm{CF}}$ 的矩形，其对应的因果核为

$$K_S((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^*), A \times B) = \int \mathbb{P}^{\mathbf{U}}(d\boldsymbol{u}) \mathbf{1}\{\mathbf{V}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{u}) \in A\} \mathbf{1}\{\mathbf{V}^*_{\mathbf{X}^*=\boldsymbol{x}^*}(\boldsymbol{u}) \in B\}.$$

换句话说，我们通过干预所给出的子模型 $\mathcal{M}_{\boldsymbol{x}}$ 和 $\mathcal{M}^*_{\boldsymbol{x}^*}$ 中的新结构方程，对 $\mathbb{P}^{\mathbf{U}}$ 取推前测度。按照通常的方式，它也扩展到 $\mathcal{H}$ 中的所有事件。我们应将其视为与干预 $\mathbf{X} = \boldsymbol{x}$和 $\mathbf{X}^* = \boldsymbol{x}^*$相对应的因果核。

我们看到，一个结构因果模型唯一确定一个相应的反事实因果空间，因此，反事实因果空间概括了结构因果模型的观测、干预和反事实信息。

上文讨论的标准结构因果模型迫使干预前世界保持同步，因为外生变量和结构方程是共享的。为放宽这一约束，von Kügelgen 等人[2023] 提出了回溯结构因果模型，它允许世界之间存在更一般程度的信息共享。下面我们将回顾这一形式体系，并针对回溯结构因果模型的每一种设定，构造一个具有相同反事实信息的反事实概率空间。

我们分别为事实世界和反事实世界取两个相同的结构因果模型 $\mathcal{M} = (\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{F})$ 和 $\mathcal{M}^* = (\mathbf{U}^*, \mathbf{V}^*, \mathbf{F}^*)$。回溯结构因果模型在外生噪声变量$\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{U}^*$上定义一个回溯测度 $\mathbb{P}^{\mathrm{B}}$。于是，对于事件 A, $B \in \otimes_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i$，回溯反事实概率定义为

$$\mathbb{P}^{\mathrm{B}}(\mathbf{V} \in A, \mathbf{V}^* \in B) = \int \mathbf{1}\{\mathbf{V}(\boldsymbol{u}) \in A\}\mathbf{1}\{\mathbf{V}^*(\boldsymbol{u}^*) \in B\}\mathbb{P}^{\mathrm{B}}(d\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{u}^*).$$

在$\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}^*$中都没有发生干预。

为了构造相应的反事实概率空间，我们首先构造一个可测空间 $(\Omega\ \mathcal{H})$：令 $\Omega^{\mathrm{F}} = \Omega^{\mathrm{CF}} = \times_{i=1}^{n} \Omega_i$ 和 $\Omega = \Omega^{\mathrm{F}} \times \Omega^{\mathrm{CF}}$，并令 $\mathcal{E}^{\mathrm{F}} = \mathcal{E}^{\mathrm{CF}} = \otimes_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i$ 和 $\mathcal{H} = \mathcal{E}^{\mathrm{F}} \otimes \mathcal{E}^{\mathrm{CF}}$。然后，我们在矩形集合 $A \times B$ 上定义 $\mathbb{P}$，其中 $A \in \mathcal{E}^{\mathrm{F}}$ 和 $B \in \mathcal{E}^{\mathrm{CF}}$，定义如下

$$\mathbb{P}(A \times B) = \int \mathbf{1}\{\mathbf{V}(\boldsymbol{u}) \in A\}\mathbf{1}\{\mathbf{V}^*(\boldsymbol{u}^*) \in B\}\mathbb{P}^{\mathrm{B}}(d\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{u}^*).$$

我们以通常的方式将 $\mathbb{P}$ 扩展到 $\mathcal{H}$ 中的所有可测集。

6.2 潜在结果

因果关系和反事实的一个主要竞争框架是潜在结果框架 [Imbens 和 Rubin，2015年，Hernán 和 Robins，2020], 该框架广泛应用于社会科学、生物医学和计量经济学等领域。我们认为，尽管这一框架有许多公认的优点，与结构因果模型类似，它在作为反事实的基础公理化体系方面也有所不足。它一些最明显的局限与结构因果模型的局限相似，例如难以处理循环或连续时间随机过程。此外，它是一个静态框架，其中数学量（尤其是概率分布）无法发生变化，尽管干预的效应恰恰可以说就是这类变化。该框架只是在模型中加入“潜在结果变量”，表示如果实施干预，将会发生的情况。因此，该框架本身并未纳入对序贯干预的考量。至于反事实，该框架只纳入了基于处理变量不同取值的反事实；它无法考虑非干预反事实，也无法考虑至少在一个世界中存在随机干预的情形。

在潜在结果框架中，通常会先验指定处理变量、结果变量和协变量。不过，我们采用 Ibeling 和 Icard 更一般的定义 [2023,定义 1] （而该定义又以Holland [1986], 的定义为基础，并被称为“Rubin因果模型”）。在这里，我们给定一组内生变量，其中任何一个变量都可以充当处理变量或结果变量。

假设与结构因果模型框架中一样，$\mathbf{V} = \{V_1, ..., V_n\}$ 是一组内生变量，其中每个 V_i都取值于可测空间 (Ω_i, E_i)。此外，我们有一个由个体构成的有限集合 U，以及一个概率测度$\mathbb{P}^{\mathcal{U}}$。我们取一组“潜在结果变量”D，其形式为 $V_{i,\boldsymbol{x}}$，其中某个 $V_i \in$ 属于 V，$\mathbf{X} \subseteq$ 属于 V，且某个值 $\boldsymbol{x} \in$ 属于 $\Omega_{\mathbf{X}}$。潜在结果 $V_{i,\boldsymbol{x}}$ 取值于 Ω_i。最后，我们有一组函数 F，其中包含：对于每个 $V_{i,\boldsymbol{x}} \in$ 属于 D，都有一个函数 $f_{i,\boldsymbol{x}}: \mathrm{U} \to \Omega_i$；对于每个 $i \in \{1, ..., n\}$，都有一个函数 $f_i: \mathrm{U} \to \Omega_i$。整个模型是五元组 (U, V, D, F $\mathbb{P}^{\mathcal{U}}$)，通过将 $\mathbb{P}^{\mathcal{U}}$ 经由 F 中的函数推前，我们便可得到内生变量与潜在结果上的联合测度。

