arXiv:2601.00600v1 [math.AP] 2 Jan 2026

局部 Lipschitz Lévy 噪声驱动的非自治随机可逆 Selkov 格点系统的极限行为

Guofu Li*, Jianxin Wu†Yunshun Wu‡

摘要

本文研究定义在集合 $\mathbb{Z}$ 上、由局部 Lipschitz $L\acute{e}vy$ 噪声驱动的可逆 Selkov 格点系统的长期分布行为。这类系统具有两对符号相反的非线性项，其非线性耦合可按任意阶数 $p \geqslant 1$ 多项式增长。首先，基于 $L^2(\Omega\ \ell^2 \times \ell^2)$ 中的全局适定性，我们在度量空间 $(\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)d_{\mathcal{P}(\ell^2\times\ell^2)})$ 上定义一个连续的非自治动力系统（NDS），其中 $d_{\mathcal{P}(\ell^2\times\ell^2)}$ 是 $\ell^2 \times \ell^2$ 上概率测度空间 $\mathcal{P}(\ell^2 \times \ell^2)$ 的对偶 Lipschitz 距离。具体而言，我们证明该非自治动力系统存在唯一的拉回测度吸引子，并按照 Wang 的意义（DOI.org/10.1016/j.jde.2012.05.015），通过测度值完全解和轨道对其进行刻画。此外，当确定性外部强迫项关于时间呈周期性时，我们证明拉回测度吸引子也具有周期性。我们还研究了当 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_1, \gamma_2) \to (0,0,0,0)$ 时拉回测度吸引子的上半连续性。证明 NDS 在 $(\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)d_{\mathcal{P}(\ell^2\times\ell^2)})$ 中具有拉回渐近紧性的主要困难，在于无限维格点系统缺乏紧性；我们通过一致尾部估计克服了这一困难。Selkov 系统的内在结构又排除了两个耦合方程相互作用所产生的单向耗散影响，从而阻碍了沿单一方向路径形成主导能量耗散机制。与经典的三次非线性情形相比，我们的结果在范围和适用性上都更为一般。

关键词： Selkov 系统、上半连续性、L´evy 噪声、无限维耦合格点系统。

2020 年数学主题分类： 37L55, 35B41, 37L60, 37B40, 60H10。

1 引言

1.1 由$L\acute{e}vy$ 噪声驱动的无限维可逆 Selkov 模型

Selkov 方程是描述自催化生化过程的重要且广泛使用的数学模型，例如糖酵解过程；这类过程可分为不可逆系统和可逆系统。

*数学科学学院，贵州师范大学，中国贵州贵阳 550025，电子邮箱：liguoful@163.com。
†数学科学学院，贵州师范大学，中国贵州贵阳 550025，电子邮箱：jianxinwu2001@163.com。
‡贵州师范大学数学科学学院，贵阳 550025，中国，电子邮箱：wuyun- shun1979@163.com。

不可逆 Selkov 方程最初由 Selkov 于 1968年提出，用于模拟两种不可逆化学反应（见 [43]）。相比之下，可逆塞尔科夫模型主要用于描述两种可逆生化反应的三次自催化、等温及连续供给特性：

$$\hat{A} \rightleftharpoons \hat{S}, \quad \hat{S} + 2\hat{P} \rightleftharpoons 3\hat{P}, \quad \hat{P} \rightleftharpoons \hat{B}, \tag{1.1}$$

其中， A 和 B 是可控的浴浓度，而底物 S 和产物 P 构成系统中自由响应的内部部分。该模型代表一种产物强激活机制，在 A 和 B 浓度处于适当范围内时，能够产生振荡行为。可逆 Selkov 模型也称为双组分 Gray-Scott 方程（见 [3, 21, 22]），它属于由著名物理化学家、诺贝尔奖得主（1977年）伊利亚·普里高津领导的布鲁塞尔学派。

本文旨在研究定义于整数集 $\mathbb{Z}$ 上、由局部 Lipschitz*L´evy* 噪声驱动的可逆 Selkov 格点系统的长期分布行为，所采用的方法是拉回测度吸引子：

$$\begin{cases} \mathrm{d}u_i(t) = (d_1(u_{i+1}(t) - 2u_i + u_{i-1}(t)) - a_1 u_i(t) + b_1 u_i^{2p}(t) v_i(t) - b_2 u_i^{2p+1}(t) + f_{1i}(t))\mathrm{d}t \\ \qquad\qquad + \epsilon_1 \sum_{k=1}^{\infty} (h_{k,i}(t) + \delta_{k,i}\tilde{\sigma_k}(t, u_i(t)))\mathrm{d}W_k(t) \\ \qquad\qquad + \epsilon_2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|y_k|<1} (\kappa_{k,i}(t) + q_{k,i}(t, u_i(t-), y_k))\tilde{L}_k(\mathrm{d}t, \mathrm{d}y_k) \\ \mathrm{d}v_i(t) = (d_2(v_{i+1}(t) - 2v_i(t) + v_{i-1}(t)) - a_2 v_i(t) - b_1 u_i^{2p}(t) v_i(t) + b_2 u_i^{2p+1}(t) + f_{2i}(t))\mathrm{d}t \\ \qquad\qquad + \gamma_1 \sum_{k=1}^{\infty} (h_{k,i}(t) + \delta_{k,i}\tilde{\sigma_k}(t, v_i(t)))\mathrm{d}W_k(t) \\ \qquad\qquad + \gamma_2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|y_k|<1} (\kappa_{k,i}(t) + q_{k,i}(t, v_i(t-), y_k))\tilde{L}_k(\mathrm{d}t, \mathrm{d}y_k) \end{cases} \tag{1.2}$$

具有初始条件

$$u_i(\tau) = u_{0,i}, \qquad v_i(\tau) = v_{0,i}, \tag{1.3}$$

其中 $\tau \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$, $u = (u_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, $v = (v_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$, $0 < \epsilon_i, \gamma_i \leqslant 1$, $i = 1,2$, $p \geqslant 1$。 d_1, d_2, a_1, a_2, b_1, b_2 均为正常数， $f_1(t) = (f_{1i}(t))_{i\in\mathbb{Z}}$ 和 $f_2(t) = (f_{2i}(t))_{i\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$ 是时间依赖随机序列。$\delta(t) = (\delta_{k,i}(t))_{k\in\mathbb{N},i\in\mathbb{Z}}$ 是正的连续函数。 $h(t) = (h_{k,i}(t))_{k\in\mathbb{N},i\in\mathbb{Z}}$ 和 $\kappa(t) = (\kappa_{k,i}(t))_{k\in\mathbb{N},i\in\mathbb{Z}}$是 ℓ^2值渐进可测过程。$\sigma_k = \delta_{k,i}\tilde{\sigma_k}(t,\cdot)$和 $q_k = q_{k,i}(t,\cdot,y_k)$是一列局部利普希茨连续函数。$(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 表示定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}}, \mathbb{P})$ 上的一族相互独立的双边标准实值维纳过程。补偿泊松随机˜测度 L_k 源自一列相互独立的双边实值 L´évy 过程 $\{Z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$。

L´évy 噪声：序列 $\{W_k(t)\}$ 表示定义在该概率空间上的相互独立的双边实值维纳过程。我们用 $\{Z_k(t)\}$ 表示定义在同一概率空间上的一列相互独立的双边实值 L´évy 过程。双边泊松计数随机测度定义为

$$L_k(t,A) = \begin{cases} \#\{0 \le s \le t : \Delta Z_k(s) \in A\}, & \text{if } t \ge 0, \\ \#\{t \le s \le 0 : \Delta Z_k(s) \in A\}, & \text{if } t < 0, \end{cases}$$

其中，# 表示集合的基数，$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$，以及 $\Delta Z_k(s) = Z_k(s) - Z_k(s-)$。设 $\nu_k(dy_k)$ 是与泊松随机测度 $L_k(dt, dy_k)$ 相关联的一个 σ-有限 L´évy 测度，满足

$$\nu_k(dy_k)\,dt = \mathbb{E}\big[L_k(dt, dy_k)\big] \quad \text{and} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \big(|y_k|^2 \wedge 1\big)\,\nu_k(dy_k) < \infty.$$

这意味着存在一个正常数 M_{jump}，使得

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \big(|y_k|^2 \wedge 1\big)\,\nu_k(dy_k) \le M_{\text{jump}}.$$

双边补偿泊松随机测度记为

$$\widetilde{L}_k(dt, dy_k) \triangleq L_k(dt, dy_k) - \nu_k(dy_k)dt.$$

本文始终假设 $\{W_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 与 $\{Z_k(t)\}$ 相互独立。这意味着 $\{W_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 与 $\{L_k(dt, dy_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 相互独立；称这对 $((W_k)_{k\in\mathbb{N}},(L_k)_{k\in\mathbb{N}})$ 为一族双边 *L´évy* 噪声，见 [1]和图 1。

