arXiv:2601.00529v1 [math.CO] 2 Jan 2026

¨有限域上 k-距离的 Mattila-Sjolin 问题

DAEWOONG CHEONG、HUNSEOK KANG 和 JINBEOM KIM

Abstract. 设 $\mathbb{F}_q^d$ 是有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的一个 d 维向量空间，该有限域有 q 个元素。对于 $x \in \mathbb{F}_q^d$，令 $\|x\| = x_1^2 + \cdots + x_d^2$。为方便起见，我们称 $\|\cdot\|$ 为$\mathbb{F}_q^d$上的一个范数。对于子集 $E \subset \mathbb{F}_q^d$，令 $\Delta(E)$ 表示定义在 E 上的距离集:

$$\Delta(E) := \{\|x-y\| : x, y \in E\}.$$

Mattila-Sj¨olin 问题旨在确定最小的指数 $\alpha > 0$，使得对于所有满足 $|E| \geq Cq^\alpha$ 的子集 $E \subset \mathbb{F}_q^d$，都有 $\Delta(E) = \mathbb{F}_q$。本文研究该问题在一种范数变体下的情形，这种变体产生的距离集比范数 $\|\cdot\|$. 所产生的更小。具体而言，我们将范数 $\|\cdot\|$ 替换为所谓的 k-范数（$1 \leq k \leq d$），它可视为对 $\|\cdot\|$的一种变形。为了得到关于 k-范数的 Mattila-Sj¨olin 问题的结果，我们采用组合方法分析离散傅里叶工具所产生的各种求和。尽管我们的距离集比 Mattila-Sj¨olin 问题中的距离集更小，但对于某些 k，我们仍得到了与 Iosevich 和 Rudnev[15], 关于 Mattila-Sj¨olin 问题所得结果相同的结论。此外，我们的结果在所有奇数维中都是尖锐的。

1. Introduction

在几何测度论中，Falconer 距离问题要求紧子集 $E \subset \mathbb{R}^d$ 的 Hausdorff维数 $\dim_{\mathcal{H}}(E)$ 达到某个最小值，使得距离集

$$\Delta(E) := \{\|x-y\| : x, y \in E\}$$

具有正的 Lebesgue测度，其中 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的欧几里得范数。1985 年，Falconer [11] 猜想，对于每个紧子集 $E \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$)，如果 $\dim_{\mathcal{H}}(E) > d/2$，那么距离集 $\Delta(E)$ 具有正的 Lebesgue测度。随后，Falconer 证明了当 $\dim_{\mathcal{H}}(E) > (d+1)/2$ 时结论成立。尽管已经取得了一些进展，但这个问题在所有维数下仍未解决（例如参见文献 [1, 25, 9, 5, 12, 8, 6, 7]）。

此外，Mattila 和 Sj¨olin [19] 得到了一个更强的结果：如果 $\dim_{\mathcal{H}}(E) > (d+1)/2$，那么 $\Delta(E)$ 作为 $\mathbb{R}$ 的子集具有非空内点。请注意，这两个结果中的下界都远低于猜想中的维数阈值 $d/2$。

Falconer 距离问题也可以视为 Erd˝os 不同距离问题的连续版本。该问题断言，大型有限点集必定具有许多不同的距离。关于 Erd˝os 不同距离问题的更精确定义，以及已知结果和猜想，请参阅文献 [2], [10], [13], [16], 和 [23] 。

另一方面，Iosevich 和 Rudnev [15] 研究了有限域上 Falconer 距离问题的一种离散类比，在文献中称为

Erd˝os-Falconer 距离问题（EF 问题）。下面介绍 EF 问题。对于x， $y \in \mathbb{F}_q^d$， x与 y之间的距离定义为

$$\|x-y\| := (x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_d-y_d)^2.$$

为方便起见，我们将其称为 $\mathbb{F}_q^d$ 上的标准距离。对于子集 $E \subset \mathbb{F}_q^d$，距离集 $\Delta(E)$ 定义为

$$\Delta(E) := \{\|x-y\| : x, y \in E\}. \tag{1.1}$$

EF 问题旨在求出最小指数 $\alpha > 0$，使得当$|E| \geq Cq^{\alpha}$ 时， $|\Delta(E)| \gtrsim q$，其中常数 C 足够大。这里以及全文中， $A \gtrsim B$表示 $A \geq cB$，其中 $0 < c \leq 1$ 表示某个与 q 无关的常数。

EF 问题的一个更强版本称为 Mattila-Sj¨olin 问题（MS 问题），其表述如下:

问题 1.1 （MS 问题）。确定最小指数 $\beta > 0$，使得若 $E \subset \mathbb{F}_q^d$，且对于足够大的 C 有 $|E| \geq Cq^{\beta}$，则 $\Delta(E) = \mathbb{F}_q$。

我们首先列出一些关于 MS 问题的结果。Iosevich 和 Rudnev [15]证明了，当 $|E| > 2q^{(d+1)/2}$时， $\Delta(E) = \mathbb{F}_q$。此后，许多研究人员致力于降低指数 $\frac{d+1}{2}$。Hart 等人 [14] 证明，Iosevich 和 Rudnev—[15] 得到的指数$\frac{d+1}{2}$ 对于特定的奇数维 d以及在对 $\mathbb{F}_q$ 作出某些假设的条件下确实是尖锐的。此外，他们还证明，对于所有偶数维 d，EF 问题中的指数 $d/2$ 无法降低，这意味着在这种情况下，指数α 应大于或等于$\frac{d}{2}$。最近，Iosevich、Koh 和 Rakhmonov[22] 提供了另一些例子，表明对于所有 $d \geq 3$，EF 问题中的指数 α 应大于或等于 $\frac{d}{2}$（分别为 $\frac{d+1}{2}$），其中维数 d. 分别为偶数和奇数

我们回顾一下 EF 问题的一些已知结果。对于 $d = 2$，Chapman 等人[3] 得到了 EF 问题的指数 $4/3$，而文献 [20] 证明，MS 问题的指数无法降低到 $4/3$ 以下。该结果利用了 EF 问题与傅里叶限制问题之间的联系，并首次表明，在偶数维中可以改进奇数维的最优结果（$d+1$）/2 。当 $\mathbb{F}_q$ 是素数域时，Murphy、Petridis、Pham、Rudnev 和 Stevens [21]将 $4/3$ 的结果改进到了 $5/4$。然而，在更高的偶数维中 $d \geq 4$，目前尚无已知结果能改进 EF 问题的结果（$d+1$）/2。

本文的主要目的是引入一种修正距离，它生成的距离集比标准距离生成的距离集更小，并证明在这种新距离下仍可达到（$d+1$）/2 中的距离结果。

现在我们提出距离问题和主要结果。对于 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \mathbb{F}_q^d$，令$\mathcal{Z}(x)$ 表示 x 的零坐标数。固定 $k \in \{1, 2, \cdots, d\}$。定义一个 k-范数