当然，如果我们只考虑单个 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 以及单个变量$X \in \mathbf{V}$的潜在结果$V_{i,\ x}$，那么我们就会回到这样一种常见情形：结果变量和处理变量预先固定，分别为 V_i 和 X。

现在我们证明，可以根据潜在结果框架的任意设定，唯一地构造一个 N元反事实概率空间（定义 5.1）。潜在结果框架中考虑的反事实数量，并非感兴趣的反事实世界的数量，而是感兴趣的处理变量取值的数量。

在最常见的二元处理情况下，我们需要一个三元反事实概率空间：一个世界对应“观测到的”变量，另外两个世界分别对应处理变量的两个取值。

取潜在结果框架的一种设定 (U, V, D, F $\mathbb{P}^{\mathcal{U}}$)。然后我们取一个 $(N+1)$ 路反事实概率空间，其中 N 是 D 中潜在结果下标里的不同取值数量，我们将其枚举为 $\{\boldsymbol{x}^1, ..., \boldsymbol{x}^N\}$。对于 $j = N+1$（对应于观测世界），我们取可测空间 $(\Omega^{N+1}, \mathcal{E}^{N+1}) = \otimes_{i=1}^{n}(\Omega_i, \mathcal{E}_i)$，它是整组内生变量的定义域。对于每个 $j = 1, ..., N$，我们取可测空间 $(\Omega^j, \mathcal{E}^j) = \otimes_{i\in S^j}(\Omega_i, \mathcal{E}_i)$，其中 $S^j = \{i : V_{i,\boldsymbol{x}^j} \in \mathrm{D}\}$。于是，整体可测空间为 $(\Omega\ \mathcal{H}) = \otimes_{j=1}^{N+1}$ $(\Omega^j, \mathcal{E}^j)$。

测度 $\mathbb{P}$ 在 $(\Omega\ \mathcal{H})$ 上定义如下。对于 $\mathcal{H}$ 中形如 $\otimes_{j=1}^{N+1} \otimes_{i\in S^j} A_i^j$ 的矩形事件，其中每个 $j \in$ 都满足 $A_i^j \in \mathcal{E}_i\,\{1, ..., N+1\}$，我们定义

$$\mathbb{P}\left(\times_{j=1}^{N+1} \times_{i\in S^j} A_i^j\right) = \int \prod_{j=1}^{N+1} \prod_{i\in S^j} \mathbf{1}\{f_{i,\boldsymbol{x}^j}(\boldsymbol{u}) \in A_i^j\}\mathbb{P}^{\mathcal{U}}(d\boldsymbol{u}).$$

这些矩形生成 $\mathcal{H}$，因此我们可以用通常的方法将 $\mathbb{P}$ 扩展到所有 $\mathcal{H}$。

在潜在结果框架中，并未引入新的数学对象来表征因果关系：因果关系只是从涵盖所有变量（包括表示在若干预发生时会发生什么的潜在结果）的单一概率测度中直接读取。数学量，尤其是测度，都没有发生变化。正因如此，本节使用的是反事实概率空间，而非反事实因果空间。通过在相应的反事实世界中赋予潜在结果，我们构造了与潜在结果框架给定规范完全对应的反事实概率空间。这与结构因果模型、因果空间或反事实因果空间框架形成对比；在这些框架中，干预会导致测度发生变化。

7 结论

本文提出了反事实概率空间和反事实因果空间，作为刻画反事实的公理化框架，并以测度论为基础进行了严谨构建。它们分别是概率空间和因果空间的特例，而概率空间和因果空间分别是对概率概念和干预概念进行测度论公理化的结果。我们将干预因果关系与反事实视为正交概念，并在反事实因果空间这一统一框架中将二者结合起来。

我们指出，研究反事实的本质在于同时考察两个（或更多）平行世界，并提出了一种刻画这些世界之间共享信息的方法。在反事实概率空间以及干预前的反事实因果空间中，共享信息编码在概率测度中；而在反事实因果空间中进行干预后，共享信息则编码在相应的因果核中。世界之间关联程度的两个极端，体现在独立性 和同步的定义中；在主流框架中，这两种情形要么不可能发生，要么是通过定义强行设定的。我们证明，我们的空间严格涵盖了所有先前的形式体系，同时摒弃了这些形式体系定义中所要求的一些重要假设，例如无环性、离散性，以及内生变量不会对外生变量产生因果影响这一假设。

我们证明，条件因果效应的定义在反事实因果空间中有着自然的解释，并且可用于回答人类日常思维中常见的问题。

如第 6 节所述，反事实已有广泛应用，毫无疑问，随着人工智能和生成模型的发展，其应用还将继续扩展 [Geiger 等人， 2025]。我们相信，对这一基本概念进行严谨的公理化处理，将为未来涉及反事实的研究奠定宝贵基础。

最后需要说明的是，我们无意批评现有的反事实框架，也无意取而代之。我们相信，文献中已有的框架，例如结构因果模型、潜在结果或单世界干预图（结构因果模型图；[Richardson 和 Robins， 2013], 将潜在结果方法与图示方法相结合[3]），都是有用的框架，毫无疑问，它们将继续在反事实理论中发挥重要作用。然而，正如我们在本文中所论证的，这些框架依赖于定义上的假设，和/或无法表示某些类型的反事实情景，因此不足以作为反事实的基础性公理化框架。我们相信，现有框架将继续在优雅而简洁地规定反事实空间方面发挥重要作用，正如（例如）概率论中的各种参数分布用于规定概率空间一样。

参考文献

Nelson Goodman。《反事实条件句问题》。《哲学杂志》，44(5)：113–128，1947。

David Lewis。《条件句》。Blackwell Publishers，1973。

David Lewis。《论世界的复多性》，第322卷。Oxford Blackwell，1986。

Robert Stalnaker。《世界可能的样子：形而上学与反形而上学论文集》。牛津大学出版社，2003。

Ruth MJ Byrne 和 Alice McEleney。《关于行动与不行动的反事实思维》。《实验心理学杂志：学习、记忆与认知》，26(5)：1318，2000。

Kai Epstude 和 Neal J Roese。《反事实思维的功能理论》。《人格与社会心理学评论》，12(2):168–192，2008。

Daphna Buchsbaum、Sophie Bridgers、Deena Skolnick Weisberg 和 Alison Gopnik。可能性的力量：因果学习、反事实推理与假装游戏。《英国皇家学会哲学汇刊*B*辑：生物科学》，367(1599):2202–2212，2012。