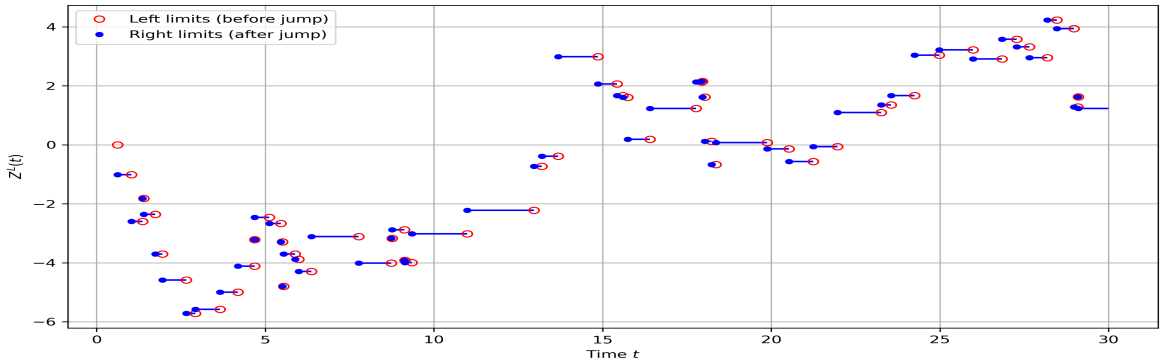

图 1： L´évy 过程的样本路径（**c`àdl`àg 过程**）

1.2 文献综述与研究动机

近年来，格点动力系统（LDSs）在图案形成、神经脉冲传播和电路等领域得到广泛应用，因此受到众多研究者的关注。更多详细信息请参见 [10, 25, 11]。确定性

格点系统的解已在文献中得到深入研究，包括行波解 [14, 64],混沌解 [12, 13], 和整体吸引子 [8, 27]。关于随机格点动力系统动力学的更多细节和结果，请参见：确定性格点模型见 [6, 5, 16, 44] ，随机情形见 [7, 50, 15, 23, 52] 。当 $\epsilon_2 = 0$、 $\gamma_2 = 0$ 时，Wang 和 Zhang 讨论了白噪声驱动的可逆 Selkov 格点系统，见 [56, 65]。L´évy 噪声驱动的随机可逆 Selkov 格点系统 (1.2) 化为确定性格点系统 ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$)。关于整体吸引子的存在性、正则性和稳定性，确定性可逆 Selkov 方程已得到广泛研究（见 [60, 61]）。许多研究者还探讨了随机可逆 Gray-Scott 系统中随机吸引子的存在性和鲁棒性（见 [62, 18, 19, 20]）。关于随机格点可逆 Selkov 方程，Li [30]讨论了随机吸引子的存在性。在最新研究中，Wang 等人在 [57] 研究了可逆 Selkov 格点系统数值吸引子的上半连续性；有关格点系统数值吸引子的相关理论，请参见 Li、Han、Kloeden Yang， [35, 36, 24, 63]。

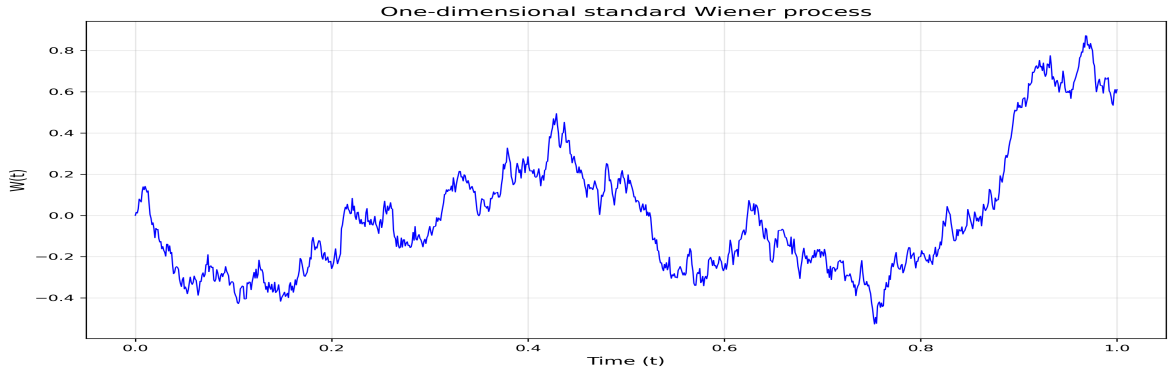

图 2：布朗运动的**样本路径**

上述格点模型由连续随机过程（布朗运动）驱动。然而，许多实值系统可能会受到环境中的突发干扰，从而产生不连续样本路径。因此，必须在系统中引入 L´évy 噪声，以描述具有跳跃的随机现象。据我们所知，关于 Selkov 格点系统测度吸引子的文献结果并不多，现有结果均针对由白噪声而非$L\acute{e}vy$ 噪声驱动的情形。本文主要讨论由拉回测度吸引子 在 $(\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)d_{\mathcal{P}(\ell^2\times\ell^2)})$ 上的 Selkov 格点系统 (1.2) 的存在性、唯一性、周期性和上半连续性，该系统定义在 Z 上并由$L\acute{e}vy$ 噪声驱动。关于由 L´évy 噪声驱动的格点模型，读者可参阅 Tom´as 等人 [2, 9, 17, 59] 的相关文献及其中的参考文献，以了解更多详情。

要研究路径随机吸引子，首先必须将随机演化偏微分方程转化为路径演化系统。当噪声系数为加性或线性乘性时，

可以通过广为人知的 Ornstein-Uhlenbeck 或 Cole-Hopf 变换实现这种转化，见 [4, 58, 54, 55, 51, 33]。然而，当噪声系数关于未知函数呈非线性时，这些方法便不再适用。鉴于此，分析具有非线性噪声系数的随机演化偏微分方程解的长期动力学，可以采用 Kloeden、Lorenz 和 Wang [26, 46, 47, 48] 提出的均值随机吸引子概念。另一种研究非线性噪声驱动的偏微分方程解渐近行为的有前景方法，是运用测度吸引子的概念。Schmalfuß 最初提出这一概念[40, 41]，以探究带有非线性噪声的自治 Navier-Stokes 方程解的长期行为。近期，Li 和 Wang [28]（另见 [29, 42]）将这一概念拓展至非线性噪声作用下非自治 反应扩散方程解的长期行为研究。这一框架为分析复杂的随机 Selkov 格点系统提供了更为一般且灵活的工具，尤其适用于传统变换方法无法奏效的情形。本研究主要聚焦于三个核心目标，具体如下：

- 运用拉回测度吸引子理论严格证明，由（1.2）定义的格点系统不仅在 [31] 中具有唯一解，而且还存在拉回测度吸引子；

- 详细证明用于建立拉回测度吸引子的存在性与收敛性的 $\mathcal{D}-$一致矩估计和拉回渐近紧性；

- 证明当噪声强度（ϵ_1，ϵ_2，γ_1，γ_2）$\to$（0，0，0，0）趋于0时，非自治随机格点系统的 $\mathcal{D}$-拉回测度吸引子的上半连续性。

1.3 研究的方法与技术

- 我们指出，要证明 S 在 $(\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)^{d_{\mathcal{P}}(\ell^2\times\ell^2)}$ 的测度拉回吸引子的存在性、唯一性和周期性，关键步骤之一是证明 S (NDS) 在 $(\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)^{d_{\mathcal{P}}(\ell^2\times\ell^2)}$ 中具有拉回渐近紧性；也就是说，我们将建立方程 (2.11) 的解算子所对应的概率分布在 $(\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)^{d_{\mathcal{P}}(\ell^2\times\ell^2)}$ 上的拉回渐近紧性。事实上，困难源于无限维格点系统缺乏紧性。请注意，这类障碍与证明定义在无界区域上的随机偏微分方程解的分布具有紧性时遇到的障碍相似，参见 [50, 47, 53]。对于定义在有界区域上的随机演化偏微分方程（见 [28, 29, 40, 41]），可以利用基于紧 Sobolev 嵌入的紧性论证来证明这种渐近紧性。由于大多数问题都定义在 $\mathbb{R}^d$上，这种紧性论证无法建立这种渐近紧性。事实上，Wang [49] 最初提出了这一思路，用以证明确定性反应-

扩散方程在 $\mathbb{R}^d$ 上整体吸引子的存在性；随后，这一方法被广泛用于解决随机/随机情形下其他因缺乏紧性而产生的问题，例如定义在无界区域上的随机演化偏微分方程和格点系统的逐路径随机吸引子及不变测度的存在性，参见 [45, 47]。利用 $L^2(\Omega, \ell^2 \times \ell^2)$ 中解的一致渐近尾部小性，我们得以建立拉回渐近紧性，并证明 S 在 $(\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2), d_{\mathcal{P}(\ell^2 \times \ell^2)})$ 中存在唯一的测度拉回吸引子，见定理 5.6。

- 在分析 Selkov 格点系统时，我们在数学上允许耦合漂移项以任意指数 $p \geqslant 1$ 增长。这与三次非线性情形 [30] 不同。在我们的情形中，需要处理 u 方程和 v 方程中的两对符号相反的漂移项 $\pm F(u, v)$ 和 $\pm G(u)$。通过仔细地重新排列并分析这些耦合非线性项，我们克服了这一障碍，见引理 4.1 和引理 4.2。值得注意的是，对于单个反应扩散方程，耗散性是通过对表示反应速率的非线性函数 $f(u)$ 施加或检验渐近符号条件来确立的，即，

$$\limsup_{|s| \to \infty} f(s)\, s \leqslant 0.$$

但是，对于大多数源于化学与生化动力学、由两个或更多方程组成的反应扩散系统，相应的向量形式渐近符号条件通常并不成立，或者本质上无法满足。

- 值得注意的是，本文关注耦合格点方程的拉回测度吸引子，这不同于 [32, 50, 39] 中关于单方程格点系统的现有研究，并克服了若干关键难点。与布朗运动相比，L´évy 过程更为一般，可能包含跳跃，路径也可能不连续；而布朗运动只是 L´évy 过程的连续特例。特别是，应用 L´évy 型 Itˆo 公式需要格外谨慎，尤其是在建立一致矩估计以及证明拉回测度吸引子的上半连续性时，跳跃的存在带来了显著的额外挑战。

1.4 主要结果

本文给出了三个结果，确立了系统 (1.2) 的拉回测度吸引子的存在性、唯一性和周期性，以及它们的上半连续性。

定理 1.1。 假设(2.8)-(2.10)和(4.1) 成立。那么，对于每个 $0 < \epsilon_i$、 $\gamma_i \leqslant 1$、 $i = 1, 2$，与(2.11)-(2.12) 相关的系统 S存在唯一的 $\mathcal{D}$-拉回测度吸引子 $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(\tau) \colon \tau \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)$,

其表达式为：对每个 $\tau \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\tau) = \omega(K,\tau) &= \{\psi(0,\tau) : \psi \text{ is a } \mathcal{D}\text{-complete orbit of } S\} \\ &= \{\xi(\tau) : \xi \text{ is a } \mathcal{D}\text{-complete solution of } S\},\end{aligned} \tag{1.4}$$

其中 $K = \{K(\tau)\colon\ \tau \in \mathbb{R}\}$ 是引理 *5.4* 给出的 S 的 $\mathcal{D}$-拉回吸收集 .

