arXiv:2601.00547v1 [physics.optics] 2 Jan 2026

（载流子漂移调制与）双曲时间晶体

Evgenii E. Narimanov[1] 和 Boris Shapiro[2]
[1]*School of Electrical and Computer Engineering and Birck Nanotechnology Center, Purdue University, West Lafayette, Indiana 47907, USA and*[2]*Department of Physics, Technion - Israel Institute of Technology, Haifa 32000, Israel*（日期：2026年1月5日）

我们提出了载流子漂移调制——一种用于创建时间边界并实现光子时间晶体的新机制。这一方法为双曲时间超材料，尤其是双曲时间晶体，开辟了一条直接途径。我们证明，形成时间晶体的过程本身能够同时补偿支撑介质的材料本征损耗，从而克服纳米光子学面临的一项核心挑战。实现真正无损的双曲介质，长期以来一直被视为纳米光子学的关键挑战之一；这一突破将为亚波长光聚焦、强场物理以及光与物质相互作用的新领域开启新的可能性。至关重要的是，所提出的方法可利用现有材料和现成的光源实现，因此兼具实用性与变革性。

I. 引言

对光学材料进行超快时间调制[1] ——使其电磁性质随时间迅速变化——会形成光可以与之相互作用的动态边界，这与传统光学中的空间界面十分相似。[2, 3]当这些时间变化快于入射光的振荡周期时，便会产生称为时间反射和时间折射的独特现象：光子会经历频率和传播方向的突变，而其动量保持守恒。[2–4]当这种调制以周期性方式施加时，系统会演变为光子时间晶体 [5–12] ——一种在时间上具有重复结构的介质，能够实现新颖的光控制方式，从放大到频率转换，以及对光子态的精确操控[8–10]。

然而，要实现既强又快的光学调制是一项重大挑战，因为要兼顾这两个极端往往会使材料极限和器件性能承受巨大压力。[13] 然而，即使调制相对较弱，只要诱发了转变，也能彻底改变光学响应 [14] ——例如从介电态转变为双曲态 [15]。至关重要的是，这种拓扑转变只会发生在各向异性介质中 [15], ，因为各向同性材料无法支持双曲色散 [16]。

在此，我们介绍一种超快光学调制新方法，可在本质上各向同性的材料中诱导从椭圆区到双曲区的拓扑转变。所提出的载流子漂移调制方法会使自由电荷载流子的速度分布沿超快光学泵浦脉冲平均电场的方向偏移。这种自由载流子漂移会产生瞬态的泵浦诱导各向异性，从而实现由光驱动的电磁拓扑转变，使响应从椭圆型转变为双曲型。

我们的方法不仅为在超快时间尺度上实现强调制这一挑战提供了解决方案，还开辟了实现双曲时间晶体的道路——这种光子时间晶体继承了双曲介质的奇特特性，通过在原本各向同性的材料中诱导瞬态各向异性，载流子漂移调制可实现周期性的时间转变，使系统进入双曲区；它将时间晶体的动态控制与双曲材料的高波数模式支持及极端光物质相互作用特性相结合。

通过恰当选择时间调制周期，双曲时间晶体还可以支持参量放大，使调制能量转移到光场中。这种增益机制提供了一种补偿材料固有损耗的途径；长期以来，材料损耗被视为双曲介质的根本限制，而该机制有望实现纳米光子学的圣杯——无损双曲介质。

II. 载流子漂移调制

强光脉冲在导电样品中传播时，会迅速加速自由电荷载流子，使其动能显著提升至费米能级以上。由于所有导电材料都固有地存在能带非抛物性，这会立即改变自由载流子对时变探测场的响应，从而为超快电磁响应调制提供一种实用方法。在这一框架的典型设置中，实现强调制所需的高光泵浦强度，是通过对激光脉冲进行光学时间压缩来获得的；这自然会使最终的脉冲持续时间 τ_M 相对于由自由载流子散射速率决定的“电子”时间尺度 τ_0 较短，但远长于单个光泵浦周期$2\pi/\omega_M$：

$$\frac{2\pi}{\omega_M} \ll \tau_M \ll \tau_0. \tag{1}$$

一般而言，光学泵浦脉冲会使自由载流子沿外加电场的方向发生“漂移”， $\langle \mathbf{p} \rangle \equiv \mathbf{p}_M \propto \mathbf{E}_M$，并使其平均能量增加

。当 $\tau_M \gg 2\pi/\omega_M$ 时，泵浦场的多次振荡会迅速抵消所施加的载流子漂移，$\mathbf{p}(t > \tau_M) \to 0$。

然而，当使用持续时间仅有几个周期的超短脉冲——直至单极性（亚周期）场 [17] 时，情况就大不相同了：

$$\tau_M \lesssim \frac{2\pi}{\omega_M} \ll \tau_0. \tag{2}$$

在这种情况下，整个泵浦脉冲施加的自由载流子分布的漂移动量，$\langle \mathbf{p} \rangle \neq 0$，会立即导致调制介质产生各向异性电磁响应。

自由载流子电磁响应强烈依赖于信号频率 ω，

$$\mathrm{Re}\left[\epsilon\left(\omega\right)\right] \propto 1 - \omega_p^2/\omega^2 \tag{3}$$

并在由自由载流子动力学决定的等离子体频率 ω_p 处改变符号。因此，漂移调制所引起的介电常数张量各向异性意味着，必然存在一个频带，在该频带内，调制会将原本的各向同性响应（当 $\epsilon_\omega > 0$ 时为介电性，当 $\epsilon_\omega < 0$ 时为金属性）转变为双曲响应（介电常数在平行和垂直于调制电场的方向上的分量符号相反）。对于此类信号波长，本研究引入的漂移调制并非仅仅定量改变系统参数，而是会诱发拓扑转变 [15]，使色散关系从椭圆型转变为双曲型；众所周知，这会定性地改变材料的电磁响应 [15]。

泵浦诱导的自由载流子电磁响应各向异性，其机制源于两种效应的共同作用：电子分布沿泵浦脉冲平均电场所确定的方向漂移，以及能带非抛物性。由于电荷载流子的有效质量随能量变化，从泵浦传递给自由电子的能量会改变其电磁响应 [13]。因此，泵浦诱导的自由电子速度分布具有强烈的各向异性，进而会导致电磁响应的非抛物性修正呈现各向异性，最终在相应的频率窗口内引发前述跃迁。此外，由于该跃迁发生的时间尺度远短于电子弛豫时间 τ_0，不可逆过程无法抑制这一跃迁。

一系列按时间排列的短时强脉冲入射到导电材料上（例如掺杂半导体或透明导电氧化物（TCO）薄膜），电场 $\mathbf{E}_M(\mathbf{r}\ t)$ 作用于样品中的自由电子，从而形成“热电子”分布 $f_M(\mathbf{p}\ t)$，该分布满足动理学方程 [18]

$$\frac{\partial f_M}{\partial t} + \mathbf{v}_\mathbf{p} \cdot \nabla f_M + e\mathbf{E}_M\left(\mathbf{r}, t\right) \cdot \frac{\partial f_M}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{f_M - f_0}{\tau_0}, \tag{4}$$

系统的初始条件为在 $t \to -\infty$ 处处于平衡态：

$$f_M\left(\mathbf{p}, \mathbf{r}; t \to -\infty\right) = f_0\left(\mathbf{p}\right), \tag{5}$$

其中，$\mathbf{v}_\mathbf{p} \equiv \partial\varepsilon_\mathbf{p}/\partial\mathbf{p}$ 是电荷载流子的群速度，而 $f_0(\mathbf{p})$ 是平衡态（费米-狄拉克）分布，其归一化至自由电子浓度 n_0

$$\frac{2}{\left(2\pi\hbar\right)^3} \int d\mathbf{p}\, f_0\left(\mathbf{p}\right) = n_0. \tag{6}$$

动理学方程 (4) 中的梯度项 $\mathbf{v}_\mathbf{p} \cdot \nabla f_M$ 描述了电荷载流子电磁响应的空间非局域性，因为自由电子在单个光学周期内的坐标位移尺度为 v_F/ω_M，其中 v_F是自由电子的费米速度。当 $v_F \ll c$ 时，这一长度尺度远小于波长 $\lambda_M \sim c/\omega_M$，因此可以忽略动理学方程 (4) 中的空间梯度项。

因此，对于满足初始条件 (5) 的方程 (4) 的解，我们得到

$$f_M = \int_{-\infty}^{t} \frac{dt'}{\tau_0} f_0\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}_M\left(\mathbf{r}, t\right) + \mathbf{p}_M\left(\mathbf{r}, t'\right)\right) e^{-\frac{t-t'}{\tau_0}}, \tag{7}$$

其中，$\mathbf{p}_M(\mathbf{r}\ t)$ 是截至 t 时调制场传递给自由电子的冲量：

$$\mathbf{p}_M\left(\mathbf{r}, t\right) = e\int_{-\infty}^{t} \mathbf{E}_M\left(\mathbf{r}, t'\right) dt'. \tag{8}$$

在短于电子弛豫时间的时段内，解 (7) 对应于无碰撞等离子体在泵浦作用下的可逆动力学 [19]

$$f_M\left(\mathbf{p}, \mathbf{r}; t\right) = f_0\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}_M\left(\mathbf{r}, t\right)\right), \tag{9}$$

其中$\mathbf{p}_M$ 对应于自由载流子的平均（漂移）准动量。

当调制由单个泵浦脉冲（持续时间为 τ_M）产生时，在脉冲尾端

$$f_M\left(\mathbf{p}, \mathbf{r}; \tau_M \lesssim t \ll \tau_0\right) \simeq f_0\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\left(\mathbf{r}\right)\right), \tag{10}$$

而在其尾迹中（$t > \tau_M$）

$$\begin{aligned} f_M\left(\mathbf{p}, \mathbf{r}; t > \tau_M\right) \simeq\ & \left(f_0\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\left(\mathbf{r}\right)\right) - f_0\left(\mathbf{p}\right)\right) e^{-t/\tau_0} \\ +\ & f_0\left(\mathbf{p}\right), \end{aligned} \tag{11}$$

其中

$$\mathbf{p}_0\left(\mathbf{r}\right) = e\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_M\left(\mathbf{r}, t'\right) dt' \tag{12}$$

是泵浦脉冲传递给自由电子的总冲量。

特别是对于高斯泵浦脉冲

$$E_M\left(t\right) = E_0\, e^{-t^2/\tau_M^2} \cos\left(\omega_M t\right), \tag{13}$$

