arXiv:2601.00524v1 [math.QA] 2 Jan 2026

i量子群与iHopf 代数 II：对偶典范基

JIAYI CHEN、MING LU、XIAOLONG PAN、SHIQUAN RUAN 和 WEIQIANG WANG

Abstract. 基于前篇中构造的拟分裂泛 i量子群的 iHopf 代数实现，我们为任意有限型的泛 i量子群构造了对偶典范基，并进一步证明该基在 i辫群作用下保持不变；这推广了 Lu-Pan 先前通过几何方法在 ADE 型中得到的结果。此外，我们将任意有限型 Drinfeld 双量子群的对偶典范基（其通过双Borel子代数上的 iHopf 代数实现）与 Berenstein-Greenstein 的双典范基对应起来，从而解决了他们的若干猜想。

Contents

1. 引言 1 2. 量子群、i量子群与 iHopf 代数 5 3. 关于 $\mathbf{U}^\imath$ 的 i 辫群对称性，基于 iHopf 代数 13 4. i量子群的对偶典范基 22 5. Drinfeld 双的对偶典范基 31 附录 A. 秩一情形下的对偶典范基 36 参考文献 39

1. Introduction

设 U 为 Drinfeld-Jimbo 量子群，B 为 U 的一个 Borel 子代数，而 U 为 B 上的 Drinfeld 双。Qin [Qin16]构造了 ADE 型 U 上具有正性的对偶典范基，其中包含 Lusztig [Lus90a] 在 $\mathbb{Z}[v^{\frac{1}{2}}, v^{-\frac{1}{2}}]$ 上的 $\mathbf{U}^+$ 和 $\mathbf{U}^-$ 的（重新缩放的）对偶典范基。对 Hernandez-Leclerc [HL15], 的推广中，Qin 的构造使用了 Nakajima 箭图簇上的层的量子 Grothendieck 环（参见 [Na04, VV03]），也可视为 Bridgeland 构造 U [Br13] 的霍尔代数的一种几何对应物。大约在同一时期，Berenstein 和 Greenstein [BG17a] 以代数方法构造了有限型 U 的双典范基；直到最近，这两个 U 上的基之间的关系仍不清楚。

对于任意准分裂 Satake 图（$\mathbb{I}$, τ）（不含 τ-固定边），泛准分裂 i 量子群$\mathbf{U}^\imath$ 在 [LW22a]中通过 iHall代数加以构造和实现，

2020 数学主题分类。主要分类 17B37, 20G42, 81R50。关键词和短语。i量子群、量子群、iHopf 代数、对偶典范基、辫群对称。

~LW23], 它是 Bridgeland 霍尔代数的一种推广。我们注意到，$\mathbf{U}^\imath$ 是 U 的一个余理想~子代数，并具有相对辫（=i辫）群对称性 [LW22b、WZ23、~Z23]；另见 [KP11]。Drinfeld 双 U 可识别为与对角 Satake 图（$\mathbb{I}\sqcup\mathbb{I}$，交换）相关的泛 i 量子群。对于所有 ADE 型的准分裂 Satake 图（除去具有 τ-固定边的 AIII 型$_{2r}$ ），~$\mathbf{U}^\imath$ 的对偶典范基已在 [LW21b] 中通过 Nakajima-Keller-Scherotzke 箭图簇上的层的量子 Grothendieck 环构造出来。这推广了 [Qin16]。

两位作者 [LP25] 最近在更进一步的~几何方向上取得了实质性进展。他们通过重标度 iHall 基和 Lusztig 引理，为 ADE 型（AIII$_{2r}$ 型除外）的 $\mathbf{U}^\imath$ 构造了对偶典范基的新方法，从而联系了 [LW22a] 和 [LW21b]中的早期构造；此外，他们还证明，对偶~~典范基在 $\mathbf{U}^\imath$的（重标度）i 辫群对称性 $\mathbf{T}_i$ 下保持不变。在~专门研究对角型的 i 量子群时，他们证明，Qin [Qin16] 构造的 U 上的对偶典范基，与 Berenstein 和 Greenstein 提出的双典范基的（两个变体）相一致。这使他们得以解决 [BG17a]中关于~ADE 型的若干猜想；特别地，U 的对偶典范基在（重标度）Lusztig~辫群对称性 T_i 下保持不变。

~BG17a [中的代数构造]适用于所有有限型的$\mathbf{U}$ ，其双典范基的构造还涉及另一种精妙却相当复杂的 Heisenberg 双构造；同样，其中包含（经重标度的）$\mathbf{U}^+$ 和$\mathbf{U}^-$ 的对偶典范基，出自 [Lus90a、Ka91]。Berenstein 和 Greenstein 提出了若干猜想，其中包括任意有限型中的双典范基在辫群作用下保持不变。关于辫群作用下 [Lus96，定理 1.2] 中$\mathbf{U}^+$ 的子代数中的典范基之间的相容性，在 [BG17a，命题 5.14] 中被重新表述为：$\mathbf{U}^+$ 的子代数的对偶典范基在经重标度的辫群作用下彼此对应。

在前作 [CLPRW25] 中，我们提出了 iHopf 代数这一概念。这是一种定义在带有 Hopf 配对的 Hopf 代数上的新型结合代数结构，并证明 iHopf~~~代数$\mathbf{B}^\imath_\tau$ 定义在 Borel 子代数$\mathbf{B}$ 上，是 $\imath$ 量子群$\mathbf{U}^\imath$的一种实现；此后我们将~~记$\mathbf{B}^\imath_\tau \equiv \mathbf{U}^\imath$ 为。

~本文旨在构造$\mathbf{U}^\imath$ 的对偶典范基，其中 [LP25]的任意有限型情形是在 iHopf 代数框架下对其主要结果的推广。在此过程中，我们建立了 Lusztig 辫群作用与 ibraid~~群作用之间的直接联系。特别地，由于定义在双Borel子代数$\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}$~上的 iHopf 代数给出了 Drinfeld 双$\mathbf{U}$的一个实现，我们构造了~$\mathbf{U}$ 的任意有限型对偶典范基，从而解决了 [BG17a]中的主要猜想。

~~~本文中 U 和 $\mathbf{U}^\imath$ 的表示形式略显不同寻常，因为它们采用了 [BG17a、LP25、CLPRW25]中所用的对偶Chevalley生成元。我们首先进一步阐明 [CLPRW25] 所开创的辫群与 i 辫群对称性之间的联系。存在 Lusztig代数 $\mathbf{f}$ 到 $\mathbf{B}$ 的自然嵌入，$\iota: \mathbf{f} \to \mathbf{B}$，以及嵌入~~~$\mathbf{f} \to \mathbf{B}^\imath_\tau \equiv \mathbf{U}^\imath$。回顾一下，(2.24) 中的 ϑ_i 是 $\mathbf{f}$ 的一个缩放版本，τ_i 是对合 τ的秩一类比，而 (3.8)–(3.9) 中的 $\mathbf{f}_i$、τi和 $^\sigma\mathbf{f}[i,\tau i]$是 $\mathbf{f}$ 的子代数。U 中存在（经过缩放的）辫群对称 T_i 和 T_w [Lus90a、Lus90b、Lus93]
~~~

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$以及（经过缩放的）i 辫群对称性$\mathbf{T}_i$ 作用于$\mathbf{U}^\imath$ [KP11、LW21a、WZ23、Z23]。CLPRW25的定理 C] 已证明，对于任意 i， $j \in \mathbb{I}$满足 $i \neq j$， τj，

$$\widetilde{\mathbf{T}}_i(\vartheta_j) = \iota\big(\widetilde{T}_{r_i}(\vartheta_j)\big). \tag{1.1}$$

记号见（2.9） r_i。

定理 A （定理 3.7 和 3.11）。 （i）对于任意 $\widetilde{\ }\mathbf{T}_i^{-1}$ （x） $= \widetilde{T}_{r_i}^{-1}$（$x$），我们有 $x \in {}^\sigma\mathbf{f}[i,\tau i]$。（ii）对于任意 $x \in {}^\sigma\mathbf{f}[i,\tau i]$和 $u \in \mathbf{f}_{i,\ \tau i}$，我们有

$$\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(xu) = v^{-\frac{1}{2}(\tau\mathrm{wt}(u)+\mathrm{wt}(u),\mathrm{wt}(x))}\mathbb{K}^{-1}_{\tau\tau_i\mathrm{wt}(u)} \diamond \big(\tau\tau_i(u)\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x)\big).$$

（iii）对于任意 $x \in \mathbf{f}[i,\tau i]$和 $u \in \mathbf{f}_{i,\ \tau i}$，我们有

$$\widetilde{\mathbf{T}}_i(ux) = v^{-\frac{1}{2}(\tau\mathrm{wt}(u)+\mathrm{wt}(u),\mathrm{wt}(x))}\mathbb{K}^{-1}_{\tau_i\mathrm{wt}(u)} \diamond \big(\widetilde{T}_{r_i}(x)\tau\tau_i(u)\big).$$

$\widetilde{\ }$定理 A 表明，Lusztig 辫群作用 T_{r_i} 在 f 的一个子代数上的作用与$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$T 的 i辫群作用$_i$ 在 U$^\imath$的一部分上的作用相匹配，大幅改进了（1.1）；即使在量子群背景下，这也是一个新结果。此结果在 Hall 代数和 iHall 代数的背景下最容易理解；参见 [LP25]。回顾 [LW22a、LW23]，i箭图代数是通过向箭图添加一些箭头而定义的，随后用于实现 i 量子群。将范围限制到箭图的模后，i箭图代数的反射函子 [LW21a、LW22b] 与箭图的反射函子 [Rin96]一致。因此，上述（i）中等式两边都对应于相同的模（尽管它们位于乘法不同的 Hall 代数中）。关于（ii）–（iii）的陈述，我们回顾反射函子会反转一些箭头，进而改变模范畴的结构。以（ii）为例： xu （而非 ux）自然对应于一个模 M，而$_\sim\tau\tau_i$（u）（x）对应于经反射函子作用后的模 M。

定理 A在 Kac-Moody 情形下成立。在引言的其余部分，我们将讨论范围限定于任意有限型的 Drinfeld 双和 i 量子群。

这些代数 $\widetilde{\mathbf{U}}$ $\widehat{\ }$（分别为$\widehat{\mathbf{U}}^\imath$）$\widetilde{\mathbf{B}}$有相应的变体$\mathbf{U}$ （分别为$\mathbf{B}$，或$\mathbf{U}^\imath$），其中 Cartan 子代数的生成元 K_i, K_i' （分别为 K_i，或 $\mathbb{K}_i$）不要求可逆。在讨论辫群对称时，我们需要这些 Cartan 生成元可逆，因此采用波浪号版本。从 Hall 代数和对偶典范基的角度来看，帽版本是自然的。我们将把作用于$\mathbf{B}$ 的 iHopf 代数 $\mathbf{B}^\imath_\tau$ 与$\mathbf{U}^\imath$：$\mathbf{B}^\imath_\tau \equiv \mathbf{U}^\imath$等同起来。

对于对偶典范基，我们使用 U$^\imath$ 上的一种横线对合（它是一种反对合）$\widehat{\ }$；参见引理 2.15。通过 iHopf代数构造，我们通过线性嵌入，将 f 的对偶典范$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$基或对偶 PBW 基导入 B$^\imath_\tau \equiv$U$^\imath$ 。我们将 f 的这类基（在添入 Cartan 后）视为 B$^\imath_\tau$ 的标准基，并对其施加横线对合。这样，我们便能应用 Lusztig 引理构造 B$^\imath_\tau$ 的对偶典范$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$基。令 $\mathbb{K}_\alpha$ 表示 B$^\imath_\tau$ 的 Cartan子代数中的一个元素，并令 C 表示关于 (2.29) 中双线性型 φ 的 f 的对偶典范基。关于 $\diamond$-作用，请参见 (2.33)。

定理 B (定理4.7，命题4.12)。 存在唯一的 *bar*-不变元素 $C_{\alpha,\ b} \in \widehat{\ }\mathbf{B}^\imath_\tau$满足 $C_{\alpha,\ b} \in \mathbb{K}_\alpha \diamond \iota(b) + \sum_{(\alpha,\ b)\prec(\beta,\ b')} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}] \cdot \mathbb{K}_\beta \diamond \iota(b')$，其中 $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$

以及 $b \in \mathbf{C}$。此外，$C_{\alpha,\ b} = \mathbb{K}_\alpha \diamond C_{0,\ b}$。那么 $\{C_{\alpha,b} \mid \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}, b \in \mathbf{C}\}$ 构成$\mathbf{B}^{\imath}_{\tau} \equiv \mathbf{U}^{\imath}$ 的对偶典范基。

对于 ADE 型（不包括 AIII_{2r}），由[LP25] 中的新几何构造可知，上述定理中构造的基与 [LW21b，LP25]中构造的对偶典范基相一致。不过，我们的代数方法不足以重新确立同上文献中 ADE 型对偶典范基的正性性质。根据本文的构造（以及 [LP25]中的构造），存在一种算法，可计算定理B**中的**$\mathbf{U}^{\imath}$ 的对偶典范基；这是早期文献 [Qin16、LW21b]中所缺少的。

先前由 G. Letzter 引入的、带有参数$\mathbf{U}^{\imath}_{\varsigma}$ 的 i 量子群 ς （参见 Kolb [Ko99]）可由 [U14]经过中心约化得到。根据命题**4.18**，$\widetilde{\mathbf{U}}^{\imath}$上的对偶典范基会下降为具有特征参数的 i 量子群上的对偶典范基，该参数 $\varsigma_\diamond$ 定义于（2.17）中。

回忆一下引理 $\sigma^{\imath}$ 中 $\mathbf{U}^{\imath}$ 上的反对合 2.5。定理 $\mathbf{U}^{\imath}$ 中构造的对偶典范基4.7 具有若干对称性。

定理 C (定理 4.15，命题4.10，推论 4.13)。 对偶典范基在 $\mathbf{B}^{\imath}_{\tau} \equiv \mathbf{U}^{\imath}$ 下对 *i*辫群作用保持不变。此外，它在反对合 $\sigma^{\imath}$ 以及对合 τ 下也保持不变。

作为定理 C (参见推论3.12)的推论，我们很容易得到一个困难的结果(参见 [WZ23，定理 7.13])，适用于准分裂 i量子群：$\mathbf{T}_w(B_i) = B_{wi}$ 如果$wi \in \mathbb{I}$，对于 $w \in W_\tau$ 和 $i \in \mathbb{I}$。（其中包括著名的量子群对应结果[Lus93， Jan96]。）

定理 A 在定理C的证明中起着至关重要的作用。为了证明定理 C，我们首先利用 f 的对偶 PBW 基构造$\widehat{\mathbf{B}}^{\imath}_{\tau} \equiv \mathbf{U}^{\imath}$的对偶典范基；见命题 4.12。然后应用定理 A 证明辫群作用 $\mathbf{T}_i$ 将一个对偶 PBW 基映到另一个对偶 PBW 基。由命题 4.12 及对偶典范基的唯一性，即可推出定理C 。

现在，我们将上述结果专门化到有限型 Drinfeld 双量子群 $\mathbf{U}$ ，并将其视为对角型 i 量子群。根据 iHopf 构造，$\widetilde{\mathbf{U}}$ **的对偶典范基**的首项是 f的对偶典范基元素与一个 Cartan 代数因子的张量积。这一刻画使我们能够与 [BG17a]中的构造衔接并进行比较。回顾引理 $\sigma^{\imath}$中关于 ω 在 $\mathbf{U}$ 上的反对合2.1及 Chevalley 对合。

定理 D (定理 5.6，推论5.7–5.9)。在 $\mathbf{U}$ 上的对偶典范基与 *Berenstein-Greenstein* 意义下 $\mathbf{U}$ `上的双典范基重合。此外，这个基在辫群作用、*Chevalley* 对合 ω以及反对合 σ作用下保持不变。

如第 5 节所述，文献$\mathbf{U}$ 中双典范基的两种变体，是通过 Heisenberg 双的两种不同构造过程得到的，相关作者在 [BG17a] 中提出猜想，认为这两种基同上 相同。定理 5.6 表明事实确实如此。我们的方法完全绕开了 Heisenberg 双。

对偶典范基与合单体范畴化以及簇代数的联系，探究如何准确地表述

这些联系仍是个有趣的问题。一个引人入胜的问题是，修正量子群 $\mathbf{U}$ [Lus93]（以及修正 i 量子群 $\widehat{\mathbf{U}}^\imath$ [BW18b、BW21]）上的典范基与本文构造的 $\mathbf{U}$（以及 $\widehat{\mathbf{U}}^\imath$）上的对偶典范基之间，是否存在直接联系。

将我们的工作推广到准分裂类型之外的 i量子群也会非常有趣，但这并非易事；参见 [BW18b、BK19、BW21、WZ23]，其中给出了一些适用于这类一般情形的构造。

本文的组织结构如下。在第2节中，我们回顾量子群和 i 量子群，包括（相对）辫群作用。我们还回顾 i量子群 $\widehat{\mathbf{U}}^\imath$ 的 iHopf 代数实现，以及由此产生的若干性质。

在第3节中，我们证明了定理 A，将 Lusztig 辫群作用与 i辫群作用联系起来。这一结果用于第 4 节，以证明定理 C。第 $\widehat{\mathbf{U}}^\imath$ 的对偶典范基也在第 4节中建立。

最后，在附录A中，我们将关于对偶典范基的结果与下的对偶典范基一致。在附录A中，我们得到了准分裂秩一情形下对偶典范基元素的递归公式。

致谢 ML 部分受到国家自然科学基金（编号：12171333）的资助。SR 部分受到中央高校基本科研业务费（编号：20720250059）、福建省自然科学基金（编号：2024J010006）以及国家自然科学基金（编号：12271448 和 12471035）的资助。WW 部分受到美国国家科学基金会 DMS-2401351 项目的资助，并感谢新加坡国立大学（数学系和 IMS）在其访问期间提供了优越的科研环境和支持。

2. Quantum groups, iquantum groups and iHopf algebras

在本节的预备内容中，我们将用（不太标准的）对偶生成元来回顾量子群和 i量子群。我们还将回顾 [CLPRW25] 中给出的通过 iHopf 代数实现 i量子群的方法。

2.1. 量子群。 设 $\mathbb{I} = \{1, \dots, n\}$。设 $C = (c_{ij})_{i,\, j\in\mathbb{I}}$ 为 Kac-Moody 李代数 $\mathfrak{g}$ 的可对称化广义 Cartan 矩阵（GCM）。设 $D = \mathrm{diag}(d_i \mid i \in \mathbb{I})$，其中 $d_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ 为 C 的对称化子，即 DC 是对称的。设 $\{\alpha_i \mid i \in \mathbb{I}\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一组单根，并将根格记为 $\mathbb{Z}^{\mathbb{I}} := \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_n$。我们通过规定在 $\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$ 上定义一个对称双线性型

$$(\alpha_i, \alpha_j) = d_i c_{ij}, \quad \forall i, j \in \mathbb{I}. \tag{2.1}$$

简单反射 $s_i \colon \mathbb{Z}^{\mathbb{I}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$ 定义为 $s_i(\alpha_j) = \alpha_j - c_{ij}\alpha_i$，其中 $i,\ j \in \mathbb{I}$。将 Weyl 群记为 $W = \langle s_i \mid i \in \mathbb{I} \rangle$。

令 v 为一个不定元。令

$$v_i = v^{d_i}, \qquad \forall i \in \mathbb{I}.$$

对于 A, B在一个 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-代数中，记作 $[A,B]=AB-BA$，并且对于任意 $q\in\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})^\times$，记作 $^{\urcorner}[A,B]_q=AB-qBA$。对于 $r\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{Z}$，记

$$[r]_{v_i}=\frac{v_i^r-v_i^{-r}}{v_i-v_i^{-1}},\quad [r]_{v_i}^!=\prod_{i=1}^r[i]_{v_i},\quad \begin{bmatrix} m\\ r\end{bmatrix}_{v_i}=\frac{[m]_{v_i}[m-1]_{v_i}\dots[m-r+1]_{v_i}}{[r]_{v_i}^!}.$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$沿用 [Dr87、BG17a]，（Drinfeld 双）量子群 $\mathbf{U}:=\mathbf{U}_v(\mathfrak{g})$ 定义为由以下元素生成的 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-代数，并满足以下关系：对于 E_i, F_i, K_i, K_i', $i\in\mathbb{I}$，对于 i, $j\in\mathbb{I}$,

$$[E_i,F_j]=\delta_{ij}(v_i^{-1}-v_i)(K_i-K_i'),\qquad [K_i,K_j]=[K_i,K_j']=[K_i',K_j']=0, \tag{2.2}$$

$$K_iE_j=v_i^{c_{ij}}E_jK_i,\qquad K_iF_j=v_i^{-c_{ij}}F_jK_i, \tag{2.3}$$

$$K_i'E_j=v_i^{-c_{ij}}E_jK_i',\qquad K_i'F_j=v_i^{c_{ij}}F_jK_i', \tag{2.4}$$

对于 $i\neq j\in\mathbb{I}$,

$$\sum_{r=0}^{1-c_{ij}}(-1)^r\begin{bmatrix} 1-c_{ij}\\ r\end{bmatrix}_{v_i}E_i^rE_jE_i^{1-c_{ij}-r}=0, \tag{2.5}$$

$$\sum_{r=0}^{1-c_{ij}}(-1)^r\begin{bmatrix} 1-c_{ij}\\ r\end{bmatrix}_{v_i}F_i^rF_jF_i^{1-c_{ij}-r}=0. \tag{2.6}$$

我们将 $\widetilde{\mathbf{U}}=\widetilde{\mathbf{U}}_v(\mathfrak{g})$ 定义为具有上述 $\widehat{\mathbf{U}}$ 的生成元和关系的 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-代数，但还要求 K_i, K_i' $(i\in\mathbb{I})$ 可逆。于是，通过令下式成立，$\widetilde{\mathbf{U}}$ 和 $\widehat{\mathbf{U}}$ 成为 $\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$-分次代数

$$\deg E_i=\alpha_i,\qquad \deg F_i=-\alpha_i,\qquad \deg K_i=0=\deg K_i'.$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$令 $\mathbf{U}_\mu$ 为度数为 μ 的齐次子空间。于是 $\mathbf{U}=\oplus_{\mu\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}}\mathbf{U}_\mu$ 且 $\mathbf{U}=\oplus_{\mu\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}}\mathbf{U}_{\mu}$。

Drinfeld-Jimbo 量子群 $\mathbf{U}$ 定义为由E_i, F_i, K_i, K_i^{-1}, $i\in\mathbb{I}$生成的 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-代数，其满足由（2.2）–（2.6）修改而来的关系，其中 K_i' 替换为 K_i^{-1}。我们也可以将 $\mathbf{U}$ 视为 $\widehat{\mathbf{U}}$（或 $\widetilde{\mathbf{U}}$）关于由 $K_iK_i'-1$ $(i\in\mathbb{I})$生成的理想的商代数；参见 [Dr87]。

$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$稍微滥用一下记号，令$\mathbf{U}^+$ 为$\mathbf{U}$ （以及$\mathbf{U}$、$\mathbf{U}$）中由 E_i $(i\in\mathbb{I})$生成的子代数，并令$\mathbf{U}^-$ 为由 F_i $(i\in\mathbb{I})$生成的子代数。令 $\widehat{\mathbf{U}}^0$ 和 $\widetilde{\mathbf{U}}^0$ 分别为 $\widehat{\mathbf{U}}$ 和 $\widetilde{\mathbf{U}}$ 中由 K_i, K_i' $(i\in\mathbb{I})$生成的子代数，并令$\mathbf{U}^0$ 为$\mathbf{U}$中由 $K_i^{\pm1}$ $(i\in\mathbb{I})$生成的子代数。于是，代数 $\widehat{\mathbf{U}}$、$\widetilde{\mathbf{U}}$ 和$\mathbf{U}$ 具有三角分解：

$$\widehat{\mathbf{U}}=\mathbf{U}^+\otimes\widehat{\mathbf{U}}^0\otimes\mathbf{U}^-,\qquad \widetilde{\mathbf{U}}=\mathbf{U}^+\otimes\widetilde{\mathbf{U}}^0\otimes\mathbf{U}^-,\qquad \mathbf{U}=\mathbf{U}^+\otimes\mathbf{U}^0\otimes\mathbf{U}^-.$$

对于任意 $\mu=\sum_{i\in\mathbb{I}}m_i\alpha_i\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$，我们记作 $K_\mu=\prod_{i\in\mathbb{I}}K_i^{m_i}$, $K_\mu'=\prod_{i\in\mathbb{I}}(K_i')^{m_i}$。

这些代数 $\widehat{\mathbf{U}}$（以及 $\widetilde{\mathbf{U}}$）是 Hopf 代数，其余乘法 Δ 和余单位 ε定义为

$$\begin{aligned}\Delta(E_i)&=E_i\otimes1+K_i\otimes E_i,\quad \Delta(F_i)=1\otimes F_i+F_i\otimes K_i',\\ \Delta(K_i)&=K_i\otimes K_i,\quad \Delta(K_i')=K_i'\otimes K_i';\\ \varepsilon(E_i)&=0=\varepsilon(F_i),\qquad \varepsilon(K_i)=1=\varepsilon(K_i');\end{aligned} \tag{2.7}$$

以下两个引理要么是标准结果，要么很容易验证。

引理 2.1。

(1) 存在一个反对合（称为横线对合）$u \mapsto u$，其作用于 U（也作用于 U、U），定义为 $v^{1/2} = v^{-1/2}$、$E_i = E_i$、$F_i = F_i$ 和 $K_i = K_i$、$K_i' = K_i'$，其中 $i \in \mathbb{I}$。

(2) 存在一个反对合 σ，其作用于 U（也作用于 U、U），定义为 $\sigma(E_i) = E_i$、$\sigma(F_i) = F_i$，以及 $\sigma(K_i) = K_i'$，其中 $i \in \mathbb{I}$。