定理 1.2。假设 (2.8)-(2.10)、(4.1) 和 (5.3) 成立。那么，对于每个 $0 < \epsilon_i$、$\gamma_i \leqslant 1$、$i = 1$、2，与 (2.11)-(2.12) 相关的 S 在 $\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)$ 中具有唯一的 χ-周期 $\mathcal{D}$-拉回测度吸引子 $\mathcal{A}$ 。

定理 1.3。假设 (2.8)-(2.9)、(2.10)和 (4.1) 成立。那么，对于 $\tau \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} d_{\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)}(\mathcal{A}_\lambda(\tau), \mathcal{A}_{\lambda_0}(\tau)) = 0. \tag{1.5}$$

其中 $\lambda = (\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_1, \gamma_2)$， $\lambda_0 = (0、0、0、0)$。更多详情请参阅最后一节。

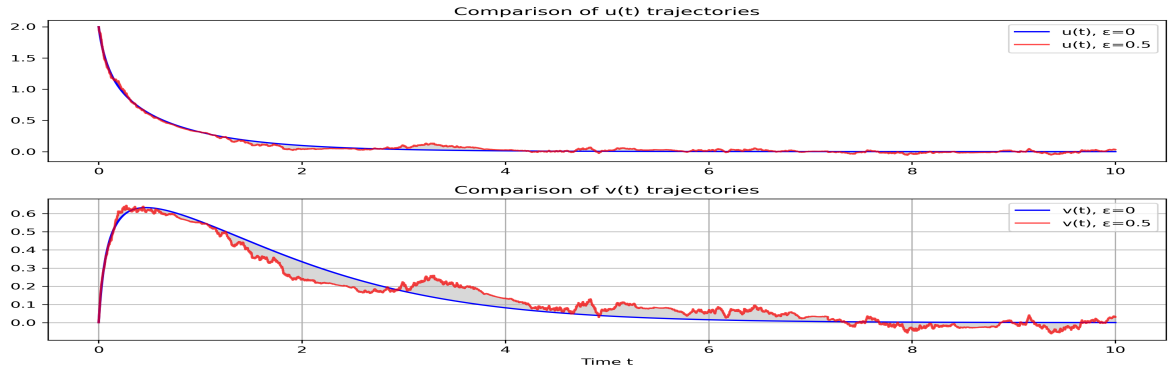

图 3： $\lambda \to \lambda_0$

1.5 论文概要

本文的组织结构如下。第 2 节探讨由方程（2.11）至（2.12）描述的非自治随机格点系统的解的存在性与唯一性。第 3 节重新研究非自治动力系统的拉回测度吸引子的存在性、唯一性和周期性等关键结果，尤其关注定义在 Banach空间上的概率测度空间中的此类系统。第 4 节致力于推导解关于时间 $t \to \infty$ 的一致矩估计，这些估计对于建立吸收集以及非自治动力系统的拉回渐近紧性发挥着关键作用。这些结果是在由系统（2.11）至（2.12）生成的马尔可夫半群背景下得到的。在最后三节中，我们严格证明系统（2.11）至（2.12）的拉回测度吸引子的存在性、唯一性和周期性，并进一步研究当参数（ϵ_1， ϵ_2，γ_1， γ_2） $\to$(0，0，0，0)取极限时这些吸引子的行为。在第 7 节中，我们对一个一维随机常微分方程（7.1）进行了数值模拟

2 解的存在性与唯一性

本节将建立系统（1.2）-（1.3）的解的存在性与唯一性。我们给出一些有用的预备知识和假设，这些内容将在后续讨论中频繁使用。令 $\ell^r := \{u = (u_i)_{i\in\mathbb{Z}} : \sum_{i\in\mathbb{Z}} |u_i|^r < +\infty\}$，其中 $r \geqslant 1$，ℓ^r 的范数记为 $\|\cdot\|_r$，而 ℓ^2 的范数和内积分别记为 $\|\cdot\|$ 和 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$。

定义算子 $A, B : \ell^2 \to \ell^2$ 如下

$$(Au)_i = -u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}, \quad \text{and} \quad (Bu)_i = u_{i+1} - u_i, \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

那么，对于所有 $u, v \in \ell^2$，以下关系成立：

$$\langle Au, v\rangle = \langle Bu, Bv\rangle, \quad \text{and} \quad \langle Au, u\rangle = \|Bu\|^2 \geqslant 0. \tag{2.2}$$

此外，对每个 $k \in \mathbb{N}$，定义算子 σ_k, q_k, F 和 G 如下：

$$\sigma_k(t, u) = (\delta_{k,i}\tilde{\sigma}_k(t, u_i))_{i\in\mathbb{Z}}, \quad q_k(t, u, y_k) = (q_{k,i}(t, u_i, y_k))_{i\in\mathbb{Z}}, \quad \text{for all } u \in \ell^2,$$

$$F(u, v) = (u_i^{2p} v_i)_{i\in\mathbb{Z}}, \quad G(u) = (u_i^{2p+1})_{i\in\mathbb{Z}}, \quad \text{for } u, v \in \ell^2.$$

本文将用到以下不等式：

$$|\mathscr{X}^r - \mathscr{Y}^r| \leqslant C_r|\mathscr{X} - \mathscr{Y}|\,|\mathscr{X}^{r-1} + \mathscr{Y}^{r-1}|, \quad \forall \mathscr{X}, \mathscr{Y} \in \mathbb{R},\, p \geqslant 1, \tag{2.3}$$

and

$$\begin{aligned} &b_1b_2\mathscr{X}^{2p+1}\mathscr{Y} - b_2^2\mathscr{X}^{2p+2} - b_1^2\mathscr{X}^{2p}\mathscr{Y}^2 + b_2b_1\mathscr{X}^{2p+1}\mathscr{Y} \\ =&2b_1b_2\mathscr{X}^{2p+1}\mathscr{Y} - \mathscr{X}^{2p}\big(b_2^2\mathscr{X}^2 + b_1^2\mathscr{Y}^2\big) \leqslant 0, \quad \forall \mathscr{X}, \mathscr{Y} \in \mathbb{R},\, p \geqslant 1. \end{aligned} \tag{2.4}$$

根据 (2.3)，我们有

$$\begin{aligned} &\|F(u_1, v_1) - F(u_2, v_2)\|^2 \leqslant c_1(n)\left(\|u_1 - u_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2\right), \\ &|\langle F(u_1, v_1) - F(u_2, v_2), u_1 - u_2\rangle| \leqslant c_1(n)\left(\|u_1 - u_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2\right), \\ &|\langle F(u_1, v_1) - F(u_2, v_2), v_1 - v_2\rangle| \leqslant c_1(n)\left(\|u_1 - u_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2\right), \end{aligned} \tag{2.5}$$

and

$$\begin{aligned} &\|G(u) - G(v)\|^2 \leqslant c_2(n)\|u - v\|^2, \\ &|\langle G(u_1) - G(u_2), u_1 - u_2\rangle| \leqslant c_2(n)\|u_1 - u_2\|^2, \\ &|\langle G(u_1) - G(u_2), v_1 - v_2\rangle| \leqslant c_2(n)\left(\|u_1 - u_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2\right), \end{aligned} \tag{2.6}$$

其中 $u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in \ell^2$ 和 $\|u\| \leqslant n, \|u_1\| \leqslant n, \|u_2\| \leqslant n, \|v\| \leqslant n, \|v_1\| \leqslant n, \|v_2\| \leqslant n$，证明见 [56]。对于任意的 $s \in \mathbb{R}$ 和 $k \in \mathbb{N}$，我们假设存在 $\alpha > 0$ 使得

$$|\sigma_{k,i}(t,s)| \vee \int_{|y_k|<1} |q_{k,i}(t,s)|\nu_k \mathrm{d}y_k \leqslant \alpha\delta_{k,i}(t)(1+|s|). \tag{2.7}$$

Ind因此，对于 $C_k(n) > 0$，根据 (2.7) 和 σ_k， q_k 均为局部 Lipschitz 连续函数，我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\sigma_k(t,u_1) - \sigma_k(t,u_2)\|^2 \vee \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|y_k|<1} \|q_k(t,u_1,y_k) - q_k(t,u_2,y_k)\|^2 \nu_k(\mathrm{d}y_k) \leqslant C_k(n)\|u_1 - u_2\|^2, \tag{2.8}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\sigma_k(t,u)\|^2 \vee \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|y_k|<1} \|q_k(t,u,y_k)\|^2 \nu_k(\mathrm{d}y_k) \leqslant 2\alpha^2\|\delta(t)\|^2(1+\|u\|^2), \tag{2.9}$$

其中 $\|\delta\|^2 := \sum \sum |\delta_{k,i}|^2$。此外，我们假设$_{k\in\mathbb{N}\, i\in\mathbb{Z}}$

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\tau} e^{\varpi t}\mathbb{E}\left(\|\delta(t)\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\|\kappa_k(t)\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\|h_k(t)\|^2\right)\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\tau} e^{\varpi t}\left(\|f_1(t)\|^2 + \|f_2(t)\|^2\right)\mathrm{d}t < \infty, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

其中 $\varpi > 0$，见 (4.1)。

为在空间 $\ell^2 \times \ell^2$ 中更简洁地表述抽象系统 (1.2)-(1.3)（对于 $t \geqslant \tau$， $t, \tau \in \mathbb{R}$），我们使用以下方程组：

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t) = (-d_1Au(t) - a_1u(t) + b_1F(u(t),v(t)) - b_2G(u(t)) + f_1(t))\,\mathrm{d}t \\ \qquad + \epsilon_1\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(h_k(t) + \sigma_k(t,u(t)))\,\mathrm{d}W_k(t) \\ \qquad + \epsilon_2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(\kappa_k(t) + q_k(t,u(t-),y_k))\,\tilde{L}_k(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y_k), \\ \mathrm{d}v(t) = (-d_2Av(t) - a_2v(t) - b_1F(u(t),v(t)) + b_2G(u(t)) + f_2(t))\,\mathrm{d}t \\ \qquad + \gamma_1\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(h_k(t) + \sigma_k(t,v(t)))\,\mathrm{d}W_k(t) \\ \qquad + \gamma_2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(\kappa_k(t) + q_k(t,v(t-),y_k))\,\tilde{L}_k(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y_k), \end{cases} \tag{2.11}$$