$\|\cdot\|_k$ 在 $\mathbb{F}_q^d$ 上为

$$\|x\|_k = \begin{cases} \|x\| & \text{if } 0 \le \mathcal{Z}(x) \le k-1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1.2}$$

注意，如果 $k=d$，两个范数会重合； $\|\cdot\| = \|\cdot\|_d$。因此， k-范数 $\|\cdot\|_k$可以视为标准范数 $\|\cdot\|$ 的一种变形，且k 越小，变形程度越大。由 k-范数诱导的距离称为 k-距离。对于子集 $E \subset \mathbb{F}_q^d$，定义 k-距离集

$$D_k(E) = \{\|x-y\|_k : x, y \in E\}.$$

有了这个新定义的距离集，我们可以针对一个与距离相关的问题提出以下自然的问题。

问题 1.2 （关于 k-距离集的 MS 问题）。 满足以下条件的最小指数 $\gamma > 0$ 是多少：对于充分大的 C，只要 $E \subset \mathbb{F}_q^d$ 且 $|E| \ge Cq^{\gamma}$，就有 $D_k(E) = \mathbb{F}_q$?

这里我们注意到，问题 1.2 中关于 k-距离集的 MS 问题，可以看作是问题 1.1 中提出的原 MS 问题的一个显著更强的版本，因为等式 $D_k(E) = \mathbb{F}_q$ 比等式 $\Delta(E) = \mathbb{F}_q$更难成立，这是因为对于所有 $k = 1, 2, \cdots, d$，都有 $D_k(E) \subset \Delta(E)$。这表明，对于奇数维 d，问题 1.2 中可能的最小指数 γ 不能小于问题 1.1 中 MS 问题的最优结果（$d+1$）$/2$；而对于偶数维，该指数不能小于同一问题的猜想结果 $d/2$ 。此外，对于每个整数$k = 1, 2, \ldots\ldots, d$，若取 $E = \mathbb{F}_q^{d-k} \times \{\mathbf{0}\} \subset \mathbb{F}_q^d$，则 $|E| = q^{d-k}$，但 $D_k(E) = \{0\} \ne \mathbb{F}_q$。从这个例子可以看出，问题 1.2 中的最小指数 β 不能小于 $d-k$。因此，我们可以针对 k-距离集的 MS 问题提出以下猜想。

猜想 1.3。 设 $E \subset \mathbb{F}_q^d$、 $d \ge 2$，并假设 C 是一个与 q. 无关的充分大常数。那么对每个整数 $k = 1, 2, \ldots, d$，以下陈述成立：

(i) 若 d 为奇数且 $|E| \ge Cq^{\max\{(d+1)/2,\ d-k\}}$，则 $D_k(E) = \mathbb{F}_q$.

(ii) 若 d 为偶数且 $|E| \ge Cq^{\max\{d/2,\ d-k\}}$，则 $D_k(E) = \mathbb{F}_q$.

作为我们的主要结果，对于奇数维情形，我们证明了猜想 1.3-(i)；对于偶数维情形，我们得到的结果比猜想中的结论略弱。更具体地说，我们的结果表述如下。

定理 1.4。 若 $E \subset \mathbb{F}_q^d$、 $d \ge 2$，且满足 $|E| \ge Cq^{\max\{(d+1)/2,\ d-k\}}$，则 $D_k(E) = \mathbb{F}_q$.

鉴于问题 1.2 后面的段落，我们的结果应与 MS 问题的结果进行比较，例如 Iosevich 和 Rudnev 的结果 [15]。请注意，定理 1.4 的假设中的指数可分为两种情况

$$\max\{(d+1)/2,\ d-k\} = \begin{cases} (d+1)/2 & \text{if } (d-1)/2 \le k \le d, \\ d-k & \text{if } 1 \le k < (d-1)/2. \end{cases}$$

对于 $1 \leq k < (d-1)/2$，正如问题 1.2 后面的段落所预期的那样，我们结果中的指数 $d-k$ 大于 Iosevich 和 Rudnev 的指数 $(d+1)/2$。然而，对于 $k \geq (d-1)/2$，我们的指数 $(d+1)/2$ 与 Iosevich 和 Rudnev 的指数一样小 [15]。也就是说，即使在我们这里条件较弱的情况下 $D_k(E) \subset \Delta(E)$），我们仍能得到与 Iosevich 和 Rudnev 相同的结果。

从标准距离形变的角度来看，这一比较告诉我们，原马蒂拉–约林问题的结果在“小”的形变下保持不变，而这种形变对应于 k with $(d-1)/2 \leq k \leq d$。

在证明过程中，我们采用基于傅里叶分析工具的解析方法；傅里叶分析是以往研究 MS 问题时使用的一项关键工具。然而，与原马蒂拉–约林问题不同，证明定理 1.4 时会遇到一个难点：求和时会出现许多难以控制的项。为克服这一难点，我们引入了一种基于组合思想的新消去法（例如，参见引理 4.2 的证明，该引理构成了定理 1.4 证明的核心）。

本文结构如下。第 2 节介绍预备知识，包括高斯和、特征标的正交性以及离散傅里叶变换的一些基础知识。第 3 节引入 k-距离，并计算球面上关于 k-距离的傅里叶变换。第 4 节证明定理 1.4。第 5 节对引理 4.2 进行技术性计算，该计算将在第 4 节主定理的证明中用到。

致谢。 第一作者获得了忠北国立大学2025年学术研究项目资助，以及韩国国家研究基金会（NRF-2021R1I1A3049181）的资助。

2. Preliminaries

本节列出本文所用高斯和与离散傅里叶变换工具的一些基础知识 [15] （另见 [17] 和 [4]）。

2.1. 高斯和。 $\mathbb{F}_q$ 的加性特征标（分别为乘性特征标）是从群 $\mathbb{F}_q$ （分别为 $\mathbb{F}_q^*$）到复平面上的单位圆 S^1 的群同态。下列两个特征标在本文中广泛出现。

对每个 $b \in \mathbb{F}_q$，令 $\chi_b\colon \mathbb{F}_q \to S^1$ 为由下式定义的加性特征标

$$\chi_b(c) = e^{2\pi i \mathrm{Tr}(bc)/p},$$

其中，p 是 $\mathbb{F}_q$的特征，而 $\mathrm{Tr}(\alpha) = \mathrm{Tr}^{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\alpha)$表示 α的绝对迹（见 [18, 定义 2.22]）。

令 $\eta : \mathbb{F}_q^* \to S^1$ 为由 $\eta(c) = 1$ 定义的乘性特征标，其中当 c 是平方时取该值，否则取 1。

有限阿贝尔群的特征标 G 满足以下正交性，这将在我们的计算中频繁用于 $G = \mathbb{F}_q$ 和 $\mathbb{F}_q^*$。

命题 2.1 (**特征标正交性**)。 设 G为有限阿贝尔群， ϕ为 G的一个特征标。则可得

$$\sum_{g\in G}\phi(g)=\begin{cases}0 & \textit{if } \phi \textit{ is nontrivial},\\ |G| & \textit{otherwise}.\end{cases}$$

