寻找局部最优解的参数化复杂性框架

Robert Ganian 维也纳工业大学（奥地利）算法与复杂性组

HungP.Hoang 维也纳工业大学（奥地利）算法与复杂性组

ChristianKomusiewicz 耶拿弗里德里希·席勒大学（德国）计算机科学研究所

Nils Morawietz 法国波尔多大学 LaBRI，耶拿弗里德里希·席勒大学（德国）计算机科学研究所

arXiv:2601.00560v1 [cs.CC] 2 Jan 2026

摘要

局部搜索是一种基础的优化技术，在实践中应用广泛，在理论上也得到了深入研究，但其计算复杂性仍未得到充分理解。Johnson、Papadimitriou 和 Yannakakis 于 1988年提出的传统框架——多项式局部搜索（PLS）和标准算法问题——未能捕捉局部搜索算法的方法论：PLS 关注的是寻找一个局部最优解，而非使用局部搜索；标准算法问题则要求每一步改进都遵循固定的枢轴规则。在这项工作中，我们提出了一种新的局部搜索表述，为这两种模型提供了折中方案。具体而言，任务不仅是输出一个局部最优解，还要输出一条通向该解的局部改进链。借助这一框架，我们旨在捕捉设计良好枢轴规则所面临的挑战。尤其是，当该框架与参数化复杂度范式相结合时，既能得出强有力的下界，也能获得有意义的可处理性结果。不同于以往将参数化复杂性与局部搜索相结合的工作，我们的框架针对的是寻找局部最优解这一完整任务，而不只是单次改进步骤。我们聚焦于两个有代表性的元问题——采用 c-交换邻域的子集权重优化问题，以及采用翻转邻域的加权电路——建立了关于不同权重数量的固定参数可处理性结果，同时通过一种新型归约，排除了以到最近最优解的距离为参数时存在类似结果的可能性。

2012年ACM学科分类 计算理论

关键词与短语 局部搜索、参数化复杂性、多项式局部搜索

资助 *Robert Ganian*：奥地利科学基金会（FWF），项目10.55776/Y1329；维也纳科学与技术基金（WWTF），项目10.47379/ICT22029*Hung P. Hoang*：奥地利科学基金会（FWF），项目10.55776/Y1329和ESP1136425*Nils Morawietz*：法国国家研究署，项目ANR-22-CE48-0001（TEMPOGRAL）。

1 引言

局部搜索是优化问题算法设计中最常用的范式之一。局部搜索算法的基本思想既自然又简单：从问题的一个初始解 S 出发，执行一系列局部改进步骤，直到达到局部最优解，也就是说，达到一个无法通过任何局部变化改进的解。局部改进步骤的定义通常涉及一些简单操作，例如交换解中的若干个元素，或移动固定数量的元素。这些步骤几乎总有多种应用方式，因此通常用局部邻域 来涵盖解 S 经过

一轮允许的操作后可以得到的所有可能解。若解 S 的局部邻域中不存在更优解，则称其为局部最优解；局部搜索算法的任务通常是通过一系列局部改进步骤找到这样的局部最优解。

尽管局部搜索范式在实践中通常表现非常出色，但目前已有的计算复杂性理论工具无法排除这样一种可能性：对于许多具有重要意义的问题，寻找局部最优解是可处理的 [1, 24]。局部搜索理论中的核心复杂性类是 PLS [16]（即“多项式局部搜索”）。属于 PLS 基本上意味着，可以在多项式时间内搜索给定解的局部邻域[1]。虽然属于 PLS 是实现高效局部搜索的自然前提，但这并不能保证能够在多项式时间内找到局部最优解——恰恰相反，目前人们普遍认为，PLS 完全问题不具有任何多项式时间局部搜索算法 [24]。从这个意义上说，为局部搜索问题证明 PLS 困难性，可以视为为判定问题证明 NP 困难性的对应做法。

鉴于局部搜索算法的表现与其属于 PLS 之间存在上述差异，研究人员提出了局部搜索的第二种经典形式化定义：标准算法问题 [16]。在该问题中，不仅要固定局部邻域的概念，还要固定具体的枢轴规则，即在局部改进步骤中用于计算下一个解的具体过程。于是，基本任务便是：从给定的初始解出发，穷举应用所选枢轴规则后，确定最终得到的局部最优解 S。标准算法问题为对局部搜索作出计算复杂性理论结论提供了一种有用方式——已知有若干标准算法问题是 PSPACE 完全的 [29, 27, 30, 3, 21]——但它存在一个缺点：每个此类结论都只适用于枢轴规则与局部搜索问题的一种组合。Schäffer 和 Yannakakis 的开创性工作 [29,第 62 页，第 1 段]已经指出了这一缺点：虽然针对标准算法问题所建立的形式化下界仅适用于特定的枢轴规则（例如，移动到局部邻域中第一个发现的改进位置），但更理想的做法是排除使用任何 枢轴规则进行高效局部搜索的可能性，而这也正是从现有大多数下界构造中可以推断出的结论 [16, 27, 30, 3, 21]。

关键的是，无论采用多项式局部搜索还是标准算法的表述，大多数局部搜索问题在计算上仍然难以处理。本文提出了一种全新的视角，使我们不仅能够证明更强的**下界**，还能够证明局部搜索问题的**可处理性**。为此，我们建立了一套参数化局部搜索理论，其灵感源自久经验证的参数化复杂性范式，并与之密切相关 [5, 4]。我们的工作与以往研究局部搜索参数化复杂性 [22, 31, 20, 14, 12, 17, 13] 的研究不同之处在于，我们的结果适用于整个局部搜索任务，而不只是单个改进步骤（相关工作的讨论见本节末尾）。事实上，我们的框架适用于多种常见情形，在这些情形下，计算单个改进步骤可在多项式时间内完成。此外，作为我们方法的副产品，我们还得到了一种介于多项式局部搜索与标准算法之间的局部搜索问题表述：在这种表述下，负面结果能够排除所有枢轴规则下的可处理性（而后者做不到），正面结果则能保证高效的局部搜索（而前者做不到）。

[1] 形式化定义见第 2 节。

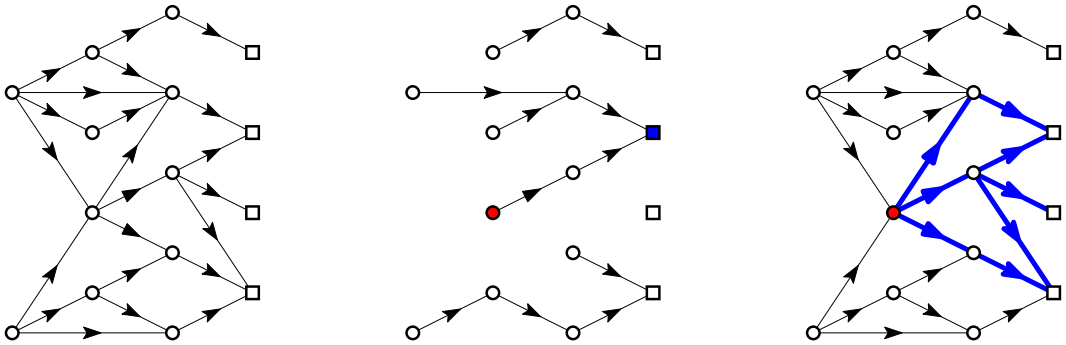


图 1 三种模型的比较。图中展示的是转移图，其中解是顶点，局部改进是边。**左：** PLS 表述要求找到一个局部最优解（即转移图中的任意一个方形），而无须遵循一系列改进步骤。**中：** 在标准算法问题中，给定特定的枢轴规则（即每个解至多有一条出边）和一个初始解（以红色圆圈表示）。任务是找到从初始解可达的唯一局部最优解（蓝色方形）。**右：** 在我们的枢轴化表述中，给定一个初始解（红色圆圈），我们要输出一条从该解到某个局部最优解的改进序列（即蓝色子图中的任意一条极大路径）。

贡献。 我们针对局部搜索场景中出现的两类问题，构建了我们的框架：

1. 子集权重优化问题/c-交换 [18], 其底层优化问题推广了许多图问题的加权变体，例如最大独立集、最大割、最小支配集、最大顶点覆盖等。这里，解是满足某种任意可验证性质的顶点子集或边子集，局部邻域则定义为交换至多 c 个顶点或边，其中 c是某个固定常数。
2. 加权电路/翻转，它是经典的最大电路/翻转 和最小电路/翻转问题 [16, 1] 向任意权重的联合推广。这里，输入是一个电路以及定义在输出门上的权重函数；解是输入位向量，局部邻域则通过翻转输入中的一个比特（即将其取反）来定义。

对于上述所有问题，我们主要关注以下局部搜索任务：给定一个初始解 S，输出从 S 到局部最优解的一系列改进步骤。我们指出，这种枢轴选择表述取两种折中，避免了此前研究的两种局部搜索表述各自的缺点（示意见图 1）：

- 在 PLS 表述中，假想的算法可以用任意方式找到局部最优解（不要求执行改进步骤，甚至可能得到比给定起始解更差的解）；而在标准算法表述中，则必须使用固定的枢轴规则，并且所有得到的计算复杂性理论结论都只适用于该特定规则。

作为先前已确立的下界的直接推论， [29, 26, 23], 上述问题在枢轴化表述下不可能存在多项式时间算法。此外，这类结果是无条件的：确实存在一些带有初始解的实例，S 其最短局部改进步骤序列长度为指数级（即所谓的全指数 性质 [29]），因此局部搜索算法无法在多项式

时间内终止。然而，这并不排除其在参数化意义上的可处理性——在这种情况下，通常关注所谓的固定参数可处理性，也就是说，存在一种算法，其运行时间为 $f(k)\cdot n^{\mathcal{O}(1)}$，其中输入规模为 n，而 f 是关于某个（可能有承诺的）参数 k 的可计算函数。

在阐述了上述概念性贡献之后，我们接下来介绍技术贡献：对局部搜索问题进行参数化分析。下面总结我们的两项主要发现。

▶**主要发现 1**。 子集权重优化问题/c-交换和加权电路/翻转在以不同权重的数量为参数时是固定参数可解的。

▶**主要发现 2**。 除非 固定参数可处理 $=\mathsf{W}[1],$，否则当以到最近局部最优解的距离（以改进步骤数衡量）为参数时，子集权重优化问题/c- 交换和加权电路/翻转都不存在固定参数局部搜索算法。

主要发现 1 适用于所有考察的局部搜索表述（即多项式局部搜索、枢轴选择、标准算法），其依据主要是定理 6.5–6.9。尽管这些证明在技术上并不困难，并且依赖于 Frank 和 Tardos 的权重缩减技术 [11]„ 但这一发现表明，参数化复杂性能够为局部搜索提供有意义的可处理性结果。具体而言，它在许多无权问题的局部搜索具有多项式运行时间这一点，与相应加权变体的困难性结果之间架起了一座桥梁。

主要发现 2 仅适用于新提出的局部搜索枢轴化表述。事实上，一方面，在标准算法表述中，这一说法是空洞的（如果算法无法选择要执行哪一步改进，那么到局部最优解的距离就无关紧要）。另一方面，PLS 困难性与复杂性理论决策类发生坍缩之间是否存在直接联系，是该领域长期悬而未决的问题；尽管我们确实在建立这种联系方面取得了进展，但要彻底解决这一问题，超出了我们目前的认知范围（另见第 7 节的总结）。据我们所知，主要发现 2 也是首个确立以下结论的下界：局部搜索的困难性既不是因为附近不存在局部解（即全指数性质） [28, 29, 25, 15]，也不是因为计算改进步骤难以处理 [22, 31, 20, 14, 12, 17, 13]：仅仅是找到“正确的”改进步骤就已经很难。

主要发现 2 基于定理 4.1 和推论 5.5，而这两个结果都并非平凡。作为迈向前者的起点，我们证明最大独立集/3-交换（子集权重优化问题/c-交换的一个特殊情形）具有 全指数性质。这意味着，对于无穷多个实例与初始解的组合，所有可达局部最优解都与初始解相距指数级；也就是说，无论采用何种枢轴规则，标准局部搜索算法的运行时间始终为指数时间。我们通过从最大割/翻转出发的一个紧PLS归约建立了这一性质。[2] 这种归约的概念比原始的 PLS 归约更强，可用于传递全指数性质；有关这些归约的形式化定义，请参见第 2 节。虽然已有从最大割/翻转到最大独立集/3-交换的 PLS 归约 [18]„ 但该

[2] 此处，局部邻域允许对任意单个顶点，将其从划分的一侧移至另一侧。例如，对于划分 $(A,\ B)$，每个 $v \in A$ 都有一个翻转邻居 $(A \setminus \{v\}\ B \cup \{v\})$。

归约并不紧，而我们对已知归约所作的调整需要经过复杂的分析才能证明其紧性。借助这一全指数性质，我们得以构造一个从典型的 W[1]-困难问题多色独立集到最大独立集/3-交换的归约，从而为后一个问题确立主要发现 2。

为确立加权电路/翻转的主要发现 2，我们并非从已知的 W[1]-困难判定问题（例如多色独立集）出发，而是提出一种新的归约概念，可直接转化参数化局部搜索下界。这一概念在成熟的紧PLS归约基础上增加了一项约束，通过禁止转移图中产生新的长路径来保证参数稳定性。因此，我们在此给出的结果——将最大独立集/3-交换归约到最大电路/翻转的具体应用——可以视为一种示范，说明新的参数化下界能够转化为其他重要局部搜索问题的枢轴化表述。

相关工作。PLS 和标准算法表述已用于研究广泛的搜索问题，不仅包括子集权重优化问题/c-交换和加权电路/翻转所涵盖的问题，也包括单纯形法 [8] 和梯度下降 [7]。全指数性质（我们首次证明其适用于加权独立集/3-交换）此前已被猜想并证明适用于旅行商问题/k-优化 [19, 15] 和最大割/翻转 [26, 18], 等问题。单纯形法是否存在一种能够保证迭代次数为多项式的枢轴规则，是线性规划领域最重要的开放问题之一。

局部搜索的参数化复杂性已针对许多问题进行了研究，包括：稳定婚姻/k-交换 [22], 最大可满足性问题/k-翻转 [31], 最大约束满足问题/k-翻转 [20],旅行商问题（采用多种局部距离度量） [14], 最大 c-割/k-翻转 [12] 以及聚类编辑/k-移动、聚类删除/k-移动 [13]。在上述所有研究中，参数衡量的是在局部邻域中找到单个改进步骤的复杂性。本文探讨的视角与之互为补充：我们关注一种具有实际动机的情形，即执行单个改进步骤很容易，但找到局部最优解却很困难。

论文结构。 我们先在第 2 节介绍基本预备知识，并在第 3 节提出我们的框架。随后，我们将在第 4 节和第 5 节分别针对子集权重优化问题/c-交换和加权电路/翻转，确立主要发现 2 所揭示的、技术上颇为复杂的下界。第 6 节详细阐述主要发现 1 中的正面结果，最后在第 7 节讨论未来可能的研究方向和开放问题。