Nicole Van Hoeck、Patrick D Watson 和 AronK Barbey。《人类反事实推理的认知神经科学》。《人类神经科学前沿》，9:420，2015年。

Ruth MJ Byrne。《反事实思维》。《心理学年度评论》，67(1):135–157，2016。

Tobias Gerstenberg。《因果认知中的反事实模拟》。《认知科学趋势》，28(10): 924–936，2024年。

David R Mandel、Denis J Hilton 和 Patrizia Catellani。《反事实思维心理学》。Routledge，2007年。

James J Heckman 和 Edward E Leamer。《计量经济学手册》。爱思唯尔，2007年。

Joseph Y Halpern。《实际因果性》。麻省理工学院出版社，2016。

Andrei N Ko lmogorov. 概率论基础。纽约：切尔西出版公司，19 33.

[3]本文没有明确讨论结构因果模型图（SWIGs），因为我们认为，其目的并非为反事实提供基础框架，而是提供一种有用的图形工具，用于处理反事实，尤其是表示事实变量与反事实变量之间条件独立关系的马尔可夫条件。人们常认为，结构因果模型和潜在结果框架发挥着基础框架的作用。我们希望本文通篇已对这类说法提出质疑。

Helen Beebee、Christopher Hitchcock、Peter Charles Menzies 和 Peter Menzies。《牛津因果关系手册》。Oxford Handbooks Online，2009年。Phyllis McKay Illari、Federica Russo 和 Jon Williamson。《科学中的因果关系》。牛津大学出版社，2011。Michael Waldmann。《牛津因果推理手册》。牛津大学出版社，2017年。John Collins、Ned Hall 和 Laurie Ann Paul。《因果关系与反事实》。麻省理工学院出版社，2004。Judea Pearl。无反事实的因果推断：评论。《美国统计学会期刊》，95(450):428–431，2000。Judea Pearl。《因果关系》。剑桥大学出版社，2009年。Donald B Rubin。使用潜在结果的因果推断：设计、建模与决策。《美国统计学会期刊》，100(469):322–331，2005。Judea Pearl 和 Dana Mackenzie。《为什么之书》。Basic Books，纽约，2018。Elias Bareinboim、Juan D Correa、Duligur Ibeling 和 Thomas Icard。论 Pearl层级与因果推断的基础。载于《概率推断与因果推断：*Judea Pearl* 的著作》，第507–556页。ACM，2022年。Ruth MJ Byrne。《理性想象：人们如何创造现实的替代方案》概要。《行为与脑科学》，30(5-6):439–453，2007年。Christopher G Lucas 和 Charles Kemp。反事实推理的改进型概率解释。《心理学评论》，122(4):700，2015年。Julius von Kügelgen、Abdirisak Mohamed 和 Sander Beckers。回溯反事实。载于因果学习与推理会议，第177–196页。PMLR，2023年。Junhyung Park、Simon Buchholz、Bernhard Schölkopf 和 Krikamol Muandet。因果关系的测度论公理化。载于第*37*届神经信息处理系统国际会议论文集，第28510–28540页，2023年。Jonas Peters、Dominik Janzing 和 Bernhard Schölkopf。《因果推断要素：基础与学习算法》。麻省理工学院出版社，2017年。Erhan Çinlar。《概率与随机过程》。施普林格，2011。Rick Durrett。《概率：理论与例题》，第49卷。剑桥大学出版社，2019年。Junhyung Park 和 Yuqing Zhou。细致考察因果空间中的因果效应。*arXiv*预印本 *arXiv:2512.11919*，2025。Simon Buchholz、Junhyung Park 和 Bernhard Schölkopf。因果空间的积、抽象与包含。载于第四十届人工智能不确定性会议论文集，第430–449页，2024年。Robert Stalnaker。条件句理论。载于《如果：条件句、信念、决策、机遇与时间》，第41–55页。施普林格，1968。Matt J Kusner、Joshua Loftus、Chris Russell 和 Ricardo Silva。反事实公平性。神经信息处理系统进展，第30卷，2017年。

Sahaj Garg、Vincent Perot、Nicole Limtiaco、Ankur Taly、Ed H Chi 和 Alex Beutel。《通过鲁棒性实现文本分类中的反事实公平》。载于*2019*年*AAAI/ACM*人工智能、伦理与社会会议论文集，第219–226页，2019年。Lucas Rosenblatt 和 R Teal Witter。《反事实公平性本质上就是人口统计均等》。载于*AAAI*人工智能会议论文集，第37卷，第14461–14469页，2023年。Jonathan Richens、Rory Beard 和 Daniel H Thompson。《反事实伤害》。神经信息处-理系统进展，第35卷：36350–36365，2022年。Sander Beckers、Hana Chockler 和 Joseph Y Halpern。《伤害的因果分析》。神经信息处理系统进展，第35卷：2365–2376，2022年。Sander Beckers、Hana Chockler 和 Joseph Y Halpern。《伤害量化》。载于第*32*届国际人工智能联合会议（*IJCAI 2023*）论文集，2023年。Eleni Straitouri、Suhas Thejaswi 和 Manuel Gomez Rodriguez。《基于预测集的决策支持系统中反事实伤害的控制》。载于第三十八届神经信息处理系统年会，2024年。Riccardo Guidotti。《反事实解释及其发现方法：文献综述与基准测-试》。数据挖掘与知识发现，38(5)：2770–2824，2024年。Pasan Dissanayake 和 Sanghamitra Dutta。《利用反事实解释进行模型重建：多胞体理论视角》。神经信息处理系统进展（神经信息处理系统大会），2024年。Sahil Verma、Varich Boonsanong、Minh Hoang、Keegan Hines、John Dickerson 和 Chirag Shah。《机器学习的反事实解释与算法补救：综述》。*ACM*计算调查，56(12)：1–42，2024年。Yushu Pan 和 Elias Bareinboim。《反事实图像编辑》。载于国际机器学习会议，第39087–39101页。PMLR，2024年。Fabio De Sousa Ribeiro、Tian Xia、Miguel Monteiro、Nick Pawlowski 和 Ben Glocker。《基于概率因果模型的高保真图像反事实》。载于国际机器学习会议，第7390–7425页。PMLR，2023年。Guang-Yuan Hao、Jiji Zhang、Biwei Huang、Hao Wang 和 Kun Zhang。《通过必要回溯实现自然反事实》。载于第三十八届神经信息处理系统年会，2024年。Thomas Melistas、Nikos Spyrou、Nefeli Gkouti、Pedro Sanchez、Athanasios Vlontzos、Yannis Panagakis、Giorgos Papanastasiou 和 Sotirios A Tsaftaris。《反事实图像生成的基准测试》。载于第三十八届神经信息处理系统年会，2024年。Sangwon Jung、Sumin Yu、Sanghyuk Chun 和 Taesup Moon。《反事实公平图像分类器是否满足群体公平？——理论与实证研究》。载于第三十八届神经信息处理系统年会，2024年。Arvind Raghavan 和 Elias Bareinboim。《反事实可实现性》。载于第十三届国际学习表征会议，2024年。Alex J DeGrave、Zhuo Ran Cai、Joseph D Janizek、Roxana Daneshjou 和 Su-In Lee。《通过医生与生成式人工智能协作剖析医疗人工智能推理过程》。*Medrxiv*，2023年。Su-In Lee 和 Eric J Topol。《反事实人工智能模型的临床潜力》。《柳叶刀》，403(10428)：717，2024年。