证明。 参见 [18,例 5.10]。 □

现在我们回顾高斯和的基本事实，它在定理 1.4 的证明中起着至关重要的作用。

定义 2.2 (**高斯和**)。 设 ψ （分别为 χ）是 $\mathbb{F}_q^*$ （分别为 $\mathbb{F}_q$）上的乘法（分别为加法）特征标。则 ψ 与 χ 的高斯和定义为

$$\mathcal{G}(\psi,\chi)=\sum_{c\in\mathbb{F}_q^*}\psi(c)\chi(c). \tag{2.1}$$

对于 $a\in\mathbb{F}_q$， 令 $\mathcal{G}_a$ 为 η 与 χ_a的高斯和，即 $\mathcal{G}_a=\mathcal{G}(\eta,\ \chi_a)$。

命题 2.3 (定理5.15, [18])。 标准高斯和 $\mathcal{G}_1$ 可显式计算如下。

$$\mathcal{G}_1=\begin{cases}(-1)^{s-1}q^{\frac{1}{2}} & \textit{if } \ p\equiv 1 \pmod 4,\\ (-1)^{s-1}\mathbf{i}^s q^{\frac{1}{2}} & \textit{if } \ p\equiv 3 \pmod 4,\end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $\mathbf{i}=\sqrt{-1}$， 且 s 是满足 $p^s=q$的整数。

将 $\mathcal{G}_1$平方后，我们很容易得到

$$\mathcal{G}_1^2=\eta(-1)q,\ \text{ and }\ |\mathcal{G}_1|=\sqrt{q}. \tag{2.3}$$

下面的引理可由高斯和的定义推导得到。为方便读者，现给出其证明。

引理 2.4. 对于 a、满足 $a\neq 0$的 $b\in\mathbb{F}_q$ 以及 $v\in\mathbb{F}_q^d$， 有

(1) $\displaystyle\sum_{s\in\mathbb{F}_q}\chi_1(as^2)=\eta(a)\mathcal{G}_1,$

(2) $\displaystyle\sum_{s\in\mathbb{F}_q}\chi_1(as^2+bs)=\eta(a)\mathcal{G}_1\chi_1\left(-\frac{b^2}{4a}\right),$

(3) $\displaystyle\sum_{u\in\mathbb{F}_q^d}\chi_1\left(a\|u\|+v\cdot u\right)=\eta^d(a)\mathcal{G}_1^d\chi_1\left(\frac{||v||}{-4a}\right).$

证明。 为证明（1），我们注意到

$$\sum_{s\in\mathbb{F}_q}\chi_1(as^2)=1+\sum_{s\in\mathbb{F}_q^*}\chi_1(as^2).$$

由于 $(-s)^2 = s^2$ 对任意 $s \in \mathbb{F}_q^*$，我们可以进行变量替换，令 $s^2 = t$。因此，

$$1+\sum_{s\in\mathbb{F}_q^*}\chi_1(as^2) = 1+2\sum_{\substack{t\in\mathbb{F}_q^*\\ :t\ is\ a\ square}}\chi_1(at) = 1+\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*}\chi_1(at)(\eta(t)+1)$$
$$= 1+\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*}\chi_1(at)+\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*}\chi_1(at)\eta(t) = \sum_{t\in\mathbb{F}_q^*}\chi_1(at)\eta(t).$$

最后一个等式源于关于 χ_1 的特征标正交性。现在，通过变量替换 $t = a^{-1}\theta$ 并利用关系 $\eta(a) = \eta(a^{-1})$，我们得到

$$\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*}\chi_1(at)\eta(t) = \sum_{\theta\in\mathbb{F}_q^*}\eta(a)\chi_1(\theta)\eta(\theta) = \eta(a)\mathcal{G}_1.$$

结论 (2) 和 (3) 由 (1) 配方并进行变量替换得到。□

定义 2.5. 对于非平凡加性特征标 χ 和非零元素 $a, b \in \mathbb{F}_q$，克洛斯特曼和定义为

$$K(\chi; a, b) := \sum_{s\in\mathbb{F}_q^*}\chi(as + bs^{-1}).$$

以下结果的证明可见 [24]。

命题 2.6. 设 χ, a, b 如上所述。则有

$$|K(\chi; a, b)| \le 2\sqrt{q}. \tag{2.4}$$

2.2. **离散傅里叶变换**。对于函数 $f\colon \mathbb{F}_q^d \to \mathbb{C}$，$\widehat{f}$ 的傅里叶变换 f 定义为

$$\widehat{f}(m) := q^{-d}\sum_{x\in\mathbb{F}_q^d} f(x)\chi(-x\cdot m). \tag{2.5}$$

在此以及全文中，我们将使用记号 χ 表示 $\mathbb{F}_q$ 的一个固定的非平凡加性特征标，其选择不会影响我们的结果。

傅里叶反演定理和普朗歇尔定理的离散类比表述如下。

$$f(x) := \sum_{m\in\mathbb{F}_q^d}\chi(m\cdot x)\widehat{f}(m), \tag{2.6}$$

$$\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d}\left|\widehat{f}(m)\right|^2 = q^{-d}\sum_{x\in\mathbb{F}_q^d}|f(x)|^2. \tag{2.7}$$

对于给定的集合 E，令 $I_E(x)$ 为示性函数：

$$I_E(x) := \begin{cases} 1 & x \in E, \\ 0 & x \notin E. \end{cases}$$

为简便起见，在不会引起混淆时，我们用 $E(x)$表示 $I_E(x)$。对于 $E \subset \mathbb{F}_q^d$，利用普朗歇尔定理，我们可以很容易地看出

$$\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d} |\widehat{E}(m)|^2 = q^{-d}|E|, \tag{2.8}$$

根据傅里叶变换的定义，显然有

$$\widehat{E}(0,\cdots,0) = q^{-d}|E|. \tag{2.9}$$

3. The Fourier transform on the sphere w.r.t. the k-norm

设 k 为一个整数，满足 $1 \le k \le d.$ 。对每个 $t \in \mathbb{F}_q$，我们定义相对于 k-范数、半径为 t的球面如下:

$$S_k^t := \{x \in \mathbb{F}_q^d : \|x\|_k = t\}.$$

简而言之，若无歧义， S_k^t 将简称为球面（半径为 t），不再特别指明 k-范数。在本节中，我们主要计算球面 S_k^t上的傅里叶变换 S_k^t，这将在定理 1.4 的证明中用到。为此，我们先进行预备计算。首先给出一些记号。

3.1. 记号。 对每个非负整数 $d \ge 1$，令 $[d] := \{1,\dots,d\}$。对于子集 $I \subset [d]$，我们定义 $\mathcal{F}_I$: $= \{x \in \mathbb{F}_q^d$: $x_i \neq 0 \iff i \in I\}$。约定令 $\mathcal{F}_\emptyset = \{(0, \dots, 0)\}$。于是， $\mathbb{F}_q^d$ 是所有“切片” $\mathcal{F}_I$的不交并，即

$$\mathbb{F}_q^d = \bigsqcup_{I\subset[d]} \mathcal{F}_I. \tag{3.1}$$

对于一个满足 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_e \le d$ 和 $x \in \mathbb{F}_q^d$ 的非空子集，我们定义 $x_I = (x_{i_1}, \dots\dots, x_{i_e}) \in \mathbb{F}_{q^\circ}^e$ 特别地，我们约定 $x_\emptyset = (0, \dots\dots, 0) \in \mathbb{F}_q^d$.