我们发现

$$p_0 \;=\; eE_0\tau_M\,\sqrt{\pi}\,e^{-\omega_M^2\tau_M^2/4}, \tag{14}$$

由乘积 $\omega_M\tau_M/\pi$ 控制，该乘积定义了快速衰减脉冲中的有效周期数。对于超短泵浦脉冲（$\omega_M\tau_M<\pi$），在典型实验条件下，掺杂半导体的冲量$p_0 \simeq eE_0\tau_M$ 可以达到费米动量 p_F 的量级。另一方面，对于 $\omega_M\tau_M>\pi$，由于 $E_M(t)$ 的正负区域相互抵消，漂移动量 p_0 变得指数级微小——因此，泵浦脉冲会将自由电子带入强烈的非平衡态，但随后又可逆地将它们带回接近平衡态。最近，参考文献 [20], 的实验研究了后一种状态；其中泵浦脉冲大约包含三个有效周期。

我们在本文中引入的载流子漂移调制方法对应于 $\omega_M\tau_M<\pi$ 的情形：泵浦在自由载流子时间尺度上几乎瞬时地生成一种具有漂移电子的新型各向异性介质。

在此情形下，泵浦作用之前，探测波是具有色散关系的常规横向等离激元的叠加

$$\omega=\sqrt{\omega_p^2+k^2c^2/\epsilon_\infty}, \tag{15}$$

其中，ϵ_∞ 是介电常数中的晶格贡献，k 是波数。在突发的载流子漂移调制到达的瞬间，探测波的色散关系演变为

$$\omega' \;=\; \sqrt{\omega_p^2-\Omega^2+k^2c^2/\epsilon_\infty}, \tag{16}$$

其中，修正项 Ω 取决于获得的漂移动量 p_0 以及自由载流子色散的非抛物性。然而，为满足调制脉冲到达所引发的暂态界面处的边界条件，探测场还必须包含沿原波传播方向相反方向传播的分量。这些时间折射分量和时间反射分量现在都以新的频率 ω' 振荡，其时间折射和时间反射振幅按如下规律变化

$$\mathcal{T}\simeq\frac{\omega+\omega'}{2\omega},\quad \mathcal{R}\simeq\frac{\omega-\omega'}{2\omega} \tag{17}$$

在小损耗 $\omega\tau_0\gg 1$的极限下。漂移调制介质中的时间反射和时间折射的详细分析将在第五节中介绍。

最重要的是，所提出的载流子漂移调制为双曲时间晶体开辟了道路。在这种晶体中，光学调制不仅能将各向同性半导体转变为双曲介质，同时还能通过参量放大机制降低其吸收。

III. 载流子漂移调制的波动方程

这里，我们考虑上一节介绍的载流子漂移调制下各向同性导电介质的电磁响应。对于远小于泵浦脉冲峰值振幅 E_M 的探测场 $\mathbf{E}(\mathbf{r}\ t)$，其线性响应可由线性化动力学方程 [18] 描述

$$\frac{\partial g}{\partial t}+\mathbf{v_p}\cdot\nabla g+e\mathbf{E}\cdot\frac{\partial f_M}{\partial\mathbf{p}}+e\mathbf{E}_M\cdot\frac{\partial g}{\partial\mathbf{p}} \;=\; -\frac{g}{\tau_0}, \tag{18}$$

其中，完整的分布函数

$$f\left(\mathbf{p},\mathbf{r};t\right) \;=\; f_M\left(\mathbf{p};t\right)+g\left(\mathbf{p},\mathbf{r};t\right). \tag{19}$$

对于费米速度为 $v_F\ll c$ 的自由载流子，可以忽略方程 (18) 右端第二项所产生的空间色散效应，从而得到

$$g=-\int_{-\infty}^{t}dt'\;\; e\mathbf{E}\left(\mathbf{r},t'\right)\cdot\frac{f_M\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}_M\left(\mathbf{r},t\right)+\mathbf{p}_M\left(\mathbf{r},t'\right);t'\right)}{\partial\mathbf{p}} \times\;\exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_0}\right). \tag{20}$$

将 (7) 代入 (20)，得到

$$g \;=\; -\frac{e^{-t/\tau_0}}{\tau_0}\int_{-\infty}^{t}dt'\int_{-\infty}^{t'}dt''\,e^{t''/\tau_0} \times\;e\mathbf{E}\left(\mathbf{r},t'\right)\cdot\frac{\partial f_0\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}_M\left(\mathbf{r},t\right)+\mathbf{p}_M\left(\mathbf{r},t''\right)\right)}{\partial\mathbf{p}}, \tag{21}$$

将方程 (18) 中由分布函数 $g(\mathbf{p},\ \mathbf{r};t)$ 定义的自由电流密度代入麦克斯韦方程组，得到波动方程（见附录 A）

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\tau_0}\right)\left(\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}+\frac{c^2}{\epsilon_\infty}\,\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{E}\right)+\omega_p^2\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{M}_0\cdot\mathbf{E}+e^{-\frac{t}{\tau_0}}\int_{-\infty}^{t}dt'\;\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t}\cdot\mathbf{E}\left(t'\right)\right], \tag{22}$$

其中，等离子体频率

$$\omega_p^2 \;=\; \frac{4\pi n_0e^2}{m_*\epsilon_\infty}, \tag{23}$$

调制核

$$\mathbf{M}\left(t,t'\right) \;\equiv\; \omega_p^2\int_{-\infty}^{t'}\frac{dt''}{\tau_0}\,\exp\left(\frac{t''}{\tau_0}\right) \times\;\left(1-\frac{m_*}{\mathbf{m}\left[\mathbf{p}_M\left(t\right)-\mathbf{p}_M\left(t''\right)\right]}\right), \tag{24}$$

and

$$\mathbf{M}_0\left(t\right)\equiv\mathbf{M}\left(t,t\right)\,e^{-\frac{t}{\tau_0}}. \tag{25}$$

这里，调制后的有效质量张量 r

$$\frac{1}{m_{\alpha\beta}\left[\mathbf{q}\right]} \;=\; \left\langle \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \right\rangle_{\mathbf{p}} \tag{26}$$

其中相空间平均定义为

$$\left\langle F\left[\mathbf{p}+\mathbf{q}\right]\right\rangle_{\mathbf{p}} \;\equiv\; \frac{\int d\mathbf{p}\, F\left(\mathbf{p}+\mathbf{q}\right) f_0\left(\mathbf{p}\right)}{\int d\mathbf{p}\, f_0\left(\mathbf{p}\right)}. \tag{27}$$

对于抛物线能带

$$\left\langle \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \right\rangle_{\mathbf{p}} \;=\; \left\langle \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mathbf{p}}}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \right\rangle_{\mathbf{p}} \equiv \frac{\delta_{\alpha\beta}}{m_*} \tag{28}$$

由平均有效质量 m_* 定义，因此 $\mathbf{M}$ =0，波动方程不依赖于泵浦，调制对探测场的自由载流子响应没有影响。

然而，电光学中使用的导电材料（例如透明导电氧化物 [21, 22] 和半导体 [23]）固有地具有显著的电子非抛物性。此外，这通常并非微小效应 [24, 25]：例如，在相关准动量范围内，砷化镓的有效质量变化达 $\sim$ 30% [26–28]，而砷化铟则变化 5 倍[26, 29]。

当调制脉冲的持续时间短于信号$\mathbf{E}$(r t)单个电磁周期的时间尺度时，一般波动方程 (22) 可进一步简化，从而将 (22) 化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \;+\; \frac{1}{\tau_0}\right)\left(\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{c^2}{\epsilon_\infty}\,\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{E}\right) + \omega_p^2\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \;=\; \mathbf{M}_0 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\tau_0}\right)\mathbf{E}. \tag{29}$$

在这种方法中（参见附录 B），泵浦脉冲引发的“时间边界”处，漂移调制导致 $\mathbf{M}(t,t')$ 发生突变，其效应由三个独立的边界条件描述。这些边界条件对应于以下场的连续性:

(i) $\mathbf{E}$, (ii)$\mathbf{F}$,
以及 (iii) ∂
$\mathbf{F}/\partial t$,
其中，时间位移场$\mathbf{F}$ 定义为

$$\mathbf{F} \;\equiv\; \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - e^{-\frac{t}{\tau_0}} \int_{-\infty}^{t} dt'\; \mathbf{M}\left(t,t'\right)\cdot \mathbf{E}\left(\mathbf{r},t'\right). \tag{30}$$

当电子弛豫时间 τ_0 远大于系统动力学的其他特征时间尺度（例如调制脉冲持续时间 τ_M、信号周期 $2\pi/\omega$ 以及不同调制脉冲之间的时间间隔 T_M）时，漂移调制波动方程可简化为（见附录 C）

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \;+\; \frac{c^2}{\epsilon_\infty}\,\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{E} + \frac{m_*\,\omega_p^2}{\mathbf{m}_M\left(t\right)}\,\mathbf{E} \;=\; \omega_p^2\; m_*\,\frac{d\mathbf{m}^{-1}}{dt}\int_{-\infty}^{t} dt'\,\mathbf{E}\left(t'\right). \tag{31}$$

其中，时变有效质量张量

$$\frac{1}{\mathbf{m}_M} \;\equiv\; \frac{1}{\mathbf{m}\left[\mathbf{p}_M\left(t\right)\right]}. \tag{32}$$

此外，当调制脉冲的持续时间小于信号单个电磁周期的时间尺度时，方程 (31) 化简为

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \;+\; \frac{c^2}{\epsilon_\infty}\,\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{E} + \omega_p^2\,\frac{m_*}{\mathbf{m}_M}\,\mathbf{E} = 0. \tag{33}$$

其中电场$\mathbf{E}$(r t)和时间位移保持连续

$$\mathbf{F} \;=\; \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \omega_p^2\,\frac{m_*}{\mathbf{m}_M}\cdot\int_{-\infty}^{t} dt'\,\mathbf{E}\left(t'\right). \tag{34}$$

本节推导的一般波动方程适用于任意几何结构中的一般调制场$\mathbf{E}_M$ (r t)，是本研究的主要结果之一。

IV. 载流子漂移调制下的介电常数

对于单色探测场

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{r},t\right) \;=\; \mathbf{E}_\omega\left(\mathbf{r}\right)\exp\left(-i\omega t\right), \tag{35}$$

