arXiv:2601.00569v1 [cs.GR] 2 Jan 2026

使用双线性实体壳单元对折纸结构进行建模与仿真

Qixin Liang 香港大学 香港，香港 TransGP 新界，香港
liangqixin23@outlook.com

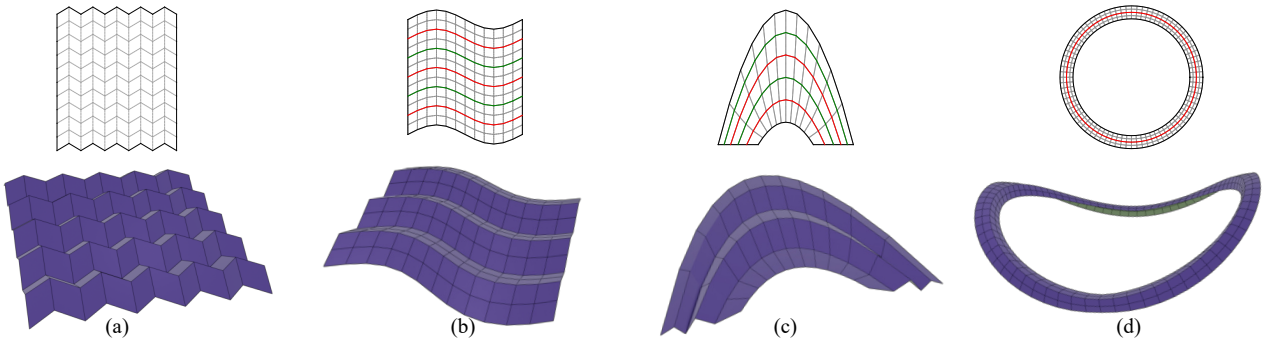


图 1：如图所示，我们的框架能够使用双线性实体壳单元，对具有预折直线和曲线折痕的折纸结构进行建模与仿真。该方法为折纸结构的设计与分析提供了有效的框架。

摘要

我们提出了一种用于折纸结构建模与仿真的新型计算框架。在该框架中，采用双线性实体壳单元对折纸面板进行建模，并通过相邻面板的指向向量之间的夹角来描述折痕折叠。指向向量是位移或变形发生前垂直于中面的向量。为缓解实体壳单元中的锁死问题，我们引入了假定自然应变法。为验证该框架的有效性，我们对含有直线和曲线折痕的折纸结构进行了仿真。通过定量和定性分析，展示了该框架的准确性和有效性。

ACM 概念分类

• **计算方法 → 物理仿真；建模与仿真。**

允许免费制作本作品的全部或部分数字副本或纸质副本，用于个人或课堂用途，但前提是不得为营利或商业利益制作或传播副本，且副本首页须附上本声明及完整引文。对于本作品中由作者以外的其他方拥有版权的部分，必须尊重其版权。注明出处后，允许摘录。若要以其他方式复制、再版、发布到服务器或分发至列表，则须事先获得特定许可和/或支付费用。请向 permissions@acm.org 申请许可。*SA Technical Communications '25*，香港，香港© 2025 版权归所有者/作者所有。出版权已授权给 ACM。ACM ISBN 979-8-4007-2136-6/2025/12
https://doi.org/10.1145/3757376.3771398

ACM 参考文献格式：
Qixin Liang。2025。使用双线性实体壳单元进行折纸结构建模与仿真。载于*SIGGRAPH Asia 2025* 技术交流（*SA Technical Communications '25*），*2025*年*12*月*15*日至*18*日，中国香港。ACM，纽约，NY，美国，7页。https://doi.org/10.1145/3757376. 3771398

1 引言

折纸源于古老的折纸艺术，如今已发展成为科学与工程领域的一门多学科交叉学科。随着折纸结构从刚性面板转变为展现复杂多物理场响应的可变形面板，人们愈发需要能够准确捕捉其几何与物理行为的仿真技术。

折纸仿真方法大体可分为基于运动学的方法和基于力学的方法。基于运动学的方法 [Tachi 2009]假设面板保持刚性且平坦，因此仅以折叠角作为描述变形的变量。这些方法计算效率高，但无法考虑面板变形。基于力学的方法放宽了刚性假设，允许发生膜变形和弯曲变形。广泛使用的杆铰模型 [Liu 和 Paulino 2017], 与布料仿真中的质点弹簧模型类似 [Bridson 等人 2005],但存在网格依赖问题：材料参数会随网格分辨率变化，且难以迁移到不同的网格拓扑。离散壳模型 [Burgoon 等人 2006] 提高了折纸面板的膜精度，但仍表现出网格依赖的弯曲行为。其他离散模型和基于直纹面的模型 [Rabi- novich 等人 2019；Solomon 等人 2012] 施加了严格的等距性

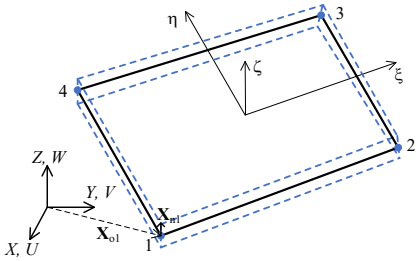
约束，因此难以考虑物理本构定律。在 [Hu 等人 2021], 提出了一种共旋四边形单元，用于模拟四边形面板的弯曲变形；然而，该单元只能捕捉单个单元内部的翘曲弯曲。