2 预备知识

对于两个整数 $a < b$，我们用 $[a, b]$ 表示介于（包括） a 和 b 之间的整数集合。我们用 $[a]$ 表示 $[1, a]$。给定集合 S、 S 的子集 S' ，以及函数 $f\colon S \to \mathbb{Q}$，我们定义 $f(S') := \sum_{s \in S'} f(s)$。对于两个集合 A 和 B，我们用 $A \oplus B$ 表示它们的对称差（即 $A \oplus B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$）。给定图 G，顶点 v 的开邻域 $N_G(v)$ 是 G 中与 v 相邻的所有顶点构成的集合。其闭邻域 $N_G[v]$ 定义为 $N_G(v) \cup \{v\}$。当图 G 明确时，我们省略下标。对于顶点子集 $S \subseteq V(G)$，我们用 $G[S]$ 表示由 S 在 G 中诱导的子图。

局部搜索问题 P 是一种优化问题，由实例集合 D_P、每个实例 $I \in D_P$ 对应的有限（可行）解集合 $F_P(I)$、为每个实例 $I \in D_P$ 和解 $s \in F_P(I)$ 赋予整数值的目标函数 f_P，以及每个解 $s \in F_P(I)$ 对应的邻域 $N_P(s, I) \subseteq F_P(I)$ 构成。每个解 $s \in F_P(I)$ 的大小都由 I 的大小的某个多项式界定。对于给定实例 I，目标是找到一个局部最优解；也就是说，找到一个解 $s \in F_P(I)$，使得不存在解 $s' \in N_P(s, I)$ 的目标值优于 $f_P(s, I)$。形式化地说，对于所有 $s' \in N_P(s, I)$，若 P 是最小化问题，则有 $f_P(s, I) \leq f_P(s', I)$；若 P 是最大化问题，则有 $f_P(s, I) \geq f_P(s', I)$。

局部搜索问题的一种常见命名方式为 Q/N，其中 Q 是相应的优化问题，而 N 是邻域的定义。例如，最大割/翻转表示这样一种局部搜索问题：其实例、解和目标函数均由优化问题“最大割”定义，此外还包含由翻转操作定义的邻域。

针对实例 I 的标准局部搜索算法 如下进行。算法从某个初始解 $s \in F_P$（I）开始。随后，它反复转移到目标值更优的邻居，直到到达局部最优解。如果一个解有多个更优邻居，算法必须依据某个预先指定的规则选择其中一个，这通常称为枢轴规则。标准算法问题 定义如下 [16]：给定实例 I 和初始解 s，输出从 s 开始运行标准局部搜索算法（采用特定枢轴规则）所得到的局部最优解。

接下来，我们将形式化一系列与PLS复杂性类相关的经典概念。

▶ **定义 2.1**（类 多项式局部搜索 [16]）。若存在三个多项式时间算法 A_P、 B_P、 C_P，使得局部搜索问题 P 属于多项式局部搜索类，则称其属于该类：

- 给定实例 $I \in D_P$， A_P返回一个解 $s \in F_P$（I）；给定实例 $I \in D_P$ 和解 $s \in F_P$（I），
- B_P 计算 s的目标值f_P（s， I）；给定实例 $I \in D_P$ 和解 $s \in F_P$（I）， C_P 返回 s 的一个目标值严格更优的邻居（若存在），否则返回“局部最优”。
-

下面定义用于PLS的“基本”归约。

▶**定义 2.2**（多项式局部搜索归约 [16]）。从局部搜索问题 P 到局部搜索问题 Q 的多项式局部搜索归约 是由两个多项式时间可计算函数 Φ 和 Ψ 组成的一对函数，并满足：

1. 给定一个实例 $I \in D_P$， Φ 计算一个实例 $\Phi(I) \in D_Q$；以及 *2.* 给定一个实例 $I \in D_P$ 和一个解 $s_q \in F_Q(\Phi(I))$， Ψ 返回一个解 $s_p \in F_P(I)$，使得如果 s_q 是 $\Phi(I)$的一个局部最优解，那么 s_p 就是 I的一个局部最优解。

问题 $Q \in$ 多项式局部搜索 属于多项式局部搜索-完全，如果对于每个问题 $P \in$ 多项式局部搜索，都存在一个从 P 到 Q的多项式局部搜索-归约。

一种限制更严格（且通常更有用）的归约由 Schäffer 和 Yannakakis 后来定义。在定义它之前，我们需要以下概念：

▶ **定义 2.3**（转移图）。 局部搜索问题的实例 I 的转移图 T_I 是一个有向图，其顶点是 I 的解；当 s' 是 s 的邻居且目标值更优时，边（s, s'）存在。

▶**定义 2.4**（紧 多项式局部搜索-归约 [29]）。 从局部搜索问题 P 到局部搜索问题 Q 的紧 多项式局部搜索-归约 是一个多项式局部搜索-归约（Φ, Ψ），它从 P 归约到 Q，并且满足：对于每个实例 $I \in D_P$，我们可以选取 F_Q的子集 R（Φ（I））， 使其满足：

1. R 包含 $\Phi(I)$的所有局部最优解；*2.* 对于每个解 $s_p \in F_P(I)$，我们都可以在多项式时间内构造一个解 $s_q \in R$，使得 $\Psi(I, s_q) = s_p$；*3.* 如果转移图 $T_{\Phi(I)}$ 中存在一条从 $s_q \in R$ 到 $s'_q \in R$ 的路径，且路径上 R 中没有其他解，那么转移图 T_I 中要么存在一条边，从解 $\Psi(I, s_q)$ 指向解 $\Psi(I, s'_q)$，要么这两个解相同。

如果对于每个 $P \in$ PLS问题，都存在从 P 到 Q的紧PLS归约，那么问题 $Q \in$ PLS 就是紧PLS完全 的。

注意，紧PLS 归约保持标准算法问题的 PSPACE 完全性以及 all-expproperty（下文将对其进行形式化） [29]。

▶**定义 2.5**（全指数性质）。 如果存在无穷多个实例 I 和初始解 $s \in F_P$（I），使得对于所有可能的枢轴规则，标准局部搜索算法都需要指数次迭代，那么局部搜索问题 P 就具有全指数性质。

参数化复杂性。 在参数化复杂性中， [5, 4], 研究问题的复杂性时，不仅考虑输入规模，还考虑某些问题参数。参数化问题的输入是一个元组（ω， κ），其中 ω 是一个取自固定字母表的字符串， κ 是一个称为参数的非负整数。通常， κ 刻画所求解的某种属性（例如解规模的上界），或 ω 的某种承诺属性（例如输入图的树宽或团宽的上界）。如果所有满足承诺属性的实例都能在 $f(\kappa) \cdot |\omega|^{\mathcal{O}(1)}$时间内求解，其中 f是某个可计算函数，则该参数化问题是固定参数可解的。

▶备注 2.6。如果假设输入 κ 页面 [4， 137]中提供了一个能够见证所捕获结构的见证，则可以避免上述基于承诺的表述；然而，如果我们希望以到最近最优解的距离作为参数化依据，这种做法并不合理。另一种方法是将参数表述为 ζ ω [10]的函数，而且我们的所有结果都可以等价地采用这种表述——但前提是不能对计算 ζ 所需的运行时间施加限制（参见 [2]，其中讨论了这类参数化）。

我们用于下界的一个广为接受的复杂性假设是：所有固定参数可解的参数化判定问题组成的类 FPT 不等于类 W[1]。换言之，人们普遍认为，W[1]-困难问题不太可能是固定参数可处理的，而存在这样的算法将会——除其他影响之外——违背指数时间假设 [4, 第 14 节 4]。

3 构建框架

我们从枢轴化表述的概念开始。给定一个局部搜索问题的实例 I，我们将改进序列定义为 I 的一系列解 s_0，.....， s_r，其中对于 $i \in [r]$， s_i 是 s_{i-1} 的一个邻居，且具有更好的目标值。如果一个改进序列的最后一个解是局部最优的，则称该序列为极大的。

▶**定义 3.1**。 对于局部搜索问题 P，相应的枢轴问题 P[*Pivot*]定义如下：给定 P 的一个实例 I 以及 I的一个初始解 s，输出从 s开始的 I 的极大改进序列。

请注意，对于局部搜索问题，任务是找到一个局部最优解，而不限制实现该目标所使用的技术。对于枢轴问题，我们将方法限制为仅使用局部搜索算法（即沿着转移图中的一条路径前进）。我们可以将其视为寻找合适的枢轴规则，以便到达局部最优解，因此称为“枢轴”。

例如，考虑以下局部搜索问题——子集权重优化问题/c-交换：给定一个图 $G = (V, E)$、一个权重函数 $\omega\colon V \cup E \to \mathbb{Q}$、一个认证函数 $\sigma\colon 2^{V\cup E} \to \{0, 1\}$，用于判定顶点和边的一个子集是否构成一个解，以及一个目标函数 $f\colon 2^{V\cup E} \to \mathbb{Q}$，其中 $f(S) := \sum_{u\in S} \omega(u)$。如果两个解的差异仅在于一个 c-交换（即它们的对称差至多为 c），则称它们互为邻居。任务是找到一个局部极大解（即一个解 $S \subseteq V \cup E$，使得对于 S 的所有邻居解 S'，都有 $f(S) \geq f(S')$）。相应的枢轴问题定义如下。

子集权重优化问题/c-交换[Pivot]**输入：** 一个图 $G = (V, E)$、一个权重函数 $\omega\colon V \cup E \to \mathbb{Q}$、一个认证函数 $\sigma\colon 2^{V\cup E} \to \{0, 1\}$以及一个初始解 S（即 $\sigma(S) = 1$）。**任务：** 输出一个从 S 开始的极大改进序列。

我们假设 ω 和 σ 可在关于 $|V|$的多项式时间内计算。注意，图 G 可以是有向图和/或多重图。此外，尽管这里将其表述为最大化问题，但通过反转 ω 的像的符号，我们也可以对最小化问题进行建模。我们还假设 c 为常数，从而该局部搜索变体属于多项式局部搜索（PLS）（即，存在一个多项式时间算法来计算更优的邻居）。

子集权重优化问题/c-交换可以看作一个一般问题，它以许多著名的局部搜索问题为特例，例如以下问题。

- 加权独立集/c-交换（分别对应加权团/c-交换、加权顶点覆盖/c-交换）：在此情形下，图是顶点加权的（即边权为零）；解为独立集（分别对应团、顶点覆盖）。旅行商问题/k-优化：给定一张边加权图，生成圈的边集合即为解；并且 $c = 2k$（即一步 k-优化就是一次 $(2k)$-交换）。最大割/翻转（最大度有界 Δ）：此处图是边加权的（即顶点权重为零）；解是一个顶点集合 U 以及其间的所有边 U和 $V \setminus U$；交换大小为 $c = 2 \cdot \Delta + 1$。

▶ 注 3.2。为了准确刻画最大割/翻转的翻转邻域，对于每个顶点 $v \in V$，我们另外添加 Δ 个孤立顶点 v_i，满足 $i \in [1, \Delta]$，并要求每个有效解对于每个顶点 $v \in V$，要么包含$\{v\} \cup \{v_i \mid 1 \leq i \leq \Delta\}$ 中的全部顶点，要么一个也不包含。这确保了 $c = 2 \cdot \Delta + 1$ 的交换大小不足以让我们同时交换多个顶点及其关联的孤立顶点。因此，两个相邻解至多相差一个原始顶点，从而能够准确刻画最大割/翻转中单个顶点的翻转。

我们接下来考虑的局部搜索问题是加权电路/翻转，它是经典电路/翻转问题的一种推广。在该问题中，给定一个布尔电路 D，它有 n 个输入节点 x_1，……，x_n和 m 个输出节点 y_1，……，y_m，以及一个权重函数$\omega\colon [m] \to \mathbb{Q}$。目标

是找到优化函数 $f(x_1, \ldots\ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} \omega(i)y_i$的局部最大输入，以及 1-交换邻域（我们也称之为翻转）。相应的枢轴问题如下。

加权电路/翻转[Pivot]	
输入：	一个布尔电路 D，包含 n 个输入节点 $x_1, \ldots, x_n$和 m 个输出节点 $y_1, \ldots, y_m$，一个权重函数 $\omega: [n] \to \mathbb{Q}$，以及一个初始解 $s \in \{0, 1\}^n$。
任务：	从 s开始，输出一个极大改进序列。

注意，当 $\omega(i) = 2^{i-1}$（即，我们将 $f(x_1、\ldots\ldots、x_n)$ 解释为以二进制表示的数 $y_m \ldots y_1$）时，就得到了经典的最大电路/翻转问题。类似地，若我们设定 $\omega(i) = -2^{i-1}$，则得到 Min-Circuit/Flip。此外，这个问题也涵盖了加权最大可满足性/翻转问题。

在对上述问题进行参数化分析时，我们假设输入还附带一个整数参数 κ（见第 2 节）。

4 加权独立集/3-交换的困难性结果

回想一下，参数 ℓ 是给定起始解在转移图中到最近局部最优解的距离。注意，枢轴问题的时间复杂度下界为从初始解出发的最短极大改进序列的编码长度（即，ℓ 乘以一个解的编码大小）。因此，自然要考虑此类问题相对于 ℓ 的参数化复杂性。

本节旨在证明以下定理。

▶ **定理 4.1.** 除非固定参数可处理 =W[1], 成立，否则不存在一个算法能在固定参数可处理时间内求解加权独立集/3-交换[*Pivot*] 问题，其中参数为 ℓ （即运行时间为$g(\ell) \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$，其中 g是某个可计算函数）。

注意，由于加权独立集/3-交换[Pivot] 是子集权重优化问题/c-交换[Pivot], 的一个特例，上述困难性结果也适用于后一个问题。

▶注记 4.2. 定理 4.1 的界是紧的：对于任意一个权重全为正或全为负的子集权重优化问题/2-交换[Pivot] 实例，输出序列的长度始终为$\mathcal{O}(n^2)$。事实上，假设所有权重均为正；权重均为负的情形可用类似论证。我们按权重递增的顺序将顶点标记为 $v_1, \ldots, v_n$。对于每个解 R，定义其势 $p(R) := \sum_{v_i \in R} i$。不难看出，每次 2-交换都会增加势。由于势只有$\mathcal{O}(n^2)$个可能取值，因此每个改进序列的长度也必定为$\mathcal{O}(n^2)$。

定理 4.1 的证明用到了以下结果。

▶**定理 4.3**。 存在一个从有界度的最大割/翻转到加权独立集/3-交换的紧*PLS*归约。特别是，后一个问题具有全指数性质（即使将权重限制为正权重也是如此）。

已证明，加权独立集/3-交换通过从最大割/翻转进行的 PLS 归约是 PLS 完全的 [18] 。然而，该归约并未被论证为紧归约，而且事实上很可能并不紧。在这里，我们将其改造为一个紧PLS归约；证明见第 4.2 节。

定理 4.1 和 4.3 的证明中的构造使用了（向上/向下）电梯的概念，其定义如下。这里，当我们假设集合 X 上存在某个（固定的）次序时，用 $X[i]$ 表示该次序中的第 i 个元素。