自由载流子极化

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\;\left(\mathbf{r},t\right) &= \int_{-\infty}^{t} dt'\,\mathbf{j}\left(\mathbf{r},t'\right)\\ &= -\frac{\epsilon_\infty}{4\pi}\left[\frac{\omega_p^2}{\omega\left(\omega+\frac{i}{\tau_0}\right)} + e^{-\frac{t}{\tau_0}}\int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{\left(i\omega+\frac{1}{\tau_0}\right)\left(t-t'\right)}\right.\\ &\times\left.\int_{-\infty}^{t'} dt''\, e^{i\omega\left(t'-t''\right)}\,\mathbf{M}\left(t',t''\right)\right]\mathbf{E}\left(\mathbf{r},t\right)\end{aligned} \tag{36}$$

式 (36) 中时间积分的主要贡献来自区间 $0 < t-t' < 1/\omega$ 和 $0 < t'-t'' < 1/\omega$。当且仅当距最近的过去时间边界所经过的时间远大于探测频率对应的振荡周期 $2\pi/\omega$ 时，自由载流子极化才能表示为

$$\mathbf{P}\;\left(t\right) = -\frac{\epsilon_\infty}{4\pi}\left[\frac{\omega_p^2}{\omega\left(\omega+\frac{i}{\tau_0}\right)} - \frac{\mathbf{M}_0\left(t\right)}{\omega\left(\omega-\frac{i}{\tau_0}\right)}\right]\mathbf{E}\left(t\right), \tag{37}$$

with

$$\mathbf{M}_0\left(t\right) \;=\; \omega_p^2\sum_{t_n<t} e^{-\frac{t-t_n}{\tau_0}}\left(\frac{m_*}{\mathbf{m}\left[\Delta\mathbf{p}_n\right]} - \frac{m_*}{\mathbf{m}\left[\Delta\mathbf{p}_{n-1}\right]}\right), \tag{38}$$

其中

$$\Delta\mathbf{p}_n \;\equiv \mathbf{p}_M\left(t\right) - \mathbf{p}_M\left(\tfrac{t_n+t_{n-1}}{2}\right) \tag{39}$$

是不同调制脉冲施加的漂移动量之差。

因此，我们可以引入（随时间变化的）介电常数张量 $\boldsymbol{\epsilon}$，使得

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_\infty \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}, \tag{40}$$

其中

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta}(\omega;t) &= \epsilon_\infty \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i/\tau_0)}\right)\delta_{\alpha\beta} \\ &+ \epsilon_\infty \frac{\Omega_{\alpha\beta}^2(t)}{\omega(\omega - i/\tau_0)}, \end{aligned} \tag{41}$$

and

$$\Omega_{\alpha\beta}^2 = \omega_p^2 \sum_{t_n<t} e^{-\frac{t-t_n}{\tau_0}} \left(\delta_{\alpha\beta} - m_* \left\langle \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{\Delta p}_n}}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \right\rangle_{\mathbf{p}}\right). \tag{42}$$

在中等载流子漂移调制（$\Delta p < p_F$）的极限下，我们得到（见附录 D）

$$\Omega_{\parallel}{}^2(t) \simeq 3\frac{\alpha_* \omega_p^2}{m_0} \sum_{t_n<t} \Delta p_n^2 e^{-\frac{t-t_n}{\tau_0}}, \tag{43}$$

$$\Omega_{\perp}{}^2(t) \simeq \frac{\alpha_* \omega_p^2}{m_0} \sum_{t_n<t} \Delta p_n^2 e^{-\frac{t-t_n}{\tau_0}}., \tag{44}$$

其中，Kane 非抛物性参数 α_* 的量级为带隙能量 E_g [30] 的倒数；下标分别对应于与调制材料的泵浦场泵浦 $\mathbf{E}_M$ 平行（$\parallel$）和垂直（$\perp$）的方向。

因此，在 $t = 0$ 处施加单个调制脉冲后，当 $\tau_M \ll t \ll \tau_0$ 时，漂移调制各向同性介质的介电常数张量具有如下形式

$$\epsilon_{\parallel,\perp} = \epsilon_\infty \left(1 - \frac{\omega_p^2 - \Omega_{\parallel,\perp}^2}{\omega^2}\right), \tag{45}$$

并在以下频带内表现出双曲响应

$$\sqrt{\omega_p^2 - \Omega_\parallel^2} < \omega < \sqrt{\omega_p^2 - \Omega_\perp^2}. \tag{46}$$

然而需要注意的是，在载流子漂移调制条件下，时变介电率只能在暂态界面形成至少数个探测周期之后才能引入。

V. 时间反射

在传统设置中，当介质的电磁性质（例如其介电常数）随时间突然变化，而在空间上保持均匀时，就会发生时间反射。这种突变的时间不连续性会导致部分波发生反射——不是在空间上，而是在时间上。本文考虑由各向同性导电材料中的载流子漂移调制所产生的时间反射。

为避免泵浦脉冲在介质中传播时产生的迟滞所带来的复杂性，我们考虑一种带金属包层的亚波长波导结构，该包层对泵浦光透明（其带宽远高于包层的等离子体频率），见图1。实际应用中，这种系统可采用掺杂半导体波导（等离子体频率位于中红外至远红外范围），并覆以薄层导电氧化物包层（例如氧化铟锡，其等离子体波长接近 1.55 μ米附近的电信波段）来实现。

我们考虑一个导波，它在调制开始（$t < 0$）之前以频率 $\omega > \omega_p$ 传播。对于波动方程（29），这对应于 $\mathbf{M} = 0$，从而产生“入射”波

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t), \tag{47}$$

在图1所示的几何结构中，其中

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = E_0 \mathbf{f}(k_z z)\, e^{ik_x x + ik_y y} \tag{48}$$

and

$$\omega = kc/\sqrt{\epsilon_\omega}, \tag{49}$$

其中介电常数 ϵ_ω 由方程（45）定义，且 $\Omega_{\alpha\beta}$ 设为零。注意，由于导电材料固有的电磁吸收，方程（47）、（49）中的量 k 或 ω 至少有一个具有非零虚部。

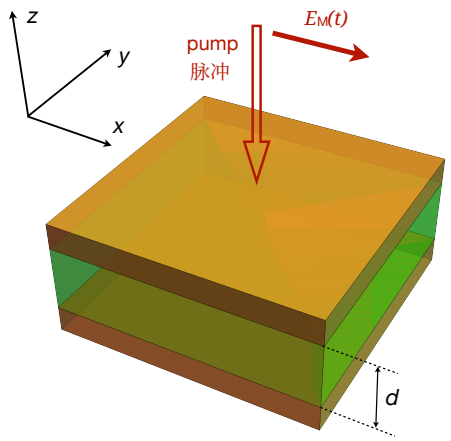

图1。漂移调制下波导几何结构示意图。波导芯层由等离子体频率为 ω_p的导电材料构成，该频率选择为与探测（信号）频率 ω 相当。包层在信号波长下表现为金属，同时对高频光学泵浦脉冲保持部分透明。泵浦的偏振方向位于波导平面内，信号以该结构的横向电磁（TEM）模式传播。

当波导厚度 d （见图1）远小于信号频率对应的波长时，系统中唯一的传播模是所谓的 TEM 波 [31]，其电场垂直于波导平面，且仅依赖于面内坐标：

$$\mathbf{f}_{\rm TEM} \;=\; \hat{\mathbf{z}},\;\; k_z = 0. \tag{50}$$

对于 TEM偏振场，当泵浦脉冲持续时间 τ_M 远短于调制间隔T_M 和自由载流子弛豫时间 τ_0时，由方程 (24)、(25)可得

$$\mathbf{M}\,(t,t') \;=\; \hat{\mathbf{z}}\,\hat{\mathbf{z}}\;\theta\,(t)\exp\left(\frac{\min\left[t',0\right]}{\tau_0}\right)\,\Omega_\perp^2, \tag{51}$$

$$\mathbf{M}_0\,(t) \;=\; \hat{\mathbf{z}}\,\hat{\mathbf{z}}\;\theta\,(t)\exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right)\,\Omega_\perp^2, \tag{52}$$

其中（见图1）

$$\Omega_\perp^{\,2} \;=\; \omega_p^2\left(1-m_*\left\langle\frac{\partial^2\varepsilon_{\mathbf{p}+\hat{\mathbf{x}}p_0}}{\partial p_z^2}\right\rangle_{\mathbf{p}}\right)\simeq\frac{4}{3}\frac{\alpha_* p_0^2}{m_0}\,\omega_p^2, \tag{53}$$

$\theta(t)$ 是 Heaviside函数，且$\mathbf{p}_0$ 已在方程 (12) 中定义。

对于 $0<t\ll\tau_0$时的 TEM偏振场，我们得到

$$\mathbf{E} \;=\; \hat{\mathbf{z}}e^{ik_x x+ik_y y}\sum_{m=1}^{3}s_m\exp\left(-i\omega_m t\right), \tag{54}$$

其中，频率 ω_m 是三次方程的三个解

$$\begin{aligned}\omega^3+\frac{i}{\tau_0}\omega^2 \;-\; &\left(\omega_p^2-\Omega_\perp^2+\frac{k^2c^2}{\epsilon_\infty}\right)\omega\\ &=\;\frac{i}{\tau_0}\left(\Omega_\perp^2+\frac{k^2c^2}{\epsilon_\infty}\right),\end{aligned} \tag{55}$$

这也可以等价地表示为

$$\omega \;=\; \frac{kc}{\sqrt{\epsilon_\perp^{\rm eff}\,(\omega)}}, \tag{56}$$

其中，有效横向介电常数

$$\epsilon_\perp^{\rm eff}\,(\omega) \;\equiv\; \epsilon_\infty\left(1-\frac{\omega_p^2-\Omega_\perp^2\left(1-\frac{i}{\omega\tau_0}\right)}{\omega\left(\omega+\frac{i}{\tau_0}\right)}\right) \tag{57}$$

与方程 (45) 中的 $\epsilon_\perp$ 一致。

对于相对较小的损耗，当 $c\,\tau_0\gg 1/k$ [32] 时，我们发现

$$\omega_{1,2} \;=\; \pm\,\omega' - i\,\frac{\gamma}{\tau_0}, \tag{58}$$

$$\omega_3 \;=\; -i\,\frac{1-2\gamma}{\tau_0} \tag{59}$$

其中新的频率

$$\omega' \;=\; \sqrt{\omega_p^2-\Omega_\perp^2+k^2c^2/\epsilon_\infty}, \tag{60}$$

且无量纲消光率

$$\gamma \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{\omega_p^2-2\Omega_\perp^2}{\omega_p^2-\Omega_\perp^2+k^2c^2/\epsilon_\infty}. \tag{61}$$