满足初始条件

$$u(\tau) = u_\tau, \quad v(\tau) = v_\tau. \tag{2.12}$$

如参考文献 [31], 中所述, $\ell^2\times\ell^2$ 值 *càdlàg* 过程 $\varphi(t)=(u(t)\ v(t))$ 称为系统 (2.11)-(2.12) 的解, 若对于任意 $t>\tau$, $\mathcal{F}_\tau$ 可测的初始条件 $\varphi(\tau)=(u_\tau,\ v_\tau)\in L^2(\Omega\ \ell^2\times\ell^2)$, 且对几乎必然的 $\omega\in\Omega$,

$$
\begin{cases}
u(t)=u_\tau+\displaystyle\int_\tau^t\big(-d_1Au(s)-a_1u(s)+b_1F(u(s),v(s))-b_2G(u(s))+f_1(s)\big)\mathrm{d}s\\
\qquad+\epsilon_1\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\int_\tau^t\big(h_k(s)+\sigma_k(t,u(s))\big)\mathrm{d}W_k(s)\\
\qquad+\epsilon_2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\int_\tau^t\int_{|y_k|<1}\big(\kappa_k(s)+q_k(t,u(s-),y_k)\big)\tilde{L}_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y_k),\\
v(t)=v_\tau+\displaystyle\int_\tau^t\big(-d_2Av(s)-a_2v(s)-b_1F(u(s),v(s))+b_2G(u(s))+f_2(s)\big)\mathrm{d}s\\
\qquad+\gamma_1\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\int_\tau^t\big(h_k(s)+\sigma_k(t,v(s))\big)\mathrm{d}W_k(s)\\
\qquad+\gamma_2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\int_\tau^t\int_{|y_k|<1}\big(\kappa_k(s)+q_k(t,v(s-),y_k)\big)\tilde{L}_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y_k).
\end{cases}
\tag{2.13}
$$

因此, 在假设 (2.8)-(2.10) 下, 系统 (2.11)- (2.12) 的解的存在性与唯一性可以得到。

3 拉回测度吸引子

为清晰起见, 我们首先回顾拉回测度吸引子的基本概念, 然后概述其结构性质（参见例如 [28]）。

我们用 X 表示一个范数为 $\|\cdot\|_X$ 的可分巴拿赫空间。令 $C_b(X)$ 表示有界连续函数 $\phi:X\to\mathbb{R}$ 所构成的空间, 并赋予其范数

$$\|\phi\|_\infty=\sup_{x\in X}|\phi(x)|.$$

用 $L_b(X)$ 表示 X 上有界利普希茨函数所构成的空间, 该空间由所有满足以下条件的函数 $\phi\in C_b(X)$ 组成

$$\mathrm{Lip}(\phi):=\sup_{x_1,x_2\in X,x_1\neq x_2}\frac{|\phi(x_1)-\phi(x_2)|}{\|x_1-x_2\|_X}<\infty.$$

空间 $L_b(X)$ 配备范数

$$\|\phi\|_L=\|\phi\|_\infty+\mathrm{Lip}(\phi).$$

设 $\mathcal{P}(X)$ 为定义在 $(X,\ \mathcal{B}(X))$ 上的概率测度集合，其中 $\mathcal{B}(X)$ 是 X 的 Borel σ-代数。给定 $\phi \in C_b(X)$ 和 $\mu \in \mathcal{P}(X)$，记

$$\langle \phi, \mu \rangle = \int_X \phi(x)\mu(\mathrm{d}x).$$

回顾一下，一个序列 $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(X)$ 弱收敛到 $\mu \in \mathcal{P}(X)$，如果对每个 $\phi \in C_b(X)$ ，

$$\lim_{n\to\infty} \langle \phi, \mu_n \rangle = \langle \phi, \mu \rangle.$$

在 $\mathcal{P}(X)$ 上定义一个度量：

$$d_{\mathcal{P}(X)}(\mu_1, \mu_2) = \sup_{\phi \in L_b(X), \|\phi\|_L \leqslant 1} |(\phi, \mu_1) - (\phi, \mu_2)|, \quad \forall \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(X).$$

那么，$(\mathcal{P}(X)\ d_{\mathcal{P}(X)})$ 是一个波兰空间。此外，序列 $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(X)$ 在 $(\mathcal{P}(X)\ d_{\mathcal{P}(X)})$ 中收敛到 μ ，当且仅当 $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ 弱收敛到 μ 。

给定 $p > 0$，令 $\mathcal{P}_p(X)$ 为 $\mathcal{P}(X)$ 的子集，其定义如下：

$$\mathcal{P}_p(X) = \left\{ \mu \in \mathcal{P}(X) : \int_X \|x\|_X^p \mu(\mathrm{d}x) < \infty \right\}.$$

那么，$(\mathcal{P}_p(X)\ d_{\mathcal{P}(X)})$ 也是一个度量空间。为避免混淆，我们也将 $(\mathcal{P}_p(X)\ d_{\mathcal{P}(X)})$ 记作 $(\mathcal{P}_p(X) d_{\mathcal{P}_p(X)})$。给定 $r > 0$，记

$$B_{\mathcal{P}_p(X)}(r) = \left\{ \mu \in \mathcal{P}_p(X) : \left(\int_X \|x\|_X^p \mu(\mathrm{d}x) \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant r \right\}.$$

回顾一下， $\mathcal{P}_p(X)$的子集之间的豪斯多夫半度量定义为

$$d_{\mathcal{P}_p(X)}(Y, Z) = \sup_{y\in Y} \inf_{z\in Z} d_{\mathcal{P}_p(X)}(y, z), \quad Y, Z \subset \mathcal{P}_p(X), \quad Y, Z \neq \emptyset.$$

If $\epsilon > 0$ 和 $B \subset \mathcal{P}_p(X)$，那么 $\mathcal{P}_p(X)$中 B 的开 ϵ-邻域定义为 y

$$\mathcal{N}_\epsilon(B) = \{\mu \in \mathcal{P}_p(X) : d_{\mathcal{P}_p(X)}(\mu, B) < \epsilon\}.$$

定义 3.1。 从 $\mathcal{P}_p(X)$ 到 $\mathcal{P}_p(X)$ 的一族映射 $\mathcal{S} = \{S(t, \tau)\colon\ t \in \mathbb{R}^+, \tau \in \mathbb{R}\}$ 称为 $\mathcal{P}_p(X)$上的连续非自治动力系统，若对于所有 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $t, s \in \mathbb{R}^+$，以下条件均得到满足：

(a) $S(0,\ \tau) = I_{\mathcal{P}_p(X)}$，其中$I_{\mathcal{P}_p(X)}$ 是 $\mathcal{P}_p(X)$ 上的恒等算子；

(*b*) $S(t + s,\ \tau) = S(t,\ s + \tau) \circ S(s,\ \tau)$;

(c) $S(t,\tau)\colon \mathcal{P}_p(X) \to \mathcal{P}_p(X)$ 是连续的。

定义3.2。一个集合 $D \subset \mathcal{P}_p(X)$ 称为有界子集，如果存在 $r>0$ 使得$D \subset B_{\mathcal{P}_p(X)}(r)$.

在下文中，我们用 $\mathcal{D}$ 表示由 $\tau \in \mathbb{R}$参数化的、 $\mathcal{P}_p(X)$的若干非空子集族组成的集合；也就是说，

$$\mathcal{D} = \{D = \{D(\tau) \subset \mathcal{P}_p(X) : D(\tau) \neq \emptyset, \tau \in \mathbb{R}\} : D \text{ satisfies some conditions}\}.$$

定义3.3。 由 $\mathcal{P}_p(X)$ 的若干非空子集族组成的集合 $\mathcal{D}$ 称为邻域闭的，如果对每个 $D = \{D(\tau)$: $\tau \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{D}$，都存在一个正数 ϵ ，它取决于 D ，使得该族

$$\{B(\tau) : B(\tau) \textit{ is a nonempty subset of } \mathcal{N}_\epsilon(D(\tau)), \forall \tau \in \mathbb{R}\}$$

也属于 $\mathcal{D}$。

注意， $\mathcal{D}$ 的邻域闭性意味着对每个 $D \in \mathcal{D}$,

$$\tilde{D} = \{\tilde{D}(\tau) : \tilde{D}(\tau) \neq \emptyset \text{ and } \tilde{D}(\tau) \subseteq D(\tau), \tau \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{D}. \tag{3.1}$$

文献中，将满足(3.1)的集合 $\mathcal{D}$ 称为包含闭。

定义3.4. 若族 $K = \{K(\tau) : \tau \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{D}$ 满足以下条件，则称其为 S 的 $\mathcal{D}$-拉回吸收集：对每个$\tau \in \mathbb{R}$ 及任意 $D \in \mathcal{D}$，存在 $T = T(\tau, D) > 0$，使得

$$S(t, \tau - t)D(\tau - t) \subset K(\tau), \quad \textit{for all } \ t \geqslant T.$$

定义3.5. 若非自治动力系统 S 在 $\mathcal{P}_p(X)$ 中是 $\mathcal{D}$-拉回渐近紧的，则对每个 $\tau \in \mathbb{R}$，只要 $\{S(t_n, \tau - t_n)$ $\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足$t_n \to \infty$ 且 $\mu_n \in D(\tau - t_n)$ 满足 $D \in \mathcal{D}$，它在 $\mathcal{P}_p(X)$ 中就有一个收敛子列。

定义3.6. 若族 $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(\tau) : \tau \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{D}$ 满足以下条件，则称其为 S 的 $\mathcal{D}$-拉回测度吸引子:

(i) $\mathcal{A}(\tau)$ 在每个 $\tau \in \mathbb{R}$ 下都是 $\mathcal{P}_p(X)$ 中的紧集;

(ii) $\mathcal{A}$ 是不变的，即对所有 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $t \in \mathbb{R}^+$， $S(t, \tau)A(\tau) = A(\tau + t)$;