受这些进展的启发，我们引入了一种实体壳单元来建模折纸面板。我们不使用离散杆表示变形折痕线 [Le 等人提出的方法 2023], ，也不依靠重新网格化来平滑尖锐折痕 [Narain 等人提出的方法 2013], ，或采用刚性棱柱面板的法向量 [Kilian 等人提出的方法 2017], ，而是保留尖锐特征，并通过同一折痕上各单元指向向量之间的夹角，便捷地对折叠运动进行建模。我们的贡献如下：

- 我们提出了一种基于实体壳单元指向向量的折痕模型。
- 我们为双线性四边形实体壳单元提出了全拉格朗日公式 [Sze 等人 2002], ，该公式通过假设自然应变法（ANS）有效缓解了各种锁定现象。
- 我们展示了两个计算折纸折叠示例——一个具有直折痕，另一个具有曲折痕——以及它们的解析解、边界条件和材料设置。这些示例可作为折纸模拟工具基准测试的有用参考。

本研究旨在为折纸结构的设计与分析提供一种通用工具。

2 折纸仿真的计算模型 2.1 实体壳有限元模型



上图显示了一个中面上带有节点的双线性实体壳单元，插值初始位置向量 $\mathbf{X}$ 和位移向量 $\mathbf{U}$可写为：

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_o(\xi,\eta) + \zeta\mathbf{X}_n(\xi,\eta) = \sum_i N_i(\xi,\eta)\,\mathbf{X}_{oi} + \zeta\sum_i N_i(\xi,\eta)\,\mathbf{X}_{ni},$$
$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_o(\xi,\eta) + \zeta\mathbf{U}_n(\xi,\eta) = \sum_i N_i(\xi,\eta)\,\mathbf{U}_{oi} + \zeta\sum_i N_i(\xi,\eta)\,\mathbf{U}_{ni}, \tag{1}$$

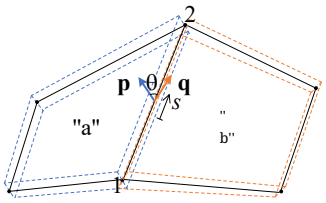
其中，(ξ,η,ζ) 是自然坐标向量 $\boldsymbol{\xi}$，其分量的取值范围为 -1 到 1； N_is 是标准双线性插值函数； $\mathbf{X}_o = [X_o, Y_o, Z_o]^T$和 $\mathbf{X}_n = [X_n, Y_n, Z_n]^T$分别是初始中面位置和导向矢量，而$\mathbf{U}_o = [U_o, V_o, W_o]^T$ 和$\mathbf{U}_n = [U_n, V_n, W_n]^T$ 分别是中面位移向量和导向矢量位移向量。

初始节点指向向量 $\mathbf{X}_{ni}$应取为垂直于实际初始中面；除非该中面是平坦的，否则它与插值中面 $\mathbf{X}_o(\xi,\eta)$。自然 Green-Lagrange 应变张量为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial(\mathbf{X}+\mathbf{U})}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right)^T\frac{\partial(\mathbf{X}+\mathbf{U})}{\partial\boldsymbol{\xi}} - \left(\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right)^T\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right). \tag{2}$$

其分量包括 $\varepsilon_{\phi\psi}$、 $\gamma_{\zeta\phi}$ （ϕ， $\psi = \xi$， η）和 $\varepsilon_{\zeta\zeta}$，分别对应自然面内应变、横向剪切应变和横向正应变。关于单元公式和假定自然应变法的更多细节，请参阅补充材料。

2.2 折痕建模



在上图中， $s \in [-1,1]$ 是单元“a”和“b”之间折痕的参数坐标。虽然两单元共用该折痕，但沿折痕方向的导向矢量彼此独立。在当前构形中，令 $\mathbf{p}$ 和$\mathbf{q}$ 分别表示单元“a”和“b”的导向矢量。它们可通过对节点 1 处的变形后导向矢量 $\mathbf{X}_{n1} + \mathbf{U}_{n1}$ 以及节点 2 处的变形后导向矢量 $\mathbf{X}_{n2} + \mathbf{U}_{n2}$ $s = 1$进行插值得到，如下所示：

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= L_1(\mathbf{X}^a_{n1} + \mathbf{U}^a_{n1}) + L_2(\mathbf{X}^a_{n2} + \mathbf{U}^a_{n2}),\\ \mathbf{q} &= L_1(\mathbf{X}^b_{n1} + \mathbf{U}^b_{n1}) + L_2(\mathbf{X}^b_{n2} + \mathbf{U}^b_{n2}),\end{aligned} \tag{3}$$

其中， $L_1 = (1-s)/2$ 和 $L_2 = (1+s)/2$ 是线性插值函数。

在薄壳分析中，实体壳应变单元中的横向剪切和厚度应变被约束为零，厚度方向实际上不可伸长，且沿折痕的导向矢量$\mathbf{p}$与$\mathbf{q}$ 之间的切向相对运动可以忽略。因此，折痕的折叠角可近似表示为

$$\theta = \begin{cases}\cos^{-1}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{pq} & \text{for } (\mathbf{p}\times\mathbf{q})\cdot(\mathbf{x}_{o2}-\mathbf{x}_{o1}) \geq 0\\ -\cos^{-1}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{pq} & \text{otherwise}\end{cases}. \tag{4}$$