A Philip Dawid。《谁需要反事实？》载于因果模型与智能数据管理，第33–50页。施普林格，1999年。A Philip Dawid。《无反事实的因果推断》。《美国统计学会期刊》，95(450)：407–424，2000年。A Philip Dawid。《反事实、假设情境与潜在响应：对统计因果关系的哲学考察》。研究报告第*269*号，伦敦大学学院统计科学系。，2006年。Eric Hiddleston。《反事实的因果理论》。*Noûs*，39(4)：632–657，2005年。Lance J Rips。《反事实条件句的两种因果理论》。认知科学，34(2)：175–221，2010年。Tyrus Fisher。《反法律依赖与因果关系的箭头：面向回溯者与反法律情境的因果模型》。*Synthese*，194(12)：4983–5003，2017年。Kok Yong Lee。《Hiddleston 的因果建模语义学与前向追踪和回溯反事实之别》。逻辑研究，10(1)：79–94，2017年。Stephan Bongers、Patrick Forré、Jonas Peters 和 Joris M Mooij。《具有循环和潜变量的结构因果模型基础》。统计年鉴，49(5)：2885–2915，2021年。Guido W Imbens 和 Donald B Rubin。统计、社会与生物医学科学中的因果推断。剑桥大学出版社，2015年。Miguel A Hernán 和 James M Robins。因果推断：如果……会怎样。Chapman & Hall/CRC，2020年。Duligur Ibeling 和 Thomas Icard。《因果框架比较：潜在结果、结构模型、图与抽象》。神经信息处理系统进展，第36卷，2023年。Paul W Holland。《统计学与因果推断》。《美国统计学会期刊》，81(396)：945–960，1986年。Atticus Geiger、Duligur Ibeling、Amir Zur、Maheep Chaudhary、Sonakshi Chauhan、Jing Huang、Aryaman Arora、Zhengxuan Wu、Noah Goodman、Christopher Potts 和 Thomas Icard。《因果抽象：机制可解释性的理论基础》。机器学习研究期刊，26(83)：1–64，2025。Thomas S Richardson 和 James M Robins。《单世界干预图（SWIG）：统一反事实方法与因果关系的图示方法》。华盛顿大学统计与社会科学中心系列工作论文，128(30)：2013，2013年。Joseph Y Halpern 和 Judea Pearl。《原因与解释：结构模型方法：第一部分：原因》。载于第十七届人工智能不确定性会议论文集，第194–202页，2001年。Joseph Y Halpern 和 Judea Pearl。《原因与解释：结构模型方法。第一部分：原因》。《英国科学哲学杂志》，2005年。Joseph Y Halpern。《对 Halpern-Pearl 因果关系定义的修订》。载于第*24*届国际人工智能会议论文集，第3022–3033页，2015a。Sander Beckers 和 Joost Vennekens。《定义实际因果关系的原则性方法》。*Synthese*，195 (2)：835–862，2018年。Sander Beckers。《因果充分性与实际因果关系》。哲学逻辑期刊，50(6)：1341–1374，2021a。

Joseph Y Halpern。《原因、责任与归咎：一种结构模型方法》。《法律、概率与风险》，14(2):91–118，2015b。Enno Fischer。《失灵的刹车与做梦的司机：因果模型在法律中的启发式价值》。《欧洲科学哲学杂志》，14(1):5，2024a。Christopher Hitchcock 和 Joshua Knobe。《原因与规范》。《哲学杂志》，106(11):587–612，2009。Enno Fischer。《实际因果关系与目的的挑战》。《认识》，89(7):2925–2945，2024b。Joseph Y Halpern 和 Christopher Hitchcock。《分级因果关系与默认项》。《英国科学哲学杂志》，2015。Thomas Icard、Jonathan F Kominsky 和 Joshua Knobe。《常态性与实际因果强度》。《认知》，161:80–93，2017。J Gallow。《模型不变的因果理论》。《哲学评论》，130(1):45–96，2021。Holger Andreas 和 Mario Günther。《因果模型因果关系的拉姆齐检验分析》。《英国科学哲学杂志》，2021。Enno Fischer。《实际因果关系的三个概念》。《英国科学哲学杂志》，75 (1):77–98，2024c。Sander Beckers。《因果关系的反事实 NESS 定义》。载于*AAAI*人工智能会议论文集，第35卷，第6210–6217页，2021b。Sander Beckers。《实际因果关系与非确定性因果模型》。载于《因果学习与推理》，第514–532页。PMLR，2025。

A 实际因果性

有一个活跃的研究领域称为实际因果性（或个体因果关系）[Halpern 和 Pearl, 2001, 2005, Halpern, 2015a, 2016, Beckers 和 Vennekens, 2018, Beckers, 2021a]。在这个领域中，人们观察到 A 和 B 后，会提出如下问题："在事实世界中实际发生的特定情形里，A 是否导致了 B？"（例如，我父亲长达 30 年的吸烟习惯是否导致了他的肺癌？）。实际因果性不同于一般因果关系（或类型因果关系）的概念；后者关注的是关于一般现象的因果问题（吸烟通常会增加患肺癌的概率吗？）。对实际因果性的研究与法律领域尤其相关，因为在该领域中，必须针对特定事件的发生将过错归于个人 [Halpern, 2015b, Fischer, 2024a], , 同时也有助于找出适当的干预目标 [Hitchcock 和 Knobe, 2009]。因果空间的一般理论，包括本文正文中介绍的反事实因果空间理论，关注的是一般因果关系，而非实际因果关系。