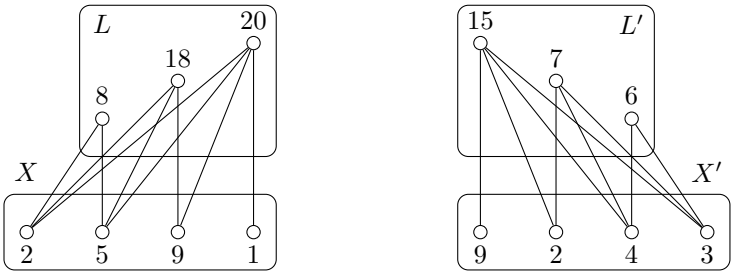


图2 电梯构件的示例。左侧是一个 X上升电梯 L，右侧是一个 X'下行电梯 L'。团 L 和 L' 的边未绘出。此外，X 的顶点之间以及 X' 的顶点之间的边可以任意设置。回顾一下，L（分别是 L'）的顶点在 $L \cup X$（分别是 $L' \cup X'$）之外具有相同的邻域。

设 $G = , E$ 是一个顶点加权图，且 $X \subseteq V$ 是一个大小至少为 2 的集合。X-电梯 是一个团 $L := \{\ell_1, \ldots, \ell_s\}$，其大小为 $s := |X| - 1$；L 中的顶点在 $L \cup X$ 外部具有相同的邻域，并且对于每个 $i \in [1, s-1]$，ℓ_i 在 X 内恰好以 X 的前 $i+1$ 个顶点为邻点，其中对 X 的顶点采用任意但固定的次序。我们将电梯的顶点称为层级。顶点 $\ell_{|L|}$ 是顶层，而 ℓ_1 是底层。

如果 L 满足 $\omega(\ell_1) = \omega(X[1]) + \omega(X[2]) + 1$，且对每个 $i \in [2, s-1]$，都有$\omega(\ell_i) = \omega(\ell_{i-1}) + \omega(X[i+1]) + 1$，则称其为上升电梯 。类似地，如果 L 满足 $\omega(\ell_1) = \omega(x_1) + \omega(x_2) - 1$，且对每个 $i \in [2, s-1]$，都有 $\omega(\ell_i) = \omega(\ell_{i-1}) + \omega(X[i+1]) - 1$，则称其为下行电梯 。注意，这种上升或下行电梯中顶点的权重由 X中顶点的权重和顺序唯一确定。图2给出了上升电梯和下行电梯的示例。

▶ **引理 4.4.** 设(G, ω) 是一个带权图。设 $L = \{\ell_1, \ldots, \ell_s\}$ 是顶点集 X （属于 G）的一个 X-上升电梯，其中 ℓ_s 是顶层。若独立集 S 对某个 $i \neq s$ 包含 ℓ_i，则$(S \setminus \{\ell_i, X[i+2]\}) \cup \{\ell_{i+1}\}$ 是一个权重高于 S 的独立集。

证明。根据定义，$\omega(\ell_{i+1}) > \omega(\ell_i) + \omega(X[i+2])$。此外，$N(\ell_{i+1}) = N(\ell_i) \cup \{X[i+2]\}$。引理得证。◀

4.1 定理 4.1 的证明

我们通过众所周知的 W[1]-困难问题多色独立集进行归约：给定一个图 $G = (V_1 \cup \cdots \cup V_k, E)$，其中对每个 $i \in [k]$，$k \geq 3$ 和 V_i 都是团，是否存在一个大小为 k 的独立集？不失一般性，假设 $|V_k| = 1$。令$V := V_1 \cup \cdots \cup V_k$，且 $n := |V|$。

根据定理 4.3，存在一个加权独立集/3-交换实例（U, F, ω），其顶点数为 $\Omega(n)$，且所有局部最优解在（U, F, ω）的转移图中都与某个初始解 $S \subseteq U$相距指数级远；此外，可通过所给的归约在多项式时间内构造这样的实例。不失一般性，假设 ω 的每个权重都能被 $8n$ 整除，并令 $\omega_{\max}$ 表示所赋权重中的最大值。

现在我们构造一个加权独立集/3-交换[Pivot] 实例，该实例由图 $G' := (V', E')$、权重函数 ω' 和初始解 T组成，具体如下。将 G' 初始化为 G 与 (U, F) 的不交并。V中的每个顶点权重均为 1，而 U 中的每个顶点所带权重与 ω所赋予的权重相同。接下来，添加一个包含 $k-2$个 X

顶点的集合 x_i，其中 $i \in [2, k-1]$。每个这样的顶点权重均为 3。对于每个 $i \in [2, k-1]$，令 x_i 与 $V_{i-1} \cup V_i \cup V_{i+1}$中的所有顶点相邻。接下来，添加一个包含 X的上升电梯 Y，其中我们考虑 X中顶点的次序 $(x_2, \ldots\ldots, x_{k-1})$。我们将 Y中的顶点标记为$y_3, \ldots\ldots, y_{k-1}$，使得 y_i在 X中的邻域恰好为 $\{x_i \mid j \in [2, i]\}$。此外，我们添加两个顶点 v^* 和 w^*，其权重分别为 $2\omega_{\max}$ 和 $3\omega_{\max} + 1$。然后，添加边 $\{v^*, w^*\}$，并令 w^* 与 $V \cup X \cup Y$中的所有顶点相邻。最后，令 $V \cup X \cup Y \cup$中的每个顶点$\{v^*\}$ 均与 $U \setminus S$中的每个顶点相邻。图3对此进行了说明。

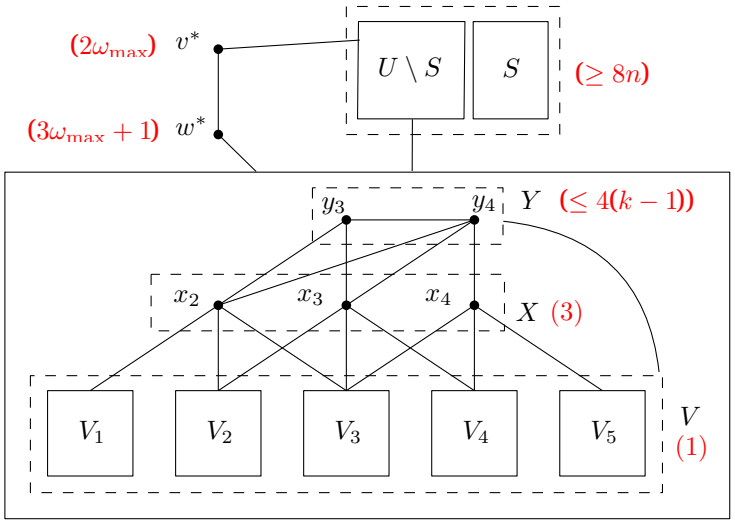


图3 定理 4.1 的证明中 G' 的示意图，针对 $k = 5$。图中未显示所有边。方框与顶点/方框之间的边表示前一个方框中的顶点与后一个顶点/方框中的顶点构成一个完全二分子图。红色括号中的数字表示权重。

初始解 T 定义为 $S \cup V_k \cup \{v^*\}$。回想一下，V_k 只包含一个顶点，且该顶点属于 G 中大小为 k 的每个多色独立集。

▷ 断言4.5。设 π 是从 T 出发、针对 (G', ω') 的一个极大改进序列。如果 π 包含一个解 T，使得 $T \cap V$ 是大小为 k的独立集，那么 T 是局部最优的。否则，π 的长度关于 n 呈指数级。

证明。 我们先给出以下观察：

1. 不存在会移除 w^*的改进交换。**2.** 如果 w^* 属于某个解，那么该解是 $U \cup \{w^*\}$的子集。**3.** 从 T 出发的每个可达解都包含 v^* 或 w^*。

事实上，条目 1 源于这样一个事实：w^* 的权重为 $3\omega_{\max} + 1$，严格大于 ω' 所赋予的次高两个权重之和。因此，任何改进型 3-交换都无法从给定解中移除顶点 w^*。接下来，条目 2 源于这样一个事实：w^* 是 $V' \setminus U$ 中其他每个顶点的邻居。最后，条目 3 源于条目 1 以及以下事实：从 T 出发且不包含 w^* 的每个可达解都必须包含 v^*，因为 v^* 包含在 T 中，并且 v^* 的权重至少与除$\{v^*, w^*\}$之外任意两个顶点的权重一样大。换言之，每个从当前解中移除 v^* 的改进交换，都必须将 w^* 加入该解。

现在假设 π有一个解 T，使得 $T \cap V = \{v_1, \ldots, v_k\}$ 是一个独立集。不失一般性，假设 $v_i \in V_i$ 对于 $i \in [k]$。为导出矛盾，

假设 T 不是局部最优解，并且存在一个改进型 3-交换 W。由于该交换能够改进解，因此至少有一个顶点会通过此交换加入。注意，此交换不能将 $Y \cup \{w^*\} \cup (U \setminus S)$中的任何顶点加入解中，因为这些顶点都与 v_1、v_2和 v_3相邻，而 W至多能移除其中两个顶点。类似地， W 不能将任何顶点 x_i 加入解中，因为 x_i 与 v_{i-1}、v_i和 v_{i+1} 相邻，而 W至多能移除其中两个顶点。此外，如果 v^* 不在 T 中，那么根据条目 1 和 3，它就不能通过 W加入。因此， W唯一能加入的顶点来自 V。然而，如果W为某个 $i \in [k-1]$加入 V_i 中的一个顶点，就必须移除 v_i；并且由于 V_i 是一个团，我们不能再从 V_i中加入其他顶点。这意味着 W 在 V 中至多只能加入一个顶点，并且至少要从 V中移除一个顶点。由于 V 中的顶点权重相同，且 $V' \setminus V$中的顶点具有正权重并且无法通过 W加入，因此 W不可能是改进型交换，矛盾。由此可知， T 是局部最优解。

在证明的其余部分，我们现在假设 π 不包含这样的解 T。我们证明，如果 π 包含解 $S \cup \{w^*\}$，那么它的长度关于 n呈指数级。事实上，根据条目 1 和条目 2，从 $S \cup \{v^*\}$ 开始的 π 的子序列 π' 是针对 (U, F, ω) 的一系列改进型 3-交换，起始于 S。由于 S 与 (U, F, ω) 的所有局部最优解都相距甚远，序列 π'关于 n 的长度呈指数级，正如所声称的那样。

因此，只需证明 π必定包含解 $S \cup \{w^*\}$。对于每个 $i \in [1, |\pi|]$，令 $T_i := \pi(i)$ 表示该序列中的第 i个解。根据条目 3，对于每个 $i \in [1, |\pi|]$， T_i包含 v^* 和 w^*中的一个。此外，根据条目 1，在 π 中包含 v^* 的解构成 π的一个前缀。令 $i \in [1, |\pi|]$，使得 $v^* \in T_i$。注意，这意味着 $T_i \cap U = S$。这是基于以下事实:

- $v^* \in T_i$，这意味着 $T_i \cap U \subseteq S$，因为 v^* 是 $U \setminus S$ 的每个顶点的邻居。由于 Y 是一
- 个团， T_i 在 Y 中至多有一个顶点，其权重小于 $4k$。因此， $T_i \cap$ （$X \cup Y \cup V$）中所有顶点的总权重小于 $8n$，也就小于 U 中每个单独顶点的权重。

也就是说， $T_i \cap U$ 只包含 S 的顶点，而且不能漏掉 S 的任何顶点；否则， T_i 的权重将严格小于 T 的权重，这就与 T_i 是一个以 T 开始的改进序列中的一部分这一事实矛盾。

注意，这进一步意味着 T_i 至少包含 $V \cup X \cup Y$ 的一个顶点；否则， $T_i = S \cup \{v^*\}$ 的权重将严格小于 $T = S \cup \{v^*\} \cup V_k$。结合条目 2，这意味着如果 T_{i+1} 存在且包含 w^*，所需的 3-交换 (i) 会将 w^* 加入解中，并且 (ii) 会从解中移除 v^* 和 $V \cup X \cup Y$ 的一个唯一顶点。因此，如果 T_{i+1}存在且包含 w^*，那么 $T_{i+1} \cap U = T_i \cap U = S$，这意味着 $T_{i+1} = S \cup \{w^*\}$。

因此，要完成证明，只需证明 T_i 不是局部最优。由于 π 是有限长度的序列，这便意味着存在某个最小的 j，使得 T_j 包含 w^* ，并且根据上述论证还满足 $T_j = S \cup \{w^*\}$ 。为了证明 T_i 不是局部最优，我们根据 T_i 与 $V \cup X \cup Y$的交集区分几种情况。对于每种情况，我们都给出一个改进型 3-交换。令 $T_i := T_i \cap (V \cup X \cup Y)$，并注意到 $T_i = S \cup \{v^*\} \cup T_i$。

情况 1： $T_i' \subseteq V$。回想一下，对于每个 $j \in [k]$， V_j 都是 G'中的一个团，这意味着 $|T_i \cap V_j| \leq 1$。由于 $T_i \cap V$不是一个大小为 k的独立集，因此存在某个 $p \in [2, k-1]$，使得 $|T_i' \cap (V_{p-1} \cup V_p \cup V_{p+1})| \leq 2$。因此，将顶点 x_p加入解中，同时移除 $V_{p-1} \cup V_p \cup V_{p+1}$ 中的至多两个顶点，这一交换便是一个改进型 3-交换。

情形 2： $T_i' \subseteq V \cup X$与 $T_i \cap X \neq \emptyset$。</style>若 $'_i \cap X = X$，则 $T_i = X$，并且 (i) 将 y_3加入解中，(ii) 将 x_2 和 x_3 从解中移除，可得到一个改进型 3-交换。否则，存在某个 $p \in [2, k-2]$，使得 $x_p \in T_i$和 $x_{p+1} \notin T_i'$二者之一成立，或者反

之。在两种情况下，$T_i' \cap (V_p \cup V_{p+1}) = \emptyset$，因为 x_p 和 x_{p+1} 都与 V_p 和 V_{p+1} 的每个顶点相邻。不失一般性，设 $x_p \in T_i$ 且 $x_{p+1} \notin T_i$。那么，(i) 将 x_{p+1} 加入解中，(ii) 至多将 V_{p+2} 中的一个顶点从解中移除，可得到一个改进型 3-交换。

情形 3： 存在某个 $p \in [3, k-1]$，使得 $y_p \in T_i$。如果 $p < k-1$，那么根据引理 4.4，存在一个改进型 3-交换。否则，注意到 y_{k-1} 是 $V \cup X \cup Y$ 中所有顶点的邻居。因此，$T_i \cap (V \cup X \cup Y) = \{y_{k-1}\}$。然后，添加 w^* 并移除 v^* 和 y_{k-1}，即可得到一个改进型 3-交换。

因此，如果 G 不包含大小为 k 的独立集，那么 $S \cup \{w^*\}$ 就是一个解，并且属于所有从 T 开始的改进型 3-交换序列。至此，断言的证明完成。◁

注意，上述断言意味着，如果 G 有一个大小为 k 的独立集 Q，那么存在一个从 T 开始且长度至多为 k 的极大改进序列。事实上，我们通过连续进行 $k-1$ 次 1-交换，将 Q 中的所有顶点加入初始解。随后得到一个解 T，使得 $T \cap V = Q$。因此，根据断言4.5，T 是局部最优的。