当两个单元处于平面状态时， θ的取值范围为 $[-\pi,\pi]$， 其中 $\theta = \pm\pi$ 表示单元完全折叠。为防止出现物理上不可接受的自相交构形，采用以下结合非线性折叠本构模型的折痕能量 Ψ_c

$$l\begin{cases}\frac{1}{2}k_f(\theta_0-\theta_L)^2 + k_f(\theta_0-\theta_L)(\theta_L-\theta) & \\ \quad -\frac{4k_f(\theta_L+\pi)^2}{\pi^2}\ln\left|\cos\left(\frac{\pi(\theta_L-\theta)}{2(\theta_L+\pi)}\right)\right| & -\pi < \theta < \theta_L\\ \frac{1}{2}k_f(\theta-\theta_0)^2 & \theta_L \leq \theta \leq \theta_R\\ \frac{1}{2}k_f(\theta_R-\theta_0)^2 + k_f(\theta_R-\theta_0)(\theta-\theta_R) & \\ \quad -\frac{4k_f(\pi-\theta_R)^2}{\pi^2}\ln\left|\cos\left(\frac{\pi(\theta-\theta_R)}{2(\pi-\theta_R)}\right)\right| & \theta_R < \theta < \pi\end{cases}, \tag{5}$$

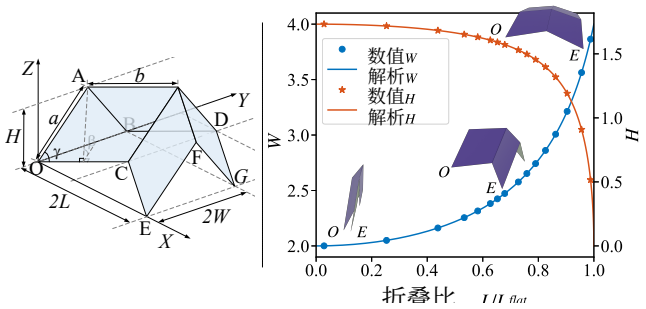


图 2：压缩 *Miura-ori* 单元。 左：一个 Miura-ori 单元。右：宽度W和高度 H随折叠比 L/L_{flat}的变化曲线。

其中 $l = \|\mathbf{X}_{o2} - \mathbf{X}_{o1}\|$ 为折痕长度， k_f为单位长度的折叠刚度 [Liu 和 Paulino 2017]。 θ_L 和θ_R 为触发惩罚项的折叠角限值。在区间$[\theta_L, \theta_R]$内，能量呈现以静止角 θ_0为中心的标准二次函数特性。超出此范围后，对数项会迅速增大，对趋近于$\theta = \pm\pi$的构形施加强惩罚，从而有效防止自相交。

3 结果

我们的计算模型可在大多数（甚至所有）有限元程序中实现。本文采用带阻尼的牛顿求解器和自适应增量法（参见补充文档）。以下测试中，所有材料参数和几何参数均采用国际单位制表示。定量验证包括两个具有已知解析解的基准测试，此外，补充文档还介绍了一个案例，以进一步验证实体壳单元。随后，我们进行了一系列定性测试，以说明当前框架在更复杂情形中的适用性。

3.1 定量测试

3.1.1 压缩 *Miura-ori* 单元。 图 2 左图展示了一个 Miura-ori 单元，图 1a 展示了完整的 Miura-ori 结构。在折叠过程中，晶胞仅沿预设折痕发生变形。因此，在刚性面板假设下，其变形可用解析方法描述 [Schenk 和 Guest 2013]。解析解为

$$H = a \sin\beta \sin\gamma,$$
$$L = 2b \frac{\cos\gamma \tan\beta}{\sqrt{1 + \cos^2\gamma \tan^2\beta}}, \quad W = 2a\sqrt{1 - \sin^2\gamma \sin^2\beta}. \tag{6}$$

Miura-ori 单元的几何形状由参数 $a = 2$、 $b = 2$ 和 $\gamma = 60°$ 定义。为了将 Miura-ori 单元建模为由刚性面板通过柔性铰链连接而成的“刚性折纸”系统，我们采用 [Liu 和 Paulino 2017], 中的方法，将面板的弯曲刚度设为折叠刚度的 10^5 倍。所用的材料参数为 $E = 12 \times 10^9$、$\nu = 0.3$ $h = 0.01$ $15°$ 、和 $k_f = 0.01$。为避免屈曲，初始构型设为 β，使 Miura-ori 单元近乎平坦。边界条件如下：节点 O 处施加 $\mathbf{U}_o = \mathbf{0}$ ；节点 A 和 B 处施加 $U_o = 0$ ；节点 O、B、C、D、E 和 G 处施加 $W_o = 0$ ；在节点 E、F 和 G 处施加 $U_o = -3.44$ ，将晶胞压缩至折叠构型。如图 2 右图所示，我们的预测结果与解析解完全一致。

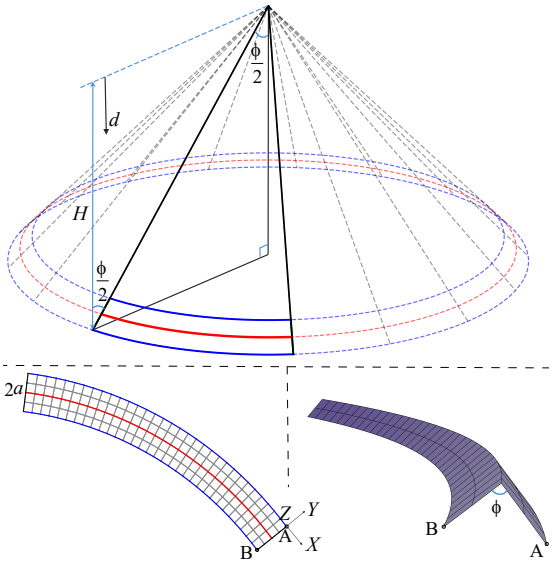


图 3： 将带折痕环形扇区折叠成理论上的圆锥。 左下方所示的 32×4 网格化切割环带取自上方的圆锥，其顶角为 $\phi = 90°$。右下方的曲线折痕折纸结构也呈现出 $\phi = 90°$的折叠角。