与一般因果关系不同，尽管所有现有的因果关系框架都对一般因果关系作出了精确定义，但实际因果性至今仍未能得到普适的数学定义 [Beckers, 2021a, Fischer, 2024b]。过去几十年来，人们为此提出了许多方案（主要是在结构因果模型框架中），发现了反例，又提出了新的方案，而这一过程仍在继续 [Halpern and Pearl, 2001, 2005, Halpern, 2015a, Halpern and Hitchcock, 2015, Halpern, 2016, Icard 等人, 2017, Beckers, 2021a, Gallow, 2021, Andreas 和 Günther, 2021]。事实上，一些作者主张对实际因果性采取多元主义方法，而不是试图寻找实际因果性的定义 [Fischer, 2024b,c]。

一旦我们将因果效应的定义收窄为个体结果的条件效应，所讨论的问题便是："某个特定结果在事实世界中观察到的特定情境下是否具有因果效应？"乍一看，这似乎与实际因果性相似。然而，仔细考察后会发现，在因果空间中通过条件因果效应定义所能回答的问题，与实际因果性所提出的问题之间存在微妙却不可调和的差异，无论是哲学层面还是数学层面皆如此。

本节首先回顾结构因果模型框架中提出的部分实际因果性定义。当然，这些定义可以转换为反事实因果空间中的定义，因为我们已经证明，反事实因果空间严格推广了结构因果模型。不过，我们将结合正文中的贯穿示例说明，为什么在我们看来，这些现有定义不应成为实际因果性的那种定义。

在一系列论文中 [Halpern 和 Pearl, 2001、2005, Halpern, 2015a], Halpern 和 Pearl 提出了实际因果性的数学定义，这些定义至今仍是最具影响力的实际因果性理论（另见其著作，[Halpern, 2016]）。在一系列论文中 [Beckers 和 Vennekens, 2018, Beckers, 2021b、以及, 2025], Beckers 也在结构因果模型框架内研究了实际因果性问题。这两条研究路线主要关注离散情形（其中"事件"是指变量取某个特定值，这不同于概率论中的事件定义），并大体避开了对概率的讨论。其基本理念是："若 A 是 B 的必要充分集中的必要组成部分，则 A 是 B 的实际原因"（必要充分集，NESS）。下面我们将回顾其中一部分定义。

回顾一下，结构因果模型是一个三元组，$\mathcal{M} = (\mathbf{U},\mathbf{V},\mathbf{F})$，其中 $\mathbf{U}$ 是一组外生变量。在 Halpern 和 Pearl 的理论中，实际因果性是针对外生变量$\mathbf{U}$的某个特定结果值 $\boldsymbol{u}$ 定义的。还要回顾的是，对于一组内生变量$\mathbf{X} \subseteq \mathbf{V}$，我们将$\mathbf{X}(\boldsymbol{u})$写作$\mathbf{X}$ 的特定实现值，该实现值由噪声值 $\boldsymbol{u}$通过结构方程$\mathbf{F}$（确定性地）诱导得到。

定义 A.1。 如果以下三个条件成立，我们称$\mathbf{X} = \boldsymbol{x}$ 是 $Y = y$的实际原因 .

AC1 $\mathbf{X}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{x}$ and $Y(\boldsymbol{u}) = y$.

AC2 见下文。

AC3 $\mathbf{X}$ 是极小的；不存在 $\mathbf{X}'$ 的真子集，使得该子集满足条件 AC1 和 AC2，其中 $\boldsymbol{x}'$ 是 $\boldsymbol{x}$ 在 $\mathbf{X}'$中的变量上的限制。

多年来，许多关于实际原因的提案都沿用了这种形式，其中 AC1 和 AC3 条件保持不变。我们回顾四种最具代表性的 AC2 提案，分别见于 [Halpern 和 Pearl，2001、2005、Halpern、2015a、Beckers、2021a]。回想第 6.1 节，变量 Y 在干预 $\mathbf{X} = \boldsymbol{x}$ 且噪声值为 $\boldsymbol{u}$ 时的潜在响应写作 $Y_{\mathbf{X}=\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{u})$。

- **原始 HP 定义**

  AC2（必要性）存在将$\mathbf{V}$ 划分为两个不相交子集$\mathbf{Z}$ 和$\mathbf{W}$ 的划分，其中$\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Z}$，并分别对$\mathbf{X}$ 和$\mathbf{W}$中的变量进行设定 $\boldsymbol{x}'$ 和 $\boldsymbol{w}$，使得$Y_{\mathbf{X}=\boldsymbol{x}',\ \mathbf{W}=\boldsymbol{w}} \neq y$。
  AC2（充分性）如果值 $\boldsymbol{z}^*$ 满足$\mathbf{Z}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{z}^*$，那么对于$\mathbf{Z}'$ 的所有子集（其中$\mathbf{Z} \setminus \mathbf{X}$），都有$Y_{\mathbf{X}=\boldsymbol{x},\ \mathbf{W}=\boldsymbol{w},\ \mathbf{Z}^*=\boldsymbol{z}^*}(\boldsymbol{u}) = y$。

- **更新后的 HP 定义**

  AC2（必要性）存在将$\mathbf{V}$ 划分为两个不相交子集$\mathbf{Z}$ 和$\mathbf{W}$ 的划分，其中$\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Z}$，并对$\mathbf{X}$ 和$\mathbf{W}$中的变量分别进行设定 $\boldsymbol{x}'$ 和 $\boldsymbol{w}$，使得$Y_{\mathbf{X}=\boldsymbol{x}',\ \mathbf{W}=\boldsymbol{w}} \neq y$。
  AC2（充分性）如果 $\boldsymbol{z}^*$ 满足$\mathbf{Z}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{z}^*$，那么对于$\mathbf{W}$ 的所有子集$\mathbf{W}'$ 以及$\mathbf{Z}$的所有子集$\mathbf{Z}' \setminus \mathbf{X}$，都有 $Y_{\mathbf{X}=\boldsymbol{x},\ \mathbf{W}'=\boldsymbol{w},\ \mathbf{Z}^*=\boldsymbol{z}^*}(\boldsymbol{u}) = y$。