回忆一下，对于 $y \in \mathbb{F}_q^d$， $\mathcal{Z}(y)$ 表示 $y.$ 的零坐标数。例如，如果 $x \in \mathcal{F}_I$，则 $\mathcal{Z}(x)$ $= d - |I|$。对于 $\alpha \in [d] \cup \{0\}$，我们定义 $N_\alpha := \{x \in \mathbb{F}_q^d :$ $\mathcal{Z}(x) = \alpha\}$。因此， N_α 可以写成

$$N_\alpha = \bigsqcup_{\substack{I\subset[d]\\ :|I|=d-\alpha}} \mathcal{F}_I. \tag{3.2}$$

3.2. 预备计算。 下面的引理将用于计算 $S_k^t(m)$。

引理 3.1. 设 $m = (m_1, m_2, \cdots, m_d) \in \mathbb{F}_q^d$。对每个 $\alpha \in [d] \cup \{0\}$，我们有

$$\sum_{x\in N_\alpha} \chi(s\,\|x\| - m\cdot x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{I\subset[d]\\ :|I|=d-\alpha}} \prod_{i\in I} \left(\eta(s)\mathcal{G}_1\chi\left(-\frac{{m_i}^2}{4s}\right) - 1\right) & \text{if } s \neq 0, \\ \displaystyle\sum_{\substack{I\subset[d]\\ :|I|=d-\alpha}} (q-1)^{\mathcal{Z}(m_I)}(-1)^{d-\alpha-\mathcal{Z}(m_I)} & \text{if } s = 0. \end{cases}$$

此处，若 $\alpha = d$，则 $|I| = d - \alpha = 0$ 从而 $I = \emptyset$；在此情形下，右端对 $s \neq 0$ 的求和被设定为 1。

证明。 固定一个元素 $\alpha \in [d] \cup \{0\}$. 由此可得

$$\begin{aligned}\sum_{x \in N_\alpha} \chi(s\,\|x\| - m \cdot x) &= \sum_{\substack{I \subset [d] \\ :|I| = d-\alpha}} \sum_{x \in \mathcal{F}_I} \chi(s||x_I|| - m_I \cdot x_I) \\ &= \sum_{\substack{I \subset [d] \\ :|I| = d-\alpha}} \prod_{i \in I} \left[\left(\sum_{u \in \mathbb{F}_q} \chi(su^2 - m_i u) \right) - 1 \right]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

第一个等式由 (3.2) 得出，第二个等式则只是展开了 $\mathcal{F}_I$ 的记号。我们分两种情况讨论: $s \neq 0$ 和 $s = 0$。对于 $s \neq 0$ 的情况，应用定义 2.2 和引理 2.4，可得

$$\sum_{\substack{I \subset [d] \\ :|I| = d-\alpha}} \prod_{i \in I} \left[\left(\sum_{u \in \mathbb{F}_q} \chi(su^2 - m_i u) \right) - 1 \right] = \sum_{\substack{I \subset [d] \\ :|I| = d-\alpha}} \prod_{i \in I} \left(\eta(s) \mathcal{G}_1 \chi \left(-\frac{m_i^2}{4s} \right) - 1 \right).$$

对于 $s = 0$ 的情况，(3.3) 等于

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{I \in [d] \\ :|I| = d-\alpha}} \prod_{\substack{i \in I \\ :m_i \neq 0}} \left[\left(\sum_{u \in \mathbb{F}_q} \chi(-m_i u) \right) - 1 \right] \prod_{\substack{j \in I \\ :m_j = 0}} \left[\left(\sum_{u \in \mathbb{F}_q} \chi(-m_j u) \right) - 1 \right] \\ &\qquad = \sum_{\substack{I \subset [d] \\ :|I| = d-\alpha}} (q-1)^{\mathcal{Z}(m_I)} (-1)^{d-\alpha-\mathcal{Z}(m_I)}. \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

﹀3.3. **() 的计算**。 我们现在可以计算球面 $S_k^t(m)$ 上的以下傅里叶变换﹀。

﹀**命题 3.2**。 设 $t \in \mathbb{F}_q$。那么，对于任意 $m \in \mathbb{F}_q^d$，球面的傅里叶变换 $S_k^t(m)$ 可写为

$$\widehat{S_k^t}(m) = q^{-d-1} \Big(A(m,t) + B(m) \Big),$$

其中

$$A(m,t) = \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{\substack{I \subset [d] \\ :|I| = d-\alpha}} \sum_{s \in \mathbb{F}_q^*} \chi(-st) \prod_{i \in I} \left(\eta(s) \mathcal{G}_1 \chi \left(-\frac{m_i^2}{4s} \right) - 1 \right),$$

$$B(m) = \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{\substack{I \subset [d] \\ :|I| = d-\alpha}} (q-1)^{\mathcal{Z}(m_I)} (-1)^{d-\alpha-\mathcal{Z}(m_I)}.$$

证明。 由傅里叶变换的定义以及加性特征的正交性（命题 2.1）可知,

$$\widehat{S_k^t}(m) = q^{-d} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^d} \chi(-m \cdot x) S_k^t(x)$$

$$= q^{-d} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^d} \chi(-m \cdot x) \left(q^{-1} \sum_{s \in \mathbb{F}_q} \chi(s(\|x\|_k - t)) \right). \tag{3.4}$$

现在，回顾 (3.2)，可知 $\mathbb{F}_q^d = \bigsqcup N_\alpha$。根据 k-范数的定义，(3.4) 可$\alpha \in [d] \cup \{0\}$改写为:

$$\widehat{S_k^t}(m) = q^{-d} \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{x \in N_\alpha} \chi(-m \cdot x) \left(q^{-1} \sum_{s \in \mathbb{F}_q} \chi(s(\|x\| - t)) \right) \tag{3.5}$$

$$+ q^{-d} \sum_{\alpha=k}^{d} \sum_{x \in N_\alpha} \chi(-m \cdot x) \left(q^{-1} \sum_{s \in \mathbb{F}_q} \chi(-st) \right). \tag{3.6}$$