(3) 存在一个 *Chevalley* 对合 ω，其作用于 U（也作用于 U、U），定义为 $\omega(E_i) = F_i$、$\omega(F_i) = E_i$，以及 $\omega(K_i) = K_i'$，其中 $i \in \mathbb{I}$。

引理 2.2。令 $\mathbb{F}$ 为 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$ 和 $\mathbb{F}^\times = \mathbb{F} \setminus \{0\}$的代数闭包。对于标量 $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \mathbb{I}} \in (\mathbb{F}^\times)^{\mathbb{I}}$，存在 $\Psi_{\mathbf{a}}$ 在 $\mathbb{F}$-代数$\mathbf{U}$ 上的自同构，使得

$$\widetilde{\Psi}_{\mathbf{a}} : K_i \mapsto a_i^{\frac{1}{2}} K_i, \quad K_i' \mapsto a_i^{\frac{1}{2}} K_i', \quad E_i \mapsto a_i^{\frac{1}{2}} E_i, \quad F_i \mapsto F_i.$$

令 Br(W) 为与由简单反射 t_i ($i \in \mathbb{I}$) 生成的 Weyl 群 W 相关联的辫群。Lusztig 在量子群 U 上引入了 4 种辫群对称 [Lus90b] [Lus93, §37.1.3]。这些辫群对称可以提升到 Drinfeld 双 U；例如参见 [LW22b, Propositions 6.20–6.21], ，它们记作 $\widetilde{T}_{i,e}'$、$\widetilde{T}_{i,-e}''$、$e = \pm 1$; 另参见 [BG17a, §5]。事实上，$\widetilde{T}_{i,e}' = \sigma \circ \widetilde{T}_{i,-e}'' \circ \sigma$是$\widetilde{T}_{i}''$的逆。

命题 2.3. </style}对于，作用于 U 上的自同构 $\widetilde{T}_{i,e}'$ 满足

$$\begin{aligned}
&\widetilde{T}_{i,e}'(K_\mu) = K_{s_i(\mu)}, \qquad \widetilde{T}_{i,e}'(K_\mu') = K_{s_i(\mu)}', \quad \forall \mu \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}, \\
&\widetilde{T}_{i,1}'(E_i) = v_i (K_i')^{-1} F_i, \qquad \widetilde{T}_{i,1}'(F_i) = v_i^{-1} E_i K_i^{-1}, \\
&\widetilde{T}_{i,-1}'(E_i) = v_i^{-1} K_i^{-1} F_i, \qquad \widetilde{T}_{i,-1}'(F_i) = v_i E_i (K_i')^{-1}, \\
&\widetilde{T}_{i,e}'(E_j) = \sum_{r+s=-c_{ij}} (-1)^r v_i^{-e(r+\frac{1}{2}c_{ij})} (v_i - v_i^{-1})^{c_{ij}} E_i^{(s)} E_j E_i^{(r)} \quad \forall j \neq i, \\
&\widetilde{T}_{i,e}'(F_j) = \sum_{r+s=-c_{ij}} (-1)^r v_i^{-e(r+\frac{1}{2}c_{ij})} (v_i - v_i^{-1})^{c_{ij}} F_i^{(s)} F_j F_i^{(r)} \quad \forall j \neq i.
\end{aligned}$$

引理 2.4. 辫群作用 $\widetilde{T}_{i,e}'$ 和 $\widetilde{T}_{i,-e}''$ 与横线对合交换，即对于任意 $u \in \mathbf{U}$，$\widetilde{T}_{i,e}'(\overline{u}) = \overline{\widetilde{T}_{i,e}'(u)}$ 以及 $\widetilde{T}_{i,-e}''(\overline{u}) = \overline{\widetilde{T}_{i,-e}''(u)}$。

我们将经常使用简写记号

$$\widetilde{T}_i := \widetilde{T}_{i,1}', \qquad \widetilde{T}_i^{-1} := \widetilde{T}_{i,-1}''. \tag{2.8}$$

这些 $\widetilde{T}_i$ 满足辫群关系，因此 $\widetilde{T}_w := \widetilde{T}_{i_1} \cdots \widetilde{T}_{i_r} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{U})$ 是良定义的，其中 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ 是 $w \in W$ 的任意约化表达式。

2.2. **i量子群**。对于 Cartan 矩阵 $C = (c_{ij})_{i,\, j \in \mathbb{I}}$，令 Inv($C$) 表示集合 $\mathbb{I}$ 上满足 $c_{ij} = c_{\tau i,\, \tau j}$（对所有 i, j）的置换 τ 所构成的置换群，并令 $\tau^2 = \mathrm{Id}$。于是，$\tau \in \mathrm{Inv}(C)$ 可视为相应的对合（允许为恒等映射）

Dynkin 图（为简便起见，将其与 $\mathbb{I}$ 等同）。我们将二元组 $(\mathbb{I},\ \tau)$ 称为一个（准分裂）Satake 图。

我们用 r_i 表示 Weyl 群 W 中以下的一个二阶元素，即

$$r_i = \begin{cases} s_i, & \text{if } c_{i,\tau i} = 2\,(i.e., \tau i = i), \\ s_i s_{\tau i}, & \text{if } c_{i,\tau i} = 0, \\ s_i s_{\tau i} s_i, & \text{if } c_{i,\tau i} = -1. \end{cases} \tag{2.9}$$

众所周知，与 $(\mathbb{I},\ \tau)$ 相关联的限制 Weyl 群可识别为 W 的以下子群 W_τ：

$$W_\tau = \{w \in W \mid \tau w = w\tau\}, \tag{2.10}$$

其中，τ 被视为根格 $\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$ 的一个自同构。此外，限制 Weyl 群 W_τ 可识别为一个 Weyl 群，其简单反射为 r_i（$i \in \mathbb{I}_\tau$）。

与 Satake图（$\mathbb{I}$，τ）相关联，遵循 [LW22a]，我们将普适 i 量子群 $\widehat{\mathbf{U}}^\imath$（分别为 $\widetilde{\mathbf{U}}^\imath$）定义为 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$ 子代数，它是 $\widehat{\mathbf{U}}$（分别为 $\widetilde{\mathbf{U}}$）由以下元素生成的子代数

$$B_i = F_i + E_{\tau i} K_i', \qquad \widetilde{k}_i = K_i K_{\tau i}', \quad \forall i \in \mathbb{I}, \tag{2.11}$$

（其中 $\widetilde{k}_i$ 在 $\widetilde{\mathbf{U}}^\imath$ 中可逆）。令 $\widehat{\mathbf{U}}^{\imath 0}$ 为 $\widehat{\mathbf{U}}^\imath$ 的 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$ 子代数，由 $\widetilde{k}_i$ 生成，其中 $i \in \mathbb{I}$。类似地，令 $\widetilde{\mathbf{U}}^{\imath 0}$ 为 $\widetilde{\mathbf{U}}^\imath$ 的 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$ 子代数，由 $\widetilde{k}_i^{\pm 1}$ 生成，其中 $i \in \mathbb{I}$。代数 $\mathbf{U}^\imath$（分别为 $\mathbf{U}^\imath$）是 U 的右余理想子代数；对 $(\mathbf{U}, \mathbf{U}^\imath)$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$ 和 $(\mathbf{U},\mathbf{U}^\imath)$ 这两对称对称为量子对称对，而 $\mathbf{U}^\imath$ 和 $\mathbf{U}^\imath$ 称为泛（准分裂）i 量子群；若 τ =Id，则它们是分裂的。

对于 $i \in \mathbb{I}$，对于任意 $\alpha = \sum_{i\in\mathbb{I}} a_i \alpha_i \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$，我们设

$$\mathbb{K}_i = v^{\frac{1}{2} c_{i,\tau i}} \widetilde{k}_i, \qquad \mathbb{K}_\alpha := \prod_{i\in\mathbb{I}} \mathbb{K}_i^{a_i}. \tag{2.12}$$

设 $\varsigma = (\varsigma_i) \in (\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})^\times)^{\mathbb{I}}$ be 使得 $\varsigma_i = \varsigma_{\tau i}$ 对每个满足 $c_{i,\tau i} = 0$ 的 $i \in \mathbb{I}$ 都成立。Letzter-Kolb 型 i量子群 `a la Letzter-Kolb [Let99, Ko14] $\mathbf{U}^\imath = \mathbf{U}^\imath_\varsigma$ 是 U 的 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-子代数，由以下元素生成

$$B_i = F_i + \varsigma_i E_{\tau i} K_i^{-1}, \quad k_i = K_i K_{\tau i}^{-1}, \quad \forall i \in \mathbb{I}.$$

根据 [LW22a，命题 6。2]，该 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-代数 $\mathbf{U}^\imath$ 同构于 $\widetilde{\mathbf{U}}^\imath$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$模去由以下元素生成的理想：$k_i - \varsigma_i$（对于 $i = \tau i$）和 $k_i k_{\tau i} - \varsigma_i \varsigma_{\tau i}$（对于 $i \neq \tau i$）。

引理 2.5（例如参见 [CLPRW25，引理 3。9]）。

$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$ *(1)* 存在一个反对合 $\sigma^\imath$，作用于 $U^\imath$（以及 $U^\imath$），其定义为 $\sigma^\imath(B_i) = B_i$，$\sim$ $\sim\sigma^\imath(k_i) = k_{\tau i}$，其中 $i \in \mathbb{I}$。$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$ *(2)* 存在一个反对合（称为横线对合）：$u \mapsto u$，作用于 $U^\imath$（以及 $U^\imath$），其定义为 $v^{1/2} = v^{-1/2}$，$B_i = B_i$，以及 $\mathbb{K}_i = \mathbb{K}_i$，其中 $i \in \mathbb{I}$。特别地，$\widetilde{k}_i = v^{c_i}$，$\overline{\ }$ $\overline{\ }$ $\tau i \widetilde{k}_i$。*(3)* 存在一个对合 $\psi^\imath$，作用于 $\widetilde{U}^\imath$，使得 $\psi^\imath(v^{1/2}) = v^{-1/2}$，$\psi^\imath(B_i) = B_i$，$\sim$ $\sim\psi^\imath(k_i) = v^{c_i}$，$_i$ $\tau i k_{\tau i}$，其中 $i \in \mathbb{I}$。

例 2.6。（量子群作为对角型 i 量子群）考虑$\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-子代数 $(\widetilde{\mathbf{U}}\otimes\widetilde{\mathbf{U}})^\imath$ 的 $\widetilde{\mathbf{U}}\otimes\widetilde{\mathbf{U}}$ 由……生成

$$\widetilde{\mathcal{K}}_i := K_iK'_{i^\diamond}, \quad \widetilde{\mathcal{K}}'_i := K_{i^\diamond}K'_i, \quad \mathcal{B}_i := F_i + E_{i^\diamond}K'_i, \quad \mathcal{B}_{i^\diamond} := F_{i^\diamond} + E_iK'_{i^\diamond}, \qquad \forall i \in \mathbb{I}.$$

这里省略张量积记号，改用 $i^\diamond$ 为第二个 $\widetilde{\mathbf{U}}$ 副本中的生成元编编号，这个副本位于 $\widetilde{\mathbf{U}}\otimes\widetilde{\mathbf{U}}$ 中。存在一个 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-代数同构 $\widetilde{\phi}\colon \widetilde{\mathbf{U}}\to(\widetilde{\mathbf{U}}\otimes\widetilde{\mathbf{U}})^\imath$，使得

$$\widetilde{\phi}(E_i) = \mathcal{B}_i, \quad \widetilde{\phi}(F_i) = \mathcal{B}_{i^\diamond}, \quad \widetilde{\phi}(K_i) = \widetilde{\mathcal{K}}'_i, \quad \widetilde{\phi}(K'_i) = \widetilde{\mathcal{K}}_i, \qquad \forall i \in \mathbb{I}.$$

在此情形下，*Satake*图为($\mathbb{I}\sqcup\mathbb{I}^\diamond$,交换)，其中 $\mathbb{I}^\diamond$ 是 $\mathbf{U}$ 的一个 $\mathbb{I}$ 副本。

2.3. 相对辫群对称。为每个 τ-轨道在$\mathbb{I}$上选取一个代表，并令

$$\mathbb{I}_\tau = \{\text{the chosen representatives of } \tau\text{-orbits in } \mathbb{I}\}. \tag{2.13}$$

与相对Weyl群 W_τ 对应的辫群记作

$$\mathrm{Br}(W_\tau) = \langle \mathbf{r}_i \mid i \in \mathbb{I}_\tau \rangle \tag{2.14}$$

其中 $\mathbf{r}_i$ 满足与 W_τ 中的 r_i 相同的辫关系。相对辫（或 ibraid）群对称 $\widetilde{\mathbf{T}}'_{i,e}$ 和 $\widetilde{\mathbf{T}}''_{i,e}$ $(i \in \mathbb{I},\ e \in \{+1,-1\})$作用于 $\widetilde{\mathbf{U}}^\imath$，已在 [LW22a, WZ23]（以及 [Z23]）中确立；关于具有特定参数的 i量子群的早期猜想，参见 [KP11]。本文还将使用 $\mathbf{U}^\imath$ 的这些 ibraid群对称的 bar等变版本。

拟K矩阵此前曾以不同的表述出现；参见 [BW18a、BK19、AV22]。我们将需要以下内容。

命题 2.7（[WZ23，定理 3。6]）。存在唯一的元素 $\Upsilon = \sum_{\mu\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}}\Upsilon^\mu$（称为拟*K*矩阵），使得 $\Upsilon^0 = 1$，$\Upsilon^\mu \in \mathbf{U}^+_\mu$ 并且满足以下恒等式：

$$B_i\widetilde{\Upsilon} = \widetilde{\Upsilon}B_i^\sigma, \qquad (i \in \mathbb{I}), \tag{2.15}$$

$$x\widetilde{\Upsilon} = \widetilde{\Upsilon}x, \qquad (x \in \widetilde{\mathbf{U}}^{\imath 0}), \tag{2.16}$$

其中 $B_i^\sigma := \sigma(B_i) = F_i + K_iE_{\tau i}$。此外，$\Upsilon^\mu = 0$ 除非 $\tau(\mu) = \mu$。

记 $\mathbf{U}_{i,\,\tau i}$ 为与 $\mathbb{I}_i = \{i, \tau i\}$相关联的量子群。令 Υ_i 为与 $\mathbb{I}_i = \{i, \tau i\}$相关联的秩一拟K矩阵，即 $\Upsilon_i = \sum_{\mu\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}}\Upsilon_i^\mu$，其中 $\Upsilon_i^\mu \in \mathbf{U}^+_{i,\,\tau i}$，以及 $\Upsilon_i^0 = 1$。定义特征参数 $\varsigma_\diamond = (\varsigma_{i,\,\diamond})_{i\in\mathbb{I}}$ 如下：

$$\varsigma_{i,\diamond} = v^{-\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_{\tau i})}. \tag{2.17}$$

回顾一下自同构$\Psi_{\varsigma_\diamond}$ 的定义，它作用于$\mathbf{U}$，见引理2.2。我们令

$$\widetilde{\mathscr{T}_i} := \widetilde{\Psi}^{-1}_{\varsigma_\diamond}\circ\widetilde{T}_i\circ\widetilde{\Psi}_{\varsigma_\diamond}, \qquad \widetilde{\mathscr{T}_i}^{-1} := \widetilde{\Psi}^{-1}_{\varsigma_\diamond}\circ\widetilde{T}^{-1}_i\circ\widetilde{\Psi}_{\varsigma_\diamond}. \tag{2.18}$$

显然，对于 $i \in \mathbb{I}$，$\widetilde{\mathscr{T}_i}$ 和 $\widetilde{\mathscr{T}_i}^{-1}$ 是 $\widetilde{\mathbf{U}}$ 的自同构，并满足辫群关系。因此，我们可以定义 $\mathscr{T}_w := \mathscr{T}_{i_1}\cdots\mathscr{T}_{i_r}$，其中 $w = s_{i_1}\cdots s_{i_r}$是任意一个约化表达式。

定理 2.8 (参见 [WZ23, Z23])。 对于 $i \in \mathbb{I}$，存在互逆的自同构 $\widetilde{\mathbf{T}}_i$ 和 $\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}$，作用于 $\widetilde{\mathbf{U}}^\imath$，使得

$$\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x)\widetilde{\Upsilon}_i = \widetilde{\Upsilon}_i \widetilde{\mathscr{T}}_{\mathbf{r}_i}^{-1}(x), \tag{2.19}$$

$$\widetilde{\mathbf{T}}_i(x)\widetilde{\mathscr{T}}_i^{-1}(\widetilde{\Upsilon}_i)^{-1} = \widetilde{\mathscr{T}}_i^{-1}(\widetilde{\Upsilon}_i)^{-1}\widetilde{\mathscr{T}}_{\mathbf{r}_i}(x). \tag{2.20}$$

此外，我们有 $\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1} = \sigma^\imath \circ \widetilde{\mathbf{T}}_i \circ \sigma^\imath$，并且存在一个群同态 $\mathrm{Br}(W_\tau) \to \widetilde{\mathrm{Aut}}(\mathbf{U}^\imath)$，$\mathbf{r}_i \mapsto \mathbf{T}_i$ *for* $i \in \mathbb{I}$。

将 τ_i 记作由 $\mathbb{I}_i := \{i, \tau i\}$ 定义的图 involution：

$$r_i(\alpha_i) = -\alpha_{\tau_i(i)}, \qquad r_i(\alpha_{\tau i}) = -\alpha_{\tau_i(\tau i)}. \tag{2.21}$$

命题 2.9 ([WZ23，命题 4.11，定理 4.14])。 对于 $i, j \in \mathbb{I}$，我们有 $\widetilde{\mathbf{T}}_i(\mathbb{K}_j) = \mathbb{K}_{r_i(\alpha_j)}$ 并且

$$\widetilde{\mathbf{T}}_i(B_i) = v^{\frac{1}{2}(\alpha_i - \alpha_{\tau i}, \alpha_i)}\mathbb{K}_{\tau_i(i)}^{-1} B_{\tau_i(\tau i)}, \quad \widetilde{\mathbf{T}}_i(B_{\tau i}) = v^{\frac{1}{2}(\alpha_i - \alpha_{\tau i}, \alpha_i)}\mathbb{K}_{\tau_i(\tau i)}^{-1} B_{\tau_i(i)}.$$

引理 2.10 (参见 [CLPRW25])。 辫群作用 $\widetilde{\mathbf{T}}_i$ 与 *bar*-$\widetilde{\ }$ 对合相交换，即 $\widetilde{\mathbf{T}}_i(u) = \widetilde{\mathbf{T}}_i(\overline{u})$ 对任意 $u \in \mathbf{U}^\imath$。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$对应于 Lusztig 辫群对称性 $T'_{i,\,e}$，$T''_{i,\,e}$ 作用于 $\mathbf{U}$上，如 [LW22b、WZ23、Z23],中所示，我们定义

$$\widetilde{\mathbf{T}}'_{i,1} = \widetilde{\mathbf{T}}_i, \quad \widetilde{\mathbf{T}}''_{i,-1} = \widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}, \tag{2.22}$$

$$\widetilde{\mathbf{T}}'_{i,-1} = \psi^\imath \circ \widetilde{\mathbf{T}}_i \circ \psi^\imath, \quad \widetilde{\mathbf{T}}''_{i,1} = \psi^\imath \circ \widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1} \circ \psi^\imath. \tag{2.23}$$

此外，我们有

$$\widetilde{\mathbf{T}}'_{i,e} = \sigma^\imath \circ \mathbf{T}''_{i,-e} \circ \sigma^\imath, \quad e \in \{+1, -1\}, i \in \mathbb{I}.$$

$\widetilde{\ }'$ $\widetilde{\ }''$于是，所有辫群作用 $\mathbf{T}_{i,\,e}$，$\mathbf{T}_{i,\,e}$ 都与横线对合交换，因为 $\sigma^\imath$，$\psi^\imath$与横线对合交换。

2.4. **定义在 B 上的 iHopf 代数**。 回顾 Cartan 矩阵 $C = (c_{ij})$ 和 $D = \mathrm{diag}(d_i \mid i \in \mathbb{I})$。令 $'\mathbf{f}$ 为自由结合 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-代数，其生成元为 $\theta_i (i \in \mathbb{I})$；参见 [Lus93，第 1]章。我们将 θ_i 的一个重标度版本记作

$$\vartheta_i = (v_i - v_i^{-1})\theta_i. \tag{2.24}$$

令 $'\widehat{\mathbf{B}}$ 为由 ϑ_i，$h_i (i \in \mathbb{I})$ 生成的 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-代数，满足

$$[h_i, h_j] = 0, \qquad h_i\vartheta_j = v_i^{c_{ij}}\vartheta_j h_i.$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$设$\mathbf{f}$（分别地，$\mathbf{B}$）为 $'\mathbf{f}$（分别地，$'\mathbf{B}$）关于由.....生成的理想所得的商代数

$$\sum_{r=0}^{1-c_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-c_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{v_i} \vartheta_i^r \vartheta_j \vartheta_i^{1-c_{ij}-r}, \qquad \forall i \neq j. \tag{2.25}$$

我们通过令 $\mathrm{wt}(\vartheta_i) = \alpha_i$，为$\mathbf{f}$ 赋予一个 $\mathbb{N}^{\mathbb{I}}$ 分次。令$\mathbf{f}_\mu$ 为次数为 μ 的齐次子空间。于是$\mathbf{f} = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}} \mathbf{f}_\mu$。

令 $r:\ \mathbf{f}\ \to \mathbf{f}\ \otimes \mathbf{f}$ 为 Lusztig 定义的同态 [Lus93，1.2。6]。用 Sweedler 记号，我们将 $r(x)\ =\sum x_{(1)}\otimes x_{(2)}$ 表示任意 $x\in\mathbf{f}$。于是，$\mathbf{B}$ 的余乘法满足

$$\Delta(x)=\sum x_{(1)}h_{\mathrm{wt}(x_{(2)})}\otimes x_{(2)},\qquad \Delta^2(x)=\sum x_{(1)}h_{\mathrm{wt}(x_{(2)})}h_{\mathrm{wt}(x_{(3)})}\otimes x_{(2)}h_{\mathrm{wt}(x_{(3)})}\otimes x_{(3)}.$$

这一约定大大提高了计算的清晰度，并将在本文中始终采用。

我们将...视为
ɒɋɔɓʊifiers?

$$\mathbf{f}\xrightarrow{\cong}\mathbf{U}^+,\ \vartheta_i\mapsto\vartheta_i^+:=E_i,\qquad \mathbf{f}\xrightarrow{\cong}\mathbf{U}^-,\ \vartheta_i\mapsto\vartheta_i^-:=F_i. \tag{2.26}$$

那么我们有 $\widehat{\mathbf{B}}\cong\mathbf{U}^+\otimes\mathbb{Q}(v^{\frac12})[K_i\mid i\in\mathbb{I}]$。

设 $\widehat{\mathbf{B}}$（分别地，$\widetilde{\mathbf{B}}$）是由 $\mathbf{B}$（分别地，$\mathbf{B}'$）构造得到的代数，其中 h_i 对 $i\in\mathbb{I}$ 可逆。定义余乘法和余单位

$$\Delta(\vartheta_i)=\vartheta_i\otimes 1+h_i\otimes\vartheta_i,\qquad \Delta(h_i)=h_i\otimes h_i,\quad \forall i\in\mathbb{I}; \tag{2.27}$$

$$\varepsilon(\vartheta_i)=0,\qquad \varepsilon(h_i)=1=\varepsilon(h_i^{-1}),\quad \forall i\in\mathbb{I}. \tag{2.28}$$

由此，$\mathbf{B}'$，$\mathbf{B}$ $\mathbf{B}'$，$\mathbf{B}$ 都是 Hopf 代数。定义

$$\varphi(\vartheta_i,\vartheta_j)=\delta_{ij}(v_i-v_i^{-1}),\quad \varphi(h_i,h_j)=v_i^{c_{ij}},\quad \varphi(\vartheta_i,h_j)=0,\quad \forall i,j\in\mathbb{I},x,y\in\mathbf{f}. \tag{2.29}$$

于是，它在 Hopf 代数 $\mathbf{B}'$，$\mathbf{B}'\mathbf{B}$，以及$\mathbf{B}$上给出了（对称）Hopf 配对。此外，$\widehat{\mathbf{B}}\otimes\widetilde{\mathbf{B}}$ 这些 Hopf 配对在$\mathbf{B}$和$\mathbf{B}$上是非退化的。

令 $(\mathbf{B}\otimes\mathbf{B})^\imath$ 和 $(\widehat{\mathbf{B}})^\imath$ 为对角型 iHopf 代数，分别与 $(\mathbf{B},\varphi)^\sim$ 和 $(\mathbf{B},\varphi)$ 相关；见 [CLPRW25，§4。1]事实上，$(\mathbf{B}\otimes\mathbf{B})^\imath$ 定义在与 $\widehat{\mathbf{B}}$ 相同的向量空间上，$\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}$ 并配备了新的乘法

$$(a\otimes b)*(c\otimes d)=\sum\varphi(a_{(1)},d_{(2)})\cdot\varphi(c_{(2)},b_{(1)})\cdot a_{(2)}c_{(1)}\otimes b_{(2)}d_{(1)},\qquad \forall a,b,c,d\in\widehat{\mathbf{B}}.$$