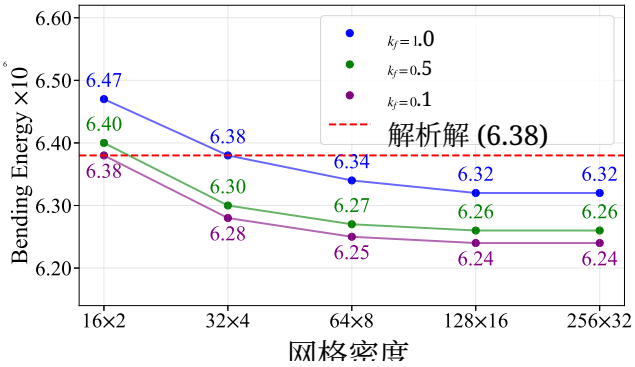


图 4：切割环带中的弯曲能与网格密度的关系。

3.1.2 将带折痕的环形扇区折叠成理论圆锥。Following [Woodruff andFilipov 2020],我们从圆锥上切取一个环形扇区，将其展平为一片平面片，然后沿曲折痕将其折叠成曲线折痕结构（见图 3）。沿曲折痕折叠初始为平面的片材时，可展圆锥面会在运动过程中发生弯曲。在等距假设下，右侧圆锥表面上环形区域的理论弯曲能

可计算为

$$\Psi_{\text{annulus}} = \frac{1}{2}\int_{\Omega} D_b \kappa_p^2 \, d\Omega, \tag{7}$$

其中， $D_b = Eh^3/12(1-\nu^2)$是各向同性壳体的弯曲刚度， Ω 是环形区域的面积，主曲率κ_p 为

$$\kappa_p = \frac{1}{\tan(\phi/2)\sqrt{1+\tan^2(\phi/2)}d}, \tag{8}$$

其中， d 是沿圆锥高度从圆锥顶点量起的距离， $\phi/2$是圆锥顶角的一半（见图 3）。根据 [Woodruff 和 Filipov 2020]，，当曲线折痕结构的折叠角为 $\phi = 90°$时，折叠后的形状恰好成为圆锥的一段。

在数值模拟中，我们采用 [Woodruff 和 Filipov 2020]中的几何参数和材料参数。中间圆弧的半径为 $R = 0.1$，该圆弧平分宽度为 $a = 0.005$的环带，圆心角为 $\alpha = \pi/4$。 $E = 4\times10^9$、$\nu = 0$和 $h = 0.1\times10^{-3}$。折叠刚度 k_f通常按壳体的弯曲刚度进行缩放 [Lechenault 等人 2014]；因此，我们考虑三个具有代表性的取值：0.1、0.5 和 1。边界条件如下：$\mathbf{U}_o = \mathbf{0}$ 施加于节点 A； $V_o = W_o = 0$ 施加于节点 B； $W_o = 0$ 也施加于内圆弧和外圆弧上的所有节点； $W_o = a/\sqrt{2}$ 施加于中间圆弧，以产生 90° 的折叠角。

如图 4 所示，随着网格细化，预测的弯曲能迅速收敛至接近理论值，其相对误差分别约为 0.9%、1.8% 和 2.1%，对应的折叠刚度值分别为 1、0.5 和 0.1。这清楚地展示了折叠刚度对弯曲响应的影响。该案例凸显了我们的方法在模拟和分析曲线折痕折纸结构方面的潜力。

3.2 定性测试

图 1 和图 5 展示了更多定性结果，说明了我们的模型处理更复杂结构的能力。

4 结论与讨论

本文提出使用实体壳单元对折纸结构进行建模，并利用单元中自然嵌入的指向向量计算折痕折叠角。本文考虑了具有直线和曲线折痕的折纸结构。我们的预测结果接近解析解。

我们的建模方法可以自然地扩展到三角形实体壳单元和高阶实体壳单元，同时继续利用指向向量对折痕进行建模，从而能够模拟曲线折痕折纸结构 [Liu 和 James 2024]，，而这类结构使用现有方法很难捕捉。