由于 $t \neq 0$，根据 χ. 的正交性，(3.6) 为零。因此，改写 (3.5)，得到

$$\widehat{S_k^t}(m) = q^{-d-1} \sum_{s \in \mathbb{F}_q} \chi(-st) \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{x \in N_\alpha} \chi(s\|x\| - m \cdot x). \tag{3.7}$$

利用引理 3.1 计算关于 $x \in N_\alpha$的求和，得到

$$\widehat{S_k^t}(m) = q^{-d-1} \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{s \in \mathbb{F}_q^*} \chi(-st) \sum_{\substack{I \subset [d] \\ :|I| = d-\alpha}} \prod_{i \in I} \left(\eta(s) \mathcal{G}_1 \chi\left(-\frac{{m_i}^2}{4s} \right) - 1 \right)$$

$$+ q^{-d-1} \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{\substack{I \subset [d] \\ :|I| = d-\alpha}} (q-1)^{\mathcal{Z}(m_I)} (-1)^{d-\alpha-\mathcal{Z}(m_I)}.$$

根据 $A(m,\ t)$ 和 $B(m)$，证明完成。 □

4. 证明

本节给出主要结果（定理 1.4）的证明，该结果可重述如下。

定理 4.1. 若 $E \subset \mathbb{F}_q^d$ 满足 $d \geq 2$，且 $|E| \geq C q^{\max\left\{ \frac{d+1}{2},\ \frac{d-k}{} \right\}}$，则 $D_k(E) = \mathbb{F}_q$。

证明. 令 d_E： $E \times E \to \mathbb{F}_q$ 表示 E 上的 k-距离，其定义为 $d_E(x,y) = \|x-y\|_k$，其中$x,\ y \in E$。

注意到， d_E 是满射，当且仅当对每个 $t \in \mathbb{F}_q$，集合 $d_E^{-1}(t)$ 非空；等价地，集合族 $\{d_E^{-1}(t)\}_{t \in \mathbb{F}_q}$ 构成 $E \times E$的一个划分。

对于 $E \subset \mathbb{F}_q^d$ 和 $t \in \mathbb{F}_q$，令 $\nu_E(t)$ 表示集合$d_E^{-1}(t)$的基数，即 $\nu_E(t) = \left|d_E^{-1}(t)\right|$。那么，要证明定理 4.1，只需证明对所有 $t \in \mathbb{F}_q$，$\nu_E(t) > 0$。显然，$\nu_E(0) > 0$，因为 E 非空。现在只需证明对所有非零$t \in \mathbb{F}_q^*$，$\nu_E(t) > 0$。根据定义，$\nu_E(t)$可写为

$$\nu_E(t) = \sum_{\substack{x,y\in E \\ :\|x-y\|_k=t}} 1 = \sum_{x,y\in E} S_k^t(x-y). \tag{4.1}$$

接着，我们利用傅里叶反演公式和傅里叶变换的定义，得到

$$\begin{aligned} \nu_E(t) &= \sum_{x,y\in\mathbb{F}_q^d} E(x)E(y)\Big(\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d} \chi(m\cdot(x-y))\widehat{S_k^t}(m)\Big) \\ &= \sum_{m\in\mathbb{F}_q^d} \widehat{S_k^t}(m) \sum_{x,y\in\mathbb{F}_q^d} \overline{\chi(-m\cdot x)E(x)}\chi(-m\cdot y)E(y) \\ &= q^{2d}\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d} \widehat{S_k^t}(m)|\widehat{E}(m)|^2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

由命题 3.2 可知,

$$\nu_E(t) = q^{d-1}\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d} |\widehat{E}(m)|^2\Big(A(m,t)+B(m)\Big). \tag{4.3}$$

现在我们需要以下引理。它是推导主要结果的关键，也包含原马蒂拉–约林问题中未出现的、技术上颇具挑战性的项。

引理 4.2。设 $A(m,t)$ 和 $B(m)$ 如命题 *3.2* 中所定义。那么，对每个$E \subset \mathbb{F}_q^d$，以下不等式均成立。

(i) $\left|\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d} |\widehat{E}(m)|^2 A(m,t)\right| \lesssim q^{-\frac{d-1}{2}}|E|,$

(ii) $\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d} |\widehat{E}(m)|^2 B(m) \gtrsim q^{-d}|E|^2 - q^{-k}|E|.$

有了引理 4.2，我们来完成定理 4.1 的证明。引理 4.2 的证明将在下一节给出。结合 (4.3) 和引理 4.2 可得

$$\nu_E(t) \gtrsim q^{-1}|E|^2 - q^{d-k-1}|E| - q^{\frac{d-1}{2}}|E|.$$

注意，如果 $|E| \gtrsim q^{d-k}$，那么项 $q^{-1}|E|^2$ 支配 $q^{d-k-1}|E|$；类似地，如果 $|E| \gtrsim q^{(d+1)/2}$，那么 $q^{-1}|E|^2$ 支配 $q^{(d-1)/2}|E|$。因此，我们得到所需结论：如果 $|E| \geq Cq^{\max\left\{\frac{d+1}{2},\, d-k\right\}}$，那么 $\nu_E(t) > 0$. 证明至此完成。 □

5. Proof of Lemma 4.2

对于引理 4.2 的第一部分 (i)，我们写作

$$A(m,t)=\sum_{\alpha=0}^{k-1}\sum_{\substack{I\subset[d]\\:|I|=d-\alpha}}\sum_{s\neq 0}\chi(-st)\prod_{i\in I}\Big(\eta(s)\mathcal{G}_1\chi\Big(-\frac{m_i^2}{4s}\Big)-1\Big)$$
$$=\sum_{\alpha=0}^{k-1}\sum_{\substack{I\subset[d]\\:|I|=d-\alpha}}\sum_{s\neq 0}\chi(-st)\Big(\sum_{\beta=0}^{d-\alpha}\sum_{\substack{J\subset I\\:|J|=d-\alpha-\beta}}\eta^{d-\alpha-\beta}(s)\mathcal{G}_1^{d-\alpha-\beta}\chi\Big(-\frac{\|m_J\|}{4s}\Big)(-1)^{\beta}\Big),$$

其中，我们将关于 $i\in I$ 的乘积表示为关于 $\beta.$ 的求和。由三角不等式可得

$$|A(m,t)|\leq\sum_{\alpha=0}^{k-1}\sum_{\substack{I\subset[d]\\:|I|=d-\alpha}}\sum_{\beta=0}^{d-\alpha}\sum_{\substack{J\subset I\\:|J|=d-\alpha-\beta}}|\mathcal{G}_1|^{d-\alpha-\beta}\Big|\sum_{s\neq 0}\eta^{d-\alpha-\beta}(s)\chi\Big(-st-\frac{\|m_J\|}{4s}\Big)\Big|.$$