现在反设存在一个算法，能够在 $g(\ell) \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内求解 Weighted Independent Set/3-交换[Pivot]，其中 g 是某个可计算函数。我们令 $\ell = k$，并在 $g(\ell) \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 步内对上述实例 (G', ω', T) 运行该算法。如果该算法返回一个解 T^*，使得 $T^* \cap V$ 是一个大小为 k 的独立集，那么我们就知道 G 是多色独立集的 YES- 实例。否则，根据断言 4.5，由于运行时间 $g(\ell) \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 不关于 n 指数增长，该算法不应返回任何局部最优解；也就是说，它要么返回一个不是局部最优的解，要么在这段时间内不终止。在这种情况下，我们知道“从 T 出发经过 k 次改进交换即可得到一个局部最优解”的承诺被破坏了。如上所述，这意味着 G 不含有大小为 k 的独立集，因此 (G, k) 是一个 NO-实例。因此，我们可以在 $g(k) \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内判定多色独立集，这与假设 FPT $\neq$ W[1] 矛盾。◀

▶ 注 4.6。上述定理 4.1 的证明还蕴含以下结论：

- 在以 k 为参数时，判定给定初始解的距离至多为 k 的局部最优解是否存在，是 W[1]-困难的。除非 FPT = W[1], ，否则不存在一种算法，能以 $g(\ell) \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 的运行时间和
- $n^{\mathcal{O}(1)}$ 的近似比来近似到最近局部最优解的距离。

4.2 加权独立集/3-交换的全指数性质

证明加权独立集/3-交换具有全指数性质的主要论证，是下面这个从最大割/翻转得到的紧 PLS 归约（见下文定理 4.7）。该归约对 Komusiewicz 和 Morawietz 提出的 PLS 归约 [18]进行了轻微改编。粗略地说，该归约构造了一个包含两部分 C 和 D 的实例，其中 C 的顶点用于表示最大割的相应解，而 D 的顶点则作为小工具，确保我们可以通过一系列改进型 3-交换，模拟在最大割实例中翻转一个顶点。在 Komusiewicz 和 Morawietz 的原始归约中，某些极大独立集只需交换 C 中的顶点就能得到改进，从而产生非极大的中间独立集。这些独立集可以通过 1-交换得到改进，而这些交换又可能与图中相距较远部分的改进型 1-交换或 2-交换结合起来。因此，最大割实例中的改进翻转与独立集实例中的改进交换之间并不存在紧密对应关系。为了

建立这种对应关系，我们向 C中添加更多顶点，从而确保每个极大解只有在将 D 中的至少一个顶点交换进解中时才能得到改进。通过将 D 变成一个团，我们现在可以确保每个时间步最多只能模拟最大割实例中一个顶点的翻转。

虽然最大割/翻转已在第 3 节中定义，但这里我们给出一个略有不同、便于处理的定义。最大割/翻转的一个实例 I 由一个无向图 $G=(V,\ E)$ 和一个权重函数 $\omega:\ E(G)\ \to\ \mathbb{N}$ 构成。 I的一个解（也称为割）是顶点集 V 的一个划分 $(A,\ B)$（即 V 的每个顶点恰好属于 A 和 B 之一），其目标值为 $\sum_{(u,\ v)\in A\times B,\ uv\in E}\omega(uv)$。若两个解仅在一个顶点的翻转 后不同，则称它们互为邻居；翻转是指将该顶点从划分的一个集合移至另一个集合。

▶**定理 4.7**。 存在一个紧的多项式局部搜索归约，将最大割/翻转限制为最大度至多为(G,ω) $^{\mathcal{O}(1)}$ 的实例$(\log\ |V(G)|)$归约到加权独立集/3-交换。

证明。核心图。设 $I:=(G\ =(V,E)\ \omega)$ 是一个最大割/翻转实例，其最大度为 Δ，其中 $\Delta\ =(\log|V|)^{\mathcal{O}(1)}$。设 $n:=\ |V|$，并假设 ω 分配的每个权重都是 $2n$ 的倍数。我们按如下方式构造一个加权独立集/3-交换实例 $I':=(G':=(V'E')\ \omega')$：对于每个顶点 $v\in V$，我们添加六个顶点 v_A、v'_A、v''_A、v_B、v'_B和 v''_B。 v_A 和 v_B 的权重为 $\alpha\cdot 4n$，其余四个顶点的权重为 $\alpha:=2\cdot\omega(E)$。对于每条边 $uv\in E$，我们添加两个顶点 $x_{u,\ v}$ 和 $x_{v,\ u}$，每个顶点的权重均为 $\omega(uv)$。在这些顶点之间，我们添加以下边：对于每个顶点 $v\in V$，我们使 $G'[\{v_A,v'_A,v''_A,v_B,v'_B,v''_B\}]$ 成为一个二分划分为 $(\{v_A,v'_A,v''_A\},\{v_B,v'_B,v''_B\})$ 的完全二部图。此外，对于 G中 v 的每个邻居 u，我们添加 (i) $x_{u,\ v}$ 与 $\{v_A,v'_A,v''_A\}\ \cup\{x_{v,\ w}\ |\ w\ \in\ N_G(v)\}$ 中每个顶点之间的边，以及 (ii) $x_{v,\ u}$ 与 $\{v_B,v'_B,v''_B\}\ \cup\{x_{w,v}\ |\ w\in N_G(v)\}$ 中每个顶点之间的边。至此，图 G' 的基本部分构造完成；我们用 C 表示 G' 这一部分中的顶点。为了完成构造，我们将添加若干成对出现的上升电梯和下降电梯（每个还附带一个额外顶点），以模拟在最大割实例中对单个顶点进行翻转的过程，该过程由一系列改进型 3-交换组成。在此之前，我们先说明 G' 基本部分的内部运作原理。

直观上， $G'[C]$ 背后的想法是， G 的划分（A，B）与 $G'[C]$中的极大独立集之间存在自然一一对应：对于每个顶点 $v\in V$，每个极大独立集 S 要么包含$\{v_A,\ v'_A,\ v''_A\}$中的所有顶点，要么包含$\{v_B,\ v'_B,\ v''_B\}$中的所有顶点。由此可直接根据 S 包含的是$\{v_A,\ v'_A,\ v''_A\}$中的所有顶点，还是$\{v_B,\ v'_B,\ v''_B\}$中的所有顶点，对 V 的顶点集进行划分。此外，对于相应的割（A，B），每条满足 $u\in A$ 和 $v\in B$的边 uv，顶点$x_{u,\ v}$ 也会属于 S。因此，$\omega'(S)\ =n\cdot(4n+2)\ \alpha+\sum(p,\ q)\in A\times B,\ pq\in E\ \omega(pq)$。为了模拟划分（$A$，$B$）中的一次翻转，存在一个与新划分（$A'$，$B'$）对应的极大独立集 S'，使得 S 与 S' 的对称差大小为O（Δ）。然而，由于我们旨在构造仅使用3-交换的困难性归约，因此还需要添加更多小工具，以确保可以通过一系列改进型3-交换来模拟这样的改进型O（Δ）-交换。在Komusiewicz和Morawietz的原始归约 [18], 中，顶点$\{v'_A,\ v''_A,\ v'_B,\ v''_B\mid v\in V\}$并不存在，因此允许进行这样的交换：移除一个顶点 v_A，添加一个顶点 v_B，并额外添加某个顶点 $x_{w,\ v}$。在我们的归约中，这已不再可行，因为只要当前解中也包含顶点 v'_A和 v''_A 中的至少一个，它们就会阻止添加 v_B。实质上，这保证了如果存在一个极大独立集 S，对于每个顶点 v，它要么包含$\{v_A,\ v'_A,\ v''_A\}$中的所有顶点，要么包含$\{v_B,\ v'_B,\ v''_B\}$中的所有顶点，那么我们只能通过向解中添加 C 之外的顶点来找到改进交换。

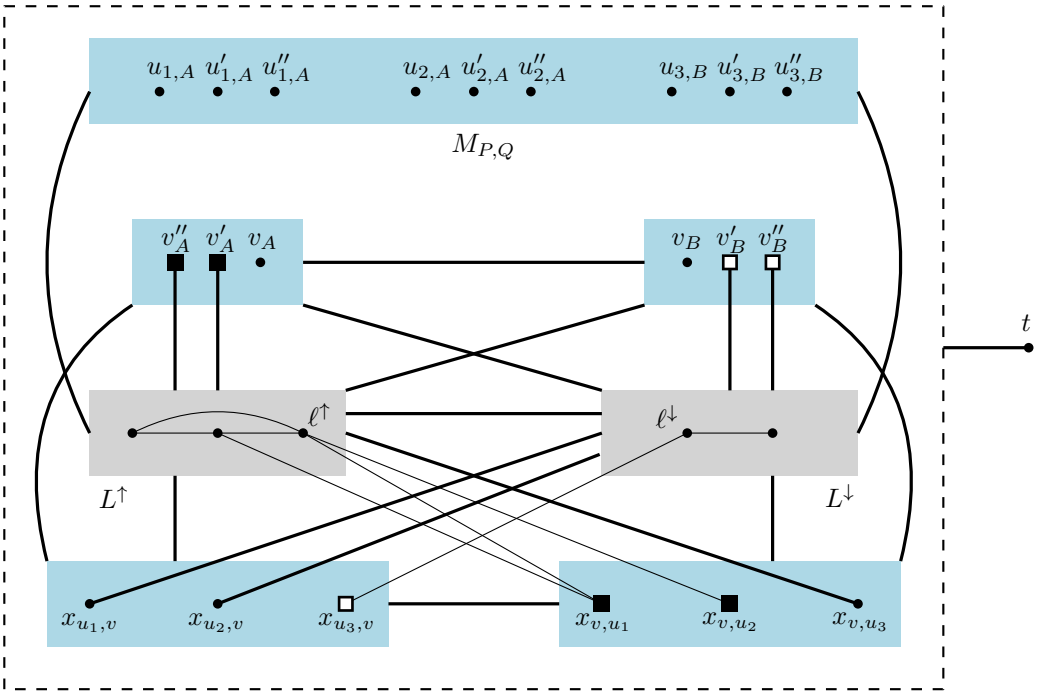


图 4 顶点 v 关于 (P, Q) 的 $A2B$-模拟器 $(L^{\uparrow}, t, L^{\downarrow})$ 的邻域示意图，其中 $P = \{u_1, u_2\}$ 和 $Q = \{u_3\}$。$X^{\uparrow}_{P,Q}$ 中的顶点和 $X^{\downarrow}_{P,Q}$ 中的顶点分别以黑色和白色方块表示。粗边表示方框与另一方框或顶点之间的完全二部图。蓝色方框中的顶点位于 C 中。

附加电梯。现在我们介绍 G' 中位于 C之外的其余部分。对于每个顶点 $v \in V$，我们计算集合$\mathcal{R}_v$，其中包含 v 在 G 中的邻域的所有划分（P，Q），且满足 $\sum_{p\in P} \omega(vp) < \sum_{q\in Q} \omega(vq)$。注意，由于图的最大度 Δ 为 $(\log n)^{\mathcal{O}(1)}$，这可以在多项式时间内完成。集合$\mathcal{R}_v$恰好包含这样的划分（$P$，$Q$）：如果 Q 恰好是 v 中当前与 v位于割的同一侧的那些邻点，那么翻转顶点 v 就是改进的。

设 v 是 V 的一个顶点，并设 (P, Q) 是 $\mathcal{R}_v$ 的一个划分。我们首先介绍用于模拟顶点 v 从 A 翻转到 B 的电梯构件；示意图见图 4。随后，针对从 B 翻转到 A 的构件几乎完全相同。要正式定义电梯构件，我们需要定义图中顶点的一个次序。我们将其定义为顶点的任意次序，其中 $\{v'_A, v''_A, v'_B, v''_B \mid v \in V\}$ 中的顶点排在所有其他顶点之前。

令 $X^{\uparrow}_{P,Q} := \{v'_A, v''_A\} \cup \{x_{v,p} \mid p \in P\}$，$X^{\downarrow}_{P,Q} := \{v'_B, v''_B\} \cup \{x_{q,v} \mid q \in Q\}$，$M_{P,Q} := \{p_A, p'_A, p''_A \mid p \in P\} \cup \{q_B, q'_B, q''_B \mid q \in Q\}$。我们添加一个从 $L^{\uparrow}$ 到 G'的 $X^{\uparrow}_{P,Q}$-上升电梯，其中 $L^{\uparrow}$ 中位于 $X^{\uparrow}_{P,Q} \cup L^{\uparrow}$ 之外的顶点的邻域为 $M_{P,Q} \cup \{v_B, v'_B, v''_B\} \cup \{x_{v,q} \mid q \in Q\} \cup \{x_{r,v} \mid r \in N_G(v)\}$。此外，我们添加一个从 $L^{\downarrow}$ 到 G'的 $X^{\downarrow}_{P,Q}$-下行电梯，其中 $L^{\downarrow}$ 中位于 $X^{\downarrow}_{P,Q} \cup L^{\downarrow}$ 之外的顶点的邻域为 $M_{P,Q} \cup \{v_A, v'_A, v''_A\} \cup \{x_{p,v} \mid v \in P\} \cup \{x_{v,r} \mid r \in N_G(v)\}$。注意，顶点的次序意味着，$L^{\uparrow}$ 的底层仅与 $X^{\uparrow}_{P,Q}$ 中的 v'_A 和 v''_A 相邻，而 $L^{\downarrow}$ 的底层仅与 $X^{\downarrow}_{P,Q}$中的 v'_B和 v''_B 相邻。特别地，这些电梯中的每个顶点的权重至少为 $2\alpha - 1$（即 $L^{\downarrow}$的底层的权重），且至多为 $3\alpha + n < 4\alpha$。

我们将 $L^{\uparrow} \cup L^{\downarrow}$ 构成一个团。注意，$L^{\uparrow}$ 的顶层 $\ell^{\uparrow}$ 的闭邻域

恰好包含 v_B 和 $N_{P,Q} := M_{P,Q} \cup \{v'_A, v''_A, v'_B, v''_B\} \cup \{x_{v,r}, x_{r,v} \mid r \in N_G(v)\} \cup L^{\uparrow} \cup L^{\downarrow}$ 的顶点。类似地，$L^{\downarrow}$ 的顶层 $\ell^{\downarrow}$ 的闭邻域为 $N_{P,Q} \cup \{v_A\}$。接下来，我们添加一个转向顶点 t，其权重等于 $\omega'(\ell^{\downarrow}) + \omega'(v_A) - 1$，并将它与 $N_{P,Q} \cup \{v_A, v_B\}$ 的所有顶点相邻。我们称三元组 $(L^{\uparrow}, t, L^{\downarrow})$ 为 v 关于划分 (P, Q) 的一个 $A2B$-模拟器。