$(\mathbf{B}\otimes\mathbf{B})^\imath$ 的情形类似。

引理 2.11 ([CLPRW25，引理 4。1])。 我们有 *Hopf* 代数同构

$$\widehat{\Phi}_\sharp:\widehat{\mathbf{U}}\longrightarrow(\widehat{\mathbf{B}}\otimes\widehat{\mathbf{B}})^\imath,\qquad \widetilde{\Phi}_\sharp:\widetilde{\mathbf{U}}\longrightarrow(\widetilde{\mathbf{B}}\otimes\widetilde{\mathbf{B}})^\imath,$$
$$E_i\mapsto\vartheta_i\otimes 1,\quad F_i\mapsto 1\otimes\vartheta_i,\quad K_i\mapsto h_i\otimes 1,\quad K_i'\mapsto 1\otimes h_i,\quad \forall i\in\mathbb{I}.$$

设 τ 是 Inv(C)中的一个对合。显然 τ 保持 Hopf 配对 φ。根据 [CLPRW25]，中 iHopf 代数的构造，我们记

$$\widehat{\mathbf{B}}^\imath_\tau=\mathrm{iHopf}\left(\widehat{\mathbf{B}},\varphi\circ(\tau\otimes 1)\right),\qquad \widetilde{\mathbf{B}}^\imath_\tau=\mathrm{iHopf}\left(\widetilde{\mathbf{B}},\varphi\circ(\tau\otimes 1)\right)$$

分别定义在 $\left(\widehat{\mathbf{B}},\varphi\circ(\tau\otimes 1)\right)$ 和 $\left(\widetilde{\mathbf{B}},\varphi\circ(\tau\otimes 1)\right)$ 上的 iHopf 代数。事实上，$\widehat{\mathbf{B}}^\imath_\tau$ 与 $\mathbf{B}$ 是同一个向量空间，只是配备了新的乘法：

$$a*b:=\sum\varphi(\tau b_{(2)},a_{(1)})\cdot a_{(2)}b_{(1)},\quad \forall a,b\in\widehat{\mathbf{B}}, \tag{2.30}$$

其中 $\Delta(a)\ =\sum a_{(1)}\otimes a_{(2)}$，$\Delta(b)\ =\sum b_{(1)}\otimes b_{(2)}$。$\mathbf{B}^\imath_\tau$. 也类似

定理 2.12 ([CLPRW25，定理 4。4])。 我们有代数同构 s

$$\widehat{\Phi}^\imath : \widehat{\mathbf{B}}^\imath_\tau \longrightarrow \widehat{\mathbf{U}}^\imath, \qquad \widetilde{\Phi}^\imath : \widetilde{\mathbf{B}}^\imath_\tau \longrightarrow \widetilde{\mathbf{U}}^\imath,$$
$$\vartheta_i \mapsto B_i, \qquad h_i \mapsto \widetilde{k}_{\tau i}, \quad \forall i \in \mathbb{I}.$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$在下文中，我们总是将 $\mathbf{U}^\imath \equiv \mathbf{B}^\imath_\tau$ 与 $\mathbf{U}^\imath \equiv \mathbf{B}^\imath_\tau$ 视为相同。

将 $\chi\colon \widehat{\mathbf{B}} \to \mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$（分别地，$\chi\colon \widetilde{\mathbf{B}} \to \mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$）记为 τ-扭曲相容线性映射，该映射见 [CLPRW25，引理 4.2]。也就是说，$\chi\colon \widehat{\mathbf{B}} \to \mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$ 是满足以下条件的线性映射：$\chi(1) = 1$, $\chi(\vartheta_i) = 0$, $\chi(h_i) = \varphi(h_i, h_{\tau i})$，对于 $i \in \mathbb{I}$，并且 $\chi(ab) = \sum \chi(a_{(1)})\chi(b_{(2)})\varphi(\tau(a_{(2)})\ b_{(1)})$ 对所有 $a, b \in \mathbf{B}$ 均成立。（将 $\mathbf{B}$ 替换为 $\mathbf{B}$ 时，同样的结论也成立。）

引理 2.13 ([CLPRW25，引理 4.3，定理 4。4])。 存在代数同态

$$\widehat{\xi}_\tau : \widehat{\mathbf{B}}^\imath \longrightarrow (\widehat{\mathbf{B}} \otimes \widehat{\mathbf{B}})^\imath, \qquad \widetilde{\xi}_\tau : \widetilde{\mathbf{B}}^\imath_\tau \longrightarrow (\widetilde{\mathbf{B}} \otimes \widetilde{\mathbf{B}})^\imath \tag{2.31}$$

它们分别将 $a \mapsto \sum \chi(a_{(2)}) \cdot \tau(a_{(3)}) \otimes a_{(1)}$ 映射到……。特别地，我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbf{B}}^\imath_\tau & \xrightarrow{\widehat{\xi}_\tau} & (\widehat{\mathbf{B}} \otimes \widehat{\mathbf{B}})^\imath \\ {\scriptstyle \widehat{\Phi}^\imath}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{\Phi}^{-1}_\sharp} \\ \widehat{\mathbf{U}}^\imath & \hookrightarrow & \widehat{\mathbf{U}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbf{B}}^\imath_\tau & \xrightarrow{\widetilde{\xi}_\tau} & (\widetilde{\mathbf{B}} \otimes \widetilde{\mathbf{B}})^\imath \\ {\scriptstyle \widetilde{\Phi}^\imath}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\Phi}^{-1}_\sharp} \\ \widetilde{\mathbf{U}}^\imath & \hookrightarrow & \widetilde{\mathbf{U}} \end{array} \tag{2.32}$$

2.5. **递归公式与 $\diamond$-作用。** 对于代数 $\mathbf{f}$，存在称为斜导子的线性映射（参见 [Lus93]）

$$\partial_i^R : \mathbf{f} \longrightarrow \mathbf{f}, \qquad \partial_i^L : \mathbf{f} \longrightarrow \mathbf{f}$$

使得 $\partial_i^R(1) = \partial_i^L(1) = 0$, $\partial_i^R(\vartheta_j) = \delta_{ij} = \partial_i^L(\vartheta_j)$，并且

$$\partial_i^R(fg) = \partial_i^R(f)g + v^{(\alpha_i,\mu)} f \partial_i^R(g),$$
$$\partial_i^L(fg) = v^{(\alpha_i,\nu)} \partial_i^L(f)g + f\partial_i^L(g),$$

对于任意 $j \in \mathbb{I}, f \in \mathbf{f}_\mu, g \in \mathbf{f}_\nu$。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$请注意，两个代数 $(\mathbf{B}\ \cdot)$ 和 $(\mathbf{B}^\imath_\tau,\ *)$ 具有相同的底层向量空间（其中包含$\mathbf{f}$ 作为一个子空间）。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$**引理 2.14** ([CLPRW25，引理 4。5])。 在 $\mathbf{B}^\imath_\tau$ (以及 $\mathbf{B}^\imath_\tau$) 中，对于 $x \in \mathbf{f}$ 和 $i \in \mathbb{I}$，有

$$\vartheta_i * x = \vartheta_i \cdot x + (v_i - v_i^{-1})\partial^L_{\tau i}(x) \cdot h_{\tau i},$$
$$x * \vartheta_i = x \cdot \vartheta_i + (v_i - v_i^{-1})\partial^R_{\tau i}(x) \cdot h_i.$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$**引理 2.15。** $\mathbf{B}^\imath_\tau$ （$\mathbf{B}^\imath_\tau$上也存在）上存在一个横线对合，它是 $\mathbb{Q}$-代数的反对合，使得

$$\overline{v^{1/2}} = v^{-1/2}, \quad \overline{\vartheta_i} = \vartheta_i, \quad \overline{h_\alpha} = v^{(\alpha,\tau\alpha)} h_\alpha, \qquad for\ i \in \mathbb{I}, \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}.$$

证明。 由引理 2.5 中的（2）以及定理 2.12中的同构可得。 □

~ ~令 $\mathcal{T}$为由 h_α、 $\alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$生成的 $\mathbf{B}^\imath_\tau$ 的子代数，它是关于 h_i 的 Laurent 多项式^ ^代数，其中 $i \in \mathbb{I}$。类似地，可以定义 $\mathbf{B}^\imath_\tau$ 的子代数 $\mathcal{T}$，它是关于 h_i 的^ ^多项式代数，其中 $i \in \mathbb{I}$。我们通过令 $\diamond$对 $\mathbf{B}^\imath_\tau$ 的 $\mathcal{T}$作用为

$$h_\alpha \diamond x := v^{\frac{1}{2}(\tau\alpha-\alpha,\mathrm{wt}(x))} \cdot h_\alpha * x, \tag{2.33}$$

对于 $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$ 和 $x \in \widehat{\mathbf{B}}$。 $\widetilde{\mathcal{T}}$在 $\widetilde{\mathbf{B}}^\imath_\tau$ 上的 $\diamond$-作用类似地定义。

引理 2.16. 对于 $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$和 $x \in \widehat{\mathbf{B}}$，有 $h_\alpha \diamond x = h_\alpha \diamond x$。

证明。 假设 x 是齐次的，并注意到 wt(x) =wt(x)。应用引理 2.15中定义的横线对合，我们得到

$$\begin{aligned}\overline{h_\alpha \diamond x} &= v^{-\frac{1}{2}(\tau\alpha-\alpha,\mathrm{wt}(x))} v^{(\alpha,\tau\alpha)} \overline{x} * h_\alpha \\ &= v^{-\frac{1}{2}(\tau\alpha-\alpha,\mathrm{wt}(x))} v^{(\alpha,\tau\alpha)} v^{(\tau\alpha-\alpha,\mathrm{wt}(x))} h_\alpha * \overline{x} \\ &= v^{\frac{1}{2}(\tau\alpha-\alpha,\mathrm{wt}(x))} v^{(\alpha,\tau\alpha)} h_\alpha * \overline{x} = \overline{h_\alpha} \diamond \overline{x}.\end{aligned}$$

引理得证。 □

对于 $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$，注意到

$$\mathbb{K}_\alpha = v^{\frac{1}{2}(\alpha,\tau\alpha)} h_{\tau\alpha}$$

是 $\widehat{\mathcal{T}}$中形如 $\mathbb{K}_\alpha = \lambda h_{\tau\alpha}$（其中 $\lambda \in v^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$）的唯一 bar 不变元。 -

3. iBraid group symmetries on $\widetilde{\mathbf{U}}^\imath$ via iHopf algebra

本节将给出 i量子群上 i辫群作用的 iHopf 代数诠释，从而建立其与量子群辫群作用之间的新联系。

3.1. 通过 iHopf 连接两个辫群作用。令 $j \neq i$， τi 在本节中属于 $\mathbb{I}$。在 f 中定义根向量：

$$f_{i,j;m} = \sum_{r+s=m} (-1)^r v_i^{r(c_{ij}+m-1)+\frac{1}{2}m} (v_i - v_i^{-1})^{-m} \vartheta_i^{(r)} \vartheta_j \vartheta_i^{(s)}, \tag{3.1}$$

$$f'_{i,j;m} = \sum_{r+s=m} (-1)^r v_i^{r(c_{ij}+m-1)+\frac{1}{2}m} (v_i - v_i^{-1})^{-m} \vartheta_i^{(s)} \vartheta_j \vartheta_i^{(r)}, \tag{3.2}$$

它们是 Lusztig 定义的略微标准化版本 [Lus93]。根据~Lus93 [中的相同证明，命题 37.2。5],重标定后的辫群对称性 T_i 满足

$$\widetilde{T}_i(f^+_{i,j;m}) = f'^+_{i,j,-c_{ij}-m}, \qquad \forall m, n \in \mathbb{Z}. \tag{3.3}$$

L令 ad：f $\to$f 表示通过恒等同构 f $\cong$ $\mathbf{U}^+$得到的伴随作用；其定义为

$$\mathrm{ad}(\vartheta_i)(x) = \vartheta_i x - h_i x h_i^{-1} \vartheta_i. \tag{3.4}$$

回顾引理 σ 中的反对合 2.1，我们有

$$f_{i,j;m} = v_i^{\frac{1}{2}m} (v_i - v_i^{-1})^{-m} \sigma\big(\mathrm{ad}(\vartheta_i^{(m)})(\vartheta_j)\big), \quad f'_{i,j;m} = v_i^{\frac{1}{2}m} (v_i - v_i^{-1})^{-m} \mathrm{ad}(\vartheta_i^{(m)})(\vartheta_j). \tag{3.5}$$

$\widetilde{\mathbf{U}}$上的 $_i$ i-辫群对称性 $\mathbf{T}^\imath$ 可通过同构$\mathbf{B}^\imath_\tau$ 传递到
$\widehat{\widetilde{\Phi}}^\imath$： $\mathbf{B}^\imath_\tau \xrightarrow{\sim} \mathbf{U}^\imath$ 在定理 2.12中。回顾 $\mathbb{K}_\alpha \in \mathbf{U}^\imath$ （2.12）中的，我们定义

$$\mathbb{K}_\alpha := v^{\frac{1}{2}(\alpha,\tau\alpha)} h_{\tau\alpha} \in \widetilde{\mathbf{B}}^\imath_\tau \tag{3.6}$$

$\widehat{\Phi}^\imath(\mathbb{K}_\alpha) = \mathbb{K}_{\alpha\circ}$ 那么 $\mathbf{T}_i(\mathbb{K}_\alpha) = \mathbb{K}_{r_i\alpha}$ 使得
属于 $\mathbf{B}^\imath_\tau$；定义见（2.9）中的 r_i。记

$$\iota : \mathbf{f} \longrightarrow \widetilde{\mathbf{B}}^\imath_\tau \tag{3.7}$$

典范嵌入。

3.2. **子代数 $\mathbf{f}[i,\tau i]$和 $^\sigma\mathbf{f}[i,\tau i]$。** 对于 $i \in \mathbb{I}$，令 $\mathbf{U}_{i,\tau i}$为由 K_j, K'_j, E_j, F_j生成的 $\mathbf{U}$ 的子代数，其中 $j \in \{i, \tau i\}$。此外，令 $\mathbf{f}_{i,\tau i}$为由 $\vartheta_i, \vartheta_{\tau i}$生成的 $\mathbf{f}$ 的子代数。也就是说，

$$\widehat{\mathbf{U}}_{i,\tau i} = \mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})\langle K_j, K'_j, E_j, F_j \mid j \in \{i,\tau i\}\rangle; \qquad \mathbf{f}_{i,\tau i} = \mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})\langle \vartheta_i, \vartheta_{\tau i}\rangle. \tag{3.8}$$

我们进一步定义

$$\mathbf{f}[i,\tau i] := \{x \in \mathbf{f} \mid \widetilde{T}_{r_i}(x^+) \in \mathbf{U}^+\}, \qquad {}^\sigma\mathbf{f}[i,\tau i] := \{x \in \mathbf{f} \mid \widetilde{T}^{-1}_{r_i}(x^+) \in \mathbf{U}^+\}, \tag{3.9}$$

它们是 $\mathbf{f}$ 的子代数，因为 T_{r_i} 是代数同态。回忆引理 2.1中的对合
$\widetilde{\omega}$ 作用在$\widetilde{\mathbf{U}}$ 上。由于 $T^{-1}_{r_i} = \sigma\circ T_{r_i}\circ\sigma$，可知 $^\sigma\mathbf{f}[i,\tau i] = \sigma(\mathbf{f}[i,\tau i])$ 和 σ 在 $\mathbf{f}[i,\tau i]$与 $^\sigma\mathbf{f}[i,\tau i]$之间诱导反同构。

在以下几个小节中，我们将聚焦于子代数 $^\sigma\mathbf{f}[i,\tau i]$，并研究其上的相对辫群作用。为此，我们首先给出 $^\sigma\mathbf{f}[i,\tau i]$的一个生成集，它由某些根向量构成，这些根向量已在 [CLPRW25，§4]中进行了深入研究。

- 若 $c_{i,\ \tau i} = 2$，则根向量 $f_{i,\ j;\ m}$， $f'_{i,\ j;\ m}$ 由（3.1）– （3.2）或（3.5）给出。
- 若 $c_{i,\ \tau i} = 0$，则对于 m， $n \in \mathbb{Z}$ 定义

$$\begin{aligned} f_{i,\tau i,j;m,n} &= v_i^{\frac{1}{2}(m+n)}(v_i - v_i^{-1})^{-(m+n)}\sigma(\mathrm{ad}(\vartheta_i^{(m)}\vartheta_{\tau i}^{(n)})(\vartheta_j)), \\ f'_{i,\tau i,j;m,n} &= v_i^{\frac{1}{2}(m+n)}(v_i - v_i^{-1})^{-(m+n)}\,\mathrm{ad}(\vartheta_i^{(m)}\vartheta_{\tau i}^{(n)})(\vartheta_j). \end{aligned} \tag{3.10}$$

- 若 $c_{i,\ \tau i} = -1$，则对于 a， b， $c \in \mathbb{Z}$ 定义

$$\begin{aligned} f_{i,\tau i,j;a,b,c} &= v_i^{\frac{1}{2}(a+b+c)}(v_i - v_i^{-1})^{-(a+b+c)}\sigma(\mathrm{ad}(\vartheta_i^{(a)}\vartheta_{\tau i}^{(b)}\vartheta_i^{(c)})(\vartheta_j)), \\ f'_{i,\tau i,j;a,b,c} &= v_i^{\frac{1}{2}(a+b+c)}(v_i - v_i^{-1})^{-(a+b+c)}\,\mathrm{ad}(\vartheta_i^{(a)}\vartheta_{\tau i}^{(b)}\vartheta_i^{(c)})(\vartheta_j). \end{aligned} \tag{3.11}$$

回顾一下 $\mathbb{I}_i = \{i, \tau i\}$。现在定义 $^\sigma\mathbf{f}[i,\tau i]$ 的一个子集 $^\sigma R_{i,\ \tau i}$，其定义如下：

$${}^\sigma R_{i,\tau i} := \begin{cases} \{f'_{i,j;m} \mid m \in \mathbb{Z}, j \notin \mathbb{I}_i\} & \text{if } i = \tau i, \\ \{f'_{i,\tau i,j;m,n} \mid m,n \in \mathbb{Z}, j \notin \mathbb{I}_i\} & \text{if } c_{i,\tau i} = 0, \\ \{f'_{i,\tau i,j;a,b,c}, f'_{\tau i,i,j;a,b,c} \mid a,b,c \in \mathbb{Z}, j \notin \mathbb{I}_i\} & \text{if } c_{i,\tau i} = -1. \end{cases}$$

以下论述似乎是众所周知的；在 $i = \tau i$ 的情况下，可见于 [Lus93，38.1.2、38.1.6]。它可以由 [BG17a 的猜想 5 推出。3], 该猜想由 [Tan17 的命题 210] 和 [Kim17 的定理 11] 独立证明。此外， [KY21的推论 2.3、(2.12)] 也给出了这一结果，并回引了 [Rad85]。

命题 3.1。 代数 ${}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i]$ 由集合 ${}^{\sigma}R_{i,\tau i}$生成。此外，以下乘法映射是线性同构

$$ {}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i]\otimes \mathbf{f}_{i,\tau i}\xrightarrow{\cong}\mathbf{f},\qquad \mathbf{f}_{i,\tau i}\otimes {}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i]\xrightarrow{\cong}\mathbf{f}. \tag{3.12}$$

3.3. **在 ${}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i]$ 上的相对辫群作用**。 回忆一下，由（2.31）可得嵌入 ξ_τ: $\widetilde{\mathbf{B}}^{\imath}_{\tau}\to(\mathbf{B}\otimes\mathbf{B})^{\imath}\equiv\mathbf{U}$，其中 $(\mathbf{B}\otimes\mathbf{B})^{\imath}$ 通过引理 **2.11** 中的同构与 U 等同。

引理 3.2。 对于 $x\in\mathbf{f}$，我们有

$$\widetilde{\xi}_\tau(x)\in x^{-}+\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}\setminus\{0\}}\mathbf{U}^{+}\mathbf{U}^{-}\cdot K'_{\alpha}.$$

证明。 对于 $x\in\mathbf{f}$， $\xi_\tau(x)$ 的定义变为

$$\widetilde{\xi}_\tau(x)=\sum\chi(x_{(2)}h_{\mathrm{wt}(x_{(3)})})\tau(x_{(3)})\otimes x_{(1)}h_{\mathrm{wt}(x_{(2)})}h_{\mathrm{wt}(x_{(3)})}.$$

回忆一下，我们将 $(\mathbf{B}\otimes\mathbf{B})^{\imath}$ 与 $\mathbf{U}$ 等同。注意，对于 a， $b\in\mathbf{f}$，元素 $a\otimes b$ 属于 $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}}\mathbf{U}^{+}\mathbf{U}^{-}\cdot K'_{\alpha}$，这是根据 $\mathrm{wt}(a)$ 和 $\mathrm{wt}(b)$ 进行归纳可得，因为

$$(a\otimes 1)*(1\otimes b)=\sum\varphi(a_{(1)},b_{(2)})a_{(2)}\otimes b_{(1)}=a\otimes b+\sum_{b_{(2)}\neq 1}\varphi(a_{(1)},b_{(2)})a_{(2)}\otimes b_{(1)}.$$

现在，若 $h_{\mathrm{wt}(x_{(2)})}h_{\mathrm{wt}(x_{(3)})}\neq 1$，则 $\tau(x_{(3)})\otimes x_{(1)}h_{\mathrm{wt}(x_{(2)})}h_{\mathrm{wt}(x_{(3)})}\in\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}\setminus\{0\}}\mathbf{U}^{+}\mathbf{U}^{-}\cdot K'_{\alpha}$。因此结论得证。□

回忆一下辫群对称性 $\mathscr{T}_{r_i}$ 在 $\mathbf{U}$ 上，参见（2.18）。注意， $\mathscr{T}_{r_i}$ 与 T_{r_i} 在 $\mathbf{U}^{-}$上一致。记

$$\Lambda_{i,\tau i}:=\mathbb{N}\alpha_i+\mathbb{N}\alpha_{\tau i},\qquad \Lambda[i,\tau i]:=\{\beta\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}\mid r_i(\beta)\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}\},$$
$$\Xi_i:=\{r_i(\beta)-\eta\mid\beta\in\Lambda[i,\tau i],\eta\in\Lambda_{i,\tau i}\}.$$

在下文中，我们通过引理 **2.11**中的同构 $\Phi_\sharp$，将 $\mathbf{U}$ 与 $(\mathbf{B}\otimes\mathbf{B})^{\imath}$ 对应起来。对于 x， $y\in\mathbf{B}$，我们将 $x\otimes y\in\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}$ 视为 $(\mathbf{B}\otimes\mathbf{B})^{\imath}=\mathbf{U}$中的一个元素。

引理 3.3. 对于任意 $\alpha_0\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}$， $\beta_0\in\Lambda[i,\tau i]$， $x\in{}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i]$， $y\in\mathbf{f}$，通过将 $x\otimes y\in\mathbf{U}$视为，我们有

$$\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}((x\otimes y)K'_{\alpha_0+\beta_0})\in\sum_{\gamma\in\Xi_i}\mathbf{U}^{+}\mathbf{U}^{-}\cdot K'_{\gamma}.$$

证明。 对于 $y=1$，结论显然。现在我们通过对 $\mathrm{wt}(y)$ 作归纳法来证明一般情形。注意

$$\begin{aligned}(x\otimes y)K'_{\alpha_0+\beta_0}&=(x\otimes 1)*(1\otimes y)K'_{\alpha+\beta}-\sum\varphi(x_{(1)},y_{(2)})(x_{(2)}\otimes y_{(1)}h_{\mathrm{wt}(y_{(2)})})K'_{\alpha_0+\beta_0}\\&\in(x\otimes 1)*(1\otimes y)K'_{\alpha_0+\beta_0}+\sum\mathbb{Q}(v)(x_{(2)}\otimes y_{(1)})K'_{\mathrm{wt}(y_{(2)})+\alpha_0+\beta_0}.\end{aligned}$$

对于首项 $(x\otimes 1)*(1\otimes y)K'_{\alpha_0+\beta_0}$，我们可以假设 $y=uy'$ 其中 $u\in\mathbf{f}_{i,\tau i}$且 $y'\in{}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i]$。于是

$$\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}((x\otimes 1)*(1\otimes y)K'_{\alpha_0+\beta_0})=\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}(x\otimes 1)*\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}(1\otimes u)*\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}(1\otimes y')K'_{r_i(\alpha_0+\beta_0)}$$

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$其中 $\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}(x\otimes 1)\in\mathbf{U}^+$, $\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}(1\otimes y')\in\mathbf{U}^-$，且 $\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}(1\otimes u)\in\sum_{\alpha\in\Lambda_{i,\tau i}}\mathbf{U}_{i^+,\tau i}^{+}K'^{-1}_{\alpha}$。因此，左边属于 $\sum_{\gamma\in\Xi_i}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\cdot K'_\gamma$。注意

$$r({}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i])\subseteq\mathbf{f}\otimes{}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i];$$

这由恒等映射 ${}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i]=\{x\in\mathbf{f}:\widetilde{T}_i^{-1}(x^+)\in\mathbf{U}^+,\widetilde{T}_{\tau i}^{-1}(x^+)\in\mathbf{U}^+\}$（参见[KY21，引理2.4]）得出，随后应用 [Lus93，38.1.8]。根据归纳假设，$\widetilde{\quad}$其他项 $\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}((x_{(2)}\otimes y_{(2)})K'_{\mathrm{wt}(y_{(1)})+\alpha_0+\beta_0})$ 也属于 $\sum_{\gamma\in\Xi_i}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\cdot K'_\gamma$。至此完成归纳步骤。□

推论 3.4. 对于任意 $x\in{}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i]$，有

$$\begin{aligned}\widetilde{\xi}_\tau(\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x))\widetilde{\Upsilon}_i&=\widetilde{\Upsilon}_i\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}(\widetilde{\xi}_\tau(x))\\&\in\widetilde{\Upsilon}_i\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x^-)+\sum_{\gamma\in\Xi_i\setminus\{0\}}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\cdot K'_\gamma.\end{aligned}\tag{3.13}$$