致谢

作者感谢 K.Y. Sze教授和匿名审稿人提出的宝贵意见，并衷心感谢资助方 TransGP。

参考文献

R. Bridson、S. Marino 和 R. Fedkiw。2005。带有褶皱和皱纹的服装模拟。载于*ACM SIGGRAPH 2005*课程 （加利福尼亚州洛杉矶）（*SIGGRAPH '05*）。计算机协会，纽约州纽约市，3–页。doi:10.1145/ 1198555.1198573 Rob Burgoon、Zoë J. Wood 和 Eitan Grinspun。2006。离散壳折纸。载于第*21*届国际计算机及其应用会议论文集（*CATA 2006*）。ISCA，美国华盛顿州西雅图，180–187。https://digitalcommons. calpoly.edu/csse_fac/204/ YC Hu、YX Zhou、KW Kwok 和 KY Sze。2021。使用有限元方法模拟柔性折纸结构。《国际力学与材料设计杂志》17（2021），801–829。doi:10.1007/s10999-021-09538-w Martin Kilian、Aron Monszpart 和 Niloy J. Mitra。2017。绳驱动曲面折叠。《*ACM* 图形学汇刊》36，4（2017年7月），13页。doi:10.1145/3072959.3015460 Qiqin Le、Yitong Deng、Jiamu Bu、Bo Zhu 和 Tao Du。2023。可变形曲面的二阶有限元。载于*SIGGRAPH Asia 2023* 会议论文（*SA '23*）。计算机协会，纽约州纽约市，论文113，10页。doi:10.1145/3610548.3618186 F. Lechenault、B. Thiria 和 M. Adda-Bedia。2014。折痕薄片的力学响应。《物理评论快报》112（2014年6月），244301。第24期。doi:10.1103/PhysRevLett. 112.244301 Huan Liu 和 Richard D. James。2024。设计折痕之间带有曲面瓦片的折纸结构。《固体力学与物理学杂志》185（2024），105559。doi:10.1016/j.jmps.2024.105559 Ke Liu 和 Glaucio H Paulino。2017。非刚性折纸的非线性力学：一种高效的计算方法。《英国皇家学会会刊*A*辑：数学、物理与工程科学》473，2206（2017），20170348。doi:10.1098/rspa.2017. 0348 Rahul Narain、Tobias Pfaff 和 James F. O'Brien。2013。自适应薄片的折叠与褶皱。《*ACM* 图形学汇刊》32，4（2013年7月），8页。doi:10.1145/2461912.2462010 Michael Rabinovich、Tim Hoffmann 和 Olga Sorkine-Hornung。2019。使用自由形变对曲褶进行建模。《*ACM* 图形学汇刊》38，6（2019年11月），12页。doi:10.1145/3355089.3356531 Mark Schenk 和 Simon D. Guest。2013。Miura折叠超材料的几何。《美国国家科学院院刊》110，9（2013），3276–3281。doi:10. 1073/pnas.1217998110 Justin Solomon、Etienne Vouga、Max Wardetzky 和 Eitan Grinspun。2012。柔性可展曲面。《计算机图形论坛》31，5（2012），1567–1576。doi:10. 1111/j.1467-8659.2012.03162.x K. Y. Sze、W. K. Chan 和 T. H. H. Pian。2002。用于弹性壳几何非线性分析的八节点混合应力实体壳单元。《国际数值方法工程期刊》55，7（2002），853–878。doi:10.1002/nme.535 Tomohiro Tachi。2009。刚性折纸的模拟。《折纸》4，08（2009），175–187。Steven R. Woodruff 和 Evgueni T. Filipov。2020。用于曲褶折纸结构分析的杆铰模型公式。《国际固体与结构期刊》204-205（2020），114–127。doi:10.1016/j.ijsolstr.2020.08.010 Peter Wriggers。2008。非线性有限元方法。Springer Berlin Heidelberg，德国柏林海德堡。doi:10.1007/978-3-540-71001-1

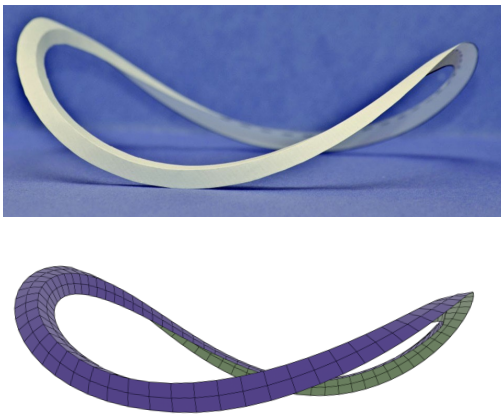


图 5：将纸制完整环带折弯。 上方图像经许可转载自 Marcelo A. Dias、Levi H. Dudte、L. Mahadevan 和 Christian D. Santangelo，《物理评论快报》109，114301（2012）。版权所有 ©2012 美国物理学会。（DOI：http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett. 109.114301）下方图像为我们的模拟结果。

双线性实体壳单元

插值初始位置向量$\mathbf{X}$和位移向量$\mathbf{U}$可以写为：

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \mathbf{X}_o(\xi,\eta) + \zeta \mathbf{X}_n(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} N_i \mathbf{X}_{oi} + \zeta \sum_{i=1}^{4} N_i \mathbf{X}_{oi},\\ \mathbf{U} &= \mathbf{U}_o(\xi,\eta) + \zeta \mathbf{U}_n(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} N_i \mathbf{U}_{oi} + \zeta \sum_{i=1}^{4} N_i \mathbf{U}_{ni},\end{aligned} \tag{9}$$

其中，(ξ,η,ζ)是自然坐标向量 $\boldsymbol{\xi}$，其分量的取值范围为 -1 到 1；第 i 个单元节点的插值函数为

$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4},\ N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4},\\ N_3 &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4},\ N_4 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}.\end{aligned} \tag{10}$$

初始节点导向矢量 $\mathbf{X}_{ni}$应取为与实际初始中面垂直。除非该中面是平面，否则它不同于插值中面 $\mathbf{X}_o(\xi,\eta)$。自然坐标下的 Green-Lagrange 应变张量为

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial(\mathbf{X}+\mathbf{U})}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right)^T \frac{\partial(\mathbf{X}+\mathbf{U})}{\partial\boldsymbol{\xi}} - \left(\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right)^T \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right)^T \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial\boldsymbol{\xi}} + \left(\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right)^T \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\boldsymbol{\xi}} + \left(\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right)^T \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right).\end{aligned} \tag{11}$$

其分量包括

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\phi\psi} &= \frac{1}{2}(\mathbf{X}_{,\phi}^T\mathbf{U}_{,\psi} + \mathbf{X}_{,\psi}^T\mathbf{U}_{,\phi} + \mathbf{U}_{,\phi}^T\mathbf{U}_{,\psi}) = \varepsilon_{m\phi\psi} + \zeta\varepsilon_{b\phi\psi} + \zeta^2\text{-terms},\\ \varepsilon_{\zeta\phi} &= \frac{1}{2}(\mathbf{X}_{,\phi}^T\mathbf{U}_n + \mathbf{X}_n^T\mathbf{U}_{,\phi} + \mathbf{U}_{,\phi}^T\mathbf{U}_n) = \frac{\gamma_{\zeta\phi}}{2} + \zeta\text{-terms},\\ \varepsilon_{\zeta\zeta} &= \mathbf{X}_n^T\mathbf{U}_n + \frac{\mathbf{U}_n^T\mathbf{U}_n}{2},\end{aligned} \tag{12}$$