- **修改后的 HP 定义**

  AC2 存在一组$\mathbf{W}$ 中的变量，这些变量属于$\mathbf{V}$，并且存在$\mathbf{X}$ 中这些变量的一种设定 $\boldsymbol{x}'$，使得如果 $\mathbf{W}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}^*$，那么 $Y_{\mathbf{X}=\boldsymbol{x}',\ \mathbf{W}=\boldsymbol{w}^*}(\boldsymbol{u}) \neq y$。

- **Beckers 的定义 2**

  AC2（必要性） 存在集合$\mathbf{W}$ 和$\mathbf{N}$，其中 $Y \in \mathbf{N}$，以及值 $\boldsymbol{x}'$，使得对于所有$\mathbf{S} \subseteq \mathbf{N}$且满足 $Y \in \mathbf{S}$的情况，对于所有满足 $y \in \boldsymbol{s}$的 $\boldsymbol{s} \in \Omega_{\mathbf{S}}$，都存在一个 $\boldsymbol{t} \in \Omega_{\mathbf{V}\setminus\{\mathbf{X}\cup\mathbf{W}\cup\mathbf{S}\}}$，使得$\mathbf{S}_{\mathbf{X}=\boldsymbol{x}',\ \mathbf{W}=\boldsymbol{w}^*,\ \mathbf{T}=\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{u}) \neq \boldsymbol{s}$，其中 $\boldsymbol{w}^*$ 满足$\mathbf{W}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}^*$。
  AC2（充分性） 对于所有 $\boldsymbol{c} \in \Omega_{\mathbf{V}\setminus\{\mathbf{X}\cup\mathbf{W}\cup\mathbf{N}\}}$，都有$\mathbf{N}_{\mathbf{X}=\boldsymbol{x},\ \mathbf{W}=\boldsymbol{w}^*,\ \mathbf{C}=\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{n}^*$，其中 $\boldsymbol{w}^*$，$\boldsymbol{n}^*$满足$\mathbf{W}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}^*$ 且$\mathbf{N}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{n}^*$。

不深入探讨细节，我们注意到，所有这些定义都依赖于两个关键假设：

1. 在观察状态下以及任何干预之后，各个世界中外生变量$\mathbf{U}$的取值都相同 $\boldsymbol{u}$，即这些世界彼此同步；
2. 观察分布与干预分布通过结构方程$\mathbf{F}$相互关联。

因此，在所有违反这一假设的情况下，这些定义便失去了立足之本。一般而言，实际因果性是一个根据因果关系 推断观测结果的问题。因此，若不对观察分布与干预分布之间的关系施加假设，即使能够获得一个可进行干预的反事实世界，这个问题从最一般的意义上说仍是一个定义不适定的问题。实际因果性的严谨定义一直难以确立，这一事实表明，结构因果模型框架所施加的假设不足以满足这一目的。提出一组能够支持某种定义的假设，不在本文的讨论范围之内。

我们通过继续讨论贯穿全文的示例（示例 3.4），给出一个结构因果模型框架未涵盖的案例，因此其中关于实际因果性的定义也未涵盖该案例。
示例 A.2。 除了表 2、 4 和 5中给出的观察分布及对课程进行干预所对应的因果核外，我们还定义了表 6 中反事实世界中对考试结果进行干预的因果核。

该因果核反映了这样一个事实：如果学生被告知无论如何都会及格，那么没有学生会参加复习课。我们对这一因果核作几点说明。

（i）该 跨世界因果效应和干预决定论公理（定义4.1）成立 .

		反事实				
	$K_{\text{Exam}^{\text{CF}}}(P,\ \cdot)$	$(Y,\ P)$	$(Y,\ F)$	$(N,\ P)$	$(N,\ F)$	Sum
事实	$(Y,\ P)$	0	0	0.43	0	0.43
	$(Y,\ F)$	0	0	0.21	0	0.21
	$(N,\ P)$	0	0	0.19	0	0.19
	$(N,\ F)$	0	0	0.17	0	0.17
	Sum	0	0	1	0	1

表 6：C　　在反事实世界中对考试结果进行干预，使其变为通过时的因果核　　.

（ii）我们存在循环因果关系——复习课出勤会因果性地影响（尽管影响较弱）考试成绩，如表 4 和5所示；而对考试成绩进行干预，会对复习课出勤产生非常强的因果效应。表 4至 6 中定义的所有因果核均有效，并构成一个有效反事实因果空间的一部分。然而，无法根据这些观察分布和干预分布构建结构因果模型。

（iii）由于观察分布（表 2）并未告诉我们在表 6所示干预下会发生什么，因此，即使能够在反事实世界中进行干预，也无法据此判断在观察状态下考试结果是否具有“实际因果效应”。

如前所述，实际因果性与条件因果效应定义所允许我们通过对事实世界进行条件化并对反事实世界进行干预来回答的问题之间存在区别。

条件因果效应 对事实世界进行条件化，会根据世界之间传递的信息，细化反事实世界中正在研究的情形。基于这一细化后的情形，条件因果效应所要问的是：“如果我们在这种情形下进行干预，会（曾）发生什么？”

实际因果性 实际因果性所提出的问题本质上有所不同，形式为：“在观测到的情境中，原因是什么？”

现有研究试图通过在反事实世界中进行干预来回答实际因果性问题。然而，所进行的干预并不对应于我们关注的查询，而是回答了这样一个问题：“已知我们观测到 $\{\boldsymbol{x},\ y\}$，如果我们改为对 $\boldsymbol{x}'$ 进行干预，我们是否仍会得到 y？”这与上述实际因果性问题存在细微却无可否认的差异。虽然现有定义（定义 A.1）为弥合这两类查询作出了有价值的尝试，但根本障碍在于，我们试图从观测中推断因果效应。为此，我们需要假设感兴趣的因果效应所对应的干预分布与观察分布之间存在某种联系，而结构因果模型框架所基于的假设并未提供这种联系。

我们将研究能够促进在反事实因果空间中研究实际因果性的假设，留待未来工作。

B 源

本节首先回顾源的定义。尽管该定义最初仅针对因果空间提出，但无需任何调整即可扩展到反事实因果空间。源是指那些σ-代数，在其上因果核与条件概率几乎必然相等（相对于观测测度 $\mathbb{P}$）。