(iii) $\mathcal{A}$ 吸引 $\mathcal{D}$中的每个集合，即对于每个 $D = \{D(\tau) : \tau \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{D}$,

$$\lim_{t \to \infty} d(S(t, \tau - t)D(\tau - t), A(\tau)) = 0. \tag{3.2}$$

定义 3.7。 映射 $\psi\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathcal{P}_p(X)$ 称为 S 的完全轨道，如果对于每个 $s\in\mathbb{R}$、$t\in\mathbb{R}^+$和 $\tau\in\mathbb{R}$，下式成立：

$$S(t,s+\tau)\psi(s,\tau)=\psi(t+s,\tau). \tag{3.3}$$

此外，若存在 $D=\{D(\tau)\colon \tau\in\mathbb{R}\}\in\mathcal{D}$，使得对于每个$t\in\mathbb{R}$ 和 $\tau\in\mathbb{R}$， $\psi(t,\tau)$ 都属于 $D(t+\tau)$，则称 ψ 为 S的一个 $\mathcal{D}$-完全轨道。

定义 3.8. 映射 $\xi:\mathbb{R}\to\mathcal{P}_p(X)$ 称为 S 的一个完全解，若对每个 $t\in\mathbb{R}^+$ 和$\tau\in\mathbb{R}$，以下关系成立：

$$S(t,\tau)\xi(\tau)=\xi(t+\tau).$$

此外，若存在 $D=\{D(\tau)\colon \tau\in\mathbb{R}\}\in\mathcal{D}$，使得对于每个 $\tau\in\mathbb{R}$， $\xi(\tau)$ 属于 $D(\tau)$，则称 ξ 为 S的一个 $\mathcal{D}$-完全解。

定义 3.9. 对于每个 $D=\{D(\tau):\ \tau\in\mathbb{R}\}\in\mathcal{D}$ 和 $\tau\in\mathbb{R}$， D 在 τ 处的拉回 ω-极限集定义为

$$\omega(D,\tau)=\bigcap_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant s}S(t,\tau-t)D(\tau-t)},$$

也就是说，

$$\omega(D,\tau)=\limsup_{t\to\infty}S(t,\tau-t)D(\tau-t).$$

$$\omega(D,\ \tau)=\left\{\nu\in\mathcal{P}_p(X)\colon \text{存在 } t_n\to\infty,\ \ \mu_n\in D(\tau-t_n),\ \text{使得 } \nu=\lim_{n\to\infty}S(t_n,\ \tau-t_n)\mu_n\right\}.$$

基于上述记号，由文献 [45], 中的命题 3.6 可得 $\mathcal{D}$-拉回测度吸引子的存在性与唯一性的判据。

命题3.10。 设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{P}_p(X)$ 的子集族，且 S 是 $\mathcal{P}_p(X)$ 上的连续非自治动力系统。若 S 具有闭的 $\mathcal{D}$-拉回吸收集 $K\in\mathcal{D}$，且 S 在 $\mathcal{P}_p(X)$ 中是 $\mathcal{D}$-拉回渐近紧的，则 S 在 $\mathcal{P}_p(X)$ 中有唯一的 $\mathcal{D}$-拉回测度吸引子 $\mathcal{A}$。对每个 $\tau\in\mathbb{R}$， $\mathcal{D}$-拉回测度吸引子 $\mathcal{A}$ 由下式给出：

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\tau)=\omega(K,\tau)&=\{\psi(0,\tau):\psi\ \textit{is a }\mathcal{D}\textit{-complete orbit of }S\}\\&=\{\xi(\tau):\xi\ \textit{is a }\mathcal{D}\textit{-complete solution of }S\}.\end{aligned}$$

为突出初始时刻和初始值的作用，我们用 $\varphi(t,\ \tau,\ \xi)$ 表示方程 (2.11)-(2.12) 在初始条件 $\varphi(\tau)=\xi=(u_\tau,\ v_\tau)\in L^2_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega,\ \ell^2\times\ell^2)$ 和 $\varphi\in L^2_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega,\ \ell^2\times\ell^2)$ 下的解。给定 $\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)$ 的一个子集 E，定义

$$\|E\|_{\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)}=\inf\left\{r>0:\sup_{\mu\in E}\left(\int_{\ell^2\times\ell^2}\|z\|^2_{\ell^2\times\ell^2}\mu(dz)\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant r\right\},$$

约定 $\inf\emptyset=\infty$。若 E 是 $\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)$的有界子集，则 $\|E\|_{\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)}<\infty$。令$\mathcal{D}$ 为如下所给的 $\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)$ 的有界非空子集族集合:

$$\mathcal{D}=\left\{D=\{D(\tau)\subset\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2):\emptyset\neq D(\tau)\text{ bounded in }\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2),\,\tau\in\mathbb{R}\}\right\},$$

and

$$\lim_{\tau\to-\infty}e^{\varpi\tau}\|D(\tau)\|^2_{\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)}=0,\tag{3.4}$$

其中 $\varpi>0$ 将在后文定义。

4 一致矩估计

本节推导问题 (2.11)-(2.12) 的解的一致矩估计，这些估计对于建立拉回测度吸引子的存在性是必要的。为此，我们用 $\mathcal{L}(\varphi)$ 表示该随机变量的分布律，并用 C 表示可能随行变化的任意正常数。进一步假设

$$\varpi=\inf_{t\in\mathbb{R}}\left\{(a_1\wedge a_2)-\frac{1}{2}-4\alpha^2\|\delta(t)\|^2(b_2+b_1)\right\}>0.\tag{4.1}$$

讨论问题 (2.11)-(2.12) 的解在 $L^2(\Omega,\ \ell^2\times\ell^2)$ 中的一致估计。

引理 4.1. 假设(2.8)-(2.10) 和(4.1) 成立。那么对于任意的 $\tau\in\mathbb{R}$、$t\geqslant 0$ 以及随机数据$\xi=(u_\tau,v_\tau)\in L^2_{\mathcal{F}_{\tau-t}}(\Omega,\ \ell^2\times\ell^2)$，以及 $0<\epsilon_1$、ϵ_2、γ_1、$\gamma_2\leqslant 1$，问题(2.11)-(2.12) 的解 φ 满足

$$\mathbb{E}\left(\|\varphi(\tau,\tau-t,\xi)\|^2\right)+\int_{\tau-t}^{\tau}e^{-\varpi(\tau-s)}\mathbb{E}\left(\|\varphi(s,\tau-t,\xi))\|^2\right)\mathrm{d}s\leqslant C\Big(e^{-\varpi t}\mathbb{E}\left(\|\xi\|^2_{\ell^2\times\ell^2}\right)+R(\tau)\Big),\tag{4.2}$$

其中

$$\begin{aligned}R(\tau)=&\int_{-\infty}^{\tau}e^{-\varpi(\tau-s)}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|\kappa_k(s)\|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k(s)\|^2+\|f_2(s)\|^2+\|f_1(s)\|^2\right)\mathrm{d}s\\&+\int_{-\infty}^{\tau}e^{-\varpi(\tau-s)}\|\delta(s)\|^2\,\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{4.3}$$

其中 $C>0$ 是与 τ、ϵ_1、ϵ_2、γ_1 和 γ_2. 无关的常数

证明。 由 (2.11) 和伊藤公式可得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\Big[b_2\|u(s)\|^2\Big]+\Big[2d_1b_2\|Bu(s)\|^2+2a_1b_2\|u(s)\|^2+2b_2^2\langle G(u(s)),u(s)\rangle\Big]\,\mathrm{d}s\\
=&2b_2\langle f_1(s),u(s)\rangle\,\mathrm{d}s+2b_1b_2\langle F(u(s),v(s)),u(s)\rangle\,\mathrm{d}s\\
&+b_2\epsilon_1^2\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k(s)+\sigma_k(t,u(s))\|^2\,\mathrm{d}s+2b_2\epsilon_1\sum_{k=1}^{\infty}\langle h_k(s)+\sigma_k(t,u(s)),u(s)\rangle\,\mathrm{d}W_k(s)\\
&+b_2\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|y_k|<1}\Big(\|u(s-)+\epsilon_2(q_k(t,u(s-),y_k)+\kappa_k(s))\|^2-\|u(s-)\|^2\Big)\tilde{L}_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y_k)\\
&+b_2\epsilon_2^2\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|y_k|<1}\|q_k(t,u(s),y_k)+\kappa_k(s)\|^2\nu_k(\mathrm{d}y_k)\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}\tag{4.4}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\left[b_1\|v(s)\|^2\right]+\Big[2d_2b_1\|Bv(s)\|^2+2a_2b_1\|v(s)\|^2+2b_1^2\big(F(u(s),v(s)),v(s)\big)\Big]\,\mathrm{d}s\\
=&2b_1\langle f_2(s),v_n(s)\rangle\,\mathrm{d}s+2b_2b_1\big\langle G^n(u_n(s)),v_n(s)\big\rangle\,\mathrm{d}s\\
&+b_1\gamma_1^2\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k(s)+\sigma_k(t,v(s))\|^2\,\mathrm{d}s+2b_1\gamma_1\sum_{k=1}^{\infty}\big\langle h_k(s)+\sigma_k(t,v(s)),v(s)\big\rangle\mathrm{d}W_k(s)\\
&+b_1\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|y_k|<1}\Big(\|v(s-)+\gamma_2(q_k(t,v(s-),y_k)+\kappa_k(s))\|^2-\|v(s-)\|^2\Big)\tilde{L}_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y_k)\\
&+b_1\gamma_2^2\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|y_k|<1}\|q_k(t,v(s),y_k)+\kappa_k(s)\|^2\nu_k(\mathrm{d}y_k)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}\tag{4.5}
$$

对（4.4）+（4.13）取期望，可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbb{E}\Big[\|b_2u(s)\|^2+\|b_1v(s)\|^2\Big]=&\mathbb{E}\Big[-2d_1b_2\|Bu(s)\|^2-2a_1b_2\|u(s)\|^2-2b_2^2\langle G(u(s)),u(s)\rangle\Big]\\
&+\mathbb{E}\Big[-2d_2b_1\|Bv(s)\|^2-2a_2b_1\|v(s)\|^2-2b_1^2\big(F(u(s),v(s)),v(s)\big)\Big]\\
&+2b_2\mathbb{E}\Big[\langle f_1(s),u(s)\rangle\Big]+2b_1b_2\mathbb{E}\Big[\langle F(u(s),v(s)),u(s)\rangle\Big]\\
&+b_2\epsilon_1^2\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\Big[\|h_k(s)+\sigma_k(t,u(s))\|^2\Big]+b_1\gamma_1^2\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\Big[\|h_k(s)+\sigma_k(t,v(s))\|^2\Big]\\
&+2b_1\mathbb{E}\Big[\langle f_2(s),v_n(s)\rangle\Big]+2b_2b_1\mathbb{E}\Big[\langle G(u(s)),v(s)\rangle\Big]\\
&+b_1\gamma_2^2\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|y_k|<1}\mathbb{E}\Big[\|q_k(t,v(s),y_k)+\kappa_k(s)\|^2\nu_k(\mathrm{d}y_k)\Big]\\
&+b_2\epsilon_2^2\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|y_k|<1}\mathbb{E}\Big[\|q_k(t,u(s),y_k)+\kappa_k(s)\|^2\nu_k(\mathrm{d}y_k)\Big].
\end{aligned}\tag{4.6}
$$