回顾 (2.3)，有 $|\mathcal{G}_1|=\sqrt{q}$；注意，关于 $s\in\mathbb{F}_q^*$ 的求和是一个广义克洛斯特曼和，由 (2.4) 可知它被 $2\sqrt{q}$ 控制。因此，对任意 $m\in\mathbb{F}_q^d$ 和 $t\in\mathbb{F}_q^*$，都有

$$|A(m,t)|\leq\sum_{\alpha=0}^{k-1}\sum_{\substack{I\subset[d]\\:|I|=d-\alpha}}\sum_{\beta=0}^{d-\alpha}\sum_{\substack{J\subset I\\:|J|=d-\alpha-\beta}}2q^{\frac{d-\alpha-\beta+1}{2}}\lesssim q^{\frac{d+1}{2}},$$

其中，最后一个不等式源于一个简单的观察：对于所有 $\alpha,\ \beta\geq 0.$，$q^{\frac{d+1}{2}}$ 都大于 $q^{\frac{d-\alpha-\beta+1}{2}}$。利用 $|A(m,\ t)|$ 的这个上界以及普朗歇尔定理，引理 4.2 的 (i) 部分证明如下：

$$\Big|\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d}|\widehat{E}(m)|^2A(m,t)\Big|\leq\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d}|\widehat{E}(m)|^2|A(m,t)|\lesssim q^{\frac{d+1}{2}}\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d}|\widehat{E}(m)|^2=q^{-\frac{d-1}{2}}|E|.$$

现在，我们证明引理 4.2 的第 (ii) 部分。回顾一下，

$$\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d}|\widehat{E}(m)|^2B(m)=\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d}|\widehat{E}(m)|^2\sum_{\alpha=0}^{k-1}\sum_{\substack{I\subset[d]\\:|I|=d-\alpha}}(q-1)^{\mathcal{Z}(m_I)}(-1)^{d-\alpha-\mathcal{Z}(m_I)}.$$

我们注意到，关于 α 的求和可以改写为：

$$\begin{aligned}
&\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d}|\widehat{E}(m)|^2\sum_{\alpha=0}^{k-1}\sum_{\substack{I\subset[d]\\:|I|=d-\alpha}}(q-1)^{\mathcal{Z}(m_I)}(-1)^{d-\alpha-\mathcal{Z}(m_I)}\\
&=\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d}|\widehat{E}(m)|^2\left(\sum_{\alpha=0}^{d}-\sum_{\alpha=k}^{d}\right)\sum_{\substack{I\subset[d]\\:|I|=d-\alpha}}(q-1)^{\mathcal{Z}(m_I)}(-1)^{d-\alpha-\mathcal{Z}(m_I)}\\
&=:B_{main}+B_{auxiliary}.
\end{aligned}$$

这种分解使我们能够将关于 α 的求和表示为关于 $0\le\alpha\le d$ 的完整求和与关于 $k\le\alpha\le d$ 的求和。显然,

$$\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d}|\widehat{E}(m)|^2B(m)\ge B_{main}-|B_{auxiliary}|. \tag{5.1}$$

我们可以直接对辅助项作如下估计：

$$|B_{auxiliary}|\lesssim q^{-d}|E|q^{d-k}=q^{-k}|E|. \tag{5.2}$$

接下来，我们来估计项 B_{main}. 的一个下界。对于每个 $I\subset[d]$ 和 $m\in\mathbb{F}_q^d$，令$\beta:=\mathcal{Z}($ $m_I)$。于是 $0\le\beta\le|I|$。引入一个新的变量 β，我们可以写成

$$\begin{aligned}
B_{\text{main}}&=\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d}|\widehat{E}(m)|^2\sum_{\alpha=0}^{d}\sum_{\substack{I\subset[d]\\:|I|=d-\alpha}}(q-1)^{\mathcal{Z}(m_I)}(-1)^{d-\alpha-\mathcal{Z}(m_I)}\\
&=\sum_{\alpha=0}^{d}\sum_{\beta=0}^{d-\alpha}\sum_{\substack{I\subset[d]\\:|I|=d-\alpha}}\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d:\mathcal{Z}(m_I)=\beta}|\widehat{E}(m)|^2(q-1)^{\beta}(-1)^{d-\alpha-\beta}.
\end{aligned}$$

根据示性函数 $\mathbb{1}_{\{0,1,\cdots,d-\alpha\}}(\beta)$的定义，上述项 B_{main} 可以改写如下：

$$B_{\text{main}}=\sum_{\beta=0}^{d}\sum_{\alpha=0}^{d}\sum_{\substack{I\subset[d]\\:|I|=d-\alpha}}\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d:\mathcal{Z}(m_I)=\beta}|\widehat{E}(m)|^2(q-1)^{\beta}(-1)^{d-\alpha-\beta}\mathbb{1}_{\{0,1,\cdots,d-\alpha\}}(\beta).$$

固定变量 β，利用关系$\alpha=d-\beta-r$，我们将 α 作变量代换，令其为 r 。于是得到表达式

$$B_{\text{main}}=\sum_{\beta=0}^{d}\sum_{r=0}^{d-\beta}\sum_{\substack{I\subset[d]\\:|I|=\beta+r}}\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d:\mathcal{Z}(m_I)=\beta}|\widehat{E}(m)|^2(q-1)^{\beta}(-1)^{r}.$$

注意，对于每个 β 和 $I\subset[d]$，集合 $\{m\in\mathbb{F}_q^d\mid\mathcal{Z}(m_I)=\beta\}$ 是子集$\{m\in\mathbb{F}_q^d\mid\mathcal{Z}(m_I)$ $=\beta,\ \mathcal{Z}(m)=w\}$的并集，其中 $0\le w\le d$，且 $r:=|I|-\beta\le d-w$。因此,

使用一个变量 w， B_{main} 可以写成

$$B_{\text{main}} = \sum_{w=0}^{d} \sum_{\beta=0}^{w} \sum_{r=0}^{d-w} \sum_{\substack{I\subset[d]\\ :|I|=\beta+r}} \sum_{\substack{m\in\mathbb{F}_q^d\\ :\mathcal{Z}(m_I)=\beta\\ :\mathcal{Z}(m)=w}} |\widehat{E}(m)|^2 (q-1)^{\beta}(-1)^r.$$

通过区分 $\mathcal{Z}(m) = d$ （即 $m = (0, \ldots, 0)$）和 $\mathcal{Z}(m) < d$ 的情况，我们得到

$$\begin{aligned} B_{main} = &\sum_{w=0}^{d-1} \sum_{\beta=0}^{w} \sum_{r=0}^{d-w} \sum_{\substack{I\subset[d]\\ :|I|=\beta+r}} \sum_{\substack{m\in\mathbb{F}_q^d\\ :\mathcal{Z}(m_I)=\beta\\ :\mathcal{Z}(m)=w}} |\widehat{E}(m)|^2 (q-1)^{\beta}(-1)^r \\ &+ \sum_{\beta=0}^{d} \sum_{\substack{I\subset[d]\\ :|I|=\beta}} \sum_{\substack{m=(0,\cdots,0)\\ :\mathcal{Z}(m_I)=\beta}} |\widehat{E}(m)|^2 (q-1)^{\beta}. \end{aligned}$$