注意，由于 $2\alpha + |P| + 1 + \sum_{p \in P} \omega(vp)$ $L^{\uparrow}$ $L^{\downarrow}$ $|P|+1$ $|Q|+1$ $\omega'(\ell^{\uparrow}) = \omega'(X^{\uparrow}_{P,Q}) + |P| + 1 =$ 是一个具有若干层级的上升电梯，$()(.)()$。此外，由于 是一个具有若干层级的下行电梯，$\omega'(\ell^{\downarrow}) = \omega'(X^{\downarrow}_{P,Q}) - |Q| - 1 = 2\alpha - |Q| - 1 + \sum_{q \in Q} \omega(vq)$。根据 $(P, Q) \in \mathcal{R}_v$，且每条边的权重都是 $2n$的倍数这一事实，$\sum_{q \in Q} \omega(vq) - \sum_{p \in P} \omega(vp) \geq 2n$。由于 $|P| + |Q| < n$且 $n > 2$，这意味着

$$\omega'(\ell^{\uparrow}) + 1 < \omega'(\ell^{\downarrow}). \tag{1}$$

我们对称地添加一个 $B2A$-模拟器，用于 v 针对 (P, Q)，其中我们在定义中交换所有相关顶点的下标，将 A 和 B 互换，并将顶点 $x_{r,s}$ 替换为 $x_{s,r}$。

最后，我们令 D 表示 G' 中不属于 C 的所有顶点组成的集合，并将这些顶点变成一个团。这确保 G' 的每个独立集至多包含一个不属于 C的顶点。这是 Komusiewicz 和 Morawietz 的归约 [18],的第二处不同：在该归约中，D里的每个极大团都只有常数大小。然而，为了确保归约的紧致性，我们需要将整个集合 D 变成一个团。

正确性。现在我们证明该归约具有上述性质。令 (A, B) 为 V的一个划分。我们定义

$$g(A, B) := \{v_A, v'_A, v''_A \mid v \in A\} \cup \{w_B, w'_B, w''_B \mid w \in B\} \cup \{x_{v,w} \mid v \in A, w \in B, \{v, w\} \in E\}.$$

▷ 断言 4.8. 对于 V的每个划分 (A, B)，$g(A, B)$ 是 G'中的一个独立集。

证明。注意，$g(A, B)$仅包含 C的顶点，也就是说，不包含电梯顶点和转弯顶点。根据构造，顶点$\{v_A, v'_A, v''_A \mid v \in A\} \cup \{w_B, w'_B, w''_B \mid w \in B\}$构成一个独立集。接下来只需证明，$x_{v,w} \in g(A, B)$, $x_{v,w}$ 在 $g(A, B)$中没有邻居。$x_{v,w}$ 包含于 $g(A, B)$意味着 $v \in A$ 和 $w \in B$。考虑$x_{v,w}$ 在 C中的邻居。这些邻居包括：(i) $\{w_A, w'_A, w''_A\}$，(ii) $\{v_B, v'_B, v''_B\}$，以及(iii) 形如$x_{s,t}$ 且满足 $s = w$ 或 $t = v$的顶点。由于(A, B)是 V 的一个划分，且$x_{v,w} \in g(A, B)$,$g(A, B)$不包含$\{w_A, w'_A, w''_A, v_B, v'_B, v''_B\}$中的任何顶点。此外，$g(A, B)$不包含满足 $s = w$ 或 $t = v$的顶点$x_{s,t}$，因为这将意味着 $s \in A$ 和 $t \in B$，与 $v \in A$ 和 $w \in B$ 以及(A, B)是 V的一个划分这一事实相矛盾。因此，$x_{v,w}$ 在 $g(A, B)$中没有邻居，这意味着 $g(A, B)$是一个独立集。◁

下面的断言将在后文中发挥作用。

▷ 断言 4.9。设 S 是 G' 的独立集，且 S 包含一个顶点 $z \in D$。不失一般性地，假设 z 属于某个顶点 $v \in V$ 的 $A2B$-模拟器（$L^{\uparrow}$，t，$L^{\downarrow}$），其中划分（P，Q）$\in \mathcal{R}_v$ 对某个 $v \in V$ 给出。设 $L^{\uparrow} = \{\ell^{\uparrow}_1$、……、$\ell^{\uparrow}_{|P|+1}\}$ 和 $L^{\downarrow} = \{\ell^{\downarrow}_1$、……、$\ell^{\downarrow}_{|Q|+1}\}$。则存在一个独立集 S'，使得 $|S \oplus S'| \leq 3$ 和 $\omega'(S') > \omega'(S)$。特别地，

- 若对于某个 $i \in [1, |P|]$ 有 $z = \ell^{\uparrow}_i$，则 $S' = (S \setminus \{z, X^{\uparrow}_{P,Q}[i+2]\}) \cup \{\ell^{\uparrow}_{i+1}\}$。若
- $z = \ell^{\uparrow}_{|P|+1}$，则 $S' = (S \setminus \{z, v_A\}) \cup \{t\}$。若 $z = t$，则 $S' = (S \setminus \{z\}) \cup \{\ell^{\downarrow}_{|Q|+1}, v_B\}$。若
- 对于某个 $i \in [2, |Q|+1]$ 有 $z = \ell^{\downarrow}_i$，则 S' 要么是 $(S \setminus \{z\}) \cup \{\ell^{\downarrow}_{i-1}, X^{\downarrow}_{P,Q}[i+1]\}$（当其
- 为独立集时），要么是 $(S \setminus \{z\}) \cup \{q_B\}$，其中 q 满足 $x_{q,v} = X^{\downarrow}_{P,Q}[i+1]$。

- If $z = \ell_1^{\downarrow}$, then $S' = (S \setminus \{z\}) \cup \{v'_B, v''_B\}$.

证明。 我们考虑陈述中的五种情况。

情形 1： $z = \ell_i^{\uparrow}$ 对于某个 $i \in [1, |P|]$。 于是，该结论由引理 4.4 得出。

情形 2： $z = \ell_{|P|+1}^{\uparrow}$。 由 (1) 及构造可知， $\omega'(z) + \omega'(v_A) < \omega'(\ell_{|Q|+1}^{\downarrow}) + \omega'(v_A) - 1 = \omega'(t)$。此外， $N[t] = N[z] \cup \{v_A\}$。因此， $S' := (S \setminus \{z, v_A\}) \cup \{t\}$满足该断言的条件。

情形 3： $z = t$。 根据定义， $N[t] = \{v_B\} \cup N[\ell_{|Q|+1}^{\downarrow}]$ 且 $\omega'(t) = \omega'(\ell_{|Q|+1}^{\downarrow}) + \omega'(v_B) - 1$。因此， $S' := (S \setminus \{t\}) \cup \{\ell_{|Q|+1}^{\downarrow}, v_B\}$ 是一个比 S 严格更优的独立集，并且 $|S \oplus S'| \leq 3$。

情形 4： $z = \ell_i^{\downarrow}$ 对于某个 $i \in [2, |Q| + 1]$。根据定义， $N[\ell_i^{\downarrow}] = N[\ell_{i-1}^{\downarrow}] \cup \{x_{q,v}\}$，其中 $x_{q,v} := X_{P,Q}^{\downarrow}[i + 1]$。 此外， $\omega'(\ell_{i-1}^{\downarrow}) + \omega'(x_{q,v}) = \omega'(\ell_i^{\downarrow}) + 1$。因此， $S' := (S \setminus \{z\}) \cup \{\ell_{i-1}^{\downarrow}, x_{q,v}\}$ 的权重严格高于 S 和 $|S \oplus S'| \leq 3$。若 S' 是一个独立集，则结论成立。否则， S 包含 $x_{q,v}$的一个邻居 z' 。由于 $x_{q,v}$ 不与 $\{\ell_{i-1}^{\downarrow}, v_B, v'_B, v''_B, q_A, q'_A, q''_A\}$ 中的任何顶点相邻， $\cup \{x_{w,v} \mid w \in N_G(v)\} \cup \{x_{q,u} \mid u \in N_G(q)\}$，因此 z' 并非这些顶点之一。此外， $\{q_B\} \cup \{x_{v,w} \mid w \in N_G(v)\}$ 与 S不相交，因为 z 与所有这些顶点相邻，而 S 是包含 z的独立集。因此， z' 必定是 $x_{q,v}$ 在 C内部的其余邻居之一，也就是 $\{q'_B, q''_B\} \cup \{x_{u,q} \mid u \in N_G(q)\}$ 中的顶点。根据构造，这意味着 z' 与 q_B 在 C之外的所有邻居相邻。因此，$(S \setminus \{z\}) \cup \{q_B\}$ 是一个权重高于 S的独立集，因为 $\omega'(q_B) = 4\alpha n > \omega'(\ell_i^{\downarrow})$。

情形 5： $z = \ell_1^{\downarrow}$。根据定义， $\omega'(v'_B) + \omega'(v''_B) = \omega'(z) + 1$ 且 $N[v'_B] \cup N[v''_B] \subseteq N[z]$。因此， $S' := (S \setminus \{z\}) \cup \{v'_B, v''_B\}$ 是一个严格优于 S 的独立集。◁

上述断言的一个直接推论是， G' 的所有局部最优独立集都只包含 C 的顶点。接下来，令 $R := \{g(A, V \setminus B) \mid A \subseteq V\}$。

▷ 命题 4.10。集合 R 包含 G' 的所有局部最优独立集。

证明。令 S 为 G' 的一个局部最优独立集。根据断言 4.9， S 只包含 C 的顶点。首先，我们证明 S 恰好包含 v_A 和 v_B 中的一个。若 v_A 和 v_B 均不包含在 S 中，则 $S \cup \{v_A\}$ 或 $S \cup \{v_B\}$ 是一个独立集。这是因为 $N[\{v_A, v_B\}] \cap C$是一个完全二部图。因此，两个相邻顶点 v_A和 v_B不可能都在 $S \cap C$ 中有邻点。此外，由于 S不包含任何 C 之外的顶点， $S \cup \{v_A\}$ 或 $S \cup \{v_B\}$ 是一个权重严格大于 S 的独立集，矛盾。由于 v_A和 v_B 相邻，它们中恰好有一个包含在 S中。

由于 v_A、 v'_A和 v''_A 彼此不相邻，并且它们在 C 中的邻居与 v_A 相同，如果 $v_A \in S$，那么 v'_A、 $v''_A \in S$。以类似的论证处理 v'_B 和 v''_B， S 必须对每个顶点 $v \in V$ 恰好包含集合 $\{v_A$、v'_A、$v''_A\}$ 和 $\{v_B$、v'_B、$v''_B\}$ 中的一个。因此，对于每个局部最优独立集 S，存在 V 的一个划分 (A, B)，使得 $C \supseteq S \supseteq \{v_A, v'_A, v''_A \mid v \in A\} \cup \{w_B, w'_B, w''_B \mid w \in B\}$。对于每条满足 $u \in A$ 和 $v \in B$ 的边 $uv \in E$，顶点 $x_{u,v}$ 也属于 S，因为 $x_{u,v}$ 的邻居只有与 u_A 或 v_B 至少一个相邻的顶点，因此这些顶点不属于 S。换言之，如果 S 不包含 $x_{u,v}$，那么 $S \cup \{x_{u,v}\}$ 就会是一个更好的独立集。因此，对于每个局部最优独立集 S，存在 V 的一个划分 (A, B)，使得 $S = g(A, B)$。因此， $S \in R$。◁

▷断言 4.11. 对于 V 的每个划分 (A, B)，若 $g(A, B)$ 是 G' 中的局部最优独立集，则 (A, B) 是 G 的局部最优割。

S 证明。设 S 是 G' 中的局部最优独立集，且 (A, B) 是 V 的划分，使得 $S = g(A, B)$。我们证明 (A, B) 是 G 的局部最优割。反设并不如此，并设 v 是 V 的一个顶点，可以（不失一般性地）将其从 A 翻转到 B，从而得到一个更优的割。我们证明，在 G' 中，S 存在一次改进型 3-交换。由于将翻转顶点 v 从 A 翻转到 B 能改进结果，$\sum_{p\in P}\omega(\{v,p\}) < \sum_{q\in Q}\omega(\{v,q\})$ 对于 $P := N_G(v) \cap A$ 和 $Q := N_G(v) \cap B$。因此，我们为 v 添加了一个 $A2B$-模拟器 $(L^{\uparrow}, t, L^{\downarrow})$，其划分为 (P, Q)。此外，根据 $g(A, B)$ 的定义，$L^{\uparrow}$ 的底层 ℓ_1 在 S 中仅与 $\{v'_A, v''_A\}$ 中的顶点相邻，且其权重为 $\omega'(\ell_1) = \omega'(v'_A) + \omega'(v''_A) + 1$。因此，$S' := (S \setminus \{v'_A, v''_A\}) \cup \{\ell_1\}$ 是一个严格优于 S 的独立集。这与 S 是局部最优的假设矛盾。因此，(A, B) 是局部最优，当且仅当 $g(A, B)$ 是局部最优。◁

对于 R 中的两个独立集 S 和 S'，我们将从 S 到 S' 的直接序列定义为一种改进序列：它始于 S，终于 S'，且不包含 R 中的其他解。

▷ 断言 4.12。设 (A, B) 是 V 的一个划分。令 $S = g(A, B)$。则，

(a) 对于 V 的任意划分 $(\overline{A}, \overline{B})$，若其可由 (A, B) 通过一次改进翻转得到，则存在一个从 S 到 $g(A, B)$ 的直接序列。(b) 对于从 S 到 $\overline{R}$ 中另一个独立集 S' 的任意直接序列 π，存在一个划分 $(\underline{A}, \underline{B})$，其可由 (A, B) 通过一次改进翻转得到，并满足 $S' = g(A, B)$。此外，π 的长度为 $\mathcal{O}(\Delta)$。

证明。我们从 (a) 开始。不失一般性地，假设 (A, B) 是通过将顶点 $\overline{v}$ 从 A 翻转到 B 而由 (A, B) 得到的。令 $P := N_G(v) \cap B$，以及 $Q := N_G(v) \cap A$。注意，$(P, Q) \in \mathrm{R}(v)$。令 $(L^{\uparrow}, t, L^{\downarrow})$ 为 v 关于 (P, Q) 的 $A2B$-模拟器。令 $L^{\uparrow} = \{\ell_1^{\uparrow}, \ldots, \ell_{|P|+1}^{\uparrow}\}$ 和 $L^{\downarrow} = \{\ell_1^{\downarrow}, \ldots, \ell_{|Q|+1}^{\downarrow}\}$，其中 $\ell_1^{\uparrow}$ 和 $\ell_1^{\downarrow}$ 分别是 $L^{\uparrow}$ 和 $L^{\downarrow}$ 的底层。令 L 为序列 $\ell_1^{\uparrow}, \ldots, \ell_{|P|+1}^{\uparrow}, t, \ell_{|Q|+1}^{\downarrow}, \ldots, \ell_1^{\downarrow}$。对于 $i \in [1, |P| + |Q| + 3]$，令 S_i 为从 S 添加 L 的第 i 个元素后得到的集合，并且：

- 移除 $X^{\uparrow}_{P,Q}$ 中的前 $i+1$ 个元素，如果 $i \le |P|+1$；如果 $i = |P|+2$，则移除 $X^{\uparrow}_{P,Q}$ 和 v_A；如果 $i > |P|+2$，则移除 $X^{\uparrow}_{P,Q}$ 和 v_A，并添加 v_B 以及 $X^{\downarrow}_{P,Q}$ 中的最后 $i - |P| - 3$ 个元素。