证明。注意，对于 $\gamma=r_i(\beta)-\eta\in\Xi_i$，有 $\gamma=0$ 当且仅当 $\beta=\eta=0$。因此引理3.3 推出

$$\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}(\widetilde{\xi}_\tau(x))\in\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x^-)+\sum_{\gamma\in\Xi_i\setminus\{0\}}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\cdot K'_\gamma,\quad\forall x\in{}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i].\tag{3.14}$$

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$现在，通过利用嵌入 3.13) 将 $\mathbf{U}^i$ 与$\mathbf{B}_\tau^i$ 对应起来，并应用定理 ξ_τ，2.8，即可得到该结论（□

引理 3.5。对于任意 $x\in{}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i]$，我们有

$$\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x)\in\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}-\Lambda_{i,\tau i}}h_\alpha*\mathbf{f}.$$

证明。根据 ${}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i]$的生成元在 [CLPRW25]中的结果（见 [CLPRW25，命题 5.5、5.10、5.15]），该结论对x成立。现在假设该结论对x、 $y\in{}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i]$成立，我们将证明它对乘积 xy也成立。

为此，我们有

$$\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x*y)=\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x)*\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(y)\in\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}-\Lambda_{i,\tau i}}h_\alpha*\mathbf{f}.$$

另一方面，根据（2.30）我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x*y)&=\sum\varphi(x_{(1)},y_{(2)})\,\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x_{(2)}y_{(1)}h_{\mathrm{wt}(y_{(2)})})\\&=\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(xy)+\sum_{y_{(2)}\neq 1}\varphi(x_{(1)},y_{(2)})\,\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x_{(2)}y_{(1)}h_{\mathrm{wt}(y_{(2)})}).\end{aligned}$$

注意到 $x_{(2)}$, $y_{(2)}\in{}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i]$，因此 $\mathrm{wt}(y_{(2)})\in\Lambda[i,\tau i]$。由于 $\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x_{(2)}y_{(1)})\in\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}-\Lambda_{i,\tau i}}h_\alpha*\mathbf{f}$，我们有 $\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x_{(2)}y_{(1)}h_{\mathrm{wt}(y_{(2)})})\in\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}-\Lambda_{i,\tau i}}h_\alpha*\mathbf{f}$。因此，引理中的陈述对 xy 成立。

□

推论 3.6. 对于任意 $x \in {}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i]$，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{\xi}_{\tau}\big(\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x)\big) &= \widetilde{\Upsilon}_i \widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}\big(\widetilde{\xi}_{\tau}(x)\big)\widetilde{\Upsilon}_i^{-1} \\ &\in \widetilde{\Upsilon}_i \widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x^-)\widetilde{\Upsilon}_i^{-1} + \sum_{\delta,\eta\in\Lambda_{i,\tau i},\gamma\in\Xi_i\setminus(-\Lambda_{i,\tau i})} \mathbf{U}^+\mathbf{U}^- \cdot K_{\delta}K'_{\gamma+\eta}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

证明。 由引理 3.5，对于任意 $x \in {}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i]$，我们可以写成

$$\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x) \in \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}-\Lambda_{i,\tau i},y\in\mathbf{f}} a_{\alpha,y}h_{\alpha} * y.$$

于是引理 3.2给出

$$\begin{aligned}\widetilde{\xi}_{\tau}(\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x))\widetilde{\Upsilon}_i &= \Big(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}-\Lambda_{i,\tau i},y\in\mathbf{f}} a_{\alpha,y}K_{\tau\alpha}K'_{\alpha}\cdot\widetilde{\xi}_{\tau}(y)\Big)\widetilde{\Upsilon}_i \\ &\in \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}-\Lambda_{i,\tau i}}\Big(\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\widehat{\mathbf{U}}^0_{i,\tau i}K_{\tau\alpha}K'_{\alpha} + \sum_{\beta\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}\setminus\{0\}}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\widehat{\mathbf{U}}^0_{i,\tau i}K_{\tau\alpha}K'_{\alpha+\beta}\Big),\end{aligned}$$

其中 $\widehat{\mathbf{U}}^0_{i,\tau i}$ 是由 K_i，$K_{\tau i}$，K'_i，$K'_{\tau i}$生成的 $\widehat{\mathbf{U}}_{i,\tau i}$ 的子代数。将其与（3.13）比较，可得 $a_{\alpha,y}=0$ 对于 $\alpha\neq 0$，即 $\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x)\in\mathbf{f}$，并且

$$\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}\big(\widetilde{\xi}_{\tau}(x)\big) \in \widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x^-) + \sum_{\gamma\in\Xi_i\setminus(-\Lambda_{i,\tau i})}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\cdot K'_{\gamma}. \tag{3.16}$$

所需结论（3.15）由对 $\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}\big(\xi_{\tau}(x)\big)$ 在（3.16）中进行共轭得到 $\widetilde{\Upsilon}_i$. □

以下是本小节的主要结果。

定理 3.7。 对于任意 $x\in{}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i]$，有 $\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x)=\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x)$。

证明。 当 x是 ${}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i]$ 在 [CLPRW25]中的生成元之一时，该陈述得到验证（见 [CLPRW25, 命题 5.5、5.10、5.15]）。现在假设该陈述对x，$y\in{}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i]$成立，我们将证明它对 xy成立。

为此，将（3.15）应用于 xy 可得

$$\begin{aligned}\widetilde{\Upsilon}_i\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x^-)\widetilde{\Upsilon}_i^{-1}\cdot\widetilde{\Upsilon}_i\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(y^-)\widetilde{\Upsilon}_i^{-1} &= \widetilde{\Upsilon}_i\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x^-y^-)\widetilde{\Upsilon}_i^{-1} \\ &\in \widetilde{\xi}_{\tau}\big(\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(xy)\big) + \sum_{\delta,\eta\in\Lambda_{i,\tau i},\gamma\in\Xi_i\setminus(-\Lambda_{i,\tau i})}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\cdot K_{\delta}K'_{\gamma+\eta}.\end{aligned}$$

结合引理3.2，我们知道

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Upsilon}_i\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x^-)\widetilde{\Upsilon}_i^{-1}\cdot\widetilde{\Upsilon}_i\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(y^-)\widetilde{\Upsilon}_i^{-1} \\ &\in \widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(xy)^- + \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}\setminus\{0\}}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\cdot K'_{\alpha} + \sum_{\delta,\eta\in\Lambda_{i,\tau i},\gamma\in\Xi_i\setminus(-\Lambda_{i,\tau i})}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\cdot K_{\delta}K'_{\gamma+\eta}.\end{aligned} \tag{3.17}$$

另一方面，由于 ξ_ϑ 和 $\mathbf{T}_i$ 是代数同态，我们有

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\xi}_\tau\big(\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x*y)\big)=\widetilde{\xi}_\tau(\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x))\cdot\widetilde{\xi}_\tau(\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(y))\\
&\in\Big(\widetilde{\Upsilon}_i\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x^-)\widetilde{\Upsilon}_i^{-1}+\sum_{\delta,\eta\in\Lambda_{i,\tau i},\gamma\in\Xi_i\setminus(-\Lambda_{i,\tau i})}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\cdot K_\delta K'_{\gamma+\eta}\Big)\\
&\quad\cdot\Big(\widetilde{\Upsilon}_i\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(y^-)\widetilde{\Upsilon}_i^{-1}+\sum_{\delta',\eta'\in\Lambda_{i,\tau i},\gamma'\in\Xi_i\setminus(-\Lambda_{i,\tau i})}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\cdot K_{\delta'}K'_{\gamma'+\eta'}\Big)\\
&\subseteq\widetilde{\Upsilon}_i\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x^-)\widetilde{\Upsilon}_i^{-1}\cdot\widetilde{\Upsilon}_i\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(y^-)\widetilde{\Upsilon}_i^{-1}+\sum_{\delta'',\eta''\in\Lambda_{i,\tau i},\gamma''\in\Xi_i\setminus(-\Lambda_{i,\tau i})}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\cdot K_{\delta''}K'_{\gamma''+\eta''}.
\end{aligned}\tag{3.18}$$

合并式（3.17）和（3.18）即可得到

$$\widetilde{\xi}_\tau(\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x*y))\in\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(xy)^-+\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}\setminus\{0\}}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\cdot K'_\alpha+\sum_{\delta,\eta\in\Lambda_{i,\tau i},\gamma\in\Xi_i\setminus(-\Lambda_{i,\tau i})}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\cdot K_\delta K'_{\gamma+\eta}.\tag{3.19}$$

根据归纳假设 $\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x*y)=\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x)*\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(y)$，我们有

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\xi}_\tau\big(\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x*y)\big)\\
&=\widetilde{\xi}_\tau(\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x)*\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(y))\\
&=\widetilde{\xi}_\tau\Big(\sum\varphi(\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x)_{(1)},\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(y)_{(2)})\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x)_{(2)}\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(y)_{(1)}h_{\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(y)_{(2)}}\Big)\\
&=\widetilde{\xi}_\tau(\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x)\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(y))+\widetilde{\xi}_\tau\Big(\sum_{\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(y)_{(2)}\neq1}\varphi(\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x)_{(1)},\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(y)_{(2)})\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x)_{(2)}\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(y)_{(1)}h_{\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(y)_{(2)}}\Big)\\
&\in\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x)^-\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(y)^-+\sum_{\beta\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}\setminus\{0\}}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\cdot K'_\beta+\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}\setminus\{0\},\beta\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}\setminus\{0\}}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\cdot K_{\tau\alpha}K'_{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

这里用到了引理3.2。比较右端的首项与式（3.19）的首项，可得

$$\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(xy)=\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x)\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(y)=\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(xy).$$

至此，归纳步骤完成，定理得证。 □

3.4. $\mathbf{f}$ 上的相对辫群作用。现在我们考察 $\mathbf{T}_i$ 在 $\mathbf{f}$ 上的作用。

引理 3.8。对于任意 $x\in{}^\sigma\mathbf{f}[i,\tau i]$, $y\in\mathbf{f}$, $u,w\in\mathbf{f}_{i,\tau i}$, $\alpha_0\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}$, $\beta_0\in\Lambda_{i,\tau i}$，有

$$\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}\big((\tau(xu)\otimes yw)K'_{\alpha_0+\mathrm{wt}(x)}K'_{\beta_0+\mathrm{wt}(u)}\big)\in\tilde{k}^{-1}_{\tau\tau_i\mathrm{wt}(u)}\sum_{\gamma_1\in\Lambda_{i,\tau i},\gamma_2\in\Xi_i}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\cdot K_{\gamma_1}K'_{\gamma_2}.$$

此外，左边仅当 $\alpha_0=\beta_0=0$ 和 $x=1$ 时，其首项才是 $\tilde{k}^{-1}_{\tau\tau_i\ \mathrm{wt}(u)}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-$ 。

证明。对于 $y=w=1$，结论显然。现在我们对 $\mathrm{wt}(yw)$ 作归纳证明。注意

$$(\tau(xu)\otimes yw)=(\tau(xu)\otimes1)\ (1\otimes yw)$$

$$-\sum_{y_{(2)}w_{(2)}\neq 1}\varphi(\tau(x_{(1)}u_{(1)}),y_{(2)}w_{(2)})(\tau(x_{(2)}u_{(2)})\otimes y_{(1)}w_{(1)}h_{\mathrm{wt}(w_{(2)}w_{(2)})})$$
$$\in(\tau(xu)\otimes 1)(1\otimes yw)-\sum_{y_{(2)}w_{(2)}\neq 1}\mathbb{Q}(v)(\tau(x_{(2)}u_{(2)})\otimes y_{(1)}w_{(1)})K'_{\mathrm{wt}(y_{(2)}w_{(2)})}.$$

由于 $x_{(2)}\in {}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i]$ 且 $\mathsf{wt}(y_{(1)}w_{(1)})<\mathsf{wt}(yw)$，根据归纳假设，我们得到

$$\begin{aligned}
&(\tau(x_{(2)}u_{(2)})\otimes y_{(1)}w_{(1)})K'_{\mathrm{wt}(y_{(2)}w_{(2)})}K'_{\alpha_0+\mathrm{wt}(x)}K'_{\beta_0+\mathrm{wt}(u)}\\
&=(\tau(x_{(2)}u_{(2)})\otimes y_{(1)}w_{(1)})K'_{\mathrm{wt}(y_{(2)})+\alpha_0+\mathrm{wt}(x)}K'_{\mathrm{wt}(w_{(2)})+\beta_0+\mathrm{wt}(u_{(1)})+\mathrm{wt}(u_{(2)})}\\
&\in\tilde{k}^{-1}_{\tau\tau_i\mathrm{wt}(u_{(2)})}\sum_{\substack{\gamma_1\in\Lambda_{i,\tau i},\gamma_2\in\Xi_i\\(\gamma_1,\gamma_2)\neq(0,0)}}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\cdot K_{\gamma_1}K'_{\gamma_2}\\
&\subseteq\tilde{k}^{-1}_{\tau\tau_i\mathrm{wt}(u)}\sum_{\substack{\gamma_1\in\Lambda_{i,\tau i},\gamma_2\in\Xi_i\\(\gamma_1,\gamma_2)\neq(0,0)}}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\cdot K_{\gamma_1}K'_{\gamma_2}.
\end{aligned}$$

因此，只需考虑 $\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}((\tau(xu)\otimes 1)(1\otimes yw)K'_{\alpha_0+\mathrm{wt}(x)}K'_{\beta_0+\mathrm{wt}(u)})$，对此我们可以假设 $y=w'y'$，其中 $w'\in\mathbf{f}_{i,\tau i},y'\in\mathbf{f}[i,\tau i]$。于是

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}((\tau(xu)\otimes 1)(1\otimes yw)K'_{\alpha_0+\mathrm{wt}(x)}K'_{\beta_0+\mathrm{wt}(u)})\\
&\in\mathbb{Q}(v)\cdot\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}(\tau x^+)\tau\tau_i(u^-)\tau_i(w'^+)\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}(y'^-)\tau_i(w^+)\tilde{k}^{-1}_{\tau\tau_i\mathrm{wt}(u)}\cdot K'_{r_i(\alpha_0+\mathrm{wt}(x))-\tau_i(\beta_0+\mathrm{wt}(w)+\mathrm{wt}(w'))}\\
&\subseteq\tilde{k}^{-1}_{\tau\tau_i\mathrm{wt}(u)}\sum_{\gamma_1,\gamma_2\in\Lambda_{i,\tau i}}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\cdot K_{\gamma_1}K'_{r_i(\alpha_0+\mathrm{wt}(x))-\tau_i(\beta_0)-\gamma_2}
\end{aligned}\tag{3.20}$$

这里用到了这一事实：

$$\tau\tau_i(u^-)\tau_i(w'^+)\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}(y'^-)\tau_i(w^+)\in\sum_{\gamma_1,\gamma_2\leq\tau_i(\mathrm{wt}(w)+\mathrm{wt}(w'))}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-K_{\gamma_1}K'_{\gamma_2}.$$

注意，$r_i(\alpha_i+\mathsf{wt}(x))-\tau_i(\beta_0)-\gamma_2=0$ 当且仅当 $x=1$ 且 $\alpha_0=\beta_0=\gamma_2=0$，因此归纳步骤得证。□

推论 3.9。对于任意 $x\in{}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i]$ 和 $u\in\mathbf{f}_{i,\tau i}$，有

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\xi}_\tau\big(\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(xu)\big)\widetilde{\Upsilon}_i=\widetilde{\Upsilon}_i\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}\big(\widetilde{\xi}_\tau(xu)\big)\\
&\quad\in v^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}}\tilde{k}^{-1}_{\tau\tau_i\mathrm{wt}(u)}\cdot\widetilde{\Upsilon}_i\tau\tau_i(u^-)\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}(x^-)+\tilde{k}^{-1}_{\tau\tau_i\mathrm{wt}(u)}\sum_{\substack{\gamma_1\in\Lambda_{i,\tau i},\gamma_2\in\Xi_i\\(\gamma_1,\gamma_2)\neq(0,0)}}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\cdot K_{\gamma_1}K'_{\gamma_2}.
\end{aligned}\tag{3.21}$$

证明。注意，

$$\widetilde{\xi}_\tau(xu)=\sum\chi(x_{(2)}h_{\mathrm{wt}(x_{(3)})}u_{(2)}h_{u_{(3)}})\tau(x_{(3)}u_{(3)})\otimes x_{(1)}h_{\mathrm{wt}(x_{(2)})+\mathrm{wt}(x_{(3)})}u_{(1)}h_{\mathrm{wt}(u_{(2)})+\mathrm{wt}(u_{(3)})}.$$

将这个表达式与引理 3.8 结合，得到

$$\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}\big(\widetilde{\xi}_\tau(xu)\big)\in v^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}}\tilde{k}^{-1}_{\tau\tau_i\mathrm{wt}(u)}\cdot\tau\tau_i(u^-)\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}(x^-)+\tilde{k}^{-1}_{\tau\tau_i(u)}\sum_{\substack{\gamma_1\in\Lambda_{i,\tau i},\gamma_2\in\Xi_i\\(\gamma_1,\gamma_2)\neq(0,0)}}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\cdot K_{\gamma_1}K'_{\gamma_2}$$

其中首项来自 $x_{(2)}=x_{(3)}=1$, $u_{(1)}=u_{(2)}=1$, 并且我们还使用了（3.20）。由定理 3.21, 结论（2.8）现可由此推出。□

引理 3.10. 对于 $x\in{}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i]$ 和 $u\in\mathbf{f}_{i,\tau i}$, 有

$$\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(xu)\in\mathbb{K}^{-1}_{\tau\tau_i\mathrm{wt}(u)}*\mathbf{f}.$$

证明. 回顾命题 2.9可知

$$\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(u)=\mathbb{K}^{-1}_{\tau\tau_i\mathrm{wt}(u)}\diamond\tau\tau_i(u),\qquad\text{for } u\in\mathbf{f}_{i,\tau i}. \tag{3.22}$$

~令 $x'=T_{r_i}^{-1}(x)$ 和 $u'=\tau\tau_i(u)$。显然有 $x'u'\in\mathbf{f}$。应用定理 3.7及 (3.22), 可得

$$\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x*u)=\widetilde{T}_i^{-1}(x)*\mathbb{K}^{-1}_{\tau\tau_i\mathrm{wt}(u)}\diamond u'\in v^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}}\mathbb{K}^{-1}_{\tau\tau_i\mathrm{wt}(u)}*(x'u').$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x*u)&=\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}\sum\varphi(x_{(1)},u_{(2)})x_{(2)}u_{(1)}h_{\mathrm{wt}(u_{(2)})}\\&=\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(xu)+\sum\varphi(x_{(1)},u_{(2)})\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x_{(2)}u_{(1)}h_{\mathrm{wt}(u_{(2)})})\\&\in\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(xu)+\sum\mathbb{Q}(v)\mathbb{K}^{-1}_{\tau\tau_i\mathrm{wt}(u_{(1)})}\mathbb{K}^{-1}_{\tau\tau_i\mathrm{wt}(u_{(2)})}*(\tau\tau_i(u_{(1)})\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(x_{(2)}))\\&\subseteq\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(xu)+\mathbb{K}^{-1}_{\tau\tau_i\mathrm{wt}(u)}*\mathbf{f}.\end{aligned}$$

比较上述两个陈述, 即得该引理。 □

现在我们可以证明本节的第二个主要结果, 它推广了~定理 3.7中的公式。即使在将 U视为对角型 i 量子群的背景下, 这一结果似乎也是新的。

定理 3.11. (1) 对于任意 $x\in{}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i]$ 和 $u\in\mathbf{f}_{i,\tau i}$, 有

$$\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(xu)=v^{-\frac{1}{2}(\tau\mathrm{wt}(u)+\mathrm{wt}(u),\mathrm{wt}(x))}\mathbb{K}^{-1}_{\tau\tau_i\mathrm{wt}(u)}\diamond\big(\tau\tau_i(u)\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x)\big).$$

(2) 对于任意 $x\in\mathbf{f}[i,\tau i]$ 和 $u\in\mathbf{f}_{i,\tau i}$, 有

$$\widetilde{\mathbf{T}}_i(ux)=v^{-\frac{1}{2}(\tau\mathrm{wt}(u)+\mathrm{wt}(u),\mathrm{wt}(x))}\mathbb{K}^{-1}_{\tau_i\mathrm{wt}(u)}\diamond\big(\widetilde{T}_{r_i}(x)\tau\tau_i(u)\big).$$

~证明。 由于 T_{r_i}诱导了从 $\mathbf{f}[i,\tau i]$到 ${}^{\sigma}\mathbf{f}[i,\tau i]$的同构, 第二个陈述立即由第一个陈述得出。

N现在我们证明（1）。首先, 应用引理3.10 和引理3.2, 我们有 t

$$\begin{aligned}\widetilde{\xi}_\tau(\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(xu))\widetilde{\Upsilon}_i&\in\tilde{k}^{-1}_{\tau\tau_i\mathrm{wt}(u)}\Big(\mathbf{U}^-+\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}\setminus\{0\}}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\cdot K'_\alpha\Big)\widetilde{\Upsilon}_i\\&\subseteq\tilde{k}^{-1}_{\tau\tau_i\mathrm{wt}(u)}\Big(\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\widehat{\mathbf{U}}^0_{i,\tau i}+\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}\setminus\{0\}}\mathbf{U}^+\mathbf{U}^-\widehat{\mathbf{U}}^0_{i,\tau i}\cdot K'_\alpha\Big).\end{aligned}$$

将此与（3.21）比较可得

$$\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}(\widetilde{\xi}_\tau(xu)) \in v^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}}\tilde{k}^{-1}_{\tau\tau_i \mathrm{wt}(u)} \cdot \tau\tau_i(u^-)\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}(x^-) + \tilde{k}^{-1}_{\tau\tau_i \mathrm{wt}(u)} \sum_{\substack{\gamma_1\in\Lambda_{i,\tau i},\gamma_2\in\Xi_i\cap\mathbb{N}^{\mathbb{I}} \\ (\gamma_1,\gamma_2)\neq(0,0)}} \mathbf{U}^+\mathbf{U}^- \cdot K_{\gamma_1}K'_{\gamma_2}. \tag{3.23}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$现在用 $\mathscr{T}_{r_i}^{-1}(\xi_\tau(xu))$ 共轭式（3.23），最终得到 Υ_i

$$\begin{aligned}&\widetilde{\xi}_\tau(\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(xu)) = \widetilde{\Upsilon}_i\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}(\widetilde{\xi}_\tau(xu))\widetilde{\Upsilon}_i^{-1} \\ &\in v^{\frac{1}{2}n(x,u)}\tilde{k}^{-1}_{\tau\tau_i \mathrm{wt}(u)} \cdot \widetilde{\Upsilon}_i\tau\tau_i(u^-)\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}(x^-)\widetilde{\Upsilon}_i^{-1} + \tilde{k}^{-1}_{\tau\tau_i \mathrm{wt}(u)} \sum_{\substack{\gamma_1\in\Lambda_{i,\tau i},\gamma_2\in\Xi_i\cap\mathbb{N}^{\mathbb{I}} \\ (\gamma_1,\gamma_2)\neq(0,0)}} \mathbf{U}^+\mathbf{U}^- \cdot K_{\gamma_1}K'_{\gamma_2}\end{aligned} \tag{3.24}$$

对于某个 $n(x,u) \in \mathbb{Z}$。

为证明 (1)，由引理 3.10 可知 $y := \mathbb{K}_{\tau\tau_i \mathrm{wt}(u)} * (\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(xu)) \in \mathbf{f}$，因此（3.24）和引理 3.2给出

$$y^- \in v^{\frac{1}{2}n(x,u)}\widetilde{\Upsilon}_i\tau\tau_i(u^-)\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}(x^-)\widetilde{\Upsilon}_i^{-1} + \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}\setminus\{0\}} \mathbf{U}^+\mathbf{U}^- \cdot K'_\gamma.$$

由于 $\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(u) = \mathbb{K}^{-1}_{\tau\tau_i \mathrm{wt}(u)} \diamond \tau\tau_i u$，仿照定理 3.7 证明中的类似论证可得

$$y = v^{\frac{1}{2}n(x,u)}\tau\tau_i(u)\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x).$$

要确定整数 $n(x,u)$，我们必须计算 $\widetilde{\xi}_\tau(\widetilde{\mathbf{T}}_i^{-1}(xu))$ 的首项。根据$\widetilde{\ }$引理 3.8的证明，这等于 $\mathscr{T}_{r_i}^{-1}(\chi(h_{\mathrm{wt}(u)})\tau u \otimes x h_{\mathrm{wt}(u)})$ 的首项，它等于

$$\begin{aligned}&\chi(h_{\mathrm{wt}(u)})\widetilde{\mathscr{T}}_{r_i}^{-1}(v^{-(\mathrm{wt}(u),\tau\mathrm{wt}(u))}\tau(u^+)x^-K'_u) \\ &= v^{-\frac{1}{2}(\mathrm{wt}(u),\mathrm{wt}(u))-\frac{1}{2}(\mathrm{wt}(u),\tau\mathrm{wt}(u))}K^{-1}_{\tau\tau_i\mathrm{wt}(u)}\tau\tau_i(u^-)\cdot\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x^-)\cdot v^{-\frac{1}{2}(\mathrm{wt}(u),\tau\mathrm{wt}(u))}K'^{-1}_{\tau_i\mathrm{wt}(u)} \\ &= v^{\frac{1}{2}(\tau\mathrm{wt}(u)-\mathrm{wt}(u),\mathrm{wt}(u))-(\mathrm{wt}(u),\mathrm{wt}(x))}\widetilde{\xi}_\tau(\mathbb{K}^{-1}_{\tau\tau_i\mathrm{wt}(u)})(\tau\tau_i(u^-)\cdot\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x^-)) \\ &= v^{-\frac{1}{2}(\tau\mathrm{wt}(u)+\mathrm{wt}(u),\mathrm{wt}(x))}\widetilde{\xi}_\tau(\mathbb{K}^{-1}_{\tau\tau_i\mathrm{wt}(u)}) \diamond (\tau\tau_i(u^-)\cdot\widetilde{T}_{r_i}^{-1}(x^-)).\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