现在，我们将第一组求和中关于 β 的求和分为两种情况： $\beta < w$ 和 $w = \beta$。于是得到

$$\begin{aligned} B_{main} = &\sum_{w=0}^{d-1} \sum_{\beta=0}^{w-1} \sum_{r=0}^{d-w} \sum_{\substack{I\subset[d]\\ :|I|=\beta+r}} \sum_{\substack{m\in\mathbb{F}_q^d\\ :\mathcal{Z}(m_I)=\beta\\ :\mathcal{Z}(m)=w}} |\widehat{E}(m)|^2 (q-1)^{\beta}(-1)^r \\ &+ \sum_{w=0}^{d-1} \sum_{r=0}^{d-w} \sum_{\substack{I\subset[d]\\ :|I|=w+r}} \sum_{\substack{m\in\mathbb{F}_q^d\\ :\mathcal{Z}(m_I)=w\\ :\mathcal{Z}(m)=w}} |\widehat{E}(m)|^2 (q-1)^{w}(-1)^r \\ &+ \sum_{\beta=0}^{d} \sum_{\substack{I\subset[d]\\ :|I|=\beta}} \sum_{\substack{m=(0,\cdots,0)\\ :\mathcal{Z}(m_I)=\beta}} |\widehat{E}(m)|^2 (q-1)^{\beta} \\ =: &\, B_{m1} + B_{m2} + B_{m3}. \end{aligned}$$

因此， B_{main} 的一个下界可表示如下:

$$B_{\text{main}} \geq -|B_{m1}| + B_{m2} + B_{m3}. \tag{5.3}$$

注意到 $|N_{d-\alpha}| = (q-1)^{\alpha} \sim q^{\alpha}$ ，并且根据 (2.9) 有 $\sum_{m\in N_{d-\alpha}} |\widehat{E}(m)|^2 \lesssim q^{-2d+\alpha}|E|^2$。由此可得

$$\begin{aligned} |B_{m1}| &= \sum_{w=0}^{d-1} \sum_{\beta=0}^{w-1} \sum_{r=0}^{d-w} \sum_{\substack{I\subset[d]\\ :|I|=\beta+r}} \sum_{\substack{m\in\mathbb{F}_q^d\\ :\mathcal{Z}(m_I)=\beta\\ :\mathcal{Z}(m)=w}} |\widehat{E}(m)|^2 (q-1)^{\beta} \\ &\lesssim q^{-2d+(d-w)}|E|^2 q^{w-1} = q^{-d-1}|E|^2. \end{aligned} \tag{5.4}$$

回顾

$$B_{m2}=\sum_{w=0}^{d-1}\sum_{r=0}^{d-w}\sum_{\substack{I\subset[d]\\:|I|=w+r}}\sum_{\substack{m\in\mathbb{F}_q^d\\:\mathcal{Z}(m_I)=w\\:\mathcal{Z}(m)=w}}|\widehat{E}(m)|^2(q-1)^w(-1)^r.$$

现在我们证明 $B_{m2}=0$。其主要思路是，对于每个 $1\le w\le d-1$， $J\subset[d]$，$m\in\mathcal{F}_{[d]\setminus J}$，$B_{m2}$ 都将被变形为包含这些求和式

$$\sum_{r=0}^{d-w}\sum_{\substack{T\subset[d]\setminus J\\:|T|=r}}(-1)^r, \tag{5.5}$$

这些求和式将被转换为

$$\sum_{r=0}^{d-w}(-1)^r(1)^{d-w-r}\binom{d-w}{r}=0.$$

具体而言，首先交换求和次序，我们可写为

$$B_{m2}=\sum_{w=0}^{d-1}\sum_{\substack{m\in\mathbb{F}_q^d\\:\mathcal{Z}(m)=w}}\sum_{r=0}^{d-w}\sum_{\substack{I\subset[d]\\:|I|=w+r\\:\mathcal{Z}(m_I)=w}}|\widehat{E}(m)|^2(q-1)^w(-1)^r.$$

回顾（3.1），有

$$\mathbb{F}_q^d=\bigsqcup_{J\subset[d]}\mathcal{F}_{[d]\setminus J}. \tag{5.6}$$

因此，利用变量 J， B_{m2} 可改写为

$$B_{m2}=\sum_{w=0}^{d-1}\sum_{J\subset[d]}\sum_{\substack{m\in\mathbb{F}_q^d\\:\mathcal{Z}(m)=w\\:m\in\mathcal{F}_{[d]\setminus J}}}\sum_{r=0}^{d-w}\sum_{\substack{I\subset[d]\\:|I|=w+r\\:\mathcal{Z}(m_I)=w}}|\widehat{E}(m)|^2(q-1)^w(-1)^r.$$

对于固定的 $m\in\mathcal{F}_{[d]\setminus J}$， $\mathcal{Z}(m)=w$ 当且仅当 $|J|=w$。因此，我们得到

$$B_{m2}=\sum_{w=0}^{d-1}\sum_{\substack{J\subset[d]\\:|J|=w}}\sum_{\substack{m\in\mathbb{F}_q^d\\:m\in\mathcal{F}_{[d]\setminus J}}}\sum_{r=0}^{d-w}\sum_{\substack{I\subset[d]\\:|I|=w+r\\:\mathcal{Z}(m_I)=w}}|\widehat{E}(m)|^2(q-1)^w(-1)^r. \tag{5.7}$$

对于每个 $J\subset[d]$，选择 $m\in\mathcal{F}_{[d]\setminus J}$。那么存在一个 I，满足 $|I|\ge|J|$，使得 $\mathcal{Z}(m_I)=|J|$；对于任意这样的 I（与 $m\in\mathcal{F}_{[d]\setminus J}$ 的选择无关），我们有 $J\subset I$.。令 $T:=I\setminus J$.。将 (5.7) 中关于 I 的第五个求和改为关于 T 的求和，我们得到

$$B_{m2}=\sum_{w=0}^{d-1}\sum_{\substack{J\subset[d]\\:|J|=w}}\sum_{\substack{m\in\mathbb{F}_q^d\\:m\in\mathcal{F}_{[d]\setminus J}}}|\widehat{E}(m)|^2(q-1)^w\sum_{r=0}^{d-w}\sum_{\substack{T\subset[d]\setminus J\\:|T|=r}}(-1)^r. \tag{5.8}$$