定义 B.1. [Park 等人 [2023, 定义 D.1]] 设 $(\Omega\ \mathcal{H},\ \mathbb{P},\ \mathbb{K})$ 是定义 2.4 中所定义的因果空间。设 $U \subseteq T$ 为一个子集，$A \in \mathcal{H}$ 为一个事件，且 $\mathcal{F}$ 为 σ 的一个子代数。我们称

1. $\mathcal{H}_U$是 A 的一个（局部）源，如果对于 $\mathbb{P}$-几乎所有的 $\omega \in \Omega$，都有 $K_U(\omega,\ A) = \mathbb{P}_{\mathcal{H}_U}(\omega,\ A)$；

2. $\mathcal{H}_U$ 是 $\mathcal{F}$ 的一个（局部）源，如果 $\mathcal{H}_U$ 是所有 $A \in \mathcal{F}$ 的源；并且

3. $\mathcal{H}_U$ 是一个全局源，如果 $\mathcal{H}_U$ 是所有 $A \in \mathcal{H}$的源。

在因果推断领域，人们非常关注可识别性问题，也就是仅利用观测数据推断因果信息的问题。用（反事实）因果空间的术语来说，这个问题就是仅根据观测测度 $\mathbb{P}$推断有关因果核 K_S 的信息。源描述了能够实现这一点的最基本情形，即因果核与从$\mathbb{P}$导出的相应条件概率测度直接重合（几乎必然）。

已证明 [Park 等人，2023年，定理 D。2] 当对 $\mathcal{H}_U$进行干预时， $\mathcal{H}_U$ 会成为一个源。这是因果关系中的一个基本思想：当能够进行干预时，可以先对 $\mathcal{H}_U$ 进行干预，然后考虑给定$\mathcal{H}_U$时的条件分布，从而得到 $\mathcal{H}_U$。我们在此重述该定理，因为本文中一些结果的证明会在C 中用到它。

定理 B.2。 设 $(\Omega\ \mathcal{H},\ \mathbb{P},\ \mathbb{K})$ 为一个因果空间。此外，取一个关于 $\mathcal{H}_U$ 的干预，该干预通过 $\mathbb{Q}$ 进行，如定义 2.5所述，从而得到干预因果空间 $(\Omega\ \mathcal{H},\ \mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})},\ \mathbb{K}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})})$。那么，新因果空间中的干预因果核 $K_U^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}$ 满足以下性质。

(i) 它与干预前原始因果空间 $(\Omega\ \mathcal{H},\ \mathbb{P},\ \mathbb{K})$ 中对应的因果 K_U 相同，即有

$$K_U = K_U^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})};$$

(ii) 因果核 $K_U = K_U^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}$ 是 $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_U}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}$ 的一个版本，这意味着 $\mathcal{H}_U$ 是干预因果空间的全局源。

C 证明

命题 4.8。 设有一个反事实因果空间 $(\Omega\ \mathcal{H},\ \mathbb{P},\ \mathbb{K})$，一个子集 $U \subseteq T^{\mathrm{F}}$（使得 $\mathcal{H}_U$是一个事实 σ-代数）以及反事实事件 $A,\ G \in \mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$。那么 $\mathcal{H}_U$ 在给定 G的条件下对 A 没有因果效应 G。

证明。 任取 $S \in \mathcal{P}(T)$ 以及任意 $\omega \in \Omega$。假设 $\mathbb{P}^{\mathrm{do}(S,\delta_\omega)}(G) > 0$ 且 $\mathbb{P}^{\mathrm{do}(S\setminus U,\delta_\omega)}(G) > 0$。那么，由于 $G \cap A$ 和 A 都属于 $\mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$，且 $\mathcal{H}_U$ 对 $\mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$ 无因果效应（根据无跨世界因果效应公理（定义4.1(ii)），

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_G^{\mathrm{do}(S,\delta_\omega)}(A) &= \frac{K_S(\omega, G \cap A)}{K_S(\omega, G)} \\
&= \frac{K_{S\setminus U}(\omega, G \cap A)}{K_{S\setminus U}(\omega, G)} \\
&= \mathbb{P}_G^{\mathrm{do}(S\setminus U,\delta_\omega)}(A),
\end{aligned}$$

如所要求。 □

命题 4.11。 设 $\mathcal{C} = (\Omega\ \mathcal{H}, \mathbb{P}, \mathbb{K})$ 是一个反事实因果空间（定义 4.1），并设 $\mathcal{C}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})} = (\Omega\ \mathcal{H}, \mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}, \mathbb{K}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})})$ 是对 $\mathcal{H}_U$ 进行测度干预后得到的反事实因果空间（定义4.2）。

(i) 设 $A,\ B \in \mathcal{H}$ 为事件。若 $A \perp\!\!\!\perp_{K_U} B$ 在 $\mathcal{C}$ 中（见定义 4.9），则 A 与 B 在给定 $\mathcal{H}_U$ 的条件下相互独立，$\mathcal{C}$。

(ii) 若 $\mathcal{H}_{U\cap T^{\mathrm{F}}} \perp\!\!\!\perp_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}_{U\cap T^{\mathrm{CF}}}$ 和 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}} \perp\!\!\!\perp_{K_U} \mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$ 属于 $\mathcal{C}$，则 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}} \perp\!\!\!\perp_{\mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}} \mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$。

证明。

(i) 注意,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}_{\mathcal{H}_U}(\omega, A\cap B) &\overset{a.s.}{=} K_U(\omega, A\cap B)\\ &\overset{(a)}{=} K_U(\omega, A)K_U(\omega, B)\\ &\overset{a.s.}{=} \mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}_{\mathcal{H}_U}(\omega, A)\mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}_{\mathcal{H}_U}(\omega, B)\end{aligned}$$