以下推论是 [WZ23 定理 7.13] 中关于准分裂量子群的一个特例，其原始证明完全不同且更为困难。

推论 3.12. 设 $wi \in \mathbb{I}$，对于 $w \in W_\tau$ 和 $i \in \mathbb{I}$。那么 $\widetilde{\mathbf{T}}_w(B_i) = B_{wi}$ 属于 $\widetilde{\mathbf{B}}_\tau^\imath \equiv \mathbf{U}^\imath$。

证明。我们假设 $w = r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_t}$ 是 $w \in W_\tau$的一个约化表达式。记$\sim w_k := r_{i_k}r_{i_{k+1}}\cdots r_{i_t}$，其中 $1 \le k \le t$。那么，利用假设$\sim wi \in \mathbb{I}$，我们有 $T_{w_k}(E_i) \in \mathbf{U}^+$；参见 [Jan96，第 8.20] 命题。因此，对于 $1 \le k <\sim t$，我们有 $T_{w_{k+1}}(\vartheta_i) \in \mathbf{f}[i_k, \tau i_k]$；由定理 3.11(2) 可知，利用归纳法，对 $1 \le k \le t$ 有 $T_{w_k}(\vartheta_i) = \mathbf{T}_{w_k}(\vartheta_i)$。

特别地，$\mathbf{T}_w(\vartheta_i) = T_w(\vartheta_i)$，它等于 ϑ_{wi} 利用 [Jan96，第 8 命题20]同样如此。□

4. Dual canonical bases for iquantum groups

本节中，我们将范围限定在任意有限型的量子群和准分裂 i 量子群 $\mathbf{U}^\imath$。我们将在$\mathbf{U}^\imath$上构造对偶典范基。

4.1. $\mathbf{f}$ 上的对偶典范基。Lusztig[Lus90a]在 ADE 型中构造了 $\mathbf{f}$ 的典范基 $\mathbf{C}^{\mathrm{can}}$，如今这一基已适用于所有（有限）型 [Ka91, Lus93]。我们将 $\mathbf{C}^{\mathrm{can}}\}$ 关于 $\mathbf{f}$ 上由 (2.29) 定义的双线性型 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 的对偶基记为 $\{b^* \mid b \in \mathbf{C}^{\mathrm{can}}$，即对于 $b, b' \in \mathbf{C}^{\mathrm{can}}$，有 $\varphi(b^*, b') = \delta_{b,b'}$。回顾 (2.1) 中的双线性型 $(\cdot,\cdot)$，我们定义范数函数 $\mathtt{N} : \mathbb{Z}^{\mathbb{I}} \to \mathbb{Z}$，如下所示:

$$\mathtt{N}(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha, \alpha) - \mathrm{ht}(\alpha),$$

其中，高度函数 $\mathrm{ht} : \mathbb{Z}^{\mathbb{I}} \to \mathbb{Z}$ 由 $\mathrm{ht}(\sum_i a_i\alpha_i) = \sum_i a_i$给出。于是，$\mathbf{f}$的重标度对偶典范基定义为 $\delta_b := v^{\frac{1}{2}\mathtt{N}(\mathrm{wt}(b))}b^*$ 并且

$$\mathbf{C} := \{v^{\frac{1}{2}\mathtt{N}(\mathrm{wt}(b))}b^* \mid b \in \mathbf{C}^{\mathrm{can}}\}.$$

例 4.1。对于 $\mathbf{U} = \mathbf{U}_v(\mathfrak{sl}_2)$，我们有 $\mathbf{C} = \{\vartheta_1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$。

令 $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}[v^{\frac{1}{2}}, v^{-\frac{1}{2}}]$。我们将整形式 $\mathbf{f}_{\mathcal{Z}}$定义为由 $\mathcal{Z}$生成的 $\mathbf{f}$的自由 $\mathcal{Z}$-子模$\mathbf{C}$。已知 [Lus93，定理 14.4：13] $\mathbf{f}_{\mathcal{Z}}$ 是 $\mathcal{Z}$上的一个代数；对于任意 b'，b''，$c \in \mathbf{C}$，我们有

$$b'b'' = \sum_{b\in\mathbf{C}} g^b_{b',b''}b, \qquad \Delta(c) = \sum_{c',c''\in\mathbf{C}} f^c_{c',c''}c'h_{\mathrm{wt}(c'')} \otimes c'', \tag{4.1}$$

其中 $g^b_{b',\ b''}$，$f^c_{c',\ c''} \in \mathcal{Z}$。

稍微滥用记号，我们也通过同构 $\mathbf{C}^{\mathrm{can}}$ 将 $\mathbf{U}^+$ 的典范基记为 $\mathbf{f} \to \mathbf{U}^+$，该同构来自（2.26）。由于我们的 E_i 是对偶生成元（见 [CLPRW25，注记 3。1]），我们有 $(v_i - v_i^{-1})^{-1}E_i \in \mathbf{C}^{\mathrm{can}}$，以及 $E_i \in \mathbf{C}$。

4.2. $\mathbf{U}^\imath$上的整形式。设 C 为有限型 Cartan 矩阵。具有 $\tau \neq \mathrm{Id}$ 的有限型 Satake 图可见 [CLPRW25，表 3.1]。设 τ 为 $\mathrm{Inv}(C)$ 中的对合，并考虑 iHopf 代数 $\mathbf{B}^\imath_\tau$。回顾 (3.7) 中的典范嵌入 $\imath : \mathbf{f} \to \mathbf{B}^\imath_\tau$。通常，对于任意 $x \in \mathbf{f}$，我们将 $x \in \mathbf{B}^\imath_\tau$ 视为省略 $\imath$ 的形式，只要不会引起混淆。

我们将 $\mathbf{B}^\imath_\tau$ 的自由 $\mathcal{Z}$-子模，由 $\mathbb{K}_\alpha \diamond b$ 生成，其中 $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$ 且 $b \in \mathbf{C}$。类似地，令${}_{\mathcal{Z}}\mathbf{B}^\imath_\tau$ 为$\mathbf{B}^\imath_\tau$ 的自由 $\mathcal{Z}$-子模，由 $\mathbb{K}_\alpha \diamond \imath(b)$ 生成，其中 $\alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$且 $b \in \mathbf{C}$。根据定义，我们有 $\imath(\mathbf{f}_{\mathcal{Z}}) \subseteq {}_{\mathcal{Z}}\mathbf{B}^\imath_\tau$。

引理 4.2. 子模 ${}_{\mathcal{Z}}\mathbf{B}^\imath_\tau$ 是一个 $\mathbb{N}^{\mathbb{I}}$-分次的 $\mathcal{Z}$-代数，其权由下式给出

$$\mathrm{wt}(h_\alpha) = \alpha + \tau\alpha, \quad \mathrm{wt}\big(\imath(x)\big) = \mathrm{wt}(x), \quad \textit{for } \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}},\ x \in \mathbf{f}.$$

证明。 根据 [BG17a，定理 3。11] 我们有 $\varphi(b,\ b')\ \in \mathcal{Z}$ 对任意 $b,\ b' \in \mathbf{C}$。由于 $\mathbf{C}$ 是 Hopf 代数 $\widehat{\mathbf{B}}$的整基，因此根据 $*$ 的定义可知 ${}_{\mathcal{Z}}\widehat{\mathbf{B}}^{\imath}_{\tau}$ 是一个 $\mathcal{Z}$ 上的代数。

为证明 ${}_{\mathcal{Z}}\widehat{\mathbf{B}}^{\imath}_{\tau}$ 是 $\mathbb{N}^{\mathbb{I}}$-分次的，我们注意到，对于 $x,\ y \in \mathbf{f}$,

$$x * y = \sum \varphi(x_{(1)}h_{\mathrm{wt}(x_{(2)})}, y_{(2)})x_{(2)}y_{(1)}h_{\mathrm{wt}(y_{(2)})}. \tag{4.2}$$

由于 $\varphi(x,y)\ \neq 0$ 当且仅当 $\mathrm{wt}(x)\ = \mathrm{wt}(y)$，故 (4.2) 右端的任一非零项都满足 $\mathrm{wt}(x_{(1)})\ = \mathrm{wt}(y_{(2)})$，在这种情况下

$$\begin{aligned}\mathrm{wt}(x_{(2)}y_{(1)}h_{\mathrm{wt}(y_{(2)})}) &= \mathrm{wt}(x_{(2)}) + \mathrm{wt}(y_{(1)}) + \mathrm{wt}(y_{(2)}) + \tau(\mathrm{wt}(y_{(2)}))\\ &= \mathrm{wt}(x_{(2)}) + \mathrm{wt}(y_{(1)}) + \mathrm{wt}(y_{(2)}) + \mathrm{wt}(x_{(1)})\\ &= \mathrm{wt}(x) + \mathrm{wt}(y).\end{aligned}$$

这就证明了我们的断言。 □

通过定理 2.12中的同构，我们定义 $\widehat{\mathbf{U}}^{\imath}_{\mathcal{Z}}$ (分别为 $\widetilde{\mathbf{U}}^{\imath}_{\mathcal{Z}}$) 的整形式 $\widehat{\mathbf{U}}^{\imath}$ (分别为 $\widetilde{\mathbf{U}}^{\imath}$)，使得以下 $\mathcal{Z}$-代数同构成立：

$$\widehat{\Phi}^{\imath} : {}_{\mathcal{Z}}\widehat{\mathbf{B}}^{\imath}_{\tau} \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathbf{U}}^{\imath}_{\mathcal{Z}}, \qquad \widetilde{\Phi}^{\imath} : {}_{\mathcal{Z}}\widetilde{\mathbf{B}}^{\imath}_{\tau} \xrightarrow{\cong} \widetilde{\mathbf{U}}^{\imath}_{\mathcal{Z}}. \tag{4.3}$$

注 4.3. 对于非有限型的 Cartan 矩阵 C，$\mathcal{Z}$-模 ${}_{\mathcal{Z}}\widehat{\mathbf{B}}^{\imath}_{\tau}$ 可能不是代数，因为 $\varphi(b,b')$ 可能不属于 $\mathcal{Z}$对于 $b,\ b' \in \mathbf{C}$；参见 [BG17a，命题 3。9].

令 w_0 为 Weyl 群 W 的最长元，其约化表达式为 $w_0 = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_N}$。设 $\mathbf{i} = (i_1,\dots,i_N)$，并定义

$$\beta_{\mathbf{i},k} = s_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}), \quad \forall 1 \le k \le N. \tag{4.4}$$

则 $\{\beta_{\mathbf{i},1},\dots,\beta_{\mathbf{i},N}\}$ 是正根集合。依照 [Lus93，命题 40.1，3], 我们定义 $\vartheta_{\mathbf{i},k} \in \mathbf{f}$ 使得

$$\vartheta^{+}_{\mathbf{i},k} = E_{\mathbf{i},k}, \qquad \text{where } E_{\mathbf{i},k} = \widetilde{T}^{-1}_{i_1}\cdots\widetilde{T}^{-1}_{i_{k-1}}(E_{i_k}), \quad \forall 1 \le k \le N. \tag{4.5}$$

这里 T_i 是命题 U2.3 中给出的辫群对称。

对于任意 $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_N) \in \mathbb{N}^N$，我们设

$$\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}} = v^{\frac{1}{2}n_{\mathbf{i},\mathbf{a}}} \prod_{k=1}^{N} \vartheta^{a_k}_{\mathbf{i},k} \tag{4.6}$$

其中

$$n_{\mathbf{i},\mathbf{a}} = \sum_{1\le k<l\le N} (\beta_{\mathbf{i},k}, \beta_{\mathbf{i},l})a_k a_l.$$

于是 $\{\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in \mathbb{N}^N\}$ 构成$\mathbf{f}_{\mathcal{Z}}$的一个基，称为对偶 PBW 基；参见 [Lus93、BG17b]。对偶典范基$\mathbf{C}$ 的直接构造见 [BG17b，定理 1.1] 该构造通过对偶 PBW 基给出：对于每个 $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_N) \in \mathbb{N}^N$，存在唯一的元素 $b_{\mathbf{i},\mathbf{a}} \in \mathbf{C}$使得

$$b_{\mathbf{i},\mathbf{a}} \in \vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}} + \sum_{\mathbf{a}' \prec \mathbf{a}} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}'} \tag{4.7}$$

其中 $\preceq$ 是 $\mathbb{N}^N$ 上的偏序，该偏序定义于 [BG17b，第 4 节.2]尽管记号为 $b_{\mathbf{i},\mathbf{a}}$，我们强调，对偶典范基$\mathbf{C}$ 与所选择的约化表达式$\mathbf{i}$无关。

推论 4.4. $\{\mathbb{K}_\alpha \diamond \vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}} \mid \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}, \text{一个 } \in \mathbb{N}^N\}$构成了 $\mathcal{Z}$-基 ${}_{\mathcal{Z}}\widehat{\mathbf{B}}^{\imath}_{\tau}$。

${}_{\mathcal{Z}}\widehat{\mathbf{B}}^{\imath}_{\tau}$和 $\mathbf{B}^{\imath}_{\tau}$的（对偶）PBW 基。

这个基称为

证明。 由整形式的定义可知 $\mathcal{Z}$-形式 ${}_{\mathcal{Z}}\mathbf{B}^{\imath}_{\tau}$ 以及（4.7）。 □

命题 4.5。 $\mathbf{B}^{\imath}_{\tau}$ 上的横线对合（以及 $\mathbf{B}^{\imath}_{\tau}$上的横线对合）保持整形式 ${}_{\mathcal{Z}}\widetilde{\mathbf{B}}^{\imath}_{\tau}$（以及 ${}_{\mathcal{Z}}\widehat{\mathbf{B}}^{\imath}_{\tau}$）。

证明。 我们聚焦于 ${}_{\mathcal{Z}}\widehat{\mathbf{B}}^{\imath}_{\tau}$。由于 $\mathcal{Z}$-代数 ${}_{\mathcal{Z}}\widehat{\mathbf{B}}^{\imath}_{\tau}$由 $\{\mathbb{K}_\alpha, \iota(\vartheta_{\mathbf{i},\ k}) \mid 1 \le k \le N,\ \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}\}$生成，只需证明对于 $1 \le k \le N$， $\iota(\vartheta_{i,\ k}) \in {}_{\mathcal{Z}}\widehat{\mathbf{B}}^{\imath}_{\tau}$。

已知最长元 $w_0 \in W$属于 W_τ，并令 $w_0 = r_{j_1} r_{j_2} \cdots r_{j_m}$为 W_τ中的一个约化表达式；定义见（2.9）。令 r_{i_k} 设 $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_N)$ 是由（$j_1, \ldots, j_m$）通过以下方式构造的一个（固定）序列：若存在 $r_{j_k} = s_{t_1} s_{t_2} \cdots s_{t_p}$，它们是 $1 \le k \le m$的约化表达式，则将 j_k 替换为（$t_1, \ldots, t_p$。

与（2.9）相对应，我们定义

$$\Phi^+(r_i) = \begin{cases} \{\alpha_i\}, & \text{if } c_{i,\tau i} = 2, \\ \{\alpha_i, \alpha_{\tau i}\}, & \text{if } c_{i,\tau i} = 0, \\ \{\alpha_i, \alpha_{\tau i}, \alpha_i + \alpha_{\tau i}\}, & \text{if } c_{i,\tau i} = -1. \end{cases} \tag{4.8}$$

那么 $\Phi^+ = \{r_{j_1} \cdots r_{j_{k-1}}(\beta) \mid 1 \le k \le m,\ \beta \in \Phi^+(r_{j_k})\}$。

对于 $1 \le k \le N$，若对于某个 $1 \le t \le m$，且 $\alpha_l \in \Phi^+(r_{j_t})$，有 $s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}) = r_{j_1} \cdots r_{j_{t-1}}(\alpha_l)$，则由定理 3.7 可得 $\iota(\vartheta_{\mathbf{i},k}) = \widetilde{\mathbf{T}}^{-1}_{j_1} \cdots \widetilde{\mathbf{T}}^{-1}_{j_{t-1}}(B_l)$。此时，由引理 2.10 可得 $\iota(\vartheta_{\mathbf{i},k}) = \overline{\iota(\vartheta_{\mathbf{i},k})}$。否则，对于某个 $1 \le t \le m$，有 $s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}) = r_{j_1} \cdots r_{j_{t-1}}(\alpha_{j_t} + \alpha_{\tau j_t})$（此时，$c_{j_t, \tau j_t} = -1$）。根据我们的假设， $s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}) = \alpha_{j_t} + \alpha_{\tau j_t}$，并且我们进一步假设 $i_k = j_t$，于是 $i_{k-1} = \tau j_t$。如此一来，我们有 $\iota(\vartheta_{\mathbf{i},k}) = \widetilde{\mathbf{T}}^{-1}_{j_1} \cdots \widetilde{\mathbf{T}}^{-1}_{j_{t-1}}(\iota(\widetilde{T}^{-1}_{j_t}(\vartheta_{\tau j_t}))$。根据定义，

$$\begin{aligned} \widetilde{T}^{-1}_{j_t}(\vartheta_{\tau j_t})) &= (v_{j_t} - v_{j_t}^{-1})^{-1} \big(v_{j_t}^{1/2} \vartheta_{\tau j_t} \vartheta_{j_t} - v_{j_t}^{-1/2} \vartheta_{j_t} \vartheta_{\tau j_t} \big) \\ &= (v_{j_t} - v_{j_t}^{-1})^{-1} \big(v_{j_t}^{1/2} \vartheta_{\tau j_t} * \vartheta_{j_t} - v_{j_t}^{-1/2} \vartheta_{j_t} * \vartheta_{\tau j_t} \big) + \mathbb{K}_{j_t} - v_{j_t} \mathbb{K}_{\tau j_t}, \end{aligned}$$

因此我们有

$$\overline{\iota(\widetilde{T}^{-1}_{j_t}(\vartheta_{\tau j_t})))} = \iota(\widetilde{T}^{-1}_{j_t}(\vartheta_{\tau j_t}))) + (v_{j_t} - v_{j_t}^{-1}) \mathbb{K}_{\tau j_t}.$$

因此，

$$\overline{\iota(\vartheta_{\mathbf{i},k})} = \iota(\vartheta_{\mathbf{i},k}) + (v_{j_t} - v_{j_t}^{-1})\, \widetilde{\mathbf{T}}^{-1}_{j_1} \cdots \widetilde{\mathbf{T}}^{-1}_{j_{t-1}}(\mathbb{K}_{\tau j_t}) \in {}_{\mathcal{Z}}\widehat{\mathbf{B}}^{\imath}_{\tau}.$$

证明完成。 □

4.3. 对偶典范基，定义在 $\widehat{\mathbf{U}}^\imath$. 现在我们在集合 $\mathbb{N}^{\mathbb{I}} \times \mathbf{C}$上定义偏序 $\preceq$ 如下：若 $(\alpha, b) \preceq (\beta, b')$，则

(1) $\alpha + \tau\alpha + \mathsf{wt}(\imath(b)) = \beta + \tau\beta + \mathsf{wt}(\imath(b'))$，以

及 (2) $0 \neq \beta - \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$ 或 $(\alpha, b) = (\beta, b')$。

如果 $(\alpha, b) \preceq (\beta, b')$ 且 $(\alpha, b) \neq (\beta, b')$，我们记作 $(\alpha, b) \prec (\beta, b')$。

引理 4.6。 对于任意 $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$ 和 $b \in \mathbf{C}$，我们有

$$\overline{\mathbb{K}_\alpha \diamond \imath(b)} \in \mathbb{K}_\alpha \diamond \imath(b) + \sum_{(\alpha,b) \prec (\beta,b')} \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \cdot \mathbb{K}_\beta \diamond \imath(b'). \tag{4.9}$$

证明。 考虑商映射 $\pi : \mathbf{B}^\imath_\tau \to \mathbf{f}$，该映射由以下元素生成的理想定义：$h_i$，$i \in \mathbb{I}$。由（2.30）可知，$\pi \circ \imath = \mathrm{Id}$，且 π 是一个代数同态。此外，若我们定义 $\mathbf{f}$ 上的反对合为 $\vartheta_i = \vartheta_i$，$v = v^{-1}$，则对任意 $\pi(x)$，$= x$ 都有 $\sim x \in \mathbf{B}^\imath_\tau$。

现在只需考虑 $\alpha = 0$ 的引理，此时对于 $b \in \mathbf{C}^{\mathrm{can}}$，我们有

$$\pi(\overline{\imath(b^*)}) - v^{\mathtt{N}(\mathrm{wt}(b))}\pi(\imath(b^*)) = \overline{\pi(\imath(b^*))} - v^{\mathtt{N}(\mathrm{wt}(b))}\pi(\imath(b^*)) = \overline{b^*} - v^{\mathtt{N}(\mathrm{wt}(b))}b^* = 0.$$

由于 $\imath$ 是保权重的，根据命题 4.5 可得

$$\overline{\imath(b^*)} - v^{\mathtt{N}(\mathrm{wt}(b))}\imath(b^*) \in \sum \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \cdot h_{\tau\beta} * \imath(b'^*).$$

根据 δ_b 的定义，我们进而得到

$$\overline{\imath(\delta_b)} - \imath(\delta_b) \in \sum \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \cdot v^{d(\beta,b')}\mathbb{K}_\beta \diamond \imath(\delta_{b'})$$

其中

$$d(\beta, b') = -\frac{1}{2}\mathtt{N}(\mathrm{wt}(b)) - \frac{1}{2}\mathtt{N}(\mathrm{wt}(b')) - \frac{1}{2}(\beta, \tau\beta) - \frac{1}{2}(\beta - \tau\beta, \mathrm{wt}(b')).$$

设 $\eta := \mathsf{wt}(b) \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$，则有 $\mathsf{wt}(b') = \eta - \beta - \tau\beta$，因此

$$\begin{aligned} d(\beta, b') &= -\frac{1}{4}(\eta, \eta) + \frac{1}{2}\mathrm{ht}(\eta) - \frac{1}{4}(\eta - \beta - \tau\beta, \eta - \beta - \tau\beta) + \frac{1}{2}\mathrm{ht}(\eta - \beta - \tau\beta) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\beta, \tau\beta) - \frac{1}{2}(\beta - \tau\beta, \eta - \beta - \tau\beta) \\ &= -\frac{1}{2}(\beta, \beta) - \frac{1}{2}(\eta, \eta) + (\eta - \beta, \tau\beta) + \mathrm{ht}(\eta - \beta) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

证明完毕。 □

对于给定的一对（α，b），满足（β，b'）使得（α，b）$\prec$（β，b'）的这样的数对只有有限多个。因此，根据（4.9），Lusztig 引理适用，由此我们得到一个关于 $\widehat{\ }$ 的条不变基 $\mathbf{B}^\imath_\tau$。我们还注意到，$\diamond$- 作用保持我们的基不变，更确切地说，我们得到了以下结论。

定理 4.7. 对于每个 $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$ 和 $b \in \mathbf{C}$，存在唯一的元素 $C_{\alpha,b} \in \widehat{\mathbf{B}}^\imath_\tau$，使得 $C_{\alpha,b} = C_{\alpha,b}$ 并且

$$C_{\alpha,b} \in \mathbb{K}_\alpha \diamond \imath(b) + \sum_{(\beta,b')} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}] \cdot \mathbb{K}_\beta \diamond \imath(b'). \tag{4.10}$$

那么 $\{C_{\alpha,b} \mid \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}, b \in \mathbf{C}\}$ 构成 $\widehat{\mathbf{B}}^{\imath}_{\tau}$的一组基。此外，$C_{\alpha,b}$ 满足

$$C_{\alpha,b} \in \mathbb{K}_{\alpha} \diamond \iota(b) + \sum_{(\alpha,b)\prec(\beta,b')} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}] \cdot \mathbb{K}_{\beta} \diamond \iota(b'),$$

和 $C_{\alpha,\ b} = \mathbb{K}_{\alpha} \diamond C_{0,\ b}$。

记 $C_b := C_{0,\ b}$，我们用 $\{\mathbb{K}_{\alpha} \diamond C_b \mid \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}, b \in \mathbf{C}\}$ 表示定理 4.7中的基 $\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$；它称为 $\mathbf{B}^{\imath}_{\tau}$ 的对偶典范基。$\mathbf{B}^{\imath}_{\tau}$ 的对偶典范基定义为 $\{\mathbb{K}_{\alpha} \diamond C_b \mid \alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}, b \in \mathbf{C}\}$。

由 Lusztig 的典范基的整性可知，有如下结论。

推论 4.8。 $\{\mathbb{K}_{\alpha} \diamond C_b \mid \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}, b \in \mathbf{C}\}$ 构成 $\mathcal{Z}$-代数 ${}_{\mathcal{Z}}\widehat{\mathbf{B}}^{\imath}_{\tau}$ 的一组基，且 $\widetilde{\ }$ $\{\mathbb{K}_{\alpha} \diamond C_b \mid \alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}, b \in \mathbf{C}\}$ 构成 $\mathcal{Z}$-代数 ${}_{\mathcal{Z}}\mathbf{B}^{\imath}_{\tau}$ 的一组基。

$\widehat{\ }$这些对偶典范基可以通过同构（$\mathbf{U}^{\imath}_{\mathcal{Z}}$ 和 $\widetilde{\ }\mathbf{U}^{\imath}_{\mathcal{Z}}$）转移为 i 量子群的整形式4.3中所给的基。