因此，在电场 (54) 中，振幅 s_1和 s_2 分别对应时间透射系数和时间反射系数 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{T}$，而 s_3 表示时间倏逝波 $\mathcal{S}$ 的振幅——由此得到

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,(\mathbf{r},t>0) \;=\; & E_0\,\mathbf{f}_{\rm TEM}\left\{e^{-\frac{\gamma}{\tau_0}t+i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}}\left[\mathcal{T}\,e^{-i\omega' t}+\mathcal{R}\,e^{i\omega' t}\right]\right.\\ &+\;\left.e^{-\frac{1-2\gamma}{\tau_0}t+i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}}\,\mathcal{S}\right\},\end{aligned} \tag{62}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}\equiv(x,\;\;y)$。

根据时间界面 $t=0$处场的连续性（$\mathbf{E}$、$\mathbf{F}$ 和 $\partial\mathbf{F}/\partial t$），我们得到（见附录 E）：

$$\mathcal{R} \;=\; \frac{\eta_\omega\omega(\omega-\omega'+i\frac{1-\gamma}{\tau_0})-i\frac{1-2\gamma}{\tau_0}(\omega'-i\frac{\gamma}{\tau_0})}{2\,\omega'\,\left(\omega'-i\frac{1-3\gamma}{\tau_0}\right)}, \tag{63}$$

$$\mathcal{T} \;=\; \frac{\eta_\omega\omega(\omega+\omega'+i\frac{1-\gamma}{\tau_0})+i\frac{1-2\gamma}{\tau_0}(\omega'+i\frac{\gamma}{\tau_0})}{2\,\omega'\,\left(\omega'+i\frac{1-3\gamma}{\tau_0}\right)}, \tag{64}$$

$$\mathcal{S} \;=\; \frac{\omega'^2-\eta_\omega\omega\,(\omega+2i\gamma/\tau_0)+\gamma^2/\tau_0^2}{\omega'^2+(1-3\gamma)^2/\tau_0^2}, \tag{65}$$

在低损耗极限下，$\omega\tau_0\gg 1$ 我们发现

$$\omega'\to\sqrt{\omega^2-\Omega_\perp^2}\to\sqrt{\eta_\omega}\,\omega, \tag{66}$$

因此

$$\mathcal{R} \;\simeq\; \frac{\eta_\omega\,\omega(\omega-\omega')}{2\,\omega'^2}\to\frac{\omega-\omega'}{2\,\omega}, \tag{67}$$

$$\mathcal{T} \;\simeq\; \frac{\eta_\omega\,\omega\,(\omega+\omega')}{2\,\omega'^2}\to\frac{\omega+\omega'}{2\,\omega}, \tag{68}$$

$$\mathcal{S} \;\simeq\; \frac{\omega'^2-\eta_\omega\,\omega^2}{\omega'^2}\to 0. \tag{69}$$

请注意，基于在时间和频率上介电常数张量近乎瞬时变化这一理念的传统方法 [2, 3]，即使在无损极限下、可以忽略时间界面之后存在的时间倏逝波时（见方程（69））， 也无法再现本节的结果。由于漂移调制会迅速改变电流密度，因此产生的介电极化$\mathbf{P}\propto\int dt\,\mathbf{j}(t)$在过渡过程中保持连续——而这无法用时变介电常数 [2, 3] 的阶跃式行为来描述。

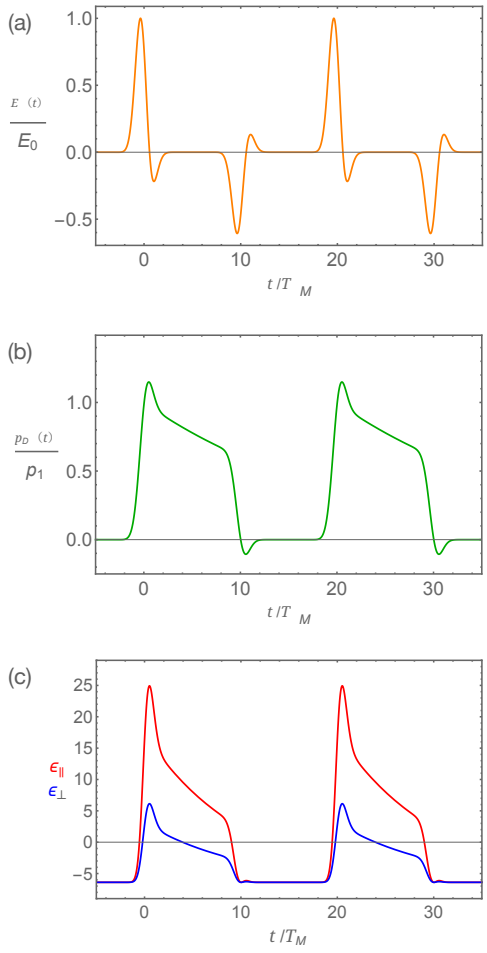

图2。面板（a）：用于超晶体载流子漂移调制的调制脉冲序列（见方程（70）、（71））。注意，单个调制脉冲的平均场非零，且脉冲列的符号交替。面板（b）：自由载流子的漂移动量，计算为自由电子分布的平均值。注意，载流子漂移动量 p_D 不同于泵浦冲量 p_M。面板（c）：介质的时变介电常数，由电位移矢量 $\mathbf{D}(t)$ 得出，该矢量对应于自由载流子的时变分布函数 $f(\mathbf{p}\ t)$。“平行”（∥）和“垂直”（⊥）方向（分别以红色和蓝色曲线表示）是相对于调制场 $\mathbf{E}_M$ 定义的（另见图1）。计算中使用的数值对应于一个重掺杂砷化镓样品 [23],，其弛豫时间为 $\tau_0 = 0.1$，调制间隔为 $T_M = 20$ fs。

VI. 双曲时间晶体

泵浦脉冲的电场方向上自由电子速度分布的畸变，使载流子漂移调制在自由载流子电磁响应中产生瞬态各向异性——见方程（45）。适当选择调制脉冲的振幅和相位后，相干脉冲序列可以

“印刻”所需的电子漂移动量分布$\mathbf{p}(t)$，只要调制脉冲之间的时间间隔 T_M 远小于电子散射时间 τ_0即可。特别是，“二进制相移键控”调制序列，

$$\mathbf{E}_M(t) = \sum_n \left[\mathbf{E}_1(t-2nT_M) - e^{-T_M/\tau_0}\,\mathbf{E}_1(t-(2n-1)\,T_M)\right], \quad (70)$$

或者，在极限情况下 $\tau_0 \ll T_M$

$$\mathbf{E}_M(t) = \sum_n (-1)^n\,\mathbf{E}_1(t-n\,T_M), \quad (71)$$

其中$\mathbf{E}_1(t)$是一个超快光脉冲，将产生“开-关”式漂移动量调制——见图2。

由于原始各向同性材料在探测／信号频率 ω下的吸收相对较低，

$$\omega\tau_0 \gg 1, \quad (72)$$

当信号在系统已达到调制稳态后注入时，由载流子漂移调制（71）定义的光子时间晶体在 $\omega T_M \ll 1$时充当时间超材料，在 $\omega T_M \gtrsim 1$时则充当时间超晶体。

时间超材料状态下的信号传播由标准波动方程描述，其有效介电常数张量为

$$\epsilon_{\parallel,\perp} = \epsilon_\infty\left(1-\frac{\omega_p^2-\langle\Omega_{\parallel,\perp}^2\rangle}{\omega\,(\omega+i/\tau_0)}\right). \quad (73)$$

其中，$\langle\ldots\rangle$ 表示对调制脉冲列完整周期的时间平均（例如，$2\,T_M$ 对应方程 (71) 的二进制相移方案），且在信号频带内呈现双曲响应

$$\sqrt{\omega_p^2-\langle\Omega_\parallel^2\rangle} < \omega < \sqrt{\omega_p^2-\langle\Omega_\perp^2\rangle}. \quad (74)$$

时间超晶体状态（定义为满足条件 $\omega T_M \gtrsim 1$）是“空间超晶体” [33], 的时间类比，后者是包含双曲介质和天然材料的晶胞的复合材料。与双曲材料类似，超晶体也支持波数不受信号频率限制的传播场，尽管其能带结构并不简单，且存在多个带隙。

然而，通过适当选择信号频率（$\omega T_M = \pi$），载流子漂移调制现在满足参量放大的标准要求 [34] ——从而在漂移调制介质中产生有效的信号增益。凭借参量放大过程普遍的高效率，相应器件已成为高带宽电子设备的主力 [35], ，时间超晶体中的参量增益可以达到信号吸收的水平；这一吸收出现在原始（未调制）导电

介质中——这首次提供了无损耗双曲介质的可能性。

在双曲介质中传播的高波数场所涉及的长度尺度下，可以忽略泵浦脉冲的空间变化。因此，为避免处理泵浦的迟滞，我们不再局限于上一节的波导几何结构。此外，由于信号/探测波主要由高波数 $k \gg \omega/c$ 支持，其传播可以在准静态极限 [36]，的框架内描述，此时电场由标量势定义为

$$\mathbf{E} \;=\; -\nabla\phi. \tag{75}$$

对于准静态极限下的波动方程，我们得到（见附录 G）

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi_{\mathbf{k}}}{dt^2} \;+\; \frac{1}{\tau_0}\frac{d\phi_{\mathbf{k}}}{dt} + \left(\omega_p^2 - \mathcal{M}_{\mathbf{k}}^{(o)}\,(t)\right)\phi_{\mathbf{k}} \\ =\; e^{-\frac{t}{\tau_0}}\int_{-\infty}^{t} dt'\,\frac{\partial \mathcal{M}_{\mathbf{k}}}{\partial t}\,\phi_{\mathbf{k}}\,(t')\,,\end{aligned} \tag{76}$$

其中，（标量）调制核 $\mathcal{M}_{\mathbf{k}}(t)$ 由下式给出

$$\mathcal{M}_{\mathbf{k}}\,(t,t') \;=\; \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{M}\,(t,t')\cdot\mathbf{k}}{k^2}, \tag{77}$$

and

$$\mathcal{M}_{\mathbf{k}}^{(0)}\,(t) \;\equiv\; e^{-\frac{t}{\tau_0}}\,\mathcal{M}_{\mathbf{k}}\,(t,t) \tag{78}$$

当调制脉冲的持续时间小于信号单个电磁周期的时间尺度时，方程（76）可化简为

$$\frac{d^2\phi_{\mathbf{k}}}{dt^2} + \frac{1}{\tau_0}\frac{d\phi_{\mathbf{k}}}{dt} + \left(\omega_p^2 - \mathcal{M}_{\mathbf{k}}^{(o)}\,(t)\right)\phi_{\mathbf{k}} \;=\; 0, \tag{79}$$