此外，定义 $S_{|P|+|Q|+4}$ 为从 S 中移除 $X^{\uparrow}_{P,Q}$ 和 v_A，并添加 v_B 和 $X^{\downarrow}_{P,Q}$ 后得到的集合。

我们证明 $\pi := (S, S_1, \ldots, S_{|P|+|Q|+4})$ 是一个改进序列。根据断言 4.9，对于 $i \in [1, |P|+2] \cup \{|P|+|Q|+4\}$，$S_i$ 是一个权重高于 S_{i-1} 的独立集。接下来，对于 $i \in [|P|+3, |P|+|Q|+3]$，我们用归纳法证明 S_i 是一个独立集。对于 $i = |P|+3$，$S_i = (S_{i-1} \setminus \{t\}) \cup \{\ell^{\downarrow}_{|Q|+1}, v_B\}$。注意，$N[\ell^{\downarrow}_{|Q|+1}] \cup (N[v_B] \cap C) \subseteq N[t]$。结合 S_{i-1} 是一个独立集这一事实，可知 S_i 是一个独立集。现在，对于 $i \in [|P|+4, |P|+|Q|+3]$，令 $i' = i - |P| - 4$。对于某个 $q \in Q$，我们有 $S_i = (S_{i-1} \setminus \{\ell^{\downarrow}_{|Q|+1-i'}\}) \cup \{\ell^{\downarrow}_{|Q|-i'}, x_{q,v}\}$。注意到 $N[\ell^{\downarrow}_{|Q|-i'}] \subseteq N[\ell^{\downarrow}_{|Q|+1-i'}]$。此外，$N[x_{q,v}] \setminus N[\ell^{\downarrow}_{|Q|-i'}]$ 中的一个顶点要么是 q_A、q'_A、q''_A 之一，要么属于 D。由于 $q \in Q \subseteq B$、q_A、q'_A、q''_A 不在 S 中，因此也不在 S_{i-1} 中。此外，一个独立集至多包含 D 中的一个顶点，因此，S_{i-1} 不包含 $(N[x_{q,v}] \setminus N[\ell^{\downarrow}_{|Q|-i'}]) \cap D$ 中的任何顶点。以上所有结论表明 S_i 是一个独立集，从而完成归纳证明。根据断言 4.9，我们还可得出，对于 $i \in [|P|+3, |P|+|Q|+3]$，S_i 是一个权重高于 S_{i-1} 的独立集。因此，总而言之，π 是一个改进序列。

很容易看出，$S_{|P|+|Q|+4}$ 确实是 $g(A, B)$，且对于 $i \in [1, |P| + |Q| + 3]$，$S_i \notin R$。因此，π 是从 S 到 $g(A, B)$ 的一个改进序列，符合要求。

现在我们证明 (b)。设 $\pi' = (S, S'_1, S'_2, \ldots, S'_r)$ 是一个直接序列。注意，$C \setminus S$ 中的每个顶点都与 $\{v_A, v'_A, v''_A\}$ 或 $\{v_B, v'_B, v''_B\}$ 中的所有顶点相邻，其中对应某个 G 中的顶点 v。因此，如果 $S'_1 \setminus S$ 包含 C 中的一个顶点，那么我们至少需要从 S 中移除三个顶点；在这种情况下，S'_1 不可能通过一次 3-交换与 S 不同。因此，$S'_1 \setminus S$ 只包含 D 中的顶点。由于 G' 的独立集在 D 中最多只能包含一个顶点，这意味着 $S'_1 \setminus S$ 恰好包含一个顶点 $z \in D$。不失一般性，设 z 属于某个划分 $(P, Q) \in \mathrm{R}(v)$ 下某个顶点 v 的 $A2B$-模拟器 $(L^{\uparrow}, t, L^{\downarrow})$。注意，$z$ 与 v'_A、v''_A、v'_B、v''_B 相邻，且这几个顶点中恰好有两个属于 S。因此，从 S 到 S'_1，我们恰好移除 v'_γ、v''_γ（其中某个 $\gamma \in$ 属于 $\{A, B\}$），并加入 z。为了使 S'_1 成为独立集，z 在 G 中的所有邻居都不能属于 S。这些邻居包括集合 $M_{P、Q} = \{p_A, p'_A, p''_A \mid p \in P\} \cup \{q_B, q'_B, q''_B \mid q \in Q\}$ 中的所有顶点。换言之，$P \subseteq B$ 和 $Q \subseteq A$。因此，如果 $v \in B$（即 $\gamma = B$），那么对于每个 $q \in Q$，都有 x_q、$v \in S$。由于我们无法移除这些 x_q，v、z 不能与它们相邻。这意味着 z 必须是 $L^{\downarrow}$ 的底层。然而，移除 v'_B、v''_B 并加入 z 的交换此时并不能改进。因此，$v \in A$。

令 $L^{\uparrow} = \{\ell^{\uparrow}_1, \ldots, \ell^{\uparrow}_{|P|+1}\}$ 和 $L^{\downarrow} = \{\ell^{\downarrow}_1, \ldots, \ell^{\downarrow}_{|Q|+1}\}$，其中 $\ell^{\uparrow}_1$ 和 $\ell^{\downarrow}_1$ 分别是 $L^{\uparrow}$ 和 $L^{\downarrow}$ 的底层。对于 $i \in [1, |P|+|Q|+4]$，我们按照 (a) 部分的证明定义序列 L 和集合 S_i。我们证明序列 $\pi = (S, S_1, \ldots, S_{|P|+|Q|+4})$ 确实是 π'。

令 $Y = X^{\uparrow}_{P,Q} \cup X^{\downarrow}_{P,Q} \cup \{v_A, v_B\} \cup L^{\uparrow} \cup L^{\downarrow} \cup \{t\}$ 我们证明，对于 $L^{\uparrow} \cup \{t\}$ 中的每个顶点 z，都存在唯一的 Y 的独立集 Y^z，使得 $z \in Y^z$，且 $\omega'(Y^z)$ 大于 $\omega'(S \cap Y)$（分别大于 $\omega'(t)$）。注意，$\omega'(S \cap Y) = \alpha(4n + 2) + \sum_{p \in P} \omega(vp)$。考虑以下三种情况：

情况 1：$z = \ell^{\uparrow}_i$ 对于某个 $i \in [1, |P| + 1]$。于是 $\omega'(z) = 2\alpha + \sum_{j<i} \omega(vp_i) + i$。此外，$z$ 在 Y 中的非邻点恰好是 v_A 和 $x_{v,\, p_j}$ 对于 $j \geq i$。由于对于所有边 $e \in E$，$\omega(e) \geq 2n$，如果 Y^z 不包含 z 的任何一个这样的非邻点，那么其总权重将小于 $\omega'(S \cap Y)$。另一方面，如果 Y^z 包含所有这些非邻点，那么其权重将至少为 $\omega'(S \cap Y)$。因此，在这种情况下，Y^z 的唯一性成立。

情况 2：$z = t$。注意，t 与 Y 中的所有顶点都相邻，因此 S 不能在 Y 中有其他顶点。注意，$\omega'(t) = \omega'(\ell^{\downarrow}_{|Q|+1}) + \omega'(v_B) - 1 = \alpha(4n + 2) + \sum_{q \in Q} \omega(v,\ q) - |Q| - 2$。由于 $\sum_{q \in Q} \omega(v,\ q) > \sum_{p \in P} \omega(v,\ p)$，且对于所有边 $e \in E$，$\omega(e)$ 是 $2n$ 的倍数，因此 $\omega'(t) > \omega'(S \cap Y)$。由此可得 Y^z 的唯一性。

情形 3：$z = \ell^{\downarrow}_i$ 对于某个 $i \in [1, |Q| + 1]$。于是 $\omega'(z) = 2\alpha + \sum_{j<i} \omega(vq_i) - i$。此外，$z$ 在 Y 中的非邻点恰好是 v_B 和 $x_{v,\, q_j}$ 对于 $j \geq i$ 成立。通过与情形 1 类似的论证，Y^z 的权重超过 $\omega'(S'_{|P|+2} \cap Y) = \omega'(t)$ 的唯一可能性是它包含所有这些非邻点。因此，在此情形下，我们同样得到 Y^z 的唯一性。

由 π 是从 S 出发的改进序列这一事实，并通过简单的归纳法，我们可以将 $Y^{L[i]}$ 刻画为 $S_i \cap Y$，其中 $i \in [1, |P| + |Q| + 3]$。证明的其余部分如下。首先，我们通过归纳法证明，对于 $i \in [1, |P| + |Q| + 3]$、$S_i \equiv S'_i$，(*) 成立。最后，我们证明存在唯一的 3-交换可以改进 $S_{|P|+|Q|+3}$，即 (**)。注意，(*)、(**) 以及 π 是改进序列这一事实意味着 π 是 π' 的前缀。由于 π 是直接序列，这意味着 $\pi = \pi'$，于是该命题的 (b) 得证。

我们现在证明（*）。对于基例 $i = 1$，回想一下，起初我们论证了从 S 到 S'_1 的交换会在 $(L^{\uparrow}, t, L^{\downarrow})$ 中加入一个顶点 z，并移除 v'_A 和 v''_A。由于 $\{t\} \cup L^{\downarrow}$ 中的顶点都与 $v_A \in S$ 相邻，且 $L^{\uparrow} \setminus \{\ell^{\uparrow}_1\}$ 中的顶点都与 $\{x_{v,p|p \in P}\} \subset S$ 中的某个顶点相邻，因此可知 z 必定是 $\ell^{\uparrow}_1$。这意味着 $S'_1 = S_1$。

对于归纳情形 $i \in [2, |P|+|Q|+3]$，令 W 为将.....变换为.....的改进型 3-交换

S_{i-1} 变为 S_i。假设 W 添加了一个顶点 $z' \notin Y$。注意，对于 $w \in V \setminus \{v\}$，要么 $\{w_A, w'_A, w''_A\} \subseteq S_{i-1}$，要么 $\{w_B, w'_B, w''_B\} \subseteq S_{i-1}$。因此，$W$ 不能在这两个集合中添加任何顶点，因为该顶点要么已经属于 S_{i-1}，要么与 S_{i-1} 中的三个顶点相邻。类似地，对于形如 x_u 的顶点 w，如果 $u \in B \setminus \{v\}$ 或 $w \in A \setminus \{v\}$，那么 $x_{u,w}$ 也与 S_{i-1} 中的三个顶点相邻（即 w_A, w'_A, w''_A 或 u_B, u'_B, u''_B）。此外，如果 $u \in A \setminus \{v\}$ 且 $w \in B \setminus \{v\}$，那么 $x_{u,w}$ 属于 S，因此也属于 S_{i-1}。由于 $z' \notin Y$，以上所有情况都意味着 $z' \notin C$。因此，$z' \in D \setminus (L^{\uparrow} \cup L^{\downarrow} \cup \{t\})$。

这意味着，对于某个划分 (P', Q')，z' 属于顶点 w（它可能是 v）的 $A2B$-或 $B2A$-模拟器。如果 $w \neq v$，那么 W需要移除 w'_A和 w''_A，或 w'_B和 w''_B。此外，W还需要添加 z'，并移除 $S_{i-1} \cap (L^{\uparrow} \cup L^{\downarrow} \cup \{t\})$ 中的顶点。因此，W不可能是 3-交换，矛盾。如果 $w = v$，那么我们有 $(P', Q') \neq (P, Q)$。因此，很容易看出，$M_{P',Q'} \setminus M_{P,Q}$ 至少有三个顶点；正如上文所述，这些顶点必定属于 S_{i-1}（因为对于所有 $p \in P$，$p \in B$；对于所有 $q \in Q$，$q \in A$）。由于这些顶点与 z'相邻，W 需要将它们移除，因此 W 不可能是 3-交换，矛盾。因此，W 不会添加 Y之外的任何顶点。

这意味着 $\omega'(S_i \cap Y)$ 大于 $\omega'(S_{i-1} \cap Y)$，而后者又至少等于 $\omega(S \cap Y)$（对于 $i \leq |P|+2$）和 $\omega'(S_i \cap Y) \geq \omega'(t)$（对于 $i > |P|+2$）。根据上述 Y^z 的唯一性和刻画，以及 $\omega'(S_{t+1} \cap Y) > \omega'(S_t \cap Y)$（对于 $t \in [1, |P| + |Q| + 3]$）这一事实，可知对于某个 $j \in [i, |P| + |Q| + 3]$，有 $S'_i \cap Y = S_j \cap Y$。容易验证，在此范围内，只有 $j = i$ 使得 $|(S_{i-1} \cap Y) \oplus (S_j \cap Y)| \leq 3$。此外，$|(S_{i-1} \cap Y) \oplus (S_i \cap Y)| = 3$。因此，$Y$ 之外不会发生变化，总体而言我们有 $S'_i = S_i$。

最后，我们证明 (**)。假设存在一个改进型 3-交换 W，它将 $S_{|P|+|Q|+3}$ 转换为独立集 S。使用与 (*) 的归纳情形中相同的论证，我们注意到 W 不可能添加 Y 以外的顶点。如果 W 在 $Y \cap D$ 中添加顶点 z'，那么根据 $Y^{z'}$ 的唯一性和刻画，我们有某个 $j \in [1, |P|+|Q|+3]$ 满足 $S \cap Y = S_j \cap Y$。然而，由于 π 是改进型的，我们知道对于所有 $j \in [1, |P|+|Q|+3]$，$\omega'(S_j \cap Y) \leq \omega'(S_{|P|+|Q|+3} \cap Y)$。由于 W 没有添加 Y 以外的任何顶点，这意味着 $\omega'(S) \leq \omega'(S_{|P|+|Q|+3})$，这与 W 是改进型的矛盾。因此，W 只能添加 $Y \cap C$ 中的顶点，而 S 不包含 D 中的顶点。由于 $\{v_A, v'_A, v''_A\}$ 与 $\{v_B, v'_B, v''_B\}$ 构成的完全二部图，以及 $\{x_{q,v} \mid q \in Q\}$ 与 $\{x_{v,p} \mid p \in P\}$ 构成的完全二部图，$Y \cap C$ 的唯一极大独立集为 $\{v_A, v'_A, v''_A\} \cup \{x_{v,p} \mid p \in P\}$ 和 $\{v_B, v'_B, v''_B\} \cup \{x_{q,v} \mid q \in Q\}$。只有后者的权重大于 $\omega'(S_{|P|+|Q|+3})$，且仅多出 1。这意味着 $S \cup Y = \{v_B, v'_B, v''_B\} \cup \{x_{q,v} \mid q \in Q\}$。要实现这一点，$W$ 必须移除 $\ell_1^{\downarrow}$，并添加 v'_B 和 v''_B。这意味着，W 不会改变 Y 以外的任何顶点。换言之，改进 $S_{|P|+|Q|+3}$ 的方式是唯一的。至此，这一论断得证。$\lhd$

现在我们正式定义该归约。令 Φ为一个函数，它将如上所述的最大割/翻转实例 I 映射为加权独立集/3-交换实例 I'。注意，对于 G' 的一个独立集 S 以及每个顶点 $v \in V$，集合 $\{v_A, v'_A, v''_A\}$ 和 $\{v_B, v'_B, v''_B\}$ 中至多有一个与 S 的交集非空。我们将解映射函数 $\Psi(I, S)$ 定义如下：对于每个顶点 $v \in V$，如果 $\{v_A, v'_A, v''_A\} \cap S \neq \emptyset$，则将 v 加入 A；否则将 v 加入 B。随后令 (A, B) 为 $\Psi(I, S)$。不难看出，Φ 和 Ψ 可以在多项式时间内计算。结合断言4.10和4.11，这意味着 (Φ, Ψ) 是一个 PLS 归约。