利用不等式 (2.2)-(2.4)，我们推导出

$$
b_2b_1\langle F(u,v),u\rangle-b_2^2\langle G(u),u\rangle-b_1^2\langle F(u,v),v\rangle+b_2b_1\langle G(u),v\rangle\leqslant 0.
$$

And

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbb{E}\Big[b_1\|v(s)\|^2+b_2\|u(s)\|^2\Big]\\
\leqslant&-2\varsigma\mathbb{E}\Big(b_2\|u(s)\|^2+b_1\|v(s)\|^2\Big)+\Big(4b_2\epsilon_1^2+4b_1\gamma_1^2+4b_2\epsilon_2^2+4b_1\gamma_2^2\Big)\alpha^2\|\delta(s)\|^2\\
&+(1+2b_2\epsilon_1^2+2b_1\gamma_1^2+2b_1\gamma_2^2+2b_2\epsilon_2^2)\mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\|\kappa_k(s)\|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k(s)\|^2+b_1\|f_2(s)\|^2+b_2\|f_1(s)\|^2\Big]\\
&+\big(1+4\alpha^2\|\delta\|^2(b_2\epsilon_1^2+b_2\epsilon_2^2+b_1\gamma_1^2+b_1\gamma_2^2)\big)\mathbb{E}\Big[b_2\|u(s)\|^2+b_1\|v(s)\|^2\Big],
\end{aligned}\tag{4.7}$$

其中 $\varsigma=a_1\wedge a_2$。利用上述不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbb{E}\Big[b_1\|v(s)\|^2+b_2\|u(s)\|^2\Big]\\
\leqslant&-2\varpi\mathbb{E}\Big(b_2\|u(s)\|^2+b_1\|v(s)\|^2\Big)+\Big(4b_2\epsilon_1^2+4b_1\gamma_1^2+4b_2\epsilon_2^2+4b_1\gamma_2^2\Big)\alpha^2\|\delta(s)\|^2\\
&+(1+2b_2\epsilon_1^2+2b_1\gamma_1^2+2b_1\gamma_2^2+2b_2\epsilon_2^2)\mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\|\kappa_k(s)\|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k(s)\|^2+b_1\|f_2(s)\|^2+b_2\|f_1(s)\|^2\Big].
\end{aligned}\tag{4.8}$$

将 (4.24) 乘以 $e^{\varpi t}$，然后在 $(\tau-t,\ \tau)$ 上对所得不等式进行 $t\in\mathbb{R}^+$ 积分，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(b_2\|u(\tau,\tau-t,u_\tau)\|^2+b_1\|v(\tau,\tau-t,v_\tau)\|^2\right)\\
&+\varpi\int_{\tau-t}^{\tau}e^{-\varpi(\tau-s)}\mathbb{E}\left(b_2\|u(s,\tau-t,u_\tau)\|^2+b_1\|v(s,\tau-t,v_\tau)\|^2\right)\mathrm{d}s\\
\leqslant&\mathbb{E}\left(\|\xi\|^2_{\ell^2\times\ell^2}\right)e^{-\varpi t}+C\int_{\tau-t}^{\tau}e^{-\varpi(\tau-s)}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|\kappa_k(s)\|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k(s)\|^2+b_1\|f_2(s)\|^2+b_2\|f_1(s)\|^2\right)\mathrm{d}s\\
&+\Big(4b_2\epsilon_1^2+4b_1\gamma_1^2+4b_2\epsilon_2^2+4b_1\gamma_2^2\Big)\alpha^2\int_{\tau-t}^{\tau}e^{-\varpi(\tau-s)}\|\delta(s)\|^2\,\mathrm{d}s\\
\leqslant&\mathbb{E}\left(\|\xi\|^2_{\ell^2\times\ell^2}\right)e^{-\varpi t}+C\int_{-\infty}^{\tau}e^{-\varpi(\tau-s)}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|\kappa_k(s)\|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k(s)\|^2+b_1\|f_2(s)\|^2+b_2\|f_1(s)\|^2\right)\mathrm{d}s\\
&+\Big(4b_2\epsilon_1^2+4b_1\gamma_1^2+4b_2\epsilon_2^2+4b_1\gamma_2^2\Big)\alpha^2\int_{-\infty}^{\tau}e^{-\varpi(\tau-s)}\|\delta(s)\|^2\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}\tag{4.9}$$

至此证明完成。 □

接下来，我们推导 (2.11)-(2.12) 的解的尾部的一致估计，这对于在 $\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)$ 中建立该解的概率分布族的 $\mathcal{D}$-拉回渐近紧性至关重要。

引理 4.2. 假设(2.8)-(2.10)和(4.1) 成立。那么对于任意 $\eta>0$ 和 $\tau\in\mathbb{R}$，存在$N=N(\tau,\eta)\in\mathbb{N}$，使得对于所有 $0<\epsilon_1$、ϵ_2、γ_1、$\gamma_2\leqslant 1$、$t\geqslant 0$和 $n\geqslant N$，(2.11)-(2.12)的解 φ 满足

$$\sum_{|i|\geqslant n}\mathbb{E}(|u_i(\tau,\tau-t,u_\tau)|^2+|v_i(\tau,\tau-t,v_\tau)|^2)\leqslant Ce^{-\varpi t}\mathbb{E}\left(\|\xi\|^2_{\ell^2\times\ell^2}\right)+\eta,\tag{4.10}$$

当 $\xi=(u_\tau,v_\tau)\in L^2_{\mathcal{F}_{\tau-t}}(\Omega;\ell^2\times\ell^2)$时。

证明。设 $\theta\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个光滑函数，使得对所有 $s\in\mathbb{R}$，$0\leqslant\theta(s)\leqslant 1$，并且

$$\theta(s)=0,\quad \text{for } |s|\leqslant 1,\quad \text{and } \theta(s)=1,\quad \text{for } |s|\geqslant 2.$$

给定 $n\in\mathbb{N}$，记 $\theta_n=(\theta(\frac{i}{n}))_{i\in\mathbb{Z}}$ 和 $\theta_n u=(\theta(\frac{i}{n})u_i)_{i\in\mathbb{Z}}$、$\theta_n v=(\theta(\frac{i}{n})v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，其中 $u=(u_i)_{i\in\mathbb{Z}}$、$v=(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$。由 (2.11)，可得

$$\begin{cases}
\mathrm{d}\theta_n u(t)=(-d_1\theta_n Au(t)-a_1\theta_n u(t)+b_1\theta_n F(u(t),v(t))-b_2\theta_n G(u(t))+\theta_n f_1(t))\,\mathrm{d}t\\
\qquad\qquad+\epsilon_1\sum_{k=1}^{\infty}(\theta_n h_k(t)+\theta_n\sigma_k(t,u(t)))\,\mathrm{d}W_k(t)\\
\qquad\qquad+\epsilon_2\sum_{k=1}^{\infty}(\theta_n\kappa_k(t)+\theta_n q_k(t,u(t-),y_k))\,\tilde{L}_k(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y_k),\\
\mathrm{d}\theta_n v(t)=(-d_2\theta_n Av(t)-a_2\theta_n v(t)-b_1\theta_n F(u(t),v(t))+b_2\theta_n G(u(t))+\theta_n f_2(t))\,\mathrm{d}t\\
\qquad\qquad+\gamma_1\sum_{k=1}^{\infty}(\theta_n h_k(t)+\theta_n\sigma_k(t,v(t)))\,\mathrm{d}W_k(t)\\
\qquad\qquad+\gamma_2\sum_{k=1}^{\infty}(\theta_n\kappa_k(t)+\theta_n q_k(t,v(t-),y_k))\,\tilde{L}_k(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y_k),
\end{cases}\tag{4.11}$$

From 根据方程（4.11）和伊藤公式，我们分别得到以下结果 lts

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\Big[b_2\|\theta_n u(s)\|^2\Big]+\Big[2d_1b_2\left\langle Bu(t),B\left(\theta_n^2u(t)\right)\right\rangle+2a_1b_2\|\theta_n u(s)\|^2+2b_2^2\left\langle\theta_nG(u(s)),\theta_nu(s)\right\rangle\Big]\,\mathrm{d}s\\
=&2b_2\left\langle\theta_nf_1(s),\theta_nu(s)\right\rangle\,\mathrm{d}s+2b_1b_2\left\langle\theta_nF(u(s),v(s)),\theta_nu(s)\right\rangle\,\mathrm{d}s\\
&+b_2\epsilon_1^2\sum_{k=1}^{\infty}\|\theta_nh_k(s)+\theta_n\sigma_k(t,u(s))\|^2\,\mathrm{d}s+2b_2\epsilon_1\sum_{k=1}^{\infty}\langle\theta_nh_k(s)+\theta_n\sigma_k(t,u(s)),\theta_nu(s)\rangle\,\mathrm{d}W_k(s)\\
&+b_2\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|y_k|<1}\Big(\|\theta_nu(s-)+\epsilon_2(\theta_nq_k(t,u(s-),y_k)+\theta_n\kappa_k(s))\|^2-\|\theta_nu(s-)\|^2\Big)\tilde{L}_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y_k)\\
&+b_2\epsilon_2^2\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|y_k|<1}\|\theta_nq_k(t,u(s),y_k)+\theta_n\kappa_k(s)\|^2\nu_k(\mathrm{d}y_k)\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}\tag{4.12}$$

and

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\left[b_1\|\theta_nv(s)\|^2\right]+\Big[2d_2b_1\left\langle Bv(s),B\left(\theta_n^2v(s)\right)\right\rangle+2a_2b_1\|\theta_nv(s)\|^2+2b_1^2\big(\theta_nF(u(s),v(s)),\theta_nv(s)\big)\Big]\,\mathrm{d}s\\
=&2b_1\langle\theta_nf_2(s),\theta_nv_n(s)\rangle\,\mathrm{d}s+2b_2b_1\big\langle\theta_nG^n(u_n(s)),\theta_nv_n(s)\big\rangle\,\mathrm{d}s\\
&+b_1\gamma_1^2\sum_{k=1}^{\infty}\|\theta_nh_k(s)+\theta_n\sigma_k(t,v(s))\|^2\,\mathrm{d}s+2b_1\gamma_1\sum_{k=1}^{\infty}\big\langle\theta_nh_k(s)+\theta_n\sigma_k(t,v(s)),\theta_nv(s)\big\rangle\mathrm{d}W_k(s)\\
&+b_1\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|y_k|<1}\Big(\|\theta_nv(s-)+\gamma_2(\theta_nq_k(t,v(s-),y_k)+\theta_n\kappa_k(s))\|^2-\|\theta_nv(s-)\|^2\Big)\tilde{L}_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y_k)
\end{aligned}$$

$$+ b_1\gamma_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|y_k|<1} \|\theta_n q_k(t, v(s), y_k) + \theta_n \kappa_k(s)\|^2 \nu_k(\mathrm{d}y_k)\, \mathrm{d}s. \tag{4.13}$$