在每个调制脉冲时刻的边界条件对应于以下量的连续性：（i）标量势 ϕ；以及（ii）辅助时间位移势

$$\psi\,(\mathbf{r},t) \equiv \frac{\partial\phi}{\partial t} - e^{-\frac{t}{\tau_0}}\int_{-\infty}^{t} dt'\,\mathcal{M}_{\mathbf{k}}\,(t,t')\cdot\phi\,(\mathbf{r},t')\,. \tag{80}$$

忽略材料吸收（$\omega\tau_0 \to \infty$），对于方程 (70)、(71) 中的“开-关”载流子漂移调制，

$$\mathcal{M}_{\mathbf{k}}^{(0)} \;=\; \begin{cases} \xi_{\mathbf{k}}, & \lfloor t/T_M \rfloor = 2n, \\ 0, & \lfloor t/T_M \rfloor = 2n+1, \end{cases} \tag{81}$$

其中 n 是整数，$\lfloor x \rfloor$ 表示 x 的整数部分，并且

$$\xi_{\mathbf{k}} \;=\; \frac{k_{\parallel}^2}{k^2}\,\frac{\Omega_{\parallel}^2}{\omega_p^2} + \frac{k_{\perp}^2}{k^2}\,\frac{\Omega_{\perp}^2}{\omega_p^2}, \tag{82}$$

其中分量 $\mathbf{k}_{\parallel}$ 和 $\mathbf{k}_{\perp}$ 分别平行于和垂直于调制脉冲场 $\mathbf{E}_1$。这里

$$\Omega_{\parallel}^{\,2} \;=\; \frac{\alpha_* p_1^2}{m_0}\omega_p^2, \tag{83}$$

$$\Omega_{\perp}^{\,2} \;=\; \frac{\alpha_* p_1^2}{m_0}\omega_p^2, \tag{84}$$

且 p_1 是方程 (70)、(71) 中单个调制脉冲传递的冲量：

$$\mathbf{p}_1 \;\equiv\; \int_{-\infty}^{\infty} dt\; e\,\mathbf{E}_1\,(t)\,, \tag{85}$$

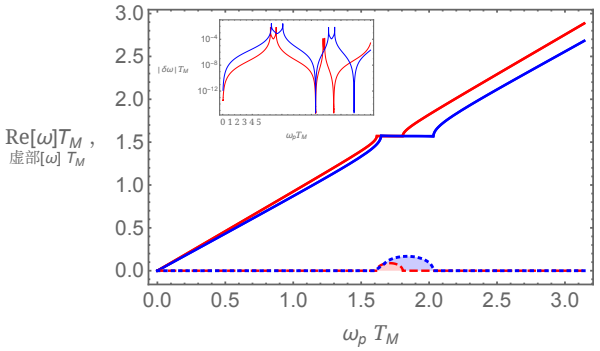

图 3. 漂移调制超晶体中的 Floquet–Bloch 频率，随材料等离子体频率与调制间隔的乘积变化，其中 $\xi_{\mathbf{k}} = 0.3$（红线）和 $\xi_{\mathbf{k}} = 0.5$（蓝色曲线）。实线和虚线分别表示 Floquet–Bloch 频率的实部和虚部。主图中精确解 (88) 与解析近似 (90)、(91) 的结果无法区分；插图显示了精确解与解析解之间较小的（$\lesssim 10^{-4}$）差异。

对于由此形成的时间晶体中的 Floquet-Bloch 态，ʃ

$$\mathbf{E}\,(\mathbf{r},t) \;=\; \mathbf{u}\,(t)\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}, \tag{86}$$

with

$$\mathbf{u}\,(t) = \mathbf{u}\,(t+2\,T_M)\,, \tag{87}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\cos\left[2\,\omega T_M\right] = \cos\left[\omega_p T_M\right]\cos\left[\omega_{\mathbf{k}} T_M\right] \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\omega_p} + \frac{\omega_p}{\omega_{\mathbf{k}}}\right)\sin\left[\omega_p T_M\right]\,\sin\left[\omega_{\mathbf{k}} T_M\right],\end{aligned} \tag{88}$$

其中

$$\omega_{\mathbf{k}} \;\equiv \sqrt{\omega_p^2 - \left(k_{\parallel}/k\right)^2\,\Omega_{\parallel}^2 - \left(k_{\perp}/k\right)^2\,\Omega_{\perp}^2}. \tag{89}$$

方程（88）的精确解可表示为

$$\mathrm{Re}\,[\omega] = \frac{\omega_p + \omega_{\mathbf{k}}}{2} + \frac{1}{T_M}\tan\left[(\omega_p+\omega_{\mathbf{k}})\,T_M\right] \times \mathrm{Re}\sqrt{1 + \frac{\left(\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\omega_p}} - \sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_{\mathbf{k}}}}\right)^2 \sin\left[\omega_p T_M\right]\,\sin\left[\omega_{\mathbf{k}} T_M\right]}{\sin\left[(\omega_p+\omega_{\mathbf{k}})\,T_M\right]\,\tan\left[(\omega_p+\omega_{\mathbf{k}})\,T_M\right]}} - \frac{1}{T_M}\tan\left[(\omega_p+\omega_{\mathbf{k}})\,T_M\right] \tag{90}$$

and

$$\mathrm{Im}\,[\omega] = \mathrm{Im}\,\frac{1}{T_M}\left[\tan^2\left[(\omega_p+\omega_{\mathbf{k}})\,T_M\right] + \left(\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\omega_p}} - \sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_{\mathbf{k}}}}\right)^2 \frac{\sin\left[\omega_p T_M\right]\,\sin\left[\omega_{\mathbf{k}} T_M\right]}{\cos\left[(\omega_p+\omega_{\mathbf{k}})\,T_M\right]}\right]^{1/2}. \tag{91}$$

图 3 展示了方程 (88) 的精确解，插图中给出了解析表达式 (90)、(91) 的绝对误差。

在时间超材料区域 $\omega_p T_M \ll 1$ 中，方程化简为 (88)

$$\omega^2 = \left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{2}\right)\omega_p^2. \tag{92}$$

将 (82) 代入 (92)，可得标准的有效介质色散关系

$$\epsilon_\parallel k_\parallel^2 + \epsilon_\perp k_\perp^2 = 0, \tag{93}$$

其中有效介电常数张量

$$\epsilon_{\parallel,\perp} = \epsilon_\infty\left(1 - \frac{\omega_p^2 - \frac{1}{2}\,\Omega_\parallel^2}{\omega^2}\right) \tag{94}$$

与 (73) 一致。正如预期，在频率范围 (46) 内，时间超材料表现为双曲介质。

与这种行为相反，当 $\omega_p T_M \sim \pi n/2$ 对任意整数 n 成立时，通过所提出的漂移调制方法形成的光子时间晶体会呈现 $\mathrm{Im}\,[\omega] > 0$ 的带隙。这对应于光子时间晶体增益 [9], ，其物理起源在于介质的周期性光学调制造成的光学参量放大。

对于等离子体频率为 ω_p 的给定材料，调制间隔 T_M 的选择决定了具有非零增益的 $\xi_{\mathbf{k}}$ 区间——见图 4(a)。自然地，由于系统中存在有限吸收，系统主要支持增益最大的波 $\mathrm{Rm}\,[\omega]$，因此其衰减最小。图 4(b) 展示了相应数值 $\xi_{\mathbf{k}}^{\max}$ 随 $\omega_p T_M$ 的变化（插图），以及由此得到的最大增益随 $\xi_{\mathbf{k}}^{\max}$的变化。

由方程 (82)，对于固定的 $\xi_{\mathbf{k}}^{\max}$，我们得到

$$\left(\xi_{\mathbf{k}}^{\max} - \frac{\Omega_\parallel^2}{\omega_p^2}\right)k_\parallel^2 + \left(\xi_{\mathbf{k}}^{\max} - \frac{\Omega_\perp^2}{\omega_p^2}\right)k_\perp^2 = 0, \tag{95}$$

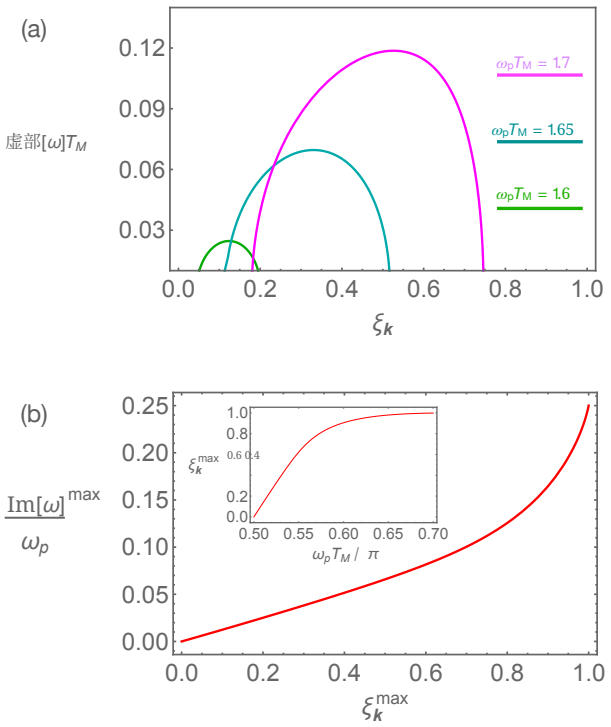

图 4. 双曲时间晶体光子带隙中的参量增益。面板 (a)：不同乘积 $\omega_p T_M$ 下，参量增益随 $\xi_{\mathbf{k}}$ 的变化。面板 (b)：参量增益随 $\xi_{\mathbf{k}}^{\max}$的变化，其中 $\xi_{\mathbf{k}}^{\max}$ 定义为：对于给定的 $\omega_p T_M$，与最大增益对应的 $\xi_{\mathbf{k}}$ 值。插图展示了 $\xi_{\mathbf{k}}^{\max}$ 对 $\omega_p T_M/\pi$ 的依赖关系。

这意味着当.....时呈现双曲色散

$$\frac{\Omega_\perp^2}{\omega_p^2} < \xi_{\mathbf{k}}^{\max} < \frac{\Omega_\parallel^2}{\omega_p^2}, \tag{96}$$

或（参见方程（83）、（84）

$$\frac{\alpha_* p_1^2}{m_0} < \xi_{\mathbf{k}}^{\max} < 3\frac{\alpha_* p_1^2}{m_0}. \tag{97}$$