将 (5.8) 中最后一个双重求和改写为

$$\sum_{r=0}^{d-w}\sum_{\substack{T\subset[d]\setminus J\\:|T|=r}}(-1)^r=\sum_{r=0}^{d-w}(-1)^r\left(\sum_{\substack{T\subset[d]\setminus J\\:|T|=r}}1\right)=\sum_{r=0}^{d-w}(-1)^r(1)^{d-w-r}\binom{d-w}{r}.$$

由二项式定理可得

$$\sum_{r=0}^{d-w}(-1)^r(1)^{d-w-r}\binom{d-w}{r}=(1+(-1))^{d-w}=0.$$

因此，我们得到所需结果:

$$B_{m_2}=0. \tag{5.9}$$

最后，我们估计项 B_{m3}。回忆

$$B_{m3}=\sum_{\beta=0}^{d}\sum_{\substack{I\subset[d]\\:|I|=\beta}}\sum_{\substack{m=(0,\cdots,0)\\:\mathcal{Z}(m_I)=\beta}}|\widehat{E}(m)|^2(q-1)^\beta.$$

由于 $|\widehat{E}(m)|^2=q^{-2d}|E|^2$对 $m=(0,\ldots,0)$ 成立，我们得到

$$B_{m3}=\sum_{\beta=0}^{d}\sum_{\substack{I\subset[d]\\:|I|=\beta}}q^{-2d}|E|^2(q-1)^\beta\sim q^{-d}|E|^2. \tag{5.10}$$

结合 (5.1)、(5.2)、(5.3)、(5.4)、(5.9) 和 (5.10) 中的估计，我们得出

$$\sum_{m\in\mathbb{F}_q^d}|\widehat{E}(m)|^2B(m)\gtrsim q^{-d}|E|^2-q^{-d-1}|E|^2-q^{-k}|E|\gtrsim q^{-d}|E|^2-q^{-k}|E|,$$

这证明了引理 4.2 的第二部分 (ii)。

References

[1] J. Bourgain. J. *Hausdorff dimension and distance sets* Israel J. Math. **87** (1994). 193–201.[2] J. Bourgain, N. Katz 和 T. Tao, *A sum-product estimate in finite fields, and applications,* Geom. Funct. Anal.**14** (2004)，第 1 期，27–57.[3] J. Chapman、M. B. Erdo˘gan、D. Hart、A. Iosevich 和 D. Koh, *Pinned distance sets, k-simplices, Wolff's exponent in finite fields and sum-product estimates*, Math Z.**271** (2012)，63–93.[4] D. Cheong、D. Koh、T. Pham 和 C.Y. Chen, *Mattila-Sjölin type functions: A finite field model*, Vietnam J. Math. **51** (2023)，第 2 期，421–434.[5] X. Du、L. Guth、Y. Ou、H. Wang、B. Wilson 和 R. Zhang, *Weighted restriction estimates and application to Falconer distance set problem,* Amer. J. Math. **143** (2021)，第 1 期，175–211.[6] X. Du、A. Iosevich、Y. Ou、H. Wang 和 R. Zhang, *An improved result for Falconer's distance set problem in even dimensions,* Math. Ann.**380** (2021)，第 3–4 期，1215–1231.[7] X. Du、Y. Ou、K. Ren 和 R. Zhang, *New improvement to Falconer distance set problem in higherdimensions*, arXiv: 2309.04103 (2023)[8] X. Du 和 R. Zhang, *Sharp L^2 estimate of Schrödinger maximal function in higher dimensions,* Ann. of Math. (2) **189** (2019)，第 3 期，837–861。

[9] M. Erdo˜gan, *A bilinear Fourier extension theorem and applications to the distance set problem*, Int. Math. Res. Not. 23 (2005), 第 23 期, 1411–1425。[10] P. Erd″os, *On sets of distances of n points*, Amer. Math. Monthly 53 (1946), 248–250。[11] K. Falconer, *On the Hausdorff dimensions of distance sets*, Mathematika 32 (1985), 206–212。[12] L. Guth、A. Iosevich、Y. Ou 和 H. Wang, *On Falconer's distance set problem in the plane*, Invent. Math. 219 (2020), 第 3 期, 779–830。[13] L. Guth 和 N. Katz, *On the Erdős distinct distances problem in the plane*, Ann. of Math. (2) 181 (2015), 第 1 期, 155–190。[14] D. Hart、A. Iosevich、D. Koh 和 M. Rudnev, *Averages over hyperplanes, sum-product theory invector spaces over finite fields and the Erdős-Falconer distance conjecture*, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), 第 6 期, 3255–3275。[15] A. Iosevich 和 M. Rudnev, *Erdős distance problem in vector spaces over finite fields*, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), 第 12 期, 6127–6142。[16] N.Katz 和 G. Tardos, *A new entropy inequality for the Erdős distance problem*, 载于《Towards a Theory of Geometric Graphs》, 第 119–126 页, Contemp. Math., 2004。Amer. Math. Soc., Providence, RI, 342。[17] D. Koh 和 H. Sun, *Distance sets of two subsets of vector spaces over finite fields*, Proc. Amer. Math. Soc. 143 (2015), 第 4 期, 1679–1692。[18] R. Lidl 和 H. Niederreiter, *Finite Fields*, 剑桥大学出版社, (1997)。[19] P. Mattlia 和 P. Sj″o, *Regularity of distance measures and sets*, Math. Nachr. 204 (1999), 157–162。[20] B. Murphy 和 G. Petridis, *An example related to the Erdős-Falconer question over arbitrary finitefields*, Bull. Hellenic Math. Soc. 63 (2019), 38–39。[21] B. Murphy、G. Petridis、T. Pham、M. Rudnev 和 S. Stevens, *On the Pinned Distances Problem inPositive Characteristic*, J. Lond. Math. Soc.(2) 105 (2022), 第 1 期, 469–499。[22] F. Rakhmonov、A. Iosevich 和 D. Koh。*The quotient set of the quadratic distance set over finite fields.*Forum Mathematicum 36, 第 5 期 (2024), 1341–1358。https://doi.org/10.1515/forum-2023-0313 T[23] J. Solymosi 和 V. Vu, *Near optimal bounds for the Erdős distinct distances problem in high dimen-sions*, Combinatorica 28 (2008), 第 1 期, 113–125。[24] A. Weil, *On some exponential sums*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 34 (1948), 204–207。[25] T. Wolff, *Decay of circular means of Fourier transforms of measures*, Internat. Math. Res. Notices (1999), 第 10 期, 547–567。

Chungbuk National University, Department of Mathematics, Chungdae-ro 1, Seowon-Gu, Cheongju City, Chungbuk 28644, Korea*Email address*: daewoongc@chungbuk.ac.kr
College of Engineering and Technology, American University of the Middle East, Kuwait *Email address*: hunseok.kang@aum.edu.kwChungbuk National University, Department of Mathematics, Chungdae-ro 1, Seowon-Gu, Cheongju City, Chungbuk 28644, Korea*Email address*: jinbeom337@chungbuk.ac.kr