其中 ϕ，$\psi=\xi$，η；$\varepsilon_{m\phi\psi}$、$\varepsilon_{b\phi\psi}$、$\gamma_{\zeta\phi}$和$\varepsilon_{\zeta\zeta}$分别为自然膜应变、弯曲应变、横向剪切应变和横向正应变。$\varepsilon_{\zeta\phi}$和$\varepsilon_{\phi\psi}$中的一阶和二阶 ζ项属于次要效应，将予以忽略。进一步展开可得

$$\begin{aligned}\varepsilon_{m\phi\psi} &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{X}_{o,\phi}^T\mathbf{U}_{o,\psi} + \mathbf{X}_{o,\psi}^T\mathbf{U}_{o,\phi} + \mathbf{U}_{o,\phi}^T\mathbf{U}_{o,\psi}\right)\\ \varepsilon_{b\phi\psi} &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{X}_{o,\phi}^T\mathbf{U}_{n,\psi} + \mathbf{X}_{n,\phi}^T\mathbf{U}_{o,\psi} + \mathbf{X}_{o,\psi}^T\mathbf{U}_{n,\phi}\right.\\ &\quad\left. + \mathbf{X}_{n,\psi}^T\mathbf{U}_{o,\phi} + \mathbf{U}_{o,\phi}^T\mathbf{U}_{n,\psi} + \mathbf{U}_{o,\psi}^T\mathbf{U}_{n,\phi}\right)\\ \gamma_{\zeta\phi} &= \mathbf{X}_{o,\phi}^T\mathbf{U}_n + \mathbf{X}_n^T\mathbf{U}_{o,\phi} + \mathbf{U}_{o,\phi}^T\mathbf{U}_n.\end{aligned} \tag{13}$$

众所周知，实体壳单元容易出现膜锁死、剪切锁死和梯形锁死。前两种锁死是由于过度约束零膜应变和横向剪切应变所致。第三种锁死则发生在线性/双线性实体单元用于模拟曲面时，此时单元截面会呈梯形。对于本研究所用的双线性低阶单元，膜锁死可以忽略；而剪切锁死和梯形锁死则可通过假设自然应变法（ANS）加以缓解，该方法在选定边界点处对相关自然应变分量进行插值。

其中包括 [Sze 等人 2002]

$$\begin{aligned}\gamma_{\zeta\xi}^{ANS} &= \frac{1-\eta}{2}\left(\gamma_{\zeta\xi}\right)_{\xi=0,\eta=-1} + \frac{1+\eta}{2}\left(\gamma_{\zeta\xi}\right)_{\xi=0,\eta=+1}\\ \gamma_{\zeta\eta}^{ANS} &= \frac{1-\xi}{2}\left(\gamma_{\zeta\eta}\right)_{\xi=-1,\eta=0} + \frac{1+\xi}{2}\left(\gamma_{\zeta\eta}\right)_{\xi=+1,\eta=0}\\ \varepsilon_{\zeta\zeta}^{ANS} &= \sum_{i=1}^{4} N_i \cdot (\varepsilon_{\zeta\zeta})_i,\end{aligned} \tag{14}$$

其中 $(\varepsilon_{\zeta\zeta})_i$表示第 i 个单元节点处的自然厚度应变。

对于局部正交坐标系（x，y，z），其中x-y平面与初始中面相切，应变变换关系可表示为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_m &= \begin{pmatrix}\varepsilon_{mxx}\\ \varepsilon_{myy}\\ 2\varepsilon_{mxy}\end{pmatrix} = \mathbf{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\begin{pmatrix}\varepsilon_{m\xi\xi}\\ \varepsilon_{m\eta\eta}\\ 2\varepsilon_{m\xi\eta}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{pmatrix}\varepsilon_{bxx}\\ \varepsilon_{byy}\\ 2\varepsilon_{bxy}\end{pmatrix} = \mathbf{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\begin{pmatrix}\varepsilon_{b\xi\xi}\\ \varepsilon_{b\eta\eta}\\ 2\varepsilon_{b\xi\eta}\end{pmatrix}\\ \boldsymbol{\gamma} &= \begin{pmatrix}\gamma_{zx}\\ \gamma_{zy}\end{pmatrix} = \mathbf{T}_{\boldsymbol{\gamma}}\begin{pmatrix}\gamma_{\zeta\xi}^{ANS}\\ \gamma_{\zeta\eta}^{ANS}\end{pmatrix},\ \varepsilon_{zz} = T_\zeta\varepsilon_{\zeta\zeta}^{ANS},\end{aligned} \tag{15}$$

其中，$T_{\boldsymbol{\varepsilon}}$、$T_{\boldsymbol{\gamma}}$和 T_ζ在 B 节中推导。需要指出的是，除非 ζ和 z平行，否则上述变换关系仅为近似关系。应力-应变关系将采用以下假设：

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{pmatrix} &= \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_m + \zeta\boldsymbol{\varepsilon}_b\right),\ \begin{pmatrix}\sigma_{zx}\\ \sigma_{zy}\end{pmatrix} = \mathbf{C}_{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{\gamma},\\ \sigma_{zz} &= C_z\varepsilon_{zz},\ \int_{-1}^{+1}\zeta\mathbf{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}}d\zeta = 0.\end{aligned} \tag{16}$$