随着 $\xi_{\mathbf{k}}^{\max}$ 随调制间隔 T_M 连续变化（见图 4(b) 的插图），实验中应当很容易达到范围（46）。

此外，在砷化镓和铟镓砷等高掺杂半导体中， [23], “品质因数” $\omega_p\tau_0 > 10$，因此双曲时间晶体中的参量增益（见图 4(b)）可以达到甚至超过材料的吸收——这使得将无损双曲材料的梦想变为实际工程现实成为可能。

VII. 实际考量

随着自由电荷载流子低损耗光学材料领域的当前发展阶段，掺杂程度较高的

半导体和透明导电氧化物（TCO）能够分别在中红外和近红外波长范围内支持所提出的载流子漂移调制方案。对于 TCO，$\omega_p\tau_0 \sim 5$；对于掺杂半导体，[22] $\omega_p\tau_0 > 10$ [23], 时间超晶体中的参量增益（见图 4(b)）可以克服这两种平台中的材料吸收。

此外，当信号处于中红外或近红外频带时，使用数飞秒的泵浦脉冲即可满足$\tau_M \ll 2\pi/\omega$的漂移调制要求。

然而，要达到双曲区，泵浦脉冲传递给自由电子的冲量p_1（见不等式(46)）必须达到以下数值:

$$\frac{\alpha_* p_1^2}{m_0} \sim 0.1, \tag{98}$$

从而使泵浦脉冲的峰值振幅

$$E_M \sim \frac{p_1}{e\tau_M} \sim \sqrt{\frac{0.1 m_0}{\alpha_* e^2 \tau_M^2}}, \tag{99}$$

对于 $Ga_{0.47}In_{0.53}As$，我们得到 $m_0 = 0.41\, m_e$，其中 m_e 为电子质量，且 $\alpha_* \simeq 1.35$ eV^{-1} [37]，因此对于$\tau_M \sim 3$ 飞秒，我们得到 $E_M \sim 500$ kV/cm，这比商用单周期红外光源的峰值振幅 ~ 100MV/cm 低几个数量级 [38]。

因此，本文提出的漂移调制方法仅使用商用现有光源，就能在成熟且广泛应用的半导体材料平台中诱导出无损耗的双曲时间晶体。

VIII. 结论

总之，我们提出了载流子漂移调制这一创新机制，可用于构建时间边界并促成光子时间晶体的形成。该方法为双曲时间超材料和双曲时间晶体铺平了道路，并在时域光子学中确立了一个新范式。重要的是，我们表明，形成双曲时间晶体的过程本身也能同时补偿支撑介质中的材料本征损耗。值得注意的是，利用现有材料和易于获得的光源即可实现这种无损双曲时间晶体，这凸显了该概念的实用性及其变革潜力。

IX. 致谢

B.S. 感谢 Ohad Segal 提供有益的讨论。

附录 A：波动方程

代入方程 (18) 给出的线性响应分布函数 g，我们得到相应的电流密度

$$\mathbf{j} = \frac{n_0 e^2}{\tau_0}\int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt''\, \exp\left(-\frac{t-t''}{\tau_0}\right) \times \frac{1}{\mathbf{m}\left[\mathbf{p}_M(\mathbf{r},t) - \mathbf{p}_M(\mathbf{r},t'')\right]} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t'), \tag{A1}$$

其中，调制有效质量张量

$$\frac{1}{m_{\alpha\beta}[\mathbf{q}]} = \left\langle \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \right\rangle_{\mathbf{p}} \tag{A2}$$

相空间平均定义为

$$\left\langle F[\mathbf{p}+\mathbf{q}] \right\rangle_{\mathbf{p}} \equiv \frac{\int d\mathbf{p}\, F(\mathbf{p}+\mathbf{q})\, f_0(\mathbf{p})}{\int d\mathbf{p}\, f_0(\mathbf{p})}. \tag{A3}$$

注意，对于抛物线能带

$$\left\langle \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \right\rangle_{\mathbf{p}} = \left\langle \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mathbf{p}}}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \right\rangle_{\mathbf{p}} \equiv \frac{\delta_{\alpha\beta}}{m_*} \tag{A4}$$

由平均有效质量 m_* 定义，因此电流密度 (A1) 不依赖于泵浦，调制也不会影响自由载流子对探测场的响应。

引入调制核

$$\mathbf{M}(t,t') \equiv \omega_p^2 \int_{-\infty}^{t'} \frac{dt''}{\tau_0}\, \exp\left(\frac{t''}{\tau_0}\right) \times \left(1 - \frac{m_*}{\mathbf{m}\left[\mathbf{p}_M(t) - \mathbf{p}_M(t'')\right]}\right), \tag{A5}$$

其中等离子体频率

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m_* \epsilon_\infty}, \tag{A6}$$

且 ϵ_∞ 是来自晶格的“背景”介电常数，我们得到

$$\mathbf{j} = \frac{\epsilon_\infty\, \omega_p^2}{4\pi}\int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{-\frac{t-t'}{\tau_0}}\, \mathbf{E}(\mathbf{r},t') - \frac{\epsilon_\infty}{4\pi}\, e^{-\frac{t}{\tau_0}} \int_{-\infty}^{t} dt'\, \mathbf{M}(t,t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t'), \tag{A7}$$

注意，在可以忽略电子弛豫的时间尺度下，调制核可简化为

$$\mathbf{M}(t,t') = \omega_p^2 \left(1 - \frac{m_*}{\mathbf{m}\left[\mathbf{p}_M(t)\right]}\right) \tag{A8}$$

在非磁性介质中，探测电场 $\mathbf{E}(\mathbf{r}\ t)$ 的演化由波动方程定义

$$\epsilon_\infty \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + c^2\, \mathrm{curl}\, \mathrm{curl}\, \mathbf{E} + 4\pi \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = 0. \tag{A9}$$

根据方程（A7），

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\tau_0}\right)\mathbf{j}\left(\mathbf{r},t\right)=\frac{\epsilon_\infty\,\omega_p^2}{4\pi}\,\mathbf{E}\left(\mathbf{r},t\right)-\frac{\epsilon_\infty}{4\pi}\,e^{-\frac{t}{\tau_0}} \times\left[\mathbf{M}\left(t,t\right)\,\mathbf{E}\left(\mathbf{r},t\right)+\int_{-\infty}^{t}dt'\,\frac{\partial\mathbf{M}\left(t,t'\right)}{\partial t}\cdot\mathbf{E}\left(\mathbf{r},t'\right)\right], \quad \text{(A10)}$$

因此我们可以将（A9）表示为波动方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\tau_0}\right)\left(\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}+\frac{c^2}{\epsilon_\infty}\,\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{E}\right)+\omega_p^2\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{M}_0\cdot\mathbf{E}+e^{-\frac{t}{\tau_0}}\int_{-\infty}^{t}dt'\,\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t}\cdot\mathbf{E}\left(t'\right)\right], \quad \text{(A11)}$$

其中

$$\mathbf{M}_0\left(t\right)\equiv\mathbf{M}\left(t,t\right)\,e^{-\frac{t}{\tau_0}}. \quad \text{(A12)}$$

附录 B：时间界面处的边界条件

作为完整麦克斯韦方程组的直接结果，原始波动方程（A9）意味着电场 **E**(*t*) 以及场的连续性

$$\mathbf{G}\;\equiv\;\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}-\frac{4\pi}{\epsilon_\infty}\mathbf{j}. \quad \text{(B1)}$$

将（A7）代入（B1），可得

$$\mathbf{G}\;=\;\mathbf{F}+\omega_p^2\int_{-\infty}^{t}dt'\,e^{-\frac{t-t'}{\tau_0}}\,\mathbf{E}\left(t'\right), \quad \text{(B2)}$$

其中辅助场

$$\mathbf{F}\;\equiv\;\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}-e^{-\frac{t}{\tau_0}}\int_{-\infty}^{t}dt'\,\mathbf{M}\left(t,t'\right)\cdot\mathbf{E}\left(\mathbf{r},t'\right). \quad \text{(B3)}$$

因此，结合已确立的电场 **E** 连续性，方程 (B3) 意味着辅助“时间位移场”**F**连续。

于是，波动方程 (22) 可表示为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t}+\frac{\mathbf{F}}{\tau_0}\right]\;+\;\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{c^2}{\epsilon_\infty}\,\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{E}+\omega_p^2\,\mathbf{E}\right] +\;\frac{1}{\tau_0}\,\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{E}=0, \quad \text{(B4)}$$

这意味着导数 $\partial\mathbf{F}/\partial t$ 连续。

因此，时间界面处的三条完整边界条件对应于电场 **E**、时间位移场**F**以及时间位移场的一阶（时间）导数$\partial\mathbf{F}/\partial t$的连续性。

附录 C：无损极限下的波动方程

在近似无损极限 $\omega\tau_0\gg1$下，我们可以忽略动力学方程 (4) 和 (18) 中的散射项，从而得到

$$f_M\left(\mathbf{p},t\right)\;=\;f_0\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}_D\left(t\right)\right), \quad \text{(C1)}$$

and

$$g\;=\;\frac{\partial f_0\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}_M\left(t\right)\right)}{\partial\mathbf{p}}\int_{-\infty}^{t}dt'\,e\mathbf{E}\left(t\right), \quad \text{(C2)}$$

因此，信号场 **E** 产生的电流密度为

$$\mathbf{j}\left(\mathbf{r},t\right)\;=\;\frac{\epsilon_\infty}{4\pi}\,\omega_p^2\,\frac{m_*}{\mathbf{m}_M}\int_{-\infty}^{t}dt'\,e\mathbf{E}\left(\mathbf{r},t'\right), \quad \text{(C3)}$$

其中，随时间变化的有效质量定义为

$$\left[\frac{m_*}{\mathbf{m}_M\left(t\right)}\right]_{\alpha\beta}\;=\;\frac{\left\langle\frac{\partial^2\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{p}_M(t)}}{\partial p_\alpha\partial p_\beta}\right\rangle_{\mathbf{p}}}{\left\langle\frac{\partial^2\varepsilon_{\mathbf{p}}}{\partial p^2}\right\rangle_{\mathbf{p}}}. \quad \text{(C4)}$$

将 (C3) 代入 (A9)，即可得到波动方程 (33)。

附录 D：电子能带非抛物性

光电子材料中的非抛物性能带 [26]可通过著名的 Kane 模型 [30]得到准确描述。该模型源于微扰方法，用于求解包含自旋轨道相互作用的晶体势中单电子的薛定谔方程：

$$\varepsilon_{\mathbf{p}}\left(1+\alpha_*\varepsilon_{\mathbf{p}}\right)\;=\;\frac{p^2}{2m_0}, \quad \text{(D1)}$$