由引理 2.5 和定理 2.12 中给出的同构可知，存在一个反对合 $\sigma^{\imath}$ 作用于 $\widehat{\mathbf{B}}^{\imath}_{\tau}$（也作用于 $\widetilde{\mathbf{B}}^{\imath}_{\tau}$），其定义为 $\sigma^{\imath}(\vartheta_i) = \vartheta_i$，$i \in \mathbb{I}$ 以及 $\sigma^{\imath}(h_{\alpha}) = h_{\tau(\alpha)}$，$\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$。我们用 σ 表示 $\mathbf{f}$ 上将 $\vartheta_i \mapsto \vartheta_i$映射为.....的反对合。回顾自然嵌入$\imath$：$\mathbf{f} \to \mathbf{B}^{\imath}_{\tau}$。

引理 4.9。 对于任意 $x \in \mathbf{f}$，有 $\sigma^{\imath}(\iota(x)) = \iota(\sigma(x))$。

证明。 我们对 x 的权进行归纳证明。对于 $x = 1$ 或 $x = \vartheta_i$，结论显然。现在令 $\mu \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}\backslash\{0\}$，并假设当 $\mathrm{wt}(x) < \mu$ 时，x 满足该结论。只需证明，对于 $\mathbf{f}^{\mu}$ 中任意形如 $\vartheta_i \cdot x$ 的元素，结论成立。

由引理2.14 可得

$$\begin{aligned}
\iota(\sigma(\vartheta_i \cdot x)) &= \iota(\sigma(x)) \cdot \iota(\vartheta_i) \\
&= \sigma(x) * \vartheta_i - (v_i - v_i^{-1})\partial^{R}_{\tau i}(\sigma(x)) \cdot h_i \\
&= \sigma(x) * \vartheta_i - (v_i - v_i^{-1})\sigma(\partial^{L}_{\tau i}(x)) \cdot h_i,
\end{aligned}$$

其中，最后一个等号由 $\sigma \circ \partial^{R}_{\tau i} = \partial^{L}_{\tau i} \circ \sigma$ 的定义可得。

因此，利用归纳假设，我们有

$$\begin{aligned}
\sigma^{\imath}(\iota(\vartheta_i \cdot x)) &= \sigma^{\imath}(\vartheta_i * x) - (v_i - v_i^{-1})\sigma^{\imath}(\partial^{L}_{\tau i}(x) \cdot h_{\tau i}) \\
&= \sigma^{\imath}(x) * \vartheta_i - (v_i - v_i^{-1})v^{-(\alpha_{\tau i}, \mu - \alpha_{\tau i})}\sigma^{\imath}(h_{\tau i} * \partial^{L}_{\tau i}(x)) \\
&= \sigma(x) * \vartheta_i - (v_i - v_i^{-1})v^{-(\alpha_{\tau i}, \mu - \alpha_{\tau i})}\sigma(\partial^{L}_{\tau i}(x)) * h_i \\
&= \sigma(x) * \vartheta_i - (v_i - v_i^{-1})v^{-(\alpha_{i}, \mu - \alpha_{\tau i})}h_i\sigma(\partial^{L}_{\tau i}(x)) \\
&= \sigma(x) * \vartheta_i - (v_i - v_i^{-1})\sigma(\partial^{L}_{\tau i}(x)) \cdot h_i \\
&= \iota(\sigma(\vartheta_i \cdot x)).
\end{aligned}$$

证明完毕。 □

命题 4.10. $\{\mathbb{K}_{\alpha} \diamond C_b \mid \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}, b \in \mathbf{C}\}$ 的对偶典范基在反对合 $\sigma^{\imath}$ 下保持不变。此外，

$$\sigma^{\imath}(C_{\alpha,b}) = C_{\tau\alpha,\sigma(b)}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}, b \in \mathbf{C}.$$

~对于 $\mathbf{B}^\imath_\tau$，类似的结果也成立。

证明。由 [BG17a，引理 3。5], 我们有 $\sigma(b) \in \mathbf{C}$ 对于 $b \in \mathbf{C}$。然后由引理 4.9，我们得到

$$\begin{aligned}\sigma^\imath(\mathbb{K}_\alpha \diamond \iota(b)) &= v^{\frac{1}{2}(\tau\alpha-\alpha,\mathrm{wt}(b))}\sigma^\imath(\mathbb{K}_\alpha * \iota(b)) \\ &= v^{\frac{1}{2}(\tau\alpha-\alpha,\mathrm{wt}(b))}\sigma(\iota(b)) * \mathbb{K}_{\tau\alpha} \\ &= v^{\frac{1}{2}(\alpha-\tau\alpha,\mathrm{wt}(b))}\mathbb{K}_{\tau\alpha} * \sigma(\iota(b)) \\ &= \mathbb{K}_{\tau\alpha} \diamond \sigma(\iota(b)).\end{aligned}$$

将 $\sigma^\imath$ 应用于 (4.10)，并利用上述恒等映射，我们得到

$$\sigma^\imath(C_{\alpha,b}) - \mathbb{K}_{\tau\alpha} \diamond \sigma(\iota(b)) \in \sum_{(\beta,b')} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}] \cdot \mathbb{K}_\beta \diamond \iota(b').$$

由于 $\sigma^\imath$ 与横线对合交换，$\sigma^\imath(C_{\alpha,b})$ 是横线不变的。根据定理 4.7 中对偶典范基元素 $C_{\tau\alpha,\sigma(b)}$ 的刻画，我们必有$\sigma^\imath(C_{\alpha,b}) = C_{\tau\alpha,\sigma(b)}$。□

注 4.11。我们猜想以下正性性质：

$$\mathbb{K}_\alpha \diamond \iota(b) \in C_{\alpha,b} + \sum_{(\alpha,b)\prec(\beta,b')} v^{-1}\mathbb{N}[v^{-1}] \cdot C_{\beta,b'}, \qquad \text{for } b \in \mathbf{C}, \alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}, \tag{4.11}$$

^在任意有限型 i 量子群 $\mathbf{B}^\imath_\tau$ 中；关于量子群的类似猜想，参见 [BG17a，猜想 1。21] 该猜想在 [LP25，引理 714] 中针对 ADE 型量子群和 i 量子群（AIII 型除外）得到了证明$_{2r}$。

4.4. 通过对偶 PBW 构造对偶典范基。定义 $\preceq$ 上的偏序 $\mathbb{N}^{\mathbb{I}} \times \mathbb{N}^N$：规定当 $(\alpha, \mathbf{a}) \preceq (\beta, \mathbf{a}')$ 时，若

（1）$\alpha + \tau\alpha + \mathrm{wt}(\iota(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}}) = \beta + \tau\beta + \mathrm{wt}(\iota(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}'})$，且（2）$0 \neq \beta - \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$ 或 $\beta = \alpha$ 且$\mathbf{a}' \preceq \mathbf{a}$（这里 $\preceq$ 是 $\mathbb{N}^N$ 上定义的偏序，见[BG17b，第 4 节。2]）。

我们将使用对偶 PBW 基 $\{\mathbb{K}_\alpha \diamond \iota(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}}) \mid \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}, \mathbf{a} \in \mathbb{N}^N\}$ 来给出对偶典范基 $\{\mathbb{K}_\alpha \diamond C_{b_{\mathbf{i},\mathbf{a}}} \mid \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}, \mathbf{a} \in \mathbb{N}^N\}$ 的第二种构造，其中 $_{\mathcal{Z}}\widehat{\mathbf{B}}^\imath_\tau$（见定理 4.7）。

命题 4.12. 对于每个 $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$和一个 $\in \mathbb{N}^N$，都存在唯一的元素 $\mathbb{K}_\alpha \diamond C_{\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}}}\widehat{}$属于 $_{\mathcal{Z}}\mathbf{B}^\imath_\tau$，满足 $\mathbb{K}_\alpha \diamond C_{\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}}} = \overline{\mathbb{K}_\alpha \diamond C_{\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}}}}$ 以及

$$\mathbb{K}_\alpha \diamond C_{\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}}} - \mathbb{K}_\alpha \diamond \iota(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}}) \in \sum_{(\alpha,\mathbf{a})\prec(\beta,\mathbf{a}')} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}] \cdot \mathbb{K}_\beta \diamond \iota(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}'}). \tag{4.12}$$

此外，我们有 $\mathbb{K}_\alpha \diamond C_{\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}}} = \mathbb{K}_\alpha \diamond C_{b_{\mathbf{i},\mathbf{a}_\mathbf{o}}}$

证明。将（4.7）代入（4.9），得到

$$\overline{\mathbb{K}_\alpha \diamond \iota(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}})} - \mathbb{K}_\alpha \diamond \iota(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}}) \in \sum_{(\alpha,\mathbf{a})\prec(\beta,\mathbf{a}')} \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \cdot \mathbb{K}_\beta \diamond \iota(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}'}). \tag{4.13}$$

因此，所需元素 $\mathbb{K}_\alpha \diamond C_{\vartheta_{\mathbf{i}}}$<style id="2">，$_{\mathbf{a}}$ 的存在性和唯一性由 Lusztig 引理得出。

另一方面，由（4.7）和定理 4.7 可知，定理 4.7 中的元素 $\mathbb{K}_\alpha \diamond C_{b_{\mathbf{i},\mathbf{a}}}$也满足条件（4.13）。因此，根据唯一性，$\mathbb{K}_\alpha \diamond C_{\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}}} = \mathbb{K}_\alpha \diamond C_{b_{\mathbf{i},\mathbf{a}}}$。□

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$我们可以将 $\tau \in \mathrm{Inv}(C)$ 视为 $\mathbf{B}^\imath_\tau$（也将 $\mathbf{B}$）上的一个对合，它将 $\vartheta_i \mapsto \vartheta_{\tau i}, h_i \mapsto h_{\tau i}$ 映到 $i \in \mathbb{I}$。与引理 4.9类似，可以看出 $\iota \circ \tau = \tau \circ \iota$。

推论 4.13. $\{\mathbb{K}_\alpha \diamond C_b \mid \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}, b \in \mathbf{C}\}$ 是 $\widehat{\mathbf{B}}^\imath_\tau$ 的对偶典范基，在对合 τ 下保持不变。

证明。沿用命题 4.12中的记号。令 $\tau\mathbf{i} := (\tau i_1, \dots, \tau i_N)$ 表示 $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N)$.

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$注意，对任意 $i \neq j \in \mathbb{I}$，$\tau(T_i(\vartheta_j)) = T_{\tau i}(\vartheta_{\tau j})$。于是，对于任意 $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^N$，我们有 $\tau(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}}) = \vartheta_{\tau\mathbf{i},\mathbf{a}}$。显然，$\{\vartheta_{\tau\mathbf{i},\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in \mathbb{N}^N\}$是 $\mathbf{f}_{\mathcal{Z}}$的一组基。我们将由命题 4.12 出发，使用 PBW 基 $\{\vartheta_{\tau\mathbf{i},\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in \mathbb{N}^N\}$构造的对偶典范基记为 $\{\mathbb{K}_\alpha \diamond C_{b_{\mathbf{i},\mathbf{a}}} \mid \mathbf{a} \in \mathbb{N}^N, \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}\}$。将 τ应用于 (4.12)，由唯一性可得 $\tau(\mathbb{K}_\alpha \diamond C_{\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}}}) = \mathbb{K}_{\tau\alpha} \diamond C_{\vartheta_{\tau\mathbf{i},\mathbf{a}}}$。□

注4.14. 一种新的对偶典范基构造（参见 [LW21b]）适用于万有$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$$\mathbf{i}$ 量子群 $\mathbf{U}^\imath$ 和 $\mathbf{U}^\imath$ ADE 型（ AIII 型除外）的 $_{2r}$，见 [LP25]，其中使用了 Hall 代数的（对偶） Hall 基。由于 Hall 基与特殊 PBW 基一致（见 [Rin96]），本文构造的对偶典范基复现了几何方法构造的 ADE 型对偶典范基同上，并将其推广到 AIII_{2r} 型及所有非 ADE 型。

4.5. $\mathbf{i}$ 辫群对称性。 本小节的主要结果如下。

定理 4.15. $\widetilde{\ }$$\mathbf{B}^\imath_\tau$ 的对偶典范基在 i 辫群对称性作用下保持不变。

证明。 $\widetilde{\ }$只需证明，定理 4.7 中 $\{\mathbb{K}_\alpha \diamond C_b\}$ $\mathbf{B}^\imath_\tau$ 的对偶典范基在 4.7 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$中对 $\mathbf{T}_i$的作用下保持不变，其中 $i \in \mathbb{I}$任取。根据 $\mathbf{T}_i$ 在 $\mathbb{K}_\alpha$上的显式作用，$\widetilde{\ }$这归结为验证 $\mathbf{T}_i(C_b)$ 是一个对偶典范基元素。

回忆一下 r_i （2.9）。设 ℓ 为 r_i 在 W中的长度。我们可以取一个约化表达式$\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N)$，使得 w_0 满足 $r_i = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$(显然这是$r_i$的一个约化表达式）。回忆 $\vartheta^+_{\mathbf{i}\,k}$ （4.5），并注意到 $r_i = s_{i_\ell} \cdots s_{i_1}$，我们得到

$$\widetilde{T}_{r_i}(\vartheta^+_{\mathbf{i},k}) = \widetilde{T}_{r_i}\widetilde{T}^{-1}_{i_1} \cdots \widetilde{T}^{-1}_{i_\ell}\widetilde{T}^{-1}_{i_{\ell+1}} \cdots \widetilde{T}^{-1}_{i_{k-1}}(E_{i_k}) = \widetilde{T}^{-1}_{i_{\ell+1}} \cdots \widetilde{T}^{-1}_{i_{k-1}}(E_{i_k}) \in \mathbf{U}^+, \quad \forall \ell < k \leq N,$$

尤其是，$\vartheta_{\mathbf{i},k} \in \mathbf{f}[i, \tau i]$。记 $w' = s_{i_{\ell+1}} \cdots s_{i_N}$（长度为 $N - \ell$ 的约化表达式），则有 $w_0 = r_i w' = w' \cdot w'^{-1} r_i w'$。由此可得，$w'^{-1} r_i w'$ 的长度为 ℓ。

回顾（2.21）中的对合 τ_i作用于 $\mathbb{I}_i$；注意，$\mathbb{I}_i = \{i_1, \dots, i_\ell\}$ 作为集合。记作$j_a = \tau_0\tau_i(i_a)$，其中 $1 \leq a \leq \ell$。我们有

$$w'^{-1} s_{i_a} w' = w_0^{-1}(r_i^{-1} s_{i_a} r_i) w_0 = w_0^{-1} s_{\tau_i(i_a)} w_0 = s_{\tau_0\tau_i(i_a)},$$

因此，$w'^{-1} r_i w' = s_{j_1} \cdots s_{j_\ell} = r_{\tau_0(i)}$，由于长度的原因，这是约化的。S et

$$\mathbf{i}' = (i_{\ell+1}, \dots, i_N, j_1, \dots, j_\ell).$$

那么显然，

$$E_{\mathbf{i}',k} = \widetilde{T}_{r_i}(E_{\mathbf{i},k+\ell}), \quad \text{for } 1 \leq k \leq N - \ell.$$

此外，对于 $N-\ell+1 \le k \le N$，我们有

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{i}',k} &= \widetilde{T}_{i_{\ell+1}}^{-1} \cdots \widetilde{T}_{i_N}^{-1} (\widetilde{T}_{j_1}^{-1} \cdots \widetilde{T}_{j_{k-N+\ell-1}}^{-1})(E_{j_{k-N+\ell}}) \\ &= \widetilde{T}_{i_{\ell+1}}^{-1} \cdots \widetilde{T}_{i_N}^{-1} (\widetilde{T}_{j_1}^{-1} \cdots \widetilde{T}_{j_{k-N+\ell-1}}^{-1}) \widetilde{T}_{w'^{-1}}(E_{i_{k-N+\ell}}) \\ &= \widetilde{T}_{i_1}^{-1} \cdots \widetilde{T}_{i_{k-N+\ell-1}}^{-1} (\widetilde{T}_{i_{\ell+1}}^{-1} \cdots \widetilde{T}_{i_N}^{-1}) \widetilde{T}_{w'^{-1}}(E_{i_{k-N+\ell}}) \\ &= \widetilde{T}_{i_1}^{-1} \cdots \widetilde{T}_{i_{k-N+\ell-1}}^{-1} \widetilde{T}_{w'^{-1}}^{-1} \widetilde{T}_{w'^{-1}}(E_{i_{k-N+\ell}}) \\ &= \widetilde{T}_{i_1}^{-1} \cdots \widetilde{T}_{i_{k-N+\ell-1}}^{-1} (E_{i_{k-N+\ell}}) \\ &= E_{\mathbf{i},k-N+\ell}. \end{aligned}$$

将 $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^N$ 写成 $\mathbf{i} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$，其中 $\mathbf{a}_1 = (a_1, \dots, a_\ell)$，$\mathbf{a}_2 = (a_{\ell+1}, \dots, a_N)$。注意，$\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}} = v^{\frac{1}{2}(\mathrm{wt}(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}_1}),\mathrm{wt}(x))} \vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}_1} x$，其中 $\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}_1} \in \mathbf{f}_{i,\tau i}$，且 $x := \vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}_2} \in \mathbf{f}_{[i,\tau i]}$。应用定理 3.11 可得

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{T}}_i(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}}) &= \widetilde{\mathbf{T}}_i(v^{\frac{1}{2}(\mathrm{wt}(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}_1}),\mathrm{wt}(x))} \vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}_1} x) \\ &= v^{-\frac{1}{2}(\tau \mathrm{wt}(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}_1}),\mathrm{wt}(x))} \mathbb{K}^{-1}_{\tau_i \mathrm{wt}(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}_1})} \diamond \left(\widetilde{T}_{r_i}(x) \tau\tau_i(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}_1}) \right) \\ &= v^{\frac{1}{2}(\tau\tau_i \mathrm{wt}(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}_1}),r_i(\mathrm{wt}(x)))} \mathbb{K}^{-1}_{\tau_i \mathrm{wt}(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}_1})} \diamond \left(\widetilde{T}_{r_i}(x) \tau\tau_i(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}_1}) \right) \\ &= v^{\frac{1}{2}(\tau\tau_i \mathrm{wt}(\vartheta_{\mathbf{i}',\mathbf{a}_1}),\mathrm{wt}(\vartheta_{\mathbf{i}',\mathbf{a}_2}))} \mathbb{K}^{-1}_{\tau_i \mathrm{wt}(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}_1})} \diamond \left(\vartheta_{\mathbf{i}',\mathbf{a}_2} \tau\tau_i(\vartheta_{\mathbf{i}',\mathbf{a}_1}) \right). \end{aligned}$$

注意，$\tau\tau_i$ 要么是 $\mathbb{I}_i$上的恒等映射，要么恰好在 $c_{i,\tau i} = 0$ 时交换 i 与 τi。因此，我们总可以将 $\tau\tau_i(\vartheta_{\mathbf{i}',\mathbf{a}_1}) = \vartheta_{\mathbf{i}',\mathbf{a}'_1}$ 写成某个 $\mathbf{a}'_1 = (a'_1, \dots, a'_\ell)$ 的形式。这使我们能够将上面的右端简化为

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{T}}_i(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}}) &= v^{\frac{1}{2}(\tau\tau_i \mathrm{wt}(\vartheta_{\mathbf{i}',\mathbf{a}_1}),\mathrm{wt}(\vartheta_{\mathbf{i}',\mathbf{a}_2}))} \mathbb{K}^{-1}_{\tau_i \mathrm{wt}(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}_1})} \diamond \left(\vartheta_{\mathbf{i}',\mathbf{a}_2} \tau\tau_i(\vartheta_{\mathbf{i}',\mathbf{a}_1}) \right) \\ &= v^{\frac{1}{2}(\mathrm{wt}(\vartheta_{\mathbf{i}',\mathbf{a}'_1}),\mathrm{wt}(\vartheta_{\mathbf{i}',\mathbf{a}_2}))} \mathbb{K}^{-1}_{\tau_i \mathrm{wt}(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}_1})} \diamond (\vartheta_{\mathbf{i}',\mathbf{a}_2} \vartheta_{\mathbf{i}',\mathbf{a}'_1}) \\ &= \mathbb{K}^{-1}_{\tau_i \mathrm{wt}(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}_1})} \diamond \vartheta_{\mathbf{i}',\mathbf{a}'}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

其中 $\mathbf{a}' = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}'_1) = (a_{\ell+1}, \dots, a_N, a'_1, \dots, a'_\ell)$.

回顾定理 4.7 和命题 4.12，对偶典范基元素$C_{\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}}}$是唯一的条不变元素，使得 $C_{\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}}} \in \vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}} + \sum_{(\beta,\tilde{\mathbf{a}})} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}] \cdot \mathbb{K}_\beta \diamond \vartheta_{\mathbf{i},\tilde{\mathbf{a}}}$；~按照上文对 $\mathbf{a}$ 的类似写法，记 $\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2)$。对$C_{\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}}}$ 应用 $\mathbf{T}_i$（它与条~对合可交换），并利用 (4.14)，可知 $\mathbf{T}_i(C_{\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}}})$ 是条不变的，且

$$\widetilde{\mathbf{T}}_i(C_{\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}}}) \in \mathbb{K}^{-1}_{\tau_i \mathrm{wt}(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}_1})} \diamond \vartheta_{\mathbf{i}',\mathbf{a}'} + \sum_{(\beta,\tilde{\mathbf{a}})} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}] \cdot \mathbb{K}_{r_i\beta} \mathbb{K}^{-1}_{\tau_i \mathrm{wt}(\vartheta_{\mathbf{i},\tilde{\mathbf{a}}_1})} \diamond \vartheta_{\mathbf{i},\tilde{\mathbf{a}}}.$$

~由唯一性可知，$\mathbf{T}_i(C_{\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}}})$ 是一个对偶典范基元素，且

$$\widetilde{\mathbf{T}}_i(C_{\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}}}) = \mathbb{K}^{-1}_{\tau_i \mathrm{wt}(\vartheta_{\mathbf{i},\mathbf{a}_1})} \diamond C_{\vartheta_{\mathbf{i}',\mathbf{a}'}}.$$

定理得证。 □

注 4.16。利用 [LW22a 中发展出的 LW23], Lu 和 Pan [LP25，定理 7。19] 证明了，对于 ADE 型的泛 i量子群（AIII 型除外），对偶典范基在辫群作用下保持不变，该类型见 $_{2r}$ 所列

在 [CLPRW25，表 3。1]）。此外， [LP25，定理 C] 表明，对偶典范基的结构常数为正（即属于 $\mathbb{N}[v^{\pm 1/2}]$）。我们猜想，对于准分裂 AIII 型，该正性也成立$_{2r}$。

4.6. **i 量子群上的对偶典范基**。 回顾特征参数$\varsigma_\diamond = (\varsigma_{i,\diamond})$（见（2.17））。根据 [LW22a，命题 6.2(1)]，，存在一个代数满同态$^\sim$ $\pi_{\varsigma_\diamond} : \mathbf{B}^\imath_\tau \to \mathbf{U}^\imath_{\varsigma_\diamond}$，其映射方式如下：

$$\vartheta_i \mapsto B_i, \qquad \mathbb{K}_j \mapsto \begin{cases} k_j & \text{if } \tau j \neq j \\ 1 & \text{if } \tau j = j, \end{cases} \qquad \mathbb{K}_{\tau j} \mapsto \begin{cases} k_j^{-1} & \text{if } \tau j \neq j \\ 1 & \text{if } \tau j = j, \end{cases} \tag{4.15}$$

对任意 $i \in \mathbb{I}, j \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{I}_\tau$。 $\pi_{\varsigma_\diamond}$ 的核由 $\mathbb{K}_i \mathbb{K}_{\tau i} - 1, i \in \mathbb{I}$ 生成。

引理 4.17. $\mathbf{U}^\imath_{\varsigma_\diamond}$ 具有一个反对合（称为横线对合），使得 $v^{1/2} = v^{-1/2}$, $B_i = B_i$ 和 $k_i = k_{\overline{i}}$，其中 $i \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{I}_\tau$。

$^\sim$证明。 $^\imath_\tau$ 的横线对合保持 $\pi_{\varsigma_\diamond}$ 的核，因此结论成立。 □

$^\sim$ $^\sim$ $^\sim$令 $i \in \mathbb{I}$。由于 $\mathbf{T}_i$ 的 i-辫群对称性 $\mathbf{B}^\imath_\tau = \mathbf{U}^\imath$ 保持 $\pi_{\varsigma_\diamond}$ 的核，因此它诱导出一个自同构 $\mathbf{T}_i$，作用于 $\mathbf{U}^\imath_{\varsigma_\diamond}$；参见 [LW21a，命题 7。2]也就是说，我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbf{U}}^\imath & \xrightarrow{\widetilde{\mathbf{T}}_i} & \widetilde{\mathbf{U}}^\imath \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{\varsigma_\diamond}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\varsigma_\diamond}} \\ \mathbf{U}^\imath_{\varsigma_\diamond} & \xrightarrow{\mathbf{T}_i} & \mathbf{U}^\imath_{\varsigma_\diamond} \end{array} \tag{4.16}$$

对于任意的 $\alpha = \sum_i a_i \alpha_i \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_\tau}$ 和 $x \in \mathbf{U}^\imath_{\varsigma_\diamond}$，记

$$k_\alpha = \prod_i k_i^{a_i}, \qquad k_\alpha \diamond x = v^{\frac{1}{2}(\tau\alpha - \alpha, \mathrm{wt}(x'))} \cdot k_\alpha x,$$

$^\sim$其中 x' 是 x 在 $\mathbf{U}^\imath$ 中的任意原像。

命题 4.18. 对于每个 $\alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_\tau}$ 和 $b \in \mathbf{C}$，存在唯一的元素 $C^\diamond_{\alpha,b} \in \mathbf{U}^\imath_{\varsigma_\diamond}$，使得 $C^\diamond_{\alpha,b} = C^\diamond_{\alpha,b}$ 并且

$$C^\diamond_{\alpha,b} - k_\alpha \diamond \pi_{\varsigma_\diamond}(\iota(b)) \in \sum_{(\gamma,b') \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_\tau} \times \mathbf{C}} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}] \cdot k_\gamma \diamond \pi_{\varsigma_\diamond}(\iota(b')). \tag{4.17}$$