对于采用平面应力条件的各向同性材料，

$$\mathbf{C}_\varepsilon = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{pmatrix},\ \mathbf{C}_{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{5}{6}\frac{E}{2(1+\nu)}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ C_z = E, \tag{17}$$

其中，E为杨氏模量，ν为泊松比。对于全局笛卡尔坐标（X，Y，Z）和（ξ，η，ζ）中的雅可比行列式 J，以 $J_o = J|_{\zeta=0}$近似后，单元应变能可写为

$$\begin{aligned}\Psi^e = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}&\left[\left(\boldsymbol{\varepsilon}_m + \zeta\boldsymbol{\varepsilon}_b\right)^T\mathbf{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_m + \zeta\boldsymbol{\varepsilon}_b\right)\right.\\ &\left. + \boldsymbol{\gamma}^T\mathbf{C}_{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{\gamma} + C_z\varepsilon_{zz}^2\right]J_o d\xi d\eta d\zeta.\end{aligned} \tag{18}$$

对 ζ 积分后：

$$\Psi^e = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_m^T\mathbf{C}_m\boldsymbol{\varepsilon}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_b^T\mathbf{C}_b\boldsymbol{\varepsilon}_b + \boldsymbol{\gamma}^T\mathbf{C}_S\boldsymbol{\gamma} + C_T\varepsilon_{zz}^2\right)J_o d\xi d\eta, \tag{19}$$

其中

$$\left(\mathbf{C}_m, \mathbf{C}_b, \mathbf{C}_S, C_T\right) = \int_{-1}^{+1}\left(\mathbf{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}}, \zeta^2\mathbf{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}}, \mathbf{C}_{\boldsymbol{\gamma}}, C_z\right)d\zeta. \tag{20}$$

B 应变变换

格林–拉格朗日应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$可用不同的基向量表示。具体而言，

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \varepsilon_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n, \tag{21}$$

其中，$\mathbf{e}_i$和 $\mathbf{e}^j (i,j=\xi,\eta,\zeta)$ 是自然坐标系的基向量，而 $\mathbf{e}_m$和 $\mathbf{e}_n$ ($m,n=x,y,z$) 是局部笛卡尔坐标系的基向量。这些基向量可通过以下方式计算：$\mathbf{e}^\xi = \mathbf{X}_{o,\xi}$、$\mathbf{e}^\eta = \mathbf{X}_{o,\eta}$ 和 $\mathbf{e}^\zeta = \mathbf{X}_n$，以及 $\mathbf{e}_x = (\mathbf{X}_{o2} - \mathbf{X}_{o1})/\|(\mathbf{X}_{o2} - \mathbf{X}_{o1})\|$、$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \times (\mathbf{X}_{o4} - \mathbf{X}_{o1})/\|(\mathbf{X}_{o4} - \mathbf{X}_{o1})\|/\|\mathbf{e}_x \times (\mathbf{X}_{o4} - \mathbf{X}_{o1})/\|(\mathbf{X}_{o4} - \mathbf{X}_{o1})\|$ 和 $\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z$。在本研究中，折纸面板的初始状态为平坦。

局部笛卡尔坐标系中的应变张量分量可通过以下方式获得

$$\varepsilon_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \varepsilon_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_n = c_{mi}c_{nj}\varepsilon_{ij} \tag{22}$$

其中，$c_{mi} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_i$ 是局部笛卡尔基向量$\mathbf{e}_m$与自然基向量$\mathbf{e}_i$之间夹角的余弦。

算法1 使用自适应增量求解折纸仿真

要求： 初始_位置、最大_增量、加载_位移

$U \leftarrow 0$ ▷ 全局位移向量
$\lambda \leftarrow 0$ ▷ 载荷参数
$\alpha \leftarrow 1.0$ ▷ 步长
$\beta \leftarrow 1.0$ ▷ 松弛因子
$\gamma \leftarrow 0$ ▷ 恢复尝试次数
$\delta \leftarrow 0$ ▷ 增量计数器
$\Gamma \leftarrow 20$ ▷ 最大恢复尝试次数
$\Delta U_{\text{presc}} \leftarrow$已加载_位移 / 最大_增量 ▷ 规定每步位移
当 $\lambda < 1.0$ 且 $\gamma \le \Gamma$ **时执行**
  $\delta \leftarrow \delta + 1$, $U_{\text{prev}} \leftarrow U$
  $U \leftarrow U + \alpha \cdot \Delta U_{\text{presc}}$
  $U[\Phi] \leftarrow 0$ ▷ 在固定自由度处施加狄利克雷边界条件
  $\epsilon \leftarrow \infty$ ▷ 残差范数
  $\iota \leftarrow 0$ ▷ 迭代计数器
  当 $\epsilon >$ 容差且 $\iota <$ 最大迭代次数 _次**执行**
    K, $F_{\text{int}} \leftarrow$ 组装_实体_壳_与_折痕
    $r \leftarrow \lambda \cdot F_{\text{ext}} - F_{\text{int}}$ ▷ 残余力向量
    $\Omega \leftarrow$查找_自由_度() ▷ 自由度
    $\Delta U[\Omega] \leftarrow$ 求解_线性_系统($K[\Omega,\Omega]$, $r[\Omega]$)
    $\Delta U \leftarrow 0$, $\Delta U[\Omega] \leftarrow \Delta U[\Omega]$
    $U \leftarrow U + \beta \cdot \Delta U$, $\epsilon \leftarrow \|\Delta U[\Omega]\|$
    $\iota \leftarrow \iota + 1$
  结束循环
  如果 $\iota \ge ((\alpha > 1) + 1) \cdot$最大_迭代次数$/(\beta+1)$ **则**
    $\gamma \leftarrow \gamma + 1$, $\delta \leftarrow \delta - 1$
    如果 $\gamma \le 10$ **那么**
      $\alpha \leftarrow \alpha/2$
    else
      $\alpha \leftarrow \max(\alpha,1) \cdot 1.5$, $\beta \leftarrow \beta \cdot 0.75$
    结束如果
    $U \leftarrow U_{\text{prev}}$
  else
    $\lambda \leftarrow \lambda + \alpha/$max_增量, $\gamma \leftarrow 0$, $\beta \leftarrow 1.0$
    $\alpha \leftarrow \begin{cases} \min(\alpha \cdot 1.1, 1) & \text{如果 } \alpha < 1 \\ \text{最大值}(\alpha \cdot 0.9, 1) & \text{否则} \end{cases}$
  结束条件判断
结束循环