其中，参数 α （与温度有关）的量级为带隙能量 $\alpha_*\sim E_g^{-1}$的倒数（在某些情况下，例如铋及其合金中，该参数等于带隙能量的倒数）。尽管 Kane 模型 (D1) 对立方对称性的直接带隙 III–V 族半导体及其合金具有很高的准确性，但也可用于许多其他材料的定量分析 [39–42]。

利用 Kane 对 $\varepsilon_{\mathbf{p}}$的表达式，可得

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial p_\alpha\partial p_\beta}\;=\;\frac{1}{m_0}\left[\frac{\delta_{\alpha\beta}}{1+2\alpha_*\varepsilon_{\mathbf{p}}}-\frac{2\,\alpha_*p_\alpha p_\beta}{m_0\left(1+2\alpha_*\varepsilon_{\mathbf{p}}\right)^3}\right]. \quad \text{(D2)}$$

因此，对于介电常数中的诱导各向异性(41)，我们得到

$$\frac{\Omega_\parallel^2-\Omega_\perp^2}{\omega_p^2}\;=\;2\,\frac{\alpha_*}{m_0}\sum_{t_n<t}e^{-\frac{t-t_n}{\tau_0}}\,\Delta p_n^2\left(1-\Delta_n\right), \quad \text{(D3)}$$

其中

$$\Delta_n = \frac{e^2}{2\pi^2\hbar^3\epsilon_\infty\omega_p^2}\int d\mathbf{p}\,\frac{f_0(\mathbf{p}-\mathbf{\Delta p}_n)-f_0(\mathbf{p})}{\Delta p_n^2} \times \left(p^2-\frac{3\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{\Delta p}_n\right)^2}{\Delta p_n^2}\right)\left(1-\frac{1}{\left(1+2\alpha_*\varepsilon_{\mathbf{p}}\right)^3}\right) \quad \text{(D4)}$$

$$= \mathcal{O}(\alpha_*\varepsilon_F) = \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon_F}{E_g}\right), \quad \text{(D5)}$$

下标分别对应于与调制材料的泵浦场 $\mathbf{E}_M$ 平行（$\|$）和垂直（$\perp$）的方向。

在载流子漂移调制较弱的极限下，$\Delta p_n < p_F$，我们得到

$$\Omega_\|^{\,2} \simeq 3\frac{\alpha_*\omega_p^2}{m_0}\sum_{t_n<t}\Delta p_n^2\, e^{-\frac{t-t_n}{\tau_0}}, \quad \text{(D6)}$$

$$\Omega_\perp^{\,2} \simeq \frac{\alpha_*\omega_p^2}{m_0}\sum_{t_n<t}\Delta p_n^2\, e^{-\frac{t-t_n}{\tau_0}}. \quad \text{(D7)}$$

附录E：时间反射与时间透射系数——一般处理

在时间界面 $t = 0$附近（即对于 $t \ll \tau_0$），当存在一个单色入射波（47）时，辅助场$\mathbf{F}$ 及其导数为

$$\mathbf{F} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - \Omega_\perp^2\theta(t)\int_{-\infty}^{0} dt'\, e^{t'/\tau_0}\,\mathbf{E}(t') = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - \frac{\Omega_\perp^2\tau_0}{1-i\omega\tau_0}\theta(t)\,\mathbf{E}, \quad \text{(E1)}$$

$$\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t} = \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \Omega_\perp^2\theta(t)\left(\mathbf{E}-\int_{-\infty}^{0}\frac{dt'}{\tau_0}\,e^{t'/\tau_0}\,\mathbf{E}(t')\right) = \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{\Omega_\perp^2}{1+\frac{i}{\omega\tau_0}}\theta(t)\,\mathbf{E}. \quad \text{(E2)}$$

利用时间界面 $t = 0$ 处场 $\mathbf{E}$、$\mathbf{F}$ 和 $\partial\mathbf{F}/\partial t$ 的连续性（见第 III 节中的方程 (30)），由方程 (47)、(E1)、(E2) 和 (62) 可得

$$\mathcal{T}+\mathcal{R}+\mathcal{S} = 1, \quad \text{(E3)}$$

$$\left(\omega'-\frac{i\gamma}{\tau_0}\right)\mathcal{T} + \left(-\omega'-\frac{i\gamma}{\tau_0}\right)\mathcal{R} - i\frac{1-2\gamma}{\tau_0}\mathcal{S} = \omega\left(1-\frac{\Omega_\perp^2}{\omega\left(\omega+i/\tau_0\right)}\right), \quad \text{(E4)}$$

$$\left(\omega'-\frac{i\gamma}{\tau_0}\right)^2\mathcal{T} + \left(\omega'+\frac{i\gamma}{\tau_0}\right)^2\mathcal{R} - \frac{(1-2\gamma)^2}{\tau_0^2}\mathcal{S} = \omega^2\left(1-\frac{\Omega_\perp^2}{\omega\left(\omega+i/\tau_0\right)}\right) \quad \text{(E5)}$$

或等价地

$$\mathcal{W}_3\left[\omega'-\frac{i\gamma}{\tau_0}, -\omega'-\frac{i\gamma}{\tau_0}, -i\frac{(1-2\gamma)}{\tau_0}\right]\begin{pmatrix}\mathcal{T}\\ \mathcal{R}\\ \mathcal{S}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \eta_\omega\,\omega\\ \eta_\omega\,\omega^2\end{pmatrix}, \quad \text{(E6)}$$

其中

$$\eta_\omega \equiv 1-\frac{\Omega_\perp^2}{\omega\left(\omega+i/\tau_0\right)}, \quad \text{(E7)}$$

且 $\mathcal{W}_3$ 是三阶范德蒙德矩阵 [43]

$$\mathcal{W}_3(x_0,x_1,x_2) \equiv \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ x_0 & x_1 & x_2\\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2\end{bmatrix} \quad \text{(E8)}$$

其行列式为

$$\det\mathcal{W}_3 = (x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_1-x_2), \quad \text{(E9)}$$

其逆矩阵为

$$\mathcal{W}_3^{-1} = \frac{1}{\det\mathcal{W}_3} \times \begin{bmatrix}x_1x_2\left(x_2-x_1\right) & x_1^2-x_2^2 & x_2-x_1\\ x_0x_2\left(x_0-x_2\right) & x_2^2-x_0^2 & x_0-x_2\\ x_0x_1\left(x_1-x_0\right) & x_0^2-x_1^2 & x_1-x_0\end{bmatrix} \quad \text{(E10)}$$

因此我们得到

$$\mathcal{R} = \frac{\eta_\omega\omega(\omega-\omega'+i\frac{1-\gamma}{\tau_0})-i\frac{1-2\gamma}{\tau_0}(\omega'-i\frac{\gamma}{\tau_0})}{2\,\omega'\left(\omega'-i\frac{1-3\gamma}{\tau_0}\right)}, \quad \text{(E11)}$$

$$\mathcal{T} = \frac{\eta_\omega\omega(\omega+\omega'+i\frac{1-\gamma}{\tau_0})+i\frac{1-2\gamma}{\tau_0}(\omega'+i\frac{\gamma}{\tau_0})}{2\,\omega'\left(\omega'+i\frac{1-3\gamma}{\tau_0}\right)}, \quad \text{(E12)}$$

$$\mathcal{S} = \frac{\omega'^2-\eta_\omega\omega\left(\omega+2i\gamma/\tau_0\right)+\gamma^2/\tau_0^2}{\omega'^2+\left(1-3\gamma\right)^2/\tau_0^2}, \quad \text{(E13)}$$

附录 F：时间反射与时间透射系数——无损极限

在无损极限 $\omega\tau_0 \gg 1$ 下，波动方程 (33) 是时间二阶的，因此时间倏逝场与传播波解耦，并且不会在时间界面处被激发。当调制脉冲施加于 $t = 0$时，对于电场，我们因此得到

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\begin{cases}e^{-i\omega t}, & t<0\\ \mathcal{T}e^{-i\omega' t}+\mathcal{R}e^{i\omega' t}, & t>0.\end{cases} \quad \text{(F1)}$$

其中（另见公式（15）、（16））

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2+\frac{k^2c^2}{\epsilon_\infty}}, \quad \text{(F2)}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{m_*}{m_M}\,\omega_p^2+\frac{k^2c^2}{\epsilon_\infty}}. \quad \text{(F3)}$$

并且，在图1的坐标系中，

$$m_M \;=\; [\mathbf{m}_M\,(t>0)]_{zz} \equiv \left\langle \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{p}_M}}{\partial p_z^2} \right\rangle_{\mathbf{p}}^{-1}. \quad \text{(F4)}$$

Then

$$\int_{-\infty}^{0} dt'\,\mathbf{E}\,(t') \;=\; -\,\frac{\mathbf{E}_0\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{i\omega}, \quad \text{(F5)}$$

以及时间界面处的时间位移 $t=0$

$$\mathbf{F} \;=\; \mathbf{E}_0\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \begin{cases} -i\,\omega\,\left[1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right], & t=-0, \\ -i\,\omega'\,\left[\mathcal{T}-\mathcal{R}-\frac{m_*}{m_M}\,\frac{\omega_p^2}{\omega'^2}\right], & t=+0. \end{cases} \quad \text{(F6)}$$

利用电场 $\mathbf{E}$ 和时间位移 $\mathbf{F}$ 在 $t=0$ 处的连续性，我们得到

$$\mathcal{T} \;=\; \frac{1}{2}+\frac{\omega^2-\omega_p^2\left(1-\frac{m_*}{m_M}\right)}{2\omega\omega'}, \quad \text{(F7)}$$

$$\mathcal{R} \;=\; \frac{1}{2}-\frac{\omega^2-\omega_p^2\left(1-\frac{m_*}{m_M}\right)}{2\omega\omega'}. \quad \text{(F8)}$$

由方程（F2）、（F3）

$$\omega'^2 \;=\; \omega^2-\omega_p^2\left(1-\frac{m_*}{m_M}\right), \quad \text{(F9)}$$

这将方程（F7）、（F8）化简为

$$\mathcal{T} \;=\; \frac{\omega+\omega'}{2\omega}, \quad \text{(F10)}$$

$$\mathcal{R} \;=\; \frac{\omega-\omega'}{2\omega}. \quad \text{(F11)}$$

附录 G：准静态极限下的波动方程

根据高斯定律

$$\epsilon_\infty\,\mathrm{div}\mathbf{E} \;=\; 4\pi\rho \quad \text{(G1)}$$

以及自由电荷守恒

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\mathbf{j} \;=\; 0, \quad \text{(G2)}$$