最后，我们证明集合 R above 满足定义 2.4 中规定的所有条件。根据断言 4.10，R 包含所有局部最优解，因此满足第一个条件。对于 V 的每个划分 (A, B)，我们都能在多项式时间内构造出 $g(A, B)$，并注意到$\Psi(I, g(A, B)) = (A, B)$。因此，第二个条件得以满足。最后，断言 4.12

意味着定义 2.4 的第三个条件得以满足。总而言之，这意味着 (Φ, Ψ) 是一个紧PLS归约。◀

现在我们可以证明定理 4.3 了。

定理 4.3 的证明。由于紧的多项式局部搜索归约保留全指数性质 [29],定理 4.3 立即由定理 4.7、以下事实最大割/翻转在最大度数为四且具有正权重时具有全指数性质 [26], 以及以下观察得出：归约中的加权独立集/3-交换实例的所有权重均为正。◀

5 归约的新概念

本节中，我们定义一种新的多项式局部搜索归约概念，可将定理 4.1 的结果推广到其他问题。我们还通过描述一种从加权独立集/3-交换[Pivot] 到最大电路/翻转[Pivot], 的归约来展示这一概念；后者是加权电路/翻转[Pivot]的一个特例。

5.1 ℓ-紧的多项式局部搜索归约

▶ **定义 5.1** (ℓ-紧 多项式局部搜索-归约)。 从问题 $P \in$多项式局部搜索到问题 $Q \in$ 多项式局部搜索 的 ℓ-紧 多项式局部搜索-归约 是一种 多项式局部搜索-归约 (Φ, Ψ)， 它从 P到 Q，并且对于每个实例$I \in D_P$，我们都可以选取 $F_Q(\Phi(I))$ 的一个子集 R，使其满足：

1. R 包含 $\Phi(I)$ 的所有局部最优解；*2.* 对于每个解 $s_p \in F_P(I)$，我们都可以在多项式时间内构造一个解 $s_q \in R$，使得 $\Psi(I, s_q) = s_p$；*3.* 如果在转移图 $T_{\Phi(I)}$ 中存在一条从 $s_q \in R$ 到 $s'_q \in R$ 的路径，且路径上 R 中没有其他解，那么在转移图 T_I 中，解 $\Psi(I, s_q)$ 到解 $\Psi(I, s'_q)$ 之间要么存在一条边，要么这两个解相同；*4.* 对于两个解 $s_q \in R$ 和 $s'_q \in R$，如果 $\Psi(I, s_q) = \Psi(I, s'_q)$，或者转移图 T_I中存在一条边 $(\Psi(I, s_q)\ \Psi(I, s'_q))$，则从 s_q到 s'_q的最短路径长度至多为 ℓ。

请注意，前三个条件与定义 2.4 中的紧PLS归约完全相同。紧PLS归约禁止在转移图中引入捷径，但两个解之间的距离可以任意增大。我们的新条件 4 限制了这种增大。

▶**定理 5.2**。 设 P 和 P' 是两个属于 多项式局部搜索 的局部搜索问题。假设存在从 P 到 P' 的$\varphi(\ell)$-紧 PLS 归约，其中某个整数为 ℓ，且多项式函数为 φ。如果存在一种算法，能在以 ℓ 为参数时于 固定参数可处理时间内求解 P'[*Pivot*]，那么也存在这样的算法来求解 P[*Pivot*]。

证明。假设存在一个算法 A'，能够在 $g(\ell) \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内求解 P′[Pivot]，其中 g 是某个可计算函数。设 (I, s) 是 P[Pivot] 的一个实例（即， I 是 P 的一个实例， s 是 I 的一个解），并且 ℓ 是从 s 到某个局部最优解的承诺距离。设 (Φ, Ψ) 是引理陈述中给出的 $\varphi(\ell)$-紧PLS归约。设 R 是根据定义 5.1 为归约 (Φ, Ψ) 和 P 的实例 I 所保证的集合。注意，由于 (Φ, Ψ) 是一个PLS归约，我们可以在关于 $|I|$ 的多项式时间内得到 P′ 的解 $I' := \Phi(I)$。根据定义 5.1 的条件 2，我们也可以在多项式时间内得到解

$s' \in R$，使得 $\Psi(I, s') = s$。注意，如果承诺未被违反，那么根据定义 5.1 的条件 4，存在一条从 s' 到 I' 的某个局部最优解的路径，其长度至多为 $\phi(\ell)\ell$。然后，使用算法 A'，我们可以在 $g(\varphi(\ell)\ell) \cdot |I'|^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内找到这样一条路径。注意，这条路径的起点和终点都在 R 中，且路径终点对应于 I 的一个局部最优解。因此，应用定义 5.1 的条件 3，这对应于一条从 s 到 I 的某个局部最优解的路径，其长度至多为 $\varphi(\ell)\ell$。换言之，我们可以在 $g'(\ell) \cdot |I|^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内求解 (I, s, ℓ)，其中 g' 是某个可计算函数。◀

▶注 5.3. 断言 4.12 表明，定理 4.7 的证明中的归约是一个$\mathcal{O}(\Delta)$-紧 PLS 归约。

5.2 归约到最大电路/翻转

在形式化了 ℓ-紧 PLS 归约并证明其能够传递所需下界之后，我们将展示该归约如何应用于子集权重优化问题/c-交换以外的局部搜索问题。

▶**定理 5.4**。存在一个从子集权重优化问题/c-交换到最大电路/翻转的 $O(c)$-紧 多项式局部搜索 归约。

证明。我们改编了文献 [24] 中从任意 PLS 问题到 Min-Circuit/Flip 的 PLS 归约证明。设 $\mathrm{I} = (G, \omega, \sigma)$ 是子集权重优化问题/c-交换的一个实例。设 $G = (V, E)$ 且 $n := |V| + |E|$。现在我们按如下方式构造一个布尔电路 D。注意，我们可以用 n 位对 I 的任意解进行编码，其中每一位都与 $V \cup E$ 中的一条边/一个顶点相关联，当且仅当该边/顶点属于该解时，该位为 1。对于编码 I 的一个解 s 的长度为 n 的字符串 u，令 $\omega(u) := \omega(s)$，并令 $B(u)$ 为这样一个字符串集合：其中的字符串编码了通过对 s 执行一次改进的 c- 交换所能得到的解。对于两个字符串 u 和 w，令 $H(u, w)$ 为 u 与 w 之间的汉明距离，并令 $V(u, w)$ 为这样一个集合：通过按位置递增的顺序翻转 u 与 w 不同的位，将 u 改为 w 时得到的 $H(u, w)$ 个字符串。我们定义函数 $h : \{0, 1\}^{V \cup E} \to \mathbb{Q}$ 如下。对于编码 I 的一个解的长度为 n 的字符串 u，我们对下面某些结构化字符串定义 h 的值：

- $h(uu00) = (2n + 4)\omega(u)$，$h(uv00) = (2n + 4)\omega(u) + H(u, v)$，其中 v 是 $V(u, w)$中的一个
- 字符串，对某个 w 属于 $B(u)$而言，$h(uw10) = (2n + 4)\omega(u) + n + 1$，对于 $w \in B(u)$，h
- $(vu11) = (2n + 4)\omega(u) - H(u, v) - 2$，其中 v 是 $V(w, u)$中的一个字符串，对某个满足
- $u \in B(w)$的 w 而言，并且$h(uu10) = (2n + 4)\omega(u) - 1$。

对于非结构化字符串 x（即，不属于上述任何形式的字符串），$h(x)$的值等于 μ 减去 x中 1 的个数，其中 μ 小于任何结构化字符串对应的值。于是，布尔电路 D 是一个具有 $2n + 2$ 个输入节点、能够对长度为 $2n + 2$的字符串 x 计算值 $h(x)$的电路。这样的多项式规模电路是存在的，因为 h可以在多项式时间内计算 [24, 定理 6.3]。

上述描述构成了函数 Φ，它将子集权重优化问题/c-交换的实例 $\mathcal{I}$ 映射为最大电路/翻转的实例 D。将 D 的解映射为 $\mathcal{I}$ 的解的函数 Ψ 如下：对于形式为 $uv00$ 或 $uv10$的结构化字符串 x，$\Psi(\mathcal{I}, x) = u$（u 和 v 可能相同）。对于形式为 $vu11$的结构化字符串 x，我们赋值 $\Psi(\mathcal{I}, x) = u$。最后，如果 x 是非结构化的，则 $\Psi(\mathcal{I}, x) = 0 \ldots 0$。

很容易看出，非结构化字符串不可能是局部最优解。此外，在结构化字符串中，只有形式为 $uu00$ 的字符串可能是局部最优，当且仅当 u 编码了 $\mathcal{I}$的一个局部最优解。因此，(Φ, Ψ) 是一个多项式局部搜索归约。

现在，考虑集合 R，它由所有结构化字符串组成。我们说明集合 R满足定义 5.1 中的条件。对于第一个条件，正如上文所述，只有结构化字符串才可能是 D的局部最优解，因此 R 包含所有局部最优解。对于第二个条件，我们将 I 的每个解 u 映射到 R中的解 $uu00$ 。对于第三个条件，注意，从一个结构化字符串出发的改进步骤只能得到一个结构化字符串。因此，我们只需考虑两个相邻的结构化字符串 x_1 和 x_2，使得转移图 T_D中存在一条从 x_1 到 x_2 的边。根据函数 Ψ 的选取和构造方式可知，$\Psi(\mathrm{I}\ x_1)$ 与 $\Psi(\mathrm{I}\ x_2)$ 要么相同，要么转移图 $T_{\mathcal{I}}$中存在一条从 $\Psi(\mathrm{I}\ x_1)$ 到 $\Psi(\mathrm{I}\ x_2)$ 的边。因此，第三个条件成立。最后，考虑一个长度为 n 的字符串 u。满足 $\Psi(\mathrm{I}\ x) = u$ 的结构化字符串 x，对于某个 v，必定具有 $uv00$、$uv10$ 或 $vu11$ 的形式，且 $H(u,v) \leq c$。因此，对于任意两个结构化字符串 x_1 和 x_2，若 $\Psi(\mathrm{I}\ x_1) = \Psi(\mathrm{I}\ x_2)$，则必有 $H(x_1,x_2) \leq 2c+2$。类似地，如果 $T_{\mathcal{I}}$中存在一条边 $(\Psi(\mathrm{I}\ x_1)\ \Psi(\mathrm{I}\ x_2))$，那么必有 $H(x_1,x_2) \leq 4c+4$。

总而言之，这表明（Φ，Ψ）是一个（$4c+4$）-紧PLS归约。 ◀

结合定理 4.1 和 5.2，上述定理立即推出以下结论。

▶**推论 5.5**。除非 固定参数可处理 $=$ W[1]，，否则不存在算法能够在 $g(\ell)\cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内求解 *Max-* 电路/翻转[*Pivot*]，其中 g 是任意可计算函数。

6 固定参数算法

在本节中，我们将建立构成主要发现 1 基础的算法上界。我们回顾一下，本节所得的所有结果也都可以直接转换为多项式局部搜索和标准算法问题的表述。

6.1 子集权重优化问题/c-交换

本节展示子集权重优化问题/c-交换[Pivot] 的一些算法结果，该问题以最短距离 ℓ、交换大小 c 和不同权重的数量 k 为参数。首先介绍一个以 ℓ 和 c为参数的 XP 算法。

▶**定理 6.1.** 子集权重优化问题/c-交换[*Pivot*] 可在 $O(n^{c\ell})$时间内求解，其中 n 为实例大小。

证明。考虑子集权重优化问题/c-交换[Pivot]的一个实例 (G,ω)。设 $n := |V(G)| + |E(G)|$。根据定义，I 的任一解在转移图中至多有 $\mathrm{O}(n^c)$ 个邻点。因此，对于 I 的任一解 Q，在转移图中，从 Q 出发沿长度至多为 ℓ 的路径可达的解至多有 $\mathrm{O}(n^{c\ell})$ 个。以深度优先搜索的方式遍历这些解，即可得到具有所述运行时间的算法。◀

接下来，我们考虑交换大小和不同权重的数量都受到限制的情形，并在下述定理中讨论。首先，根据下面的一个简单观察，给出针对这一参数的一个直接的 XP 算法。

▶ **观察 6.2.** 对于问题 P ∈多项式局部搜索 的一个实例 I 和一个解 s，设 I中从 s 到局部最优解的最长距离为 $\ell_{\max}$。那么，P[*Pivot*] 的实例 (I, s) 可以在 $\ell_{\max} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$内求解。

证明。 由于$\mathcal{P}$ 属于 多项式局部搜索，对于任意解 s'，我们可以在多项式时间内判定它是否为局部最优解，或者找到一个更优的解。由于从 s 出发的任何改进序列的长度至多为 $\ell_{\max}$，因此结论成立。◀

▶**推论 6.3**。 子集权重优化问题/c-交换[*Pivot*] 可以在 $O(n^{2k+c})$时间内求解，其中 n 是顶点数， k 是不同权重的数量。

证明。容易看出，给定一个包含 O(n^2) 个数的集合 R，这些数从 k 个不同的取值中选取，则集合 $\{\sum s \in S \mid S \subseteq R\}$ 有 O(n^{2k}) 个元素。这意味着，子集权重优化问题/c-交换[Pivot]实例有 O(n^{2k}) 个可能的目标值。由于改进序列中的所有解的目标值两两不同，因此序列的长度为 O(n^{2k})。结合观察 6.2，再由以下事实即可得出推论：若存在更优解，则可在 O(n^c) 时间内于局部邻域中找到该解。◀

接下来，我们基于以下结果给出一个固定参数可 tractable 算法（见下文推论 6.6）。这一结果已对加权优化问题的核化结果产生了重大影响 [6]。

▶ **定理 6.4** (Frank 和 Tardos [11])。**给定一个有理数向量 和一个整数，存在一个多项式时间算法，可输出一个整数向量 ，使得，并且对于任意满足 的整数向量 ，均有 sign(**$w^\top b) = sign($ $\overline{w}^\top b$**)**。

▶**定理 6.5**。 对于具有 k 种不同权重值的子集权重优化问题/c-交换，无论采用何种枢轴规则，标准局部搜索算法都至多执行 $g(c,k) \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 步，其中 g是某个可计算函数。