对于（4.13）左侧的第二项，我们得到

$$\begin{aligned}
&2d_1 b_2 \mathbb{E}\left(\langle Bv(t), B(\theta_n^2 v(t))\rangle\right) \\
=&2d_1 b_2 \mathbb{E}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} (v_{i+1} - v_i)\left(\theta_n^2 (i+1/n)\, v_{i+1} - \theta_n^2 (i/n)\, v_i\right)\right) \\
=&2d_1 b_2 \mathbb{E}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \theta_n^2 (i+1/n)\, (v_{i+1} - v_i)^2\right) + 2d_1 b_2 \mathbb{E}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(\theta_n^2 (i+1/n) - \theta^2 (i/n)\right)(v_{i+1} - v_i)\, v_i\right).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

对于 (4.14) 的最后一项，我们有

$$\begin{aligned}
&\Big|2d_2 b_1 \mathbb{E}\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \big(\theta^2(i+1/n) - \theta^2(i/n)\big)\big(v_{i+1} - u_i\big)v_i\Big)\Big| \\
\leqslant& 2d_2 b_1 \mathbb{E}\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \big|\theta(i+1/n) + \theta(i/n)\big|\big|\theta(i+1/n) - \theta(i/n)\big|\big|v_{i+1} - v_i\big|\big|v_i\big|\Big) \\
\leqslant& 4d_2 b_1 \mathbb{E}\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \big|\theta(i+1/n) - \theta(i/n)\big|\big|v_{i+1} - v_i\big|\big|v_i\big|\Big) \\
\leqslant& \frac{4d_2 b_1}{n} \mathbb{E}\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \big|\theta'(\eta_i)\big|\big(\big|v_{i+1}\big| + \big|v_i\big|\big)\big|v_i\big|\Big) \\
\leqslant& \frac{C_1}{n} \mathbb{E}\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} b_2\big(\big|v_{i+1}\big|^2 - \big|v_i\big|^2\big)\Big) \leqslant \frac{2C}{n} \mathbb{E}(\|v(t)\|^2).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

于是，由 (4.14) 可得 (4.15)：

$$2d_2 b_1 \mathbb{E}\left(\langle Bv(t), B(\theta_n^2 v(t))\rangle\right) \geqslant -\frac{2C}{n} \mathbb{E}(\|v(t)\|^2). \tag{4.16}$$

类似地，我们可以推得存在 $C > 0$，使得

$$2d_2 b_1 \mathbb{E}\left(\langle Bu(t), B(\theta_n^2 u(t))\rangle\right) \geqslant -\frac{2C}{n} \mathbb{E}(\|u(t)\|^2). \tag{4.17}$$

对于 (4.12)–(4.13) 右端的第一项，由杨氏不等式可得

$$2b_2 \mathbb{E}\left(\langle \theta_n f_1, \theta_n u(t)\rangle\right) \leqslant \mathbb{E}\left(b_2 \|\theta_n u(t)\|^2\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{|i|\geqslant n} b_2 f_{1i}^2(t)\right), \tag{4.18}$$

and

$$2b_1 \mathbb{E}\left(\langle \theta_n f_2, \theta_n v(t)\rangle\right) \leqslant \mathbb{E}\left(b_1 \|\theta_n v(t)\|^2\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{|i|\geqslant n} b_1 f_{2i}^2(t)\right). \tag{4.19}$$

将 (2.9) 应用于扩散项，可得

$$
\begin{aligned}
&b_2\epsilon_1^2\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\left(\|\theta_n h_k+\theta_n\sigma_k(t,u(t))\|^2\right)\\
\leqslant&2b_2\epsilon_1^2\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\left(\|\theta_n h_k\|^2\right)+2b_2\epsilon_1^2\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\theta(i/n)\delta_{k,i}\tilde{\sigma}_k(t,u_i(t))^2\right)\\
\leqslant&2b_2\epsilon_1^2\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\left(\|\theta_n h_k\|^2\right)+4\epsilon_1^2b_2\alpha^2\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\theta^2(i/n)\delta_{k,i}^2\right)+4\epsilon_1^2\alpha^2\|\delta\|^2\mathbb{E}\left(b_2\|\theta_n u(t)\|^2\right)\\
\leqslant&2b_2\epsilon_1^2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|i|\geqslant n}h_{k,i}^2+4b_2\epsilon_1^2\alpha^2\sum_{|i|\geqslant n}\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{k,i}^2+4b_2\epsilon_1^2\alpha^2\mathbb{E}\left(b_2\|\theta_n u(t)\|^2\right),
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&b_1\gamma_1^2\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\left(\|\theta_n h_k+\theta_n\sigma_k(t,v(t))\|^2\right)\\
\leqslant&2b_1\gamma_1^2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|i|\geqslant n}h_{k,i}^2+4b_1\gamma_1^2\alpha^2\sum_{|i|\geqslant n}\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{k,i}^2+4b_1\gamma_1^2\alpha^2\mathbb{E}\left(b_2\|\theta_n v(t)\|^2\right).
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

同理，可得

$$
\begin{aligned}
&b_2\epsilon_2^2\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|y_k|<1}\mathbb{E}\left[\|\theta_n q_k(t,u(t),y_k)\|^2+\theta_n\kappa_k(t)\|^2\right]\nu_k(dy_k)\\
\leqslant&2b_2\epsilon_2^2\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|y_k|<1}\mathbb{E}\left[\|\theta_n q_k(t,u(t),y_k)\|^2\right]\nu_k(dy_k)+2b_2\epsilon_2^2\sum_{k=1}^{\infty}\|\theta_n\kappa_k(t)\|^2\\
=&2b_2\epsilon_2^2\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|\nu_k|<1}\mathbb{E}\left[\theta^2\left(\frac{i}{n}\right)|q_{k,i}(t,u_i(t),y_k)|^2\right]\nu_k(dy_k)+2b_2\epsilon_2^2\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k=1}^{\infty}\theta^2\left(\frac{i}{n}\right)|\kappa_{k,i}(t)|^2\\
\leqslant&4b_2\epsilon_2^2\alpha^2\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k=1}^{\infty}\theta^2\left(\frac{i}{n}\right)\delta_{k,i}+4b_2\epsilon_2^2\alpha^2\|\delta\|^2\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\theta^2\left(\frac{i}{n}\right)|u_i(t)|^2\right]+2b_2\epsilon_2^2\sum_{|i|\geqslant n}\sum_{k=1}^{\infty}|\kappa_{k,i}(t)|^2\\
\leqslant&4b_2\epsilon_2^2\alpha^2\sum_{|i|\geqslant n}\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{k,i}+2b_2\epsilon_2^2\sum_{|i|\geqslant n}\sum_{k=1}^{\infty}|\kappa_{k,i}(t)|^2+4b_2\epsilon_2^2\alpha^2\|\delta\|^2\mathbb{E}\left[\|\theta_n u(t)\|^2\right],
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&b_1\gamma_2^2\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|y_k|<1}\mathbb{E}\left[\|\theta_n q_k(t,v(t),y_k)\|^2+\theta_n\kappa_k(t)\|^2\right]\nu_k(dy_k)\\
\leqslant&4b_1\gamma_2^2\alpha^2\sum_{|i|\geqslant n}\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{k,i}+2b_1\gamma_2^2\sum_{|i|\geqslant n}\sum_{k=1}^{\infty}|\kappa_{k,i}(t)|^2+4b_1\gamma_2^2\alpha^2\|\delta\|^2\mathbb{E}\left[\|\theta_n v(t)\|^2\right].
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

结合　前述关系和不等式 (4.12)-(4.23)，我们可以得出

$$
\begin{aligned}
&D^+\mathbb{E}\Big[b_1\|\theta_n v(s)\|^2+b_2\|\theta_n u(s)\|^2\Big]\\
\leqslant&-2\varpi\mathbb{E}\Big(b_2\|\theta_n u(s)\|^2+b_1\|\theta_n v(s)\|^2\Big)+\Big(4b_2\epsilon_1^2+4b_1\gamma_1^2+4b_2\epsilon_2^2+4b_1\gamma_2^2\Big)\alpha^2\sum_{|i|\geqslant n}\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{k,i}^2(s)\\
&+M_1\mathbb{E}\Big[\sum_{|i|\geqslant n}\sum_{k=1}^{\infty}|\kappa_{k,i}(s)|^2+\sum_{|i|\geqslant n}\sum_{k=1}^{\infty}|h_{k,i}(s)|^2+b_1\sum_{|i|\geqslant n}|f_{2,i}(s)|^2+b_2\sum_{|i|\geqslant n}|f_{1,i}(s)|^2\Big]\\
&+\frac{4C}{n}\mathbb{E}\left(b_2\|u(t)\|^2+b_1\|v(t)\|^2\right),
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