此外，$\{C^\diamond_{\alpha,b} \mid \alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_\tau}, b \in \mathbf{C}\}$ 构成 $\mathbf{U}^\imath_{\varsigma_\diamond}$的一组基，且在辫群对称 $\mathbf{T}_i$作用下保持不变，其中 $i \in \mathbb{I}_\tau$。

证明。 回顾定理4.7中的对偶典范基 $\{C_{\tilde{\alpha},b}\}$。令 $C^\diamond_{\alpha,b} := \pi_{\varsigma_\diamond}(C_{\alpha,b})$，其中 $\alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_\tau}$ 且 $b \in \mathbf{C}$，显然它满足 $C^\diamond_{\alpha,b} = C^\diamond_{\alpha,b}$。对于 $\beta = \sum_{i\in\mathbb{I}} a_i\alpha_i$，有 $\pi_{\varsigma_\diamond}(\mathbb{K}_\beta) = k_\gamma$，其中 $\gamma = \sum_{i\in\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_\tau}(a_i - a_{\tau i})\alpha_i$。于是由（4.17）可得（4.10）。利用标准论证可得 $C^\diamond_{\alpha,b}$ 的唯一性。

显然， $\{C^\diamond_{\alpha,b} \mid \alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_\tau}, b \in \mathbf{C}\}$ 是$\mathbf{U}^\imath_{\varsigma_\diamond}$的一个基。最后，由定理4.15 以及交换图（4.16）可知，该基在辫群对称性$\mathbf{T}_i$下保持不变。□

5. Dual canonical basis for Drinfeld doubles

对于对角型 Borel 子代数上的 iHopf 代数，我们的构造给出了 Drinfeld 双量子群 $\mathbf{U}$ 的对偶典范基。Berenstein 和 Greenstein 早先为 $\mathbf{U}$ 定义了两个基，称为正 / 负双典范基。在本节中，我们证明这两个基与本文构造的 $\mathbf{U}$ 的对偶典范基重合。通过这一识别，他们工作中的若干猜想很快便可得出。

5.1. **Berenstein-Greenstein 的结果。** 首先，按照 [BG17a] 我们定义量子 Heisenberg 代数 $\mathcal{H}^{\pm}$ 如下：

$$\mathcal{H}^{+}=\widehat{\mathbf{U}}/\langle K_i'\mid i\in\mathbb{I}\rangle,\quad \mathcal{H}^{-}=\widehat{\mathbf{U}}/\langle K_i\mid i\in\mathbb{I}\rangle.$$

令 $\mathbf{K}^{+}$（分别为 $\mathbf{K}^{-}$）是由 K_i（分别由 K_i'）生成的 $\mathbf{U}$ 的子幺半群，$i\in\mathbb{I}$。于是我们有三角分解

$$\mathcal{H}^{+}=\mathbf{K}^{+}\otimes\mathbf{U}^{-}\otimes\mathbf{U}^{+},\quad \mathcal{H}^{-}=\mathbf{K}^{-}\otimes\mathbf{U}^{+}\otimes\mathbf{U}^{-}.$$

由此诱导的向量空间自然嵌入

$$\iota_{+}:\mathcal{H}^{+}=\mathbf{K}^{+}\otimes\mathbf{U}^{-}\otimes\mathbf{U}^{+}\hookrightarrow\widehat{\mathbf{U}}=\mathbf{K}^{-}\otimes(\mathbf{K}^{+}\otimes\mathbf{U}^{-}\otimes\mathbf{U}^{+}),$$
$$\iota_{-}:\mathcal{H}^{-}=\mathbf{K}^{-}\otimes\mathbf{U}^{+}\otimes\mathbf{U}^{-}\hookrightarrow\widehat{\mathbf{U}}=\mathbf{K}^{+}\otimes(\mathbf{K}^{-}\otimes\mathbf{U}^{+}\otimes\mathbf{U}^{-})$$

分别分裂典范投影 $\mathbf{U}\to\mathcal{H}^{+}$ 和 $\mathbf{U}\to\mathcal{H}^{-}$。

令 $\mathbf{U}^{\geq}$ 为 $\mathbf{U}$ 的子代数，由 K_i 和 E_i 生成，$i\in\mathbb{I}$。类似地定义 $\mathbf{U}^{\leq}$。

5.2. **重标度对偶典范基。** 在 $\widehat{\mathbf{U}}$ 上存在一个横线对合，其定义为 $\overline{v}=v^{-1}$，$\overline{E_i}=E_i$，$\overline{F_i}=F_i$ 以及 $\overline{K_i}=K_i$，$\overline{K_i'}=K_i'$ 其中 $i\in\mathbb{I}$。

设 $\alpha_{+i}=(\alpha_i,\ 0)$，$\alpha_{-i}=(0,\ \alpha_i)$。我们通过如下方式在 $\mathbf{U}$ 上定义一个权函数：

$$\mathrm{wt}^2(E_i)=\alpha_{+i},\quad \mathrm{wt}^2(F_i)=\alpha_{-i},\quad \mathrm{wt}^2(K_i)=\mathrm{wt}^2(K_i')=\alpha_{+i}+\alpha_{-i}.$$

容易看出，$\widehat{\mathbf{U}}$ 成为一个 $\mathbb{N}^{\mathbb{I}^2}$ 分次代数。此外，在 $\mathbb{N}^{\mathbb{I}^2}$ 上有偏序 $\prec$，其定义为：当且仅当 $\beta-\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}\times\mathbb{N}^{\mathbb{I}}$ 时，$\alpha\prec\beta$。利用这个次数函数，我们定义代数 $\widehat{\mathbf{U}}^0$ 在 $\widehat{\mathbf{U}}$ 上的作用 $\diamond$ 如下：

$$K_i\diamond x=v^{-\frac{1}{2}\check{\alpha}_i(\mathrm{wt}^2(x))}K_ix,\quad K_i'\diamond x=v^{\frac{1}{2}\check{\alpha}_i(\mathrm{wt}^2(x))}K_i'x$$

其中，$\check{\alpha}_i\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{N}^{\mathbb{I}^2},\ \mathbb{Z})$ 定义为 $\check{\alpha}_i(\alpha_{\pm i})=\pm c_{ij}$，且 $x\in\widehat{\mathbf{U}}$ 是齐次的。该作用具有以下性质：

$$\overline{K\diamond x}=K\diamond\overline{x},\quad K\in\widehat{\mathbf{U}}^0,x\in\widehat{\mathbf{U}}.\tag{5.1}$$

注意，$\diamond$-作用以及横线对合都通过典范投影传递为 $\mathbf{K}^{\pm}$-作用和 $\mathcal{H}^{\pm}$ 上的反对合 $\widehat{\mathbf{U}}\to\mathcal{H}^{\pm}$，且（5.1）仍然成立。

以下结果归功于 [BG17a]。

命题 5.1 ([BG17a，定理 1。3])。对于任意 $(b_{+},\ b_{-})\in\mathbf{C}^{+}\times\mathbf{C}^{-}$，存在唯一一个元素 $b_{-}\circ b_{+}\in\mathcal{H}^{+}$ 被 $\bar{\cdot}$ 固定且满足

$$b_{-}\circ b_{+}-b_{-}b_{+}\in\sum v\mathbb{Z}[v]K\diamond(b_{-}'b_{+}')$$

其中求和遍历满足以下条件的 $K \in \mathbf{K}^+ \setminus \{1\}$ 和 $b'_\pm \in \mathbf{C}^\pm$： $\mathrm{wt}^2(b_-b_+) = \mathrm{wt}^2(K) + \mathrm{wt}^2(b'_-b'_+)$。基 $\{K \diamond (b_- \circ b_+) \mid K \in \mathbf{K}^+, b_\pm \in \mathbf{C}^\pm\}$ 称为 $\mathcal{H}^+$ 的双典范基。

定理 5.2 ([BG17a，定理 1。5])。对于任意 $(b_+, b_-) \in \mathbf{C}^+ \times \mathbf{C}^-$，存在唯一的元素 $b_- \bullet b_+ \in \mathbf{U}$ 在 $\bar{\cdot}$ 作用下保持不变，并满足

$$b_- \bullet b_+ - \iota_+(b_- \circ b_+) \in \sum v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]K \diamond \iota_+(b'_- \circ b'_+)$$

其中，求和遍历满足条件的 $K \in \widehat{\mathbf{U}}^0 \setminus \mathbf{K}^+$ 和 $b'_\pm \in \mathbf{C}^\pm$，即 $\mathrm{wt}^2(b_-b_+) = \mathrm{wt}^2(K) + \mathrm{wt}^2(b'_-b'_+)$。基 $\{K \diamond (b_- \bullet b_+) \mid K \in \widehat{\mathbf{U}}^0, b_\pm \in \mathbf{C}^\pm\}$ 称为 $\mathbf{U}$ 的正向双典范基。

以下是命题 5.1和定理 5.2的变体。

命题 5.3 (参见 [BG17a])。对于任意 $(b_+, b_-) \in \mathbf{C}^+ \times \mathbf{C}^-$，存在唯一的元素$b_+ \circ b_- \in \mathcal{H}^-$ 在 $\bar{\cdot}$ 作用下保持不变，并满足

$$b_+ \circ b_- - b_+b_- \in \sum v\mathbb{Z}[v]K \diamond (b'_+b'_-)$$

其中求和遍历满足 $\mathbf{K}^- \setminus \{1\}$ 和 $b'_\pm \in \mathbf{C}^\pm$，且 $\mathrm{wt}^2(b_+b_-) = \mathrm{wt}^2(K) + \mathrm{wt}^2(b'_+b'_-)$的元素。基 $\{K \diamond (b_+ \circ b_-) \mid K \in \mathbf{K}^-, b_\pm \in \mathbf{C}^\pm\}$ 称为 $\mathcal{H}^-$ 的双典范基。

定理 5.4 (参见 [BG17a])。对于任意 $(b_+, b_-) \in \mathbf{C}^+ \times \mathbf{C}^-$，存在唯一的元素$b_+ \bullet b_- \in \mathbf{U}$ 在 $\bar{\cdot}$ 下保持不变且满足

$$b_+ \bullet b_- - \iota_-(b_+ \circ b_-) \in \sum v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]K \diamond \iota_-(b'_+ \circ b'_-)$$

其中求和遍历满足 $K \in \widehat{\mathbf{U}}^0 \setminus \mathbf{K}^-$ 和 $b'_\pm \in \mathbf{C}^\pm$，且 $\mathrm{wt}^2(b_+b_-) = \mathrm{wt}^2(K) + \mathrm{wt}^2(b'_+b'_-)$的元素。基 $\{K \diamond (b_+ \bullet b_-) \mid K \in \widehat{\mathbf{U}}^0, b_\pm \in \mathbf{C}^\pm\}$ 称为 $\mathbf{U}$ 的负双典范基。

Bernstein-Greenstein 曾猜想（参见 [BG17a，猜想 1。11] 以及 [BG17a，注 1。12]）正典基与负典基相同。

5.2. $\mathbf{U}$ 上基的重合。 通过将 $\mathbf{U}$ 与 §2.4 中的 iHopf 代数 $(\mathbf{B} \otimes \mathbf{B})^{\widehat{\imath}}$ 等同，我们构造了$\mathbf{U}$的对偶典范基。对于 $(b_+, b_-) \in \mathbf{C}^+ \times \mathbf{C}^-$，我们用$C_{b_+,\, b_-}$ 表示相应的对偶典范基，它由以下性质刻画：

$$\overline{C_{b_+,b_-}} = C_{b_+,b_-}, \quad C_{b_+,b_-} \in b_+ \otimes b_- + \sum v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]K \diamond (b'_+ \otimes b'_-),$$

其中 $K \in \mathbf{U}^0$ 且 $(b'_+, b'_-) \in \mathbf{C}^+ \times \mathbf{C}^-$。我们需要以下引理：

引理 5.5. 对于任意元素 $x, y \in \widehat{\mathbf{B}}$，我们用 $x \otimes^\pm y$ 表示 $x \otimes y \in \widehat{\mathbf{U}}$ 在$\mathcal{H}^\pm$中的像。那么

$$\iota_+(x \otimes^+ y) = \iota_-(x \otimes^- y) = x \otimes y.$$

证明. 我们用 $*^{\pm}$ 表示 $\mathcal{H}^{\pm}$的乘法，用 $*$ 表示 $\widehat{\mathbf{U}}$的乘法。那么 $\iota_{\pm}$ 的定义展开为

$$\iota_-(x^+ *^- y^-) = x^+ * y^-, \quad \iota_+(y^- *^+ x^+) = y^- * x^+. \tag{5.2}$$

现在我们对 $\mathrm{wt}^2(x \otimes y)$ 使用归纳法来证明该引理。当 $x = 1$ 或 $y = 1$ 时，引理显然成立。现在假设对 $\mathrm{wt}^2(x' \otimes y') \prec \mathrm{wt}^2(x \otimes y)$ 的 $x', y' \in \mathbf{f}$，该断言成立。$\mathcal{H}^{\pm}$ 的定义意味着

$$\begin{aligned} x^+ *^- y^- &= x \otimes^- y + \sum_{y_{(2)} \neq 1} \varphi(x_{(1)}, y_{(2)}) x_{(2)} \otimes^- y_{(1)} h_{\mathrm{wt}(y_{(2)})}, \\ y^- *^+ x^+ &= x \otimes^+ y + \sum_{y_{(1)} \neq 1} \varphi(x_{(2)}, y_{(1)}) x_{(1)} h_{\mathrm{wt}(x_{(2)})} \otimes^+ y_{(2)}. \end{aligned}$$

由（5.2），我们于是得到

$$\begin{aligned} x^+ * y^- &= \iota_-(x^+ *^- y^-) = \iota_-(x \otimes^- y) + \sum_{y_{(2)} \neq 1} \varphi(x_{(1)}, y_{(2)}) \iota_-(x_{(2)} \otimes^- y_{(1)} h_{\mathrm{wt}(y_{(2)})}), \\ y^- * x^+ &= \iota_+(y^- *^+ x^+) = \iota_+(x \otimes^+ y) + \sum_{y_{(1)} \neq 1} \varphi(x_{(2)}, y_{(1)}) \iota_+(x_{(1)} h_{\mathrm{wt}(x_{(2)})} \otimes^+ y_{(2)}). \end{aligned} \tag{5.3}$$

归纳假设意味着

$$\begin{aligned} \iota_-(x_{(2)} \otimes^- y_{(1)} h_{\mathrm{wt}(y_{(2)})}) &= x_{(2)} \otimes^- y_{(1)} h_{\mathrm{wt}(y_{(2)})}, \quad \forall y_{(2)} \neq 1, \\ \iota_+(x_{(1)} h_{\mathrm{wt}(x_{(2)})} \otimes^+ y_{(2)}) &= x_{(1)} h_{\mathrm{wt}(x_{(2)})} \otimes^+ y_{(2)}, \quad \forall y_{(1)} \neq 1. \end{aligned}$$

将（5.3）与 $x^+ * y^-$ 和 $y^- * x^+$ 的定义比较，便得到 $\iota_+(x \otimes^+ y) = \iota_-(x \otimes^- y) = x \otimes y$。归纳步骤至此完成。□

由于引理 5.5，我们将不再区分 $x \otimes y$ 与其在 $\mathcal{H}^{\pm}$ 中的像。于是，$\mathcal{H}^{\pm}$ 的乘法公式变为

$$x^+ *^- y^- = x \otimes y + \sum_{y_{(2)} \neq 1} \varphi(x_{(1)}, y_{(2)}) x_{(2)} \otimes y_{(1)} h_{\mathrm{wt}(y_{(2)})}, \tag{5.4}$$

$$y^- *^- x^+ = x \otimes y, \tag{5.5}$$

$$x^+ *^+ y^- = x \otimes y, \tag{5.6}$$

$$y^- *^+ x^+ = x \otimes y + \sum_{y_{(1)} \neq 1} \varphi(x_{(2)}, y_{(1)}) x_{(1)} h_{\mathrm{wt}(x_{(2)})} \otimes y_{(2)}. \tag{5.7}$$

现在我们可以陈述本节的主要结果。

定理 5.6。 正双重典范基、负双重典范基与对偶典范基彼此相同。更明确地说，对于任意 $(b_+, b_-) \in \mathbf{C}^+ \times \mathbf{C}^-$，有 $b_- \bullet b_+ = b_+ \bullet b_- = C_{b_+, b_-}$。

证明。通过比较 C_{b_+, b_-} 的定义与定理 5.2 和 5.4，只需证明以下性质 (5.8)–(5.9)：

$$\iota_-(b_+ \circ b_-) \in b_+ \otimes b_- + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}, (b'_+, b'_-) \in \mathbf{C}^+ \times \mathbf{C}^-} v^{-1} \mathbb{Z}[v^{-1}] K'_\alpha \diamond (b'_+ \otimes b'_-), \tag{5.8}$$

$$\iota_+(b_-\circ b_+)\in b_+\otimes b_-+\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}},(b'_+,b'_-)\in\mathbf{C}^+\times\mathbf{C}^-} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]K_\alpha\diamond(b'_+\otimes b'_-). \tag{5.9}$$

显然，对于 $b_+=1$ 或 $b_-=1$，这些性质成立。现在假设对于任意的 $(b'_+,b'_-)\in\mathbf{C}^+\times\mathbf{C}^-$，只要 $\mathrm{wt}^2(b'_+)+\mathrm{wt}^2(b'_-)\prec\mathrm{wt}^2(b_+)+\mathrm{wt}^2(b_-)$，(5.8)–(5.9) 均成立。注意到

$$\begin{aligned}\overline{b_+*^-b_-}-b_+*^-b_-&=b_+\otimes b_--b_+*^-b_-\\&=-\sum_{(b_-)_{(2)}\neq1}\varphi\big((b_+)_{(1)},(b_-)_{(2)}\big)\,(b_+)_{(2)}\otimes(b_-)_{(1)}h_{\mathrm{wt}((b_-)_{(2)})}\\&=\sum_{\mathrm{wt}^2(b'_+\otimes b'_-)+\mathrm{wt}^2(K'_\alpha)=\mathrm{wt}^2(b_+\otimes b_-)}a_{\alpha,b'_+,b'_-}K'_\alpha\diamond(b'_+\circ b'_-).\end{aligned} \tag{5.10}$$

其中 $a_{\alpha,\ b'_+,\ b'_-}\in\mathbb{Z}[v,v^{-1}]$ 可唯一写成如下形式：$a_{\alpha,\ b'_+,\ b'_-}=a^+_{\alpha\ ,\ b'_+,\ b'_-}-a^-_{\alpha\ ,\ b'_+,\ b'_-}$其中 $a^+_{\alpha\ ,\ b'_+,\ b'_-}\in v\mathbb{Z}[v]$ 以及 $a^-_{\alpha\ ,\ b'_+,\ b'_-}=\overline{a^+_{\alpha\ ,\ b'_+,\ b'_-}}$。以下元素

$$b_+*^-b_-+\sum a^+_{\alpha,b'_+,b'_-}K'_\alpha\diamond(b'_+\circ b'_-)$$

是条不变的，并且它的 $b_+*^-b_-$ 是首项，其余项属于 $\sum v\mathbb{Z}[v]K'_\alpha\diamond(b'_+\circ b'_-)$，由归纳法可得。利用命题5.3，我们得出

$$b_+\circ b_-=b_+*^-b_-+\sum a^+_{\alpha,b'_+,b'_-}K'_\alpha\diamond(b'_+\circ b'_-). \tag{5.11}$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned}\overline{b_-*^+b_+}-b_-*^+b_+&=b_+\otimes b_--b_-*^+b_+\\&=-\sum_{(b_-)_{(1)}\neq1}\varphi((b_+)_{(2)},(b_-)_{(1)})(b_+)_{(1)}\otimes(b_-)_{(2)}h_{\mathrm{wt}((b_-)_{(1)})}\\&=\sum_{\mathrm{wt}^2(b'_+\otimes b'_-)+\mathrm{wt}^2(K_\alpha)=\mathrm{wt}^2(b_+\otimes b_-)}c_{\alpha,b'_+,b'_-}K_\alpha\diamond(b'_+\circ b'_-).\end{aligned}$$

其中$c_{\alpha,\ b'_+,\ b'_-}\in\mathbb{Z}[v,v^{-1}]$ 可唯一写成$c_{\alpha,\ b'_+,\ b'_-}=c^+_{\alpha\ ,\ b'_+,\ b'_-}-c^-_{\alpha\ ,\ b'_+,\ b'_-}$ 其中$c^+_{\alpha\ ,\ b'_+,\ b'_-}\in v\mathbb{Z}[v]$ 以及$c^-_{\alpha\ ,\ b'_+,\ b'_-}=\overline{c^+_{\alpha\ ,\ b'_+,\ b'_-}}$。利用命题5.1，我们得出

$$b_-\circ b_+=b_-*^+b_++\sum c^+_{\alpha,b'_+,b'_-}K_\alpha\diamond(b'_+\circ b'_-). \tag{5.12}$$

利用（5.11）和（5.12），现在可以计算得出

$$\begin{aligned}\iota_-(b_+\circ b_-)&=\iota_-(b_+*^-b_-)+\sum a^+_{\alpha,b'_+,b'_-}\iota_-(K'_\alpha\diamond(b'_+\circ b'_-))\\&=\iota_-(b_+\otimes b_-)+\iota_-\Big(\sum_{(b_-)_{(2)}\neq1}\varphi((b_+)_{(1)},(b_-)_{(2)})(b_+)_{(2)}\otimes(b_-)_{(1)}h_{\mathrm{wt}((b_-)_{(2)})}\Big)\\&\quad+\sum a^+_{\alpha,b'_+,b'_-}K'_\alpha\diamond\iota_-(b'_+\circ b'_-)\\&=b_+\otimes b_--\sum a_{\alpha,b'_+,b'_-}K'_\alpha\diamond\iota_-(b'_+\circ b'_-)+\sum a^+_{\alpha,b'_+,b'_-}K'_\alpha\diamond\iota_-(b'_+\circ b'_-)\\&=b_+\otimes b_-+\sum a^-_{\alpha,b'_+,b'_-}K'_\alpha\diamond\iota_-(b'_+\circ b'_-),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\iota_+(b_-\circ b_+) &= \iota_+(b_-*^+ b_+)+\sum c^+_{\alpha,b'_+,b'_-}\,\iota_-(K_\alpha\diamond(b'_+\circ b'_-))\\ &= \iota_+(b_-\otimes b_+)+\iota_+\Big(\sum_{(b_-)_{(1)}\neq 1}\varphi((b_+)_{(2)},(b_-)_{(1)})(b_+)_{(1)}h_{\mathrm{wt}((b_+)_{(2)})}\otimes(b_-)_{(2)}\Big)\\ &\quad+\sum c^+_{\alpha,b'_+,b'_-}K_\alpha\diamond\iota_+(b'_-\circ b'_+)\\ &= b_+\otimes b_- -\sum c_{\alpha,b'_+,b'_-}K_\alpha\diamond\iota_+(b'_-\circ b'_+)+\sum c^+_{\alpha,b'_+,b'_-}K_\alpha\diamond\iota_+(b'_-\circ b'_+)\\ &= b_+\otimes b_- +\sum c^-_{\alpha,b'_+,b'_-}K_\alpha\diamond\iota_+(b'_-\circ b'_+).\end{aligned}$$

根据归纳假设，我们有

$$\iota_-(b'_+\circ b'_-)\in\sum\mathbb{Z}[v^{-1}]K'_\beta\diamond(b''_+\otimes b''_-),\quad \iota_+(b'_-\circ b'_+)\in\sum\mathbb{Z}[v^{-1}]K_\beta\diamond(b''_+\otimes b''_-).$$

由于 $a^-_{\alpha,\,b'_+,\,b'_-},\ c^-_{\alpha,\,b'_+,\,b'_-}\in v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]$，我们已证明了 (5.8)–(5.9)，从而证明了该定理。□

由定理 5.6可知，我们无需区分正、负双~典范基，并将它们统称为 $\mathbf{U}$ 的双典范基。结合定理 4.15，我们得到以下推论，从而证明了 [BG17a，猜想 1。15] 对所有有限型量子群均成立。

~**推论 5.7**。 $\mathbf{U}$ 的双（= 对偶）典范基在辫群作用下保持不变。

~Chevalley 对合 ω 在 $\mathbf{U}$ 上是满足以下条件的代数自同构 $\omega(E_i)=F_i$，$\omega(F_i)=E_i$，$\omega(K_i)=K'_i$，$\omega(K'_i)=K_i$，其中 $i\in\mathbb{I}$。我们可以将量子群视为对角型 i 量子群，其中对合 τ 是交换；见例 2.6。由于 Chevalley 对合 ω 与交换重合，我们得到推论 4.13 的以下变体，其证明方法相同。

~**推论 5.8**。 量子群$\mathbf{U}$ 的双（= 对偶）典范基在 *Chevalley* 对合 ω 下保持不变。

从构造可知，ω 将正双重典范基映射为负双重典范基，反之亦然。因此，推论 5.8 再次确认了正、负双重典范基的一致性。

利用命题4.10，可得以下推论，它证明了 [BG17a的猜想 1。11] 对有限型量子群成立。

~**推论 5.9** ([BG17a，猜想 1。11])。量子群的双（= 对偶）典范基$\mathbf{U}$ 在反对合 σ下保持不变。更准确地说，我们有

$$\sigma(K\diamond(b_-\bullet b_+))=\sigma(K)\diamond(\sigma(b_+)\bullet\sigma(b_-))=\sigma(K)\diamond(\sigma(b_-)\bullet\sigma(b_+)).$$