我们得到

$$\epsilon_\infty\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\phi \;=\; 4\pi\,\nabla\cdot\mathbf{j}. \quad \text{(G3)}$$

引入标量势的傅里叶表示

$$\phi\,(\mathbf{r},t) \;=\; \int \phi_{\mathbf{k}}\,(t)\;e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \text{(G4)}$$

并将方程（A7）代入（G3），得到

$$e^{\frac{t}{\tau_0}}\;\frac{d\phi_{\mathbf{k}}}{dt} \;+\; \omega_p^2\int_{-\infty}^{t} dt'\,\phi_{\mathbf{k}}\,(t')\,e^{\frac{t'}{\tau_0}} = \int_{-\infty}^{t} dt'\,\mathcal{M}_{\mathbf{k}}\,(t,t')\;\phi_{\mathbf{k}}\,(t'), \quad \text{(G5)}$$

其中，（标量）调制核 $\mathcal{M}_{\mathbf{k}}(t)$ 定义为

$$\mathcal{M}_{\mathbf{k}}\,(t,t') \;=\; \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{M}\,(t,t')\cdot\mathbf{k}}{k^2}. \quad \text{(G6)}$$

因此，对于准静态极限下的波动方程，我们得到

$$\frac{d^2\phi_{\mathbf{k}}}{dt^2} \;+\; \frac{1}{\tau_0}\frac{d\phi_{\mathbf{k}}}{dt}+\left(\omega_p^2-\mathcal{M}_{\mathbf{k}}^{(o)}\,(t)\right)\phi_{\mathbf{k}} = e^{-\frac{t}{\tau_0}}\int_{-\infty}^{t} dt'\,\frac{\partial\mathcal{M}_{\mathbf{k}}}{\partial t}\,\phi_{\mathbf{k}}\,(t'), \quad \text{(G7)}$$

其中

$$\mathcal{M}_{\mathbf{k}}^{(0)}\,(t) \;\equiv\; e^{-\frac{t}{\tau_0}}\,\mathcal{M}_{\mathbf{k}}\,(t,t). \quad \text{(G8)}$$

[1] E. Goulielmakis、M. Schultze、M. Hofstetter、V. S. Yakovlev、J. Gagnon、M. Uiberacker、A. L. Aquila、E. M. Gullikson、D. T. Attwood、R. Kienberger、F. Krausz 和 U. Kleineberg，单周期非线性光学，《科学》**320** (5883), 1614 - 1617 (2008)。[2] R. Morgenthaler，电磁波的速度调制。IRE 微波理论与技术汇刊 **6**，167 - 172 (1958)。[3] J. T. Mendonc¸a 和 P. K. Shukla，时间折射与时间反射：两个基本概念，《物理学文摘》**65**，160 (2002)。

[4]F. Biancalana、A. Amann、A. V. Uskov 和 E. P. O' Reilly，《时空介电结构中的光传播动力学》，《物理评论 E》**75** (4), 046607 (2007). [5] J. R. Zurita-S´anchez、P. Halevi 和 J. C. Cervantes-Gonz´alez，《时间周期介电函数为 $\epsilon(t)$ 的平板上入射波的反射与透射》，《物理评论 A》**79** (5), 053821 (2009). [6] J. R. Zurita-S´anchez、J. H. Abundis-Pati˜no 和 P. Halevi，《时间周期介电函数为 $\epsilon(t)$ 的平板中的脉冲传播》，《光学快报》**20**, 5586 -

5600 (2012)。[7] A. M. Shaltout、J. Fang、A. V Kildishev 和 V. M. Shalaev，光子时间晶体与动量带隙，载于激光与光电子会议（Optica Publishing Group），FM1D.4 (2016)。[8] E. Lustig、Y. Sharabi 和 M. Segev，光子时间晶体的拓扑方面，Optica**5**(11)，1390 - 1395 (2018)。[9] E. Lustig、O. Segal、S. Saha、C. Fruhling、V. M. Shalaev、A. Boltasseva 和 M. Segev，《光子时间晶体：基本概念》，《光学快报》**31**，9165 - 9170 (2023)。[10] S. Saha、O. Segal、C. Fruhling、E. Lustig、M. Segev、A. Boltasseva 和 V. M. Shalaev，《光子时间晶体：材料视角》，《光学快报》**31**，8267 - 8273 (2023)。[11] H. Li、S. Yin、H. He、J. Xu、A. Al`u 和 B. Shapiro，各向异性光子时间晶体中的静止电荷辐射，《物理评论快报》**130**，093803 (2023)。[12] J. Feinberg、D. E. Fernandes、B. Shapiro 和 M. G. Sil-veirinha，等离激元时间晶体，《物理评论快报》**134**，183801 (2025)。[13] Khurgin，J. B. 改变折射率的能量与功率需求。《激光与光子学评论》**18 (4)**，2300836 (2024)。[14] N. I. Zheludev，非线性光学中的偏振不稳定性与多稳态。《苏联物理学进展》**32**，357 (1989)。[15] H. N. S. Krishnamoorthy *et al.*，超材料中的拓扑转变。《科学》**336**，205 - 209 (2012)。[16] V. A. Podolskiy 和 E. E. Narimanov，作为非磁性左手系统的强各向异性波导。《物理评论B辑》71，201101(R) (2005)。[17] S. D. Gorelov、A. L. Novokovskaya、S. B. Bodrov、M. V. Sarafanova、M. I. Bakunov，通过超快光学门控太赫兹脉冲产生的单极场。《应用物理快报》**126(1)**，011104 (2025)。[18] J. M. Ziman, *Electrons and Phonons: The Theory of Transport Phenomena in Solids*，（牛津大学出版社，再版，2001）。[19] L. I. Pitaevskii 和 E. M. Lifshitz *Physical Kinetics*，（Butterworth-Heinemann，第1版；1981）。[20] E. Lustig、O. Segal、S. Saha、E. Bordo、S. N. Chowdhury、Y. Sharabi、A. Fleischer、A. Boltasseva、O. Cohen、V. M. Shalaev 和 M. Segev，采用单周期调制的时间折射光学，《纳米光子学》**12 (12)**，2221 - 2230 (2023)。[21] Jaffray、W.；Saha、S.；Shalaev、V. M.；Boltasseva、A. 和 Ferrera、M. 透明导电氧化物：从全介质等离激元学到集成光子学的新范式。《光学与光子学进展》**14 (2)**，148 - 208 **2022**。[22] Kim、T. S.；Choi、C. H.；Jeong、T. S. 和 Shim、K. H. 衬底温度和 O_2 流量对射频磁控溅射氧化铟锡薄膜性质的影响。《韩国物理学会志》，**51 (2)**，534 - 538 (2007)。[23] Hoffman、A. J.；Alekseyev、L.；Howard、S. S.；Franz、K. J.；Wasserman、D. M.；Podolskiy、V. A.；Narimanov、E. E.；Sivco、D. L.；Gmachl、C. 半导体超材料中的负折射。*Nature Materials 6*，946 - 950 (2007)。[24] J. E. Medvedeva，《磁性介导的透明导体：掺钼的 In $_2$ $_3$ *Phys. Rev.* O》。，*Lett. 97* 086401 2006 ( ).[25] X. Liu 、 J.-H. Park 、 J.-H. Kang 、 H. Yuan 、 Y. Cui、H. Y. Hwang 和 M. L. Brongersma，《氧化铟锡导带非抛物性及其对等离激元特性的影响的量化》，《应用物理快报》105，181117（2014）。[26] M. Balkaitski 和 E. Amzallag，《由法拉第旋转测量确定能带参数》。《固态物理学报》30，407（1968）。[27] M. Cardona，《物理评论》121，752（1961）。[28] H. Piller，（京都半导体会议），《日本物理学会杂志》21，增刊，206（1966）。[29] S. G. Shulman 和 Yu. I. Ukhanov，《苏联物理学—固态》7，768（1965）。[30] E. O. Kane，《锑化铟的能带结构》。《物理与化学固体杂志》1，249–261（1957）。[31] S. Ramo、J. R. Whinnery、T. Van Duzer， *Fields and Waves in Communication Electronics*，（Wiley，第3版，1994）。[32] 例如，对于用于近红外至中红外（IR）波段的重掺杂半导体，如砷化镓 [23] ，$c\tau_0$ ∼100 μm；而对于透明导电氧化物（波长范围为可见光至近红外），如氧化铟锡 [24]，$c\tau_0$ k 10 μ $c\tau_0$ m。两种情况下，该长度都比相应的 $1/k \sim \lambda_0$值（其中 λ_0 为自由空间信号波长）大一个数量级以上。[33] E. E. Narimanov，《光子超晶体》。《物理评论X》4，041014（2014）。[34] J.W. Strutt（瑞利勋爵），《论双频力维持振动以及波在具有周期结构的介质中的传播》。《哲学杂志》（第5辑）24（147），145–159（1887）。[35] T.G. Roer， *Microwave Electronic Devices*，（Springer科学与商业媒体，2012）。[36] L. D. Landau 和 E. M. Lifshitz， *Electrodynamics of Continuous Media* 2 1984 ，（佩加蒙出版社，第nd版，）。[37] F. Capasso、K. Mohammed、A. Y. Cho、R. Hull、A. L. Hutchinson，《有效质量滤波：半导体超晶格中的光电流巨量子放大》。《应用物理快报》47，420–422（1985）。[38] N. Lenke、P. Steinleitner、M. Kowalczyk、Philipp Rosenberger、S. Gr¨obmeyer、A. Sebesta、V. Pervak、N. Karpowicz、F. Krausz 和 A. Weigel，《单周期 CEP 稳定 Cr:ZnS 激光器》。《EPJ会议网络》307，04036（2024）。[39] W. Zawadzki，《小带隙半导体中的电子输运现象》。《先进物理学》23，435–522（1973）。[40] N. W. Ashcroft 和 N. D. Mermin，《固体物理学》（费城：桑德斯学院出版社，1976）。[41] M. A. Green，《硅的本征浓度、有效态密度和有效质量》。《应用物理学杂志》67，2944 2954 1990-（）。[42] R. A. Masut，《突出半导体中的非抛物线能带》。《欧洲物理学杂志》43，015501（2022）。[43] N. Macon、A. Spitzbart，《范德蒙矩阵的逆矩阵》。《美国数学月刊》65（2），95–100（1958）。