证明。将 $N = c + 1$和 $w = (w_1, \ldots w_k)$ 代入定理 6.4，其中 $w = (w_1, \ldots w_k)$ 是由k种不同权重构成的向量，我们得到一个向量$\overline{w} = \overline{(w_1, \ldots w_k)}$，满足：(i) $\overline{|w|_\infty} \leq g(c,k)$，其中 g 是某个可计算函数；(ii) 对于任意满足$|b|_1 \leq c$的整数向量 b，均有 sign($w^\top b$) = sign($w^\top b$)。令 I 为原始实例，令 I 为将任意值为 w_i 的权重替换为 w_i （$i \in [k]$）后得到的实例。由 (i) 可知，I 的目标函数绝对值有界于 $n^{\mathcal{O}(1)}g(c,k)$。由于权重均为整数，每一步的目标函数至少改善 1。因此，无论采用何种枢轴规则，针对 I 的标准局部搜索算法都应在$n^{\mathcal{O}(1)}g(c,k)$步内终止。接下来，由 (ii) 可知，两个 I 的转移图相同。因此，I 的一个局部最优解也是 I 的局部最优解。定理得证。◀

由于我们可以在 $n^{\mathcal{O}(c)}$ 时间内找到一个改进交换，定理 6.5 立即推出以下固定参数可处理结果。

▶**推论 6.6**。 子集权重优化问题/c-交换[*Pivot*] 具有 k 种不同权重值时，可在 $g(c,\ k) \cdot n^{\mathcal{O}(c)}$ 时间内求解，其中 g为某个可计算函数。

请注意，我们大概无法将指数中的 $\mathcal{O}(c)$ 替换为常数。这是因为，在给定无权图中的一个独立集时，判断它是否为局部最优的问题对于参数 c 是 W[1]-困难的 [9] 。此外，根据 [17, 定理 37], 背后的归约，除非指数时间假设不成立，否则该问题无法在 $g(c) \cdot n^{o(c)}$ 时间内求解。

6.2 广义电路/翻转

上一节中的相同证明技巧也可应用于广义电路/翻转[Pivot]。首先，以最短距离 ℓ 为参数时，我们可以得到类似的 XP 结果。

▶**定理 6.7**。 广义电路/翻转[*Pivot*] 有 n 个输入门的实例可以在 $O(n^{\ell})$ 时间内求解。

证明。 每个解在转移图中至多有 n 个邻点。因此，在转移图中穷举所有可由初始解经长度至多为ℓ 的有向路径到达的解，运行时间为$\mathcal{O}(n^{\ell})$。◀

注意，输出只有 2^m 种状态，并且在转移图的任意有向路径中，同一状态不会出现两次。这意味着，从一个解到任何可达局部最优解的距离至多为 2^m （即 $\ell < 2^m$）。虽然上述结果由此推出，按 m参数化时存在 XP 算法，但我们可以直接根据观察 6.2 得到一个固定参数可 tractable 算法。

▶**推论 6.8**。 对于一个包含 n 个输入门和 m 个输出门的广义电路/翻转[*Pivot*] 实例，可以在 $2^m n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内求解。

如果我们以不同权重的数量 k 和下文定理 6.9 中定义的附加参数 t 作为参数化依据，则同样可以得出：任意枢轴规则都能导出一个固定参数算法。

▶**定理 6.9**。 设 I 是一个广义电路/翻转[*Pivot*] 实例，其中的权重从 k 个不同值中独立选取。此外，设 t 为连接到任意一个特定输入门的输出门的最大数量。那么，对于任意枢轴规则，标准局部搜索算法需要 $f(t,k)\cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 步。

证明。 证明与定理 6.5 的证明类似，只需将 c 替换为 t。◀

7 总结

未来研究有许多方向。首先，可以进一步找出一些局部搜索问题：对于这些问题，以初始解到最近局部最优解的距离 ℓ 为参数的枢轴化表述并非固定参数可处理。反过来，是否存在某个自然的 PLS 完全问题，其枢轴化表述在以 ℓ 为参数时允许使用固定参数算法，目前仍是开放问题。注意，对于邻域最大规模为常数，或稍一般地，对于转移图中最大出度为常数的 PLS 完全局部搜索问题，这样的固定参数算法确实存在。例如，可以定义解的一个次序，并重新定义邻域，使其只包含按此次序最小的解。然而，据我们所知，目前没有邻域规模为常数的自然 PLS 完全问题。鉴于上述讨论，更有意义的问题似乎是：是否存在某个 PLS 完全问题，其大型邻域数量无界，而其枢轴化表述相对于 ℓ 是固定参数可处理的。

除了 ℓ，还可以考虑与转移图相关的其他参数。例如，由于以转移图的直径或到最远局部最优解的距离为参数，显然都能得到固定参数算法，因此可以考虑介于 ℓ 和直径之间的参数。根据上述讨论，

也有理由考虑参数组合（q，ℓ），其中 q 是一个始终不超过转移图最大出度的参数。

最后，对于 PLS 问题的经典（非枢轴选择）表述，目前尚未获得任何参数化困难性结果。实现这一结果的主要障碍在于：如果某个 NP困难问题 X 存在一个到 PLS 中某问题 L 的多项式时间图灵归约，则意味着 NP=coNP [16]。这排除了采用标准方法的可能性，即从多色独立集或类似的经典问题出发，提供一个多项式参数变换。换言之，任何从多色独立集或类似问题出发的参数化归约，都需要对参数 k具有指数级的运行时间依赖关系。另一种或许更有前景的方法，是为 PLS 类开发 XP 或 W[1] 的类似物，并确定这些类的完备问题。不过，这将无法把此类问题的困难性与现有复杂性类联系起来。

参考文献

1 E. H. L. Aarts 和 J. K. Lenstra。《组合优化中的局部搜索》。Wiley，奇切斯特，1997年。2 Maurice Chandoo。重新审视参数化复杂性的基础。CoRR，abs/1804.11089，2018年。网址：http://arxiv.org/abs/1804.11089, arXiv:1804.11089。3 Xi Chen、Chenghao Guo、Emmanouil V. Vlatakis-Gkaragkounis、Mihalis Yannakakis 和 Xinzhi Zhang。局部最大割和二元最大约束满足问题的平滑复杂性。载于 Konstantin Makarychev、Yury Makarychev、Madhur Tulsiani、Gautam Kamath 和 Julia Chuzhoy（编），第52届ACM SIGACT理论计算研讨会论文集，STOC 2020，美国伊利诺伊州芝加哥，2020年6月22日至26日，第1052–1065页。ACM，2020年。 doi:10.1145/3357713.3384325。4 Marek Cygan、Fedor V. Fomin、Lukasz Kowalik、Daniel Lokshtanov、Dániel Marx、Marcin Pilipczuk、Michal Pilipczuk 和 Saket Saurabh。《参数化算法》。Springer，2015年。doi:10.1007/978-3-319-21275-3。5 Rodney G. Downey 和 Michael R. Fellows。《参数化复杂性基础》。计算机科学丛书。Springer，2013年。doi:10.1007/978-1-4471-5559-1。6 Michael Etscheid、Stefan Kratsch、Matthias Mnich 和 Heiko Röglin。加权问题的多项式核。计算机与系统科学杂志，84：1–10，2017年。网址：https://doi.org/10.1016/j.jcss.2016.06.004, doi:10.1016/J.JCSS.2016.06.004。7 John Fearnley、Paul Goldberg、Alexandros Hollender 和 Rahul Savani。梯度下降的复杂性：CLS = PPAD ∩ PLS。ACM杂志，70(1)：7:1–7:74，2023年。 doi:10.1145/3568163。8 John Fearnley 和 Rahul Savani。单纯形法的复杂性。载于 Rocco A. Servedio 和 Ronitt Rubinfeld（编），第47届ACM理论计算研讨会论文集，STOC 2015，美国俄勒冈州波特兰，2015年6月14日至17日，第201–208页。ACM，2015年。 doi:10.1145/2746539.2746558。9 Michael R. Fellows、Fedor V. Fomin、Daniel Lokshtanov、Frances A. Rosamond、Saket Saurabh 和 Yngve Villanger。局部搜索：能否避免穷举法？计算机与系统科学杂志，78(3)：707–719，2012年。网址：https://doi.org/10.1016/j.jcss.2011.10.003,doi:10.1016/J.JCSS.2011.10.003。10 Jörg Flum 和 Martin Grohe。《参数化复杂性理论》。理论计算机科学丛书，EATCS系列。Springer，2006年。 doi:10.1007/3-540-29953-X。11 András Frank 和 Éva Tardos。同时丢番图逼近在组合优化中的一种应用。Combinatorica，7(1)：49–65，1987年。 doi:10.1007/BF02579200。12 Jaroslav Garvardt、Niels Grüttemeier、Christian Komusiewicz 和 Nils Morawietz。最大 c-割的参数化局部搜索。载于第三十二届国际人工智能联合会议论文集，IJCAI 2023，中国澳门特别行政区，2023年8月19日至25日，第5586–5594页。ijcai.org，2023年。网址：https://doi.org/10.24963/ijcai.2023/620,doi:10.24963/IJCAI.2023/620。

13 Jaroslav Garvardt、Nils Morawietz、André Nichterlein 和 Mathias Weller。参数化局部搜索视角下的图聚类问题。载于 Neeldhara Misra 和 Magnus Wahlström（编），第18届参数化与精确计算国际研讨会，IPEC 2023，2023年9月6日至8日，荷兰阿姆斯特丹，LIPIcs第285卷，第20:1–20:19页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2023年。网址： https://doi.org/10.4230/LIPIcs.IPEC.2023.20, doi:10.4230/LIPICS.IPEC.2023.20。14 Jiong Guo、Sepp Hartung、Rolf Niedermeier 和 Ondrej Suchý。TSP局部搜索的参数化复杂性：更精细的分析。Algorithmica，67(1)：89–110，2013年。网址： https://doi.org/10.1007/s00453-012-9685-8, doi:10.1007/S00453-012-9685-8。15 Sophia Heimann、Hung P. Hoang 和 Stefan Hougardy。旅行商问题的 k-opt 算法具有指数运行时间（当 $k \geq 5$ 时）。载于 Karl Bringmann 、 Martin Grohe 、 Gabriele Puppis 和 Ola Svensson （编），第51届自动机、语言与编程国际学术讨论会，ICALP 2024，2024年7月8日至12日，爱沙尼亚塔林，LIPIcs第297卷，第84:1–84:18页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2024年。网址：https://doi.org/10.4230/LIPIcs.ICALP.2024.84, doi:10.4230/LIPICS.ICALP.2024.84。16 David S. Johnson、Christos H. Papadimitriou 和 Mihalis Yannakakis。局部搜索有多容易？计算机与系统科学杂志，37(1)：79–100，1988年。17 Christian Komusiewicz 和 Nils Morawietz。顶点覆盖的参数化局部搜索：搜索半径为何是关键。载于 Holger Dell 和 Jesper Nederlof（编），第17届参数化与精确计算国际研讨会，IPEC 2022，2022年9月7日至9日，德国波茨坦，LIPIcs第249卷，第20:1–20:18页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2022年。网址： https://doi.org/10.4230/LIPIcs.IPEC.2022.20, doi:10.4230/LIPICS.IPEC.2022.20。18 Christian Komusiewicz 和 Nils Morawietz。寻找3-交换最优独立集和支配集是困难的。ACM计算理论汇刊，17(1)：1:1–1:31，2025年。 doi:10.1145/3700642。19 Mark W. Krentel。局部最优解中的结构（扩展摘要）。载于第30届计算机科学基础年会，FOCS 1989，美国北卡罗来纳州研究三角园，1989年10月30日至11月1日，第216–221页。IEEE计算机学会，1989年。doi:10.1109/SFCS.1989.63481。20 Andrei A. Krokhin 和 Dániel Marx。减重问题的困难性。ACM算法汇刊，8(2)：19:1–19:18，2012年。 doi:10.1145/2151171.2151182。21 Bodo Manthey、Nils Morawietz、Jesse van Rhijn 和 Frank Sommer。欧几里得聚类问题的局部搜索复杂性。载于 Julián Mestre 和 Anthony Wirth（编），第35届算法与计算国际研讨会，ISAAC 2024，2024年12月8日至11日，澳大利亚悉尼，LIPIcs第322卷，第48:1–48:16页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2024年。网址： https://doi.org/10.4230/LIPIcs.ISAAC.2024.48,doi:10.4230/LIPICS.ISAAC.2024.48。22 Dániel Marx 和 Ildikó Schlotter。带有并列偏好的稳定婚姻问题的参数化复杂性与局部搜索方法。Algorithmica，58(1)：170–187，2010年。网址： https://doi.org/10.1007/s00453-009-9326-z, doi:10.1007/S00453-009-9326-Z。23 Lukas Michel 和 Alex Scott。局部最大割中3-flip的超多项式平滑复杂性。CoRR，abs/2310.19594，2023年。网址： https://doi.org/10.48550/arXiv.2310.19594,arXiv:2310.19594, doi:10.48550/ARXIV.2310.19594。24 Wil Michiels、Emile Aarts 和 Jan Korst。《局部搜索的理论方面》。理论计算机科学专著，EATCS系列。Springer，柏林，2007年。25 Burkhard Monien、Dominic Dumrauf 和 Tobias Tscheuschner。局部搜索：简单、成功，但有时进展缓慢。载于 Samson Abramsky、Cyril Gavoille、Claude Kirchner、Friedhelm Meyer auf der Heide 和 Paul G. Spirakis（编），自动机、语言与编程，第37届国际学术讨论会，ICALP 2010，法国波尔多，2010年7月6日至10日，论文集第一部分，计算机科学讲义第6198卷，第1–17页。Springer，2010年。 doi:10.1007/978-3-642-14165-2_1。

26 Burkhard Monien 和 Tobias Tscheuschner。《局部最大割问题中度为四的节点的作用》。载于 Tiziana Calamoneri 和 Josep Díaz 编，《算法与复杂性》，第七届国际会议，*CIAC 2010*，罗马，意大利，*2010*年*5*月*26*日至*28*日。会议论文集，收录于第6078卷《计算机科学讲义》，第264–275页。Springer，2010年。 doi:10.1007/978-3-642-13073-1_24。27 Christos H. Papadimitriou。《Lin-Kernighan 启发式算法在旅行商问题中的复杂性》。《*SIAM*计算杂志》，21(3):450–465，1992年。 doi:10.1137/0221030。28 Christos H. Papadimitriou、Alejandro A. Schäffer 和 Mihalis Yannakakis。《局部搜索的复杂性（扩展摘要）》。载于 Harriet Ortiz 编，《第*22*届*ACM*计算理论研讨会年度会议论文集》，*STOC 1990*，美国马里兰州巴尔的摩，*1990*年*5*月*13*日至*17*日，第438–445页。ACM，1990年。 doi:10.1145/100216.100274。29 Alejandro A. Schäffer 和 Mihalis Yannakakis。《难以求解的简单局部搜索问题》。《*SIAM*计算杂志》，20(1):56–87，1991年。30 Leonard J. Schulman。《边成本最小化中的聚类（扩展摘要）》。载于 F. Frances Yao 和 Eugene M. Luks 编，《第三十二届*ACM*计算理论研讨会年度会议论文集》，*STOC 2000*，美国俄勒冈州波特兰，*2000*年*5*月*21*日至*23*日，第547–555页。ACM，2000年。 doi:10.1145/335305.335373。31 Stefan Szeider。《可满足性问题和最大可满足性问题的 k翻转局部搜索的参数化复杂性》。《离散优化》，8(1):139–145，2011年。网址: https://doi.org/10.1016/j.disopt.2010.07.003， doi:10.1016/J.DISOPT.2010.07.003。