注记 5.10. 对于 ADE 型 Drinfeld 双量子群，定理5.6、推论 5.7 和 5.9 此前由第二、第三作者采用完全不同的方法在 [LP25] 中证明。具体而言，在广义箭图簇和层的框架下，[LP25，定理 8.15]证明了双典范

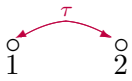
~基与量子群的对偶典范基重合 U。利用 Hall 代数，[LP25，推论 8.17] 证明了对偶典范基在辫群作用下保持不变。关于对偶典范基在 σ 下保持不变的陈述，见 [LP25，命题 8。20]。

Appendix A. Dual canonical bases in rank one

在 3 个秩一准分裂（普适）i量子群中，已有 2 个秩一情形的对偶典范基闭式公式。在本节中，我们将在剩下的、最为复杂的秩一情形中得到显式递推公式。

A.1. **分裂与对角秩一情形。** Satake图的秩是 τ-轨道的数量。由此，我们可以定义秩一的 i 量子群。秩一的~分裂（普适）i 量子群 $\mathbf{U}^\imath_v(\mathfrak{sl}_2)$ 与 $\mathbb{I}$ 相关，其由~单个顶点组成，是一个交换代数。$\mathbf{U}^\imath_v(\mathfrak{sl}_2)$ 的对偶典范基见 [LP25，第 9]节。

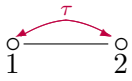
第二个秩一 i 量子群与 Satake图



(A.1)

~该 i 量子群同构于 Drinfeld 双 $\mathbf{U}_v(\mathfrak{sl}_2)$；见例 2.6。其对偶典范基见 [LP25，第 10]，节；另见 [BG17a，第 4 节。1]。

~A.2. **准分裂秩一。** 剩下的秩一量子群是$\mathbf{U}^\imath_v(\mathfrak{sl}_3)$，它与以下 Satake图相关联



(A.2)

本节将给出其对偶典范基的闭式公式。设$\mathbf{f}$ 为类型 A_2 的代数。记

$$\vartheta_{12} = \frac{v^{\frac{1}{2}}\vartheta_1\vartheta_2 - v^{-\frac{1}{2}}\vartheta_2\vartheta_1}{v - v^{-1}}, \quad \vartheta_{21} = \frac{v^{\frac{1}{2}}\vartheta_2\vartheta_1 - v^{-\frac{1}{2}}\vartheta_1\vartheta_2}{v - v^{-1}}.$$

我们约定 $\vartheta_i^a = 0$当 $a < 0$时；对于 ϑ_{12} 和 ϑ_{21}也类似。根据 [BG17a，例 5，13], 代数 $\mathbf{C}$的$\mathbf{f}$ 对偶典范基为

$$\mathbf{C} = \{b_{\mathbf{a}} := v^{\frac{1}{2}(a_2-a_1)(a_{12}-a_{21})}\vartheta_1^{a_1}\vartheta_2^{a_2}\vartheta_{12}^{a_{12}}\vartheta_{21}^{a_{21}} \mid \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_{12}, a_{21}) \in \mathbb{N}^4, a_1a_2 = 0\}. \quad (A.3)$$

直接计算可得

$$\vartheta_1\vartheta_{12} = v\vartheta_{12}\vartheta_1, \qquad \vartheta_2\vartheta_{12} = v^{-1}\vartheta_{12}\vartheta_2, \quad \vartheta_{12}\vartheta_{21} = \vartheta_{21}\vartheta_{12},$$
$$\vartheta_1\vartheta_{21} = v^{-1}\vartheta_{21}\vartheta_1, \qquad \vartheta_2\vartheta_{21} = v\vartheta_{21}\vartheta_2.$$

回顾 Borel 子代数上的 iHopf 代数 $\widetilde{\mathbf{B}}_\tau^\iota$，其类型为 A_2。注意，$\mathbb{K}_1 = v^{-1/2}h_2$, $\mathbb{K}_2 = v^{-1/2}h_1$。我们有

$$h_i * h_j = v^{c_{i,\tau j}} h_i h_j = \begin{cases} v^{-1}h_i^2 & \text{if } i = j, \\ v^2 h_i h_j & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$
$$h_i * \vartheta_j = h_i\vartheta_j \qquad \vartheta_j * h_i = v^{c_{i,\tau j}}\vartheta_j h_i, \qquad h_i * \vartheta_{12} = h_i\vartheta_{12},$$
$$h_i * \vartheta_{21} = h_i\vartheta_{21}, \qquad \vartheta_{12} * h_i = \vartheta_{12}h_i, \qquad \vartheta_{21} * h_i = \vartheta_{21}h_i.$$

由定理 4.7，记 $\mathbb{K}_\alpha \diamond C_{\vartheta_1^{a_1}\vartheta_2^{a_2}\vartheta_{12}^{a_{12}}\vartheta_{21}^{a_{21}}}$ 为 $\widetilde{\mathbf{B}}_\tau^\iota$ 对应于 $\mathbb{K}_\alpha \diamond b_{(a_1,a_2,a_{12},a_{21})}$ 的对偶典范基；参见（A.3）。此外，我们有

$$C_{\vartheta_{12}^a\vartheta_{21}^b} * C_{\vartheta_{12}^c\vartheta_{21}^d} = C_{\vartheta_{12}^c\vartheta_{21}^d} * C_{\vartheta_{12}^a\vartheta_{21}^b}.$$

显然，我们有 $C_{\vartheta_1} = \vartheta_1$, $C_{\vartheta_2} = \vartheta_2$。记

$$x_{12} = \frac{v^{\frac{1}{2}}\vartheta_1 * \vartheta_2 - v^{-\frac{1}{2}}\vartheta_2 * \vartheta_1}{v - v^{-1}}, \quad x_{21} = \frac{v^{\frac{1}{2}}\vartheta_2 * \vartheta_1 - v^{-\frac{1}{2}}\vartheta_1 * \vartheta_2}{v - v^{-1}}.$$

容易验证

$$\vartheta_{12} = x_{12} + \mathbb{K}_2 - v\mathbb{K}_1, \qquad \vartheta_{21} = x_{21} + \mathbb{K}_1 - v\mathbb{K}_2,$$

于是

$$C_{\vartheta_{12}} = x_{12} + \mathbb{K}_2 - [2]\mathbb{K}_1 = \vartheta_{12} - v^{-1}\mathbb{K}_1, \tag{A.4}$$
$$C_{\vartheta_{21}} = x_{21} + \mathbb{K}_1 - [2]\mathbb{K}_2 = \vartheta_{21} - v^{-1}\mathbb{K}_2. \tag{A.5}$$

命题 A.1. 对于任意 $a \geq 0$, $b \geq 0$, 我们有

$$C_{\vartheta_{12}^{a+1}\vartheta_{21}^b} = C_{\vartheta_{12}} * C_{\vartheta_{12}^a\vartheta_{21}^b} - \mathbb{K}_1 * \mathbb{K}_2 * C_{\vartheta_{12}^a\vartheta_{21}^{b-1}} - \mathbb{K}_1 * C_{\vartheta_{12}^{a-1}\vartheta_{21}^{b+1}}, \tag{A.6}$$
$$C_{\vartheta_{21}^{a+1}\vartheta_{12}^b} = C_{\vartheta_{21}} * C_{\vartheta_{21}^a\vartheta_{12}^b} - \mathbb{K}_1 * \mathbb{K}_2 * C_{\vartheta_{21}^a\vartheta_{12}^{b-1}} - \mathbb{K}_2 * C_{\vartheta_{21}^{a-1}\vartheta_{12}^{b+1}}. \tag{A.7}$$

证明。只需证明（A.6），另一个结论由对称性可得。我们对 a, b 进行归纳。我们有

$$\Delta(\vartheta_{12}) = \vartheta_{12} \otimes 1 + h_1h_2 \otimes \vartheta_{12} + v^{\frac{1}{2}}h_2\vartheta_1 \otimes \vartheta_2,$$
$$\Delta(\vartheta_{12}^a\vartheta_{21}^b) = \left(\vartheta_{12} \otimes 1 + h_1h_2 \otimes \vartheta_{12} + v^{\frac{1}{2}}h_2\vartheta_1 \otimes \vartheta_2\right)^a \cdot \left(\vartheta_{21} \otimes 1 + h_1h_2 \otimes \vartheta_{21} + v^{\frac{1}{2}}h_1\vartheta_2 \otimes \vartheta_1\right)^b.$$

因此，根据定义，我们有

$$\begin{aligned}
&\vartheta_{12} * \vartheta_{12}^a\vartheta_{21}^b \\
&= \vartheta_{12}^{a+1}\vartheta_{21}^b + \sum_{t=0}^{a-1} \varphi(\vartheta_{21}, \vartheta_{12})\vartheta_{12}^t h_1h_2\vartheta_{12}^{a-1-t}\vartheta_{21}^b + \sum_{t=0}^{b-1} \varphi(\vartheta_{21}, \vartheta_{21})\vartheta_{12}^a\vartheta_{21}^t h_1h_2\vartheta_{21}^{b-1-t} \\
&\quad + \sum_{s=0}^{a-1}\sum_{t=0}^{b-1} \varphi(\vartheta_{21}, \vartheta_2\vartheta_1)\vartheta_{12}^s(v^{\frac{1}{2}}h_2\vartheta_1)\vartheta_{12}^{a-1-s}\vartheta_{21}^t(v^{\frac{1}{2}}h_1\vartheta_2)\vartheta_{21}^{b-1-t} \\
&\quad + \sum_{s=0}^{a-1} \varphi(v^{\frac{1}{2}}h_1\vartheta_2, \vartheta_2)\vartheta_2\vartheta_{12}^s(v^{\frac{1}{2}}h_2\vartheta_1)\vartheta_{12}^{a-1-s}\vartheta_{21}^b
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \vartheta_{12}^{a+1}\vartheta_{21}^{b} - v^{-1}(v-v^{-1})\sum_{t=0}^{a-1} v^{-1-2t}\mathbb{K}_1 * \mathbb{K}_2 * \vartheta_{12}^{a-1}\vartheta_{21}^{b} \\
&\quad + (v-v^{-1})\sum_{t=0}^{b-1} v^{-2a-2t-1}\mathbb{K}_1 * \mathbb{K}_2 * \vartheta_{12}^{a}\vartheta_{21}^{b-1} \\
&\quad + v^{-1/2}(v-v^{-1})^2\sum_{s=0}^{a-1}\sum_{t=0}^{b-1} v^{-2s-2t-2}\mathbb{K}_1 * \mathbb{K}_2 * (v^{\frac{1}{2}}\vartheta_{12} + v^{-1/2}\vartheta_{21})\vartheta_{12}^{a-1}\vartheta_{21}^{b-1} \\
&\quad + \sum_{s=0}^{a-1}(v-v^{-1})v^{-2s-1}\mathbb{K}_1 * \vartheta_{12}^{a-1}\vartheta_{21}^{b+1} + \sum_{s=0}^{a-1}(v-v^{-1})v^{-2s-2}\mathbb{K}_1 * \vartheta_{12}^{a}\vartheta_{21}^{b} \\
&\in \vartheta_{12}^{a+1}\vartheta_{21}^{b} + \delta_{a,0}\mathbb{K}_1 * \mathbb{K}_2 * \vartheta_{12}^{a}\vartheta_{21}^{b-1} + \delta(a>0)\mathbb{K}_1 * \mathbb{K}_2 * \vartheta_{12}^{a}\vartheta_{21}^{b-1} + \mathbb{K}_1 * \vartheta_{12}^{a-1}\vartheta_{21}^{b+1} \\
&\quad + \sum_{(\beta,b)\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}\times\mathbf{C}} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]\cdot\mathbb{K}_\beta \diamond \iota(b) \\
&= \vartheta_{12}^{a+1}\vartheta_{21}^{b} + \mathbb{K}_1 * \mathbb{K}_2 * \vartheta_{12}^{a}\vartheta_{21}^{b-1} + \mathbb{K}_1 * \vartheta_{12}^{a-1}\vartheta_{21}^{b+1} + \sum_{(\beta,b)\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}\times\mathbf{C}} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]\cdot\mathbb{K}_\beta \diamond \iota(b),
\end{aligned}
$$

因为 $\varphi(\vartheta_{21},\ \vartheta_{12}) = -v^{-1}(v-v^{-1}) = -\varphi(h_1\vartheta_2,\ \vartheta_2)$, $\varphi(\vartheta_{21},\ \vartheta_2\vartheta_1) = v^{-1/2}(v-v^{-1})^2$, 和 $\vartheta_2\vartheta_1 = v^{\frac{1}{2}}\vartheta_{21} + v^{-1/2}\vartheta_{12}$。这里

$$
\delta(a>0) = \begin{cases} 1 & \text{if } a>0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}
$$

根据定理 4.7，我们知道 $C_{\vartheta_{12}^a\vartheta_{21}^b} \in \vartheta_{12}^a\vartheta_{21}^b + \sum_{(\beta,b)\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}\times\mathbf{C}} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]\cdot\mathbb{K}_\beta\diamond\iota(b)$。于是

$$
\begin{aligned}
&C_{\vartheta_{12}} * C_{\vartheta_{12}^a\vartheta_{21}^b} - \mathbb{K}_1 * \mathbb{K}_2 * C_{\vartheta_{12}^a\vartheta_{21}^{b-1}} - \mathbb{K}_1 * C_{\vartheta_{12}^{a-1}\vartheta_{21}^{b+1}} \\
&\in \vartheta_{12}^{a+1}\vartheta_{21}^{b} + \sum_{(\beta,b)\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}\times\mathbf{C}} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]\cdot\mathbb{K}_\beta\diamond\iota(b),
\end{aligned}
$$

它是条不变的。因此，再次根据定理 4.7 ，我们有

$$
C_{\vartheta_{12}^{a+1}\vartheta_{21}^{b}} = C_{\vartheta_{12}} * C_{\vartheta_{12}^a\vartheta_{21}^b} - \mathbb{K}_1 * \mathbb{K}_2 * C_{\vartheta_{12}^a\vartheta_{21}^{b-1}} - \mathbb{K}_1 * C_{\vartheta_{12}^{a-1}\vartheta_{21}^{b+1}}.
$$

证明完毕。 □

命题 A.2。对于任意 $a,b,c\geq 0$，都有

$$
C_{\vartheta_1^{a+1}\vartheta_{12}^b\vartheta_{21}^c} = v^{(c-b)/2}C_{\vartheta_1} * C_{\vartheta_1^a\vartheta_{12}^b\vartheta_{21}^c} - \delta_{a,0}\mathbb{K}_1\diamond C_{\vartheta_1^{a+1}\vartheta_{12}^{b-1}\vartheta_{21}^c}, \tag{A.8}
$$

$$
C_{\vartheta_2^{a+1}\vartheta_{12}^b\vartheta_{21}^c} = v^{(b-c)/2}C_{\vartheta_2} * C_{\vartheta_2^a\vartheta_{12}^b\vartheta_{21}^c} - \delta_{a,0}\mathbb{K}_1\diamond C_{\vartheta_2^{a+1}\vartheta_{12}^b\vartheta_{21}^{c-1}}. \tag{A.9}
$$

此外，以下恒等映射成立：

$$
C_{\vartheta_1} * C_{\vartheta_1^a\vartheta_{12}^b\vartheta_{21}^c} = v^{b-c}C_{\vartheta_1^a\vartheta_{12}^b\vartheta_{21}^c} * C_{\vartheta_1}. \tag{A.10}
$$

证明。我们通过对A.8）和（A.10）进行归纳法证明 a。（A.9）的证明略去 .

我们先证明（A.10）对 $a=0$显然，我们有 $C_{\vartheta_1} * C_{\vartheta_{12}} = vC_{\vartheta_{12}} * C_{\vartheta_1}$ 且 $C_{\vartheta_1} * C_{\vartheta_{21}} = v^{-1}C_{\vartheta_{21}} * C_{\vartheta_1}$。根据命题A.1中的递归公式，通过

对 $b+c$ 进行归纳法可得

$$C_{\vartheta_1} * C_{\vartheta_{12}^b \vartheta_{21}^c} = v^{b-c} C_{\vartheta_{12}^b \vartheta_{21}^c} * C_{\vartheta_1}. \tag{A.11}$$

假设

$$C_{\vartheta_1} * C_{\vartheta_1^k \vartheta_{12}^b \vartheta_{21}^c} = v^{b-c} C_{\vartheta_1^k \vartheta_{12}^b \vartheta_{21}^c} * C_{\vartheta_1}, \qquad \text{for } k \le a. \tag{A.12}$$

现在我们计算

$$\begin{aligned}
\vartheta_1 * \vartheta_1^a \vartheta_{12}^b \vartheta_{21}^c &= \vartheta_1^{a+1} \vartheta_{12}^b \vartheta_{21}^c + (v - v^{-1}) \sum_{t=0}^{b-1} \vartheta_1^a \vartheta_{12}^t (v^{\frac{1}{2}} h_2 \vartheta_1) \vartheta_{12}^{b-1-t} \vartheta_{21}^c \\
&= \vartheta_1^{a+1} \vartheta_{12}^b \vartheta_{21}^c + v^{\frac{1}{2}} (v - v^{-1}) \sum_{t=0}^{b-1} v^{a-2t} h_2 \vartheta_1^{a+1} \vartheta_{12}^{b-1} \vartheta_{21}^c \\
&= \vartheta_1^{a+1} \vartheta_{12}^b \vartheta_{21}^c + (v - v^{-1}) \sum_{t=0}^{b-1} v^{a-2t+1} \mathbb{K}_1 * \vartheta_1^{a+1} \vartheta_{12}^{b-1} \vartheta_{21}^c \\
&= \vartheta_1^{a+1} \vartheta_{12}^b \vartheta_{21}^c + (v - v^{-1}) \sum_{t=0}^{b-1} v^{-2t-\frac{a+1}{2}} \mathbb{K}_1 \diamond \vartheta_1^{a+1} \vartheta_{12}^{b-1} \vartheta_{21}^c.
\end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned}
&v^{(c-b)/2} \vartheta_1 * (v^{a(c-b)/2} \vartheta_1^a \vartheta_{12}^b \vartheta_{21}^c) \\
&= (v^{(a+1)(c-b)/2} \vartheta_1^{a+1} \vartheta_{12}^b \vartheta_{21}^c) + (1 - v^{-2}) \sum_{t=0}^{b-1} v^{-a-2t} \mathbb{K}_1 \diamond (v^{(a+1)(c-b+1)/2} \vartheta_1^{a+1} \vartheta_{12}^{b-1} \vartheta_{21}^c).
\end{aligned}$$

根据假设，$v^{(c-b)/2} C_{\vartheta_1} * C_{\vartheta_1^a \vartheta_{12}^b \vartheta_{21}^c}$ 是条不变。因此，类似于命题A.1的证明，我们有

$$C_{\vartheta_1^{a+1} \vartheta_{12}^b \vartheta_{21}^c} = v^{(c-b)/2} C_{\vartheta_1} * C_{\vartheta_1^a \vartheta_{12}^b \vartheta_{21}^c} - \delta_{a,0} \mathbb{K}_1 \diamond C_{\vartheta_1^{a+1} \vartheta_{12}^{b-1} \vartheta_{21}^c}. \tag{A.13}$$

最后，我们证明$C_{\vartheta_1} * C_{\vartheta_1^{a+1} \vartheta_{12}^b \vartheta_{21}^c} = v^{b-c} C_{\vartheta_1^{a+1} \vartheta_{12}^b \vartheta_{21}^c} * C_{\vartheta_1}$。若 $a \neq 0$，则由（A.13）和归纳假设（A.12）可得。对于 $a = 0$，由（A.13）可得

$$C_{\vartheta_1 \vartheta_{12}^b \vartheta_{21}^c} = v^{(c-b)/2} C_{\vartheta_1} * C_{\vartheta_{12}^b \vartheta_{21}^c} - \mathbb{K}_1 \diamond C_{\vartheta_1 \vartheta_{12}^{b-1} \vartheta_{21}^c}.$$

由（A. 11）以及对 $b+c$的归纳法，所需的恒等映射成立。证明完毕 . □

命题 A.1 和 A.2 为对偶规范基提供了显式的递归公式$\widetilde{\mathbf{U}}$ $\mathbf{U}_v^\iota(\mathfrak{sl}_3)$。

References

[AV22] A. Appel 和 B. Vlaar，量子 *Kac-Moody* 代数的通用 *K* 矩阵，Represent. Theory**26** (2022), 764–824。[BK19] M. Balagovic 和 S. Kolb，量子对称对的通用 *K* 矩阵，J. Reine Angew. Math. **747** (2019), 299–353。[BW18a] H. Bao 和 W. Wang，通过量子对称对研究 B 型 *Kazhdan-Lusztig* 理论的新方法，Ast´erisque**402**，2018，vii+134页，arXiv:1310.0103[BW18b] H. Bao 和 W. Wang，源自量子对称对的典范基，Inventiones Math. **213** (2018), 1099–1177。

[BW21] H. Bao 和 W. Wang，源自 Kac-Moody 型量子对称对的典范基，Compos. Math.,[BG17a] A. Berenstein 和 J. Greenstein，双典范基，Adv. Math. 316 (2017), 381–468。[BG17b] A. Berenstein 和 J. Greenstein，量子 Schubert 胞的典范基及其对称性，Sel. Math. New Ser. 23, 2755–2799 (2017)。[Br13] T. Bridgeland，通过复形的 Hall 代数研究量子群，Ann. Math. 177 (2013), 739–759。[CLPRW25] J. Chen, M. Lu, X. Pan, S. Ruan 和 W. Wang，i量子群与 iHopf 代数 I：基础，arXiv:2511.11291[Dr87] V.G. Drinfeld，量子群，载于：国际数学家大会论文集，第 1、2 卷，加利福尼亚州伯克利，1986 年，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1987 年，第 798–820 页。[HL15] D. Hernandez 和 B. Leclerc，量子 Grothendieck 环与导出 Hall 代数，J. Reine Angew. Math. 701 (2015), 77–126。[Jan96] J.C. Jantzen，量子群讲义，Grad. Studies in Math. 6，美国数学会，普罗维登斯（1996）。[Ka91] M. Kashiwara，关于泛包络代数的 Q 类比的晶体基，Duke Math. J. 63 (1991), 456–516。[Kim17] Y. Kimura，关于量子幂零子群与对偶典范基的若干注记，Pacific J. Math. 286 (2017), 125–151。[Ko14] S. Kolb，量子对称 Kac-Moody 对，Adv. Math. 267 (2014), 395–469。[KP11] S. Kolb 和 J. Pellegrini，量子化泛包络代数的余理想子代数上的辫群作用，J. Algebra 336 (2011), 395–416。[KY21] S. Kolb 和 M. Yakimov，量子对称对余理想子代数的定义关系，Forum of Mathematics, Sigma (2021), Vol. 9:e67, 1–38。[Let99] G. Letzter，量子化泛包络代数的对称对，J. Algebra 220 (1999), 729–767。[LP25] M. Lu 和 X. Pan，量子群的对偶典范基与 $\imath$量子群，arXiv:2504.19073[LW21a] M. Lu 和 W. Wang，Hall 代数与量子对称对 II：反射函子，Commun. Math. Phys. 381 (2021), 799–855。[LW21b] M. Lu 和 W. Wang，Hall 代数与量子对称对 III：箭图簇，Adv. Math. 393 (2021), 108071。[LW22a] M. Lu 和 W. Wang，Hall 代数与量子对称对 I：基础，伦敦数学会会刊 (3) 124 (2022), 1–82。[LW22b] M. Lu 和 W. Wang，通过 $\imath$Hall 代数研究准分裂 $\imath$量子群的辫群对称，数学精选 (N.S.) 28 (2022), Paper No. 84。[LW23] M. Lu 和 W. Wang，Kac-Moody 型 Hall 代数与量子对称对，Adv. Math. 430 (2023), 109215。[Lus90a] G. Lusztig，源自量子化泛包络代数的典范基，J. Amer. Math. Soc. 3 (1990), 447–498。[Lus90b] G. Lusztig，单位根处的量子群，Geom. Dedicata 35 (1990), 89–114。[Lus93] G. Lusztig，量子群导论，Birkhäuser，波士顿，1993。[Lus96] G. Lusztig，辫群作用与典范基，Adv. Math. 122 (1996), 237–261。[Na04] H. Nakajima，箭图簇与量子仿射代数特征的 t 类比，Ann. Math. 160 (2004), 1057–1097。[Qin16] F. Qin，通过循环箭图簇研究量子群 I，Compos. Math. 152 (2016), 299–326。[Rad85] D. Radford，带投影的 Hopf 代数，J. Algebra 92 (1985), 322–347。[Rin96] C.M. Ringel，量子群的 PBW 基，J. reine angrew. Math. 470 (1996), 51–88。[Tan17] T. Tanisaki，量子化坐标代数上的模与 PBW 基，J. Math. Soc. Japan 69 (2017), 1105–1156。[VV03] M. Varagnolo 和 E. Vasserot，层与量子 Grothendieck 环，Issai Schur 纪念文集（Chevaleret/Rehovot，2000），数学进展 210（Birkhäuser Boston，波士顿，马萨诸塞州，2003）345–365。

[WZ23] W. Wang 和 W. Zhang，量子群上相对辫群对称的内在方法，伦敦数学会会刊 **127** (2023), 1338–1423.[Z23] W. Zhang，*Kac-Moody* 型量子群上的相对辫群对称，数学精选 **(N.S.)29** (2023),Paper No. 59, 54 pp.

Department of Mathematics, Shantou University, Shantou 515063, P.R.China电子邮箱: chenjiayi@stu.edu.cn

Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P.R.China电子邮箱: luming@scu.edu.cn

Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P.R.China电子邮箱: xiaolong pan@stu.scu.edu.cn

School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, P.R.China电子邮箱: sqruan@xmu.edu.cn

Department of Mathematics, University of Virginia, Charlottesville, VA 22904, USA电子邮件地址：ww9c@virginia.edu