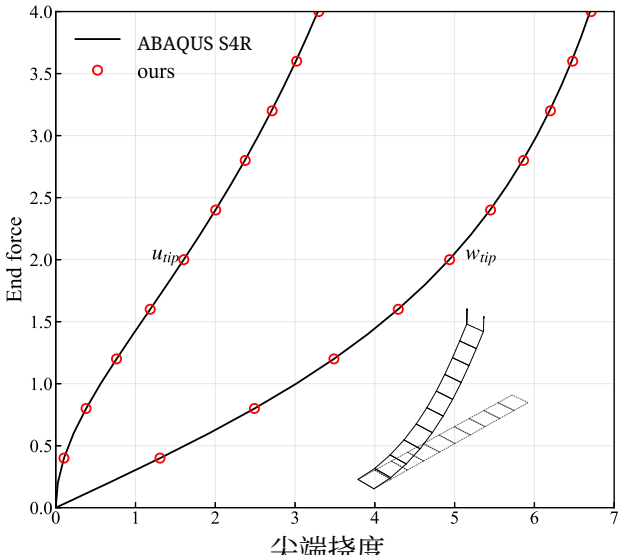


图6：使用本文提出的实体壳单元预测的末端挠度与采用 ABAQUS S4R 单元得到的参考解进行比较。

局部笛卡尔坐标中的膜应变 $\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{bmatrix} \varepsilon_{mxx} & \varepsilon_{myy} & \gamma_{mxy} \end{bmatrix}^T$ 和弯曲应变 $\boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{bmatrix} \varepsilon_{bxx} & \varepsilon_{byy} & \gamma_{bxy} \end{bmatrix}^T$ 与自然坐标系中的应变之间通过以下变换关系相联系

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{mxx} \\ \varepsilon_{myy} \\ \gamma_{mxy} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{m\xi\xi} \\ \varepsilon_{m\eta\eta} \\ \gamma_{m\xi\eta} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \varepsilon_{bxx} \\ \varepsilon_{byy} \\ \gamma_{bxy} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{b\xi\xi} \\ \varepsilon_{b\eta\eta} \\ \gamma_{b\xi\eta} \end{Bmatrix}, \tag{23}$$

其中$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 为

$$\begin{bmatrix} c_{\xi x}c_{\xi x} & c_{\xi y}c_{\xi y} & c_{\xi x}c_{\xi y} \\ c_{\eta x}c_{\eta x} & c_{\eta y}c_{\eta y} & c_{\eta x}c_{\eta y} \\ c_{\xi x}c_{\eta x} + c_{\eta x}c_{\xi x} & c_{\xi y}c_{\eta y} + c_{\eta y}c_{\xi y} & c_{\xi x}c_{\eta y} + c_{\xi y}c_{\eta x} \end{bmatrix}^{-1}. \tag{24}$$

局部笛卡尔坐标中的横向剪切应变 $\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{zx} & \gamma_{zy} \end{bmatrix}^T$ 可通过以下变换得到

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{zx} \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{\boldsymbol{\gamma}} \begin{Bmatrix} \gamma_{\zeta\xi} \\ \gamma_{\zeta\eta} \end{Bmatrix}, \tag{25}$$

其中

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} c_{\zeta z}c_{\xi x} & c_{\zeta z}c_{\xi y} \\ c_{\zeta z}c_{\eta x} & c_{\zeta z}c_{\eta y} \end{bmatrix}^{-1}. \tag{26}$$

最后，厚度应变 ε_{zz} 通过以下变换得到

$$\varepsilon_{zz} = T_\zeta \varepsilon_{\zeta\zeta} = (c_{\zeta z}c_{\zeta z})^{-1}\varepsilon_{\zeta\zeta}. \tag{27}$$

C 非线性求解过程

我们的计算模型嵌入了一个阻尼牛顿求解器 [Wriggers 2008]，并采用自适应载荷增量来处理准静态模拟。整体非线性求解过程如算法1所示。在此背景下，F_{int} 和 K 分别表示内力向量和刚度矩阵，对应于壳体能量和折痕能量的梯度与 Hessian 矩阵。

D 实体壳单元的补充精度评估

我们考虑一根尺寸为 10（长度）、1（宽度）和 0.1（厚度）的悬臂梁。材料属性由杨氏模量 1.2×10^9 和泊松比 0 定义。该梁离散为 10 个四边形实体壳单元。对于作为对比，使用 ABAQUS S4R 壳单元并采用足够精细的网格（40×4 个单元）获得参考解，以确保收敛。图6展示了剪切力从 0 到 4，000（每个端部节点施加 2，000）时，按 10 个增量计算得出的垂直和水平尖端挠度。结果表明，我们的预测与参考解吻合良好。