其中 $\overset{a.s.}{=}$ 是由定理 B.2推出的几乎处处相等式，而（a）由 A 与 B的因果独立性推出。

（ii）任取事件 $A\in\mathcal{H}^{\mathrm{F}}$ 和 $B\in\mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$。于是可见,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}(A\cap B)\\ &\overset{(a)}{=}\int \mathbb{Q}(d\omega_U)K_U(\omega_U, A\cap B)\\ &\overset{(b)}{=}\int \mathbb{Q}(d\omega_U)K_U(\omega_U, A)K_U(\omega_U, B)\\ &\overset{(c)}{=}\int \mathbb{Q}((d\omega_{U\cap T^{\mathrm{F}}}, d\omega_{U\cap T^{\mathrm{CF}}}))K_{U\cap T^{\mathrm{F}}}(\omega_{U\cap T^{\mathrm{F}}}, A)K_{U\cap T^{\mathrm{CF}}}(\omega_{U\cap T^{\mathrm{CF}}}, B)\\ &\overset{(d)}{=}\int \mathbb{Q}(d\omega_{U\cap T^{\mathrm{F}}})K_{U\cap T^{\mathrm{F}}}(\omega_{U\cap T^{\mathrm{F}}}, A)\int \mathbb{Q}(d\omega_{U\cap T^{\mathrm{CF}}})K_{U\cap T^{\mathrm{CF}}}(\omega_{U\cap T^{\mathrm{CF}}}, B)\\ &\overset{(e)}{=}\int \mathbb{Q}(d\omega_U)K_U(\omega_U, A)\int \mathbb{Q}(d\omega_U)K_U(\omega_U, B)\\ &=\mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}(A)\mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}(B),\end{aligned}$$

其中（a）是干预测度的定义；（b）由事实世界和反事实世界在 $\mathcal{H}_U$ 上具有因果独立性这一事实推出；（c）由无跨世界因果效应公理（定义 4.1(ii)）推出；（d）由 $\mathcal{H}^{\mathrm{F}}$ 与 $\mathcal{H}^{\mathrm{CF}}$ 在 $\mathbb{Q}$ 下的独立性推出；（e）再次由定义 4.1(ii)推出。

□

命题 *4.12*。设 $\mathcal{C}=(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{P}, \mathbb{K})$ 是一个反事实因果空间（定义 *4.1*），并设 $\mathcal{C}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}=(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}, \mathbb{K}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})})$ 是在 $\mathcal{H}_U$ 上进行干预并在 $(\Omega, \mathcal{H}_U)$ 上使用测度$\mathbb{Q}$ 后得到的反事实因果空间（定义 *4.2*）。设 A、$B\in\mathcal{H}$ 为事件。若 $A\overset{K_U}{=}B$ 属于 $\mathcal{C}$，则 $A\overset{\mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}}{=}B$ 属于 $\mathcal{C}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}$。

证明。 根据定理 B.2，对于 $\mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}_{\mathcal{H}_U}$ -几乎所有的 $\omega\in\Omega$,

$$\mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}_{\mathcal{H}_U}(\omega, A\Delta B)=K_U(\omega, A\Delta B)=0.$$

此外，由于 $K_U(\omega,\ A\Delta B)=0$，我们有

$$\mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}(A\Delta B)=\int \mathbb{Q}(d\omega)K_U(\omega, A\Delta B)=0,$$

如所要求。 □

定理 5.4。 定义 $\mathbb{K}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}$ *5.3* 中给出的干预因果机制 满足定义 *5.2*中给出的因果机制公理。

证明。我们 c 检查定义 N中给出的 5.2(ii所述三条公理:).

(i) 对所有 $A \in \mathcal{H}$ 和 $\omega \in \Omega$，根据定义 5.3，有：

$$\begin{aligned} K_{\emptyset}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}(\omega, A) &= \int \mathbb{Q}(\omega'_U) K_U((\omega_\emptyset, \omega'_U), A) \\ &= \int \mathbb{Q}(d\omega') K_U(\omega', A) \\ &= \mathbb{P}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}(A), \end{aligned}$$

按要求。

(ii) 取任意的 $j \in \{1, \ldots, N\}$、任意的 $\omega \in \Omega$、任意的 $S \in \mathcal{P}(T)$ 以及任意的 $A \in \mathcal{H}^j$。于是我们有

$$\begin{aligned} K_S^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}(\omega, A) &= \int \mathbb{Q}(d\omega'_{U\setminus S}) K_{S\cup U}((\omega_S, \omega'_{U\setminus S}), A) \\ &\overset{(a)}{=} \int \mathbb{Q}(d\omega'_{(U\setminus S)\cap T^j}) K_{(S\cup U)\cap T^j}((\omega_{S\cap T^j}, \omega'_{(U\setminus S)\cap T^j}), A) \\ &= \int \mathbb{Q}(d\omega'_{U\setminus (S\cap T^j)})) K_{(S\cap T^j)\cup U}((\omega_{S\cap T^j}, \omega'_{U\setminus (S\cap T^j)}), A) \\ &= K_{S\cap T^j}^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}(\omega, A) \end{aligned}$$

其中，在（a）中，我们应用了无跨世界因果效应公理（定义 5.2(ii)）。

(iii) 对于所有 $A \in \mathcal{H}_S$ 和 $B \in \mathcal{H}$，利用 $A \in \mathcal{H}_S \subseteq \mathcal{H}_{S\cup U}$ 这一事实，我们有：

$$\begin{aligned} K_S^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}(\omega_S, A \cap B) &= \int \mathbb{Q}(d\omega'_{U\setminus S}) K_{S\cup U}((\omega_S, \omega'_{U\setminus S}), A \cap B) \\ &= \int \mathbb{Q}(d\omega'_{U\setminus S}) 1_A((\omega_S, \omega'_{U\setminus S})) K_{S\cup U}((\omega_S, \omega'_{U\setminus S}), B) \\ &= \int \mathbb{Q}(d\omega'_{U\setminus S}) 1_A(\omega_S) K_{S\cup U}((\omega_S, \omega'_{U\setminus S}), B), \end{aligned}$$

其中，最后一行成立是因为 1_A 不依赖于 $\omega'_{U\setminus S}$ 分量，正如 $A \in \mathcal{H}_S$ 所示。将示性函数移出积分后，剩下

$$K_S^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}(\omega, A \cap B) = \mathbf{1}_A(\omega) \int \mathbb{Q}(d\omega'_{U\setminus S}) K_{S\cup U}((\omega_S, \omega'_{U\setminus S}), B).$$

左侧的积分就是 $K_S^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}(\omega, B)$ 的定义。因此，我们有

$$K_S^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}(\omega, A \cap B) = \mathbf{1}_A(\omega) K_S^{\mathrm{do}(U,\mathbb{Q})}(\omega, B),$$

这正是干预确定性公理。

□