其中 $M_1=(1+2b_2\epsilon_1^2+2b_1\gamma_1^2+2b_1\gamma_2^2+2b_2\epsilon_2^2)$，且 D^+ 为上右 Dini导数。给定 $t\in\mathbb{R}^+$和 $\tau\in\mathbb{R}$，对上述内容在 $(\tau-t,\tau)$ 上积分，可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(b_2\|\theta_n u(\tau,\tau-t,u_\tau)\|^2+b_1\|\theta_n v(\tau,\tau-t,v_\tau)\|^2\right)\\
\leqslant&C\int_{-\infty}^{\tau}e^{-\varpi(\tau-s)}\left(\sum_{|i|\geqslant n}\sum_{k=1}^{\infty}|\kappa_{k,i}(s)|^2+\sum_{|i|\geqslant n}\sum_{k=1}^{\infty}|h_{k,i}(s)|^2+\sum_{|i|\geqslant n}\left(b_1|f_{2,i}(s)|^2+b_2|f_{1,i}(s)|^2\right)\right)\mathrm{d}s\\
&+\mathbb{E}\left(\|\theta_n\xi\|_{\ell^2\times\ell^2}^2\right)e^{-\varpi t}+C\int_{\tau-t}^{\tau}\sum_{|i|\geqslant n}\sum_{k=1}^{\infty}|\delta_{k,i}(s)|^2\,\mathrm{d}s\\
&+\frac{4C}{n}\int_{\tau-t}^{\tau}e^{-\varpi(\tau-s)}\mathbb{E}\left(b_2\|u(s,\tau-t,u_\tau)\|^2+b_1\|v(s,\tau-t,v_\tau)\|^2\right)\mathrm{d}s
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

由引理 4.1 可知

$$
\frac{4C}{n}\int_{\tau-t}^{\tau}e^{-\varpi(\tau-s)}\mathbb{E}\left(b_2\|u(s,\tau-t,u_\tau)\|^2+b_1\|v(s,\tau-t,v_\tau)\|^2\right)\mathrm{d}s\leqslant Ce^{-\varpi t}\mathbb{E}\left(\|\xi\|_{\ell^2\times\ell^2}^2\right)+\frac{C}{n}R(\tau),
\tag{4.26}
$$

其中 $R(\tau)$ 由 (4.3) 给出。那么对于每个 $\eta>0$ 和 $\tau\in\mathbb{R}$，存在 $N_1=N_1(\tau,\eta)\in\mathbb{N}$，使得对所有 $n\geqslant N_1$,

$$
\frac{C}{n}R(\tau)<\frac{\eta}{2}.
$$

由 (2.10) 可知，对于每个 $\eta>0$ 和 $\tau\in\mathbb{R}$，存在 $N_2=N_2(\tau,\ \eta)\in\mathbb{N}$，使得对于 $n>N_2$,

$$
\begin{aligned}
&C\int_{-\infty}^{\tau}e^{-\varpi(\tau-s)}\left(\sum_{|i|\geqslant n}\sum_{k=1}^{\infty}|\kappa_{k,i}(s)|^2+\sum_{|i|\geqslant n}\sum_{k=1}^{\infty}|h_{k,i}(s)|^2\right)\mathrm{d}s+C\int_{\tau-t}^{\tau}e^{-\varpi(\tau-s)}\sum_{|i|\geqslant n}\sum_{k=1}^{\infty}|\delta_{k,i}(s)|^2\,\mathrm{d}s\\
&+C\int_{\tau-t}^{\tau}e^{-\varpi(\tau-s)}\left(\sum_{|i|\geqslant n}|f_{2,i}(s)|^2+\sum_{|i|\geqslant n}|f_{1,i}(s)|^2\right)\mathrm{d}s\\
\leqslant&\frac{\eta}{2}.
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

结合 (4.25)-(4.27)，可得对于每个 $\eta > 0$ 和 $\tau \in \mathbb{R}$，存在 $N = \max(N_1, N_2)$，使得对于所有 $0 < \epsilon_i, \gamma_i \leqslant 1$、$i = 1, 2$ 以及 $n \geqslant N$，

$$\mathbb{E}\left(\|\theta_n \varphi(t)\|^2\right) \leqslant Ce^{-\varpi t}\mathbb{E}\left(\|\xi\|^2_{\ell^2\times\ell^2}\right) + \eta. \tag{4.28}$$

证明至此完成。 □

5 拉回测度吸引子的存在性

本节致力于研究 $\mathcal{D}$-拉回测度吸引子在 $\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)$ 中的存在性、唯一性和周期性。通常，若 $\Im$: $\ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}$ 是一个有界博雷尔函数，则对于 $r \leqslant t$ 和$\xi \in \ell^2 \times \ell^2$，我们定义

$$p(t, r)\Im(\xi) = \mathbb{E}\left(\Im(\varphi(t, r, \xi))\right), \tag{5.1}$$

and

$$p(r, \xi; t, \Gamma) = (p(t, r)1_\Gamma)(\xi), \tag{5.2}$$

其中 $\Gamma \in \mathcal{B}(l^2)$，且 1_Γ 是 Γ的特征函数。

$p(t, r)$、$r \leqslant t$的以下性质是标准的，故省略证明。

引理 5.1. 假设(2.8)-(2.10) 和(4.1)成立。那么：

(i) 族 $\{p(t, r)\}_{r\leqslant t}$ 是费勒的；也就是说，对于任意 $r \leqslant t$，函数 $p(t, r)\phi \in C_b(\ell^2 \times \ell^2)$ *if* $\phi \in C_b(\ell^2 \times \ell^2)$。

(ii) 对每个 $r \in \mathbb{R}$ 和 $\xi \in \ell^2 \times \ell^2$，过程 $\{\varphi(t, r, \xi)\}_{t\geqslant r}$ 是一个取值于 $\ell^2 \times \ell^2$ 的马尔可夫过程。

我们还将研究系统 (2.11)-(2.12) 的拉回测度吸引子的周期性。为此，我们假设所有给定的时变函数关于 $t \in \mathbb{R}$ 均为 α-周期的，其中 $\chi > 0$，也就是说，对所有 $t \in \mathbb{R}$ 和 $k \in \mathbb{N}$，

$$\begin{aligned}
&\kappa_k(t + \chi) = \kappa_k, \quad q_k(t + \chi, \cdot, y_k) = q_k(t, \cdot, y_k),\\
&f_1(t + \chi) = f_1(t), \quad f_2(t + \chi) = f_2(t),\\
&h_k(t + \chi) = h_k(t), \quad \delta_k(t + \chi, \cdot) = \delta_k(t, \cdot).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

通过与 [34], 中引理 4.1 类似的论证，我们得到以下引理。

引理 5.2。 假设(2.8)-(2.10)、(4.1) 和(5.3) 成立。那么，族 $\{p(t、\ r)\}_{r\leqslant t}$ 是 χ-周期的；也就是说，对所有 $t \geqslant r$,

$$p(r, \xi; t, \cdot) = p(r + \chi, \xi; t + \chi, \cdot), \quad \forall \xi \in \ell^2 \times \ell^2.$$

给定 $t \geqslant r$ 和 $\mu \in \mathcal{P}(\ell^2 \times \ell^2)$，定义

$$p^*(t,r)\mu(\cdot) = \int_{\ell^2\times\ell^2} p(r,\xi;t,\cdot)\mu(d\xi). \tag{5.4}$$

那么 $p^*(t,r): \mathcal{P}(\ell^2 \times \ell^2) \to \mathcal{P}(\ell^2 \times \ell^2)$ 是 $p(t,r)$ 的对偶算子。对于所有 $t \geqslant r$, $p^*(t,r)$ 都将 $\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)$ 映射到 $\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)$。

现在，对于算子族 $p^*(t,\tau)$，我们定义一个非自治动力系统 $S(t,\tau): t \geqslant \tau$。给定 $t \in \mathbb{R}^+$ 和 $\tau \in \mathbb{R}$，令 $S(t,\tau): \mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2) \to \mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)$ 为如下定义的映射

$$S(t,\tau)\mu = p^*(\tau+t,\tau)\mu, \quad \mu \in \mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2). \tag{5.5}$$

注意，映射 $S(t,\tau): \mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2) \to \mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)$ 可由以下对偶关系等价地刻画:

$$\int_{\ell^2\times\ell^2} \phi(x)\,[S(t,\tau)\mu](dx) = \int_{\ell^2\times\ell^2} \mathbb{E}\big[\phi\big(\varphi(\tau+t,\tau,x)\big)\big]\,\mu(dx), \quad \forall\, \mu \in \mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2),\ \psi \in C_b(\ell^2 \times \ell^2). \tag{5.6}$$

引理 5.3. 假设(2.8)-(2.10)、(4.1)和(5.3)成立。那么，$S(t,\tau)$, $t \geqslant \tau$, 是由(2.11)-(2.12)生成的 $\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)$ 中的连续非自治动力系统。也就是说，$S(t,r): \mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2) \to \mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)$ 满足以下条件:

(i) $S(0,\tau) = I_{\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)}$，对所有 $\tau \in \mathbb{R}$;

(ii) $S(s+t,\tau) = S(t,\tau+s) \circ S(s,\tau)$，对任意 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $t,s \in \mathbb{R}^+$,

(iii) $S(t,\tau)$: $\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2) \to \mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)$ 对每个 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $t \in \mathbb{R}^+$ 都是连续的。

(iv) $S(t,\tau)\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2) \subseteq \mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)$ 对所有 $t \geqslant 0, \tau \in \mathbb{R}$。

证明。注意到 (i) 由 S 的定义可得，而 (ii) 则由方程 (2.11)-(2.12) 的解所满足的马尔可夫性质得出。

现在证明 (iii)。设 $\mu_n \to \mu$ 属于 $\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)$。我们将证明，对于每个 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $t \in \mathbb{R}^+$, $S(t,\tau)\mu_n \to S(t,\tau)\mu$ 属于 $\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)$。令 $\phi \in C_b(\ell^2 \times \ell^2)$。根据引理 5.1，对于所有 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $t \in \mathbb{R}^+$，有 $p(\tau+t,\tau)\phi \in C_b(\ell^2 \times \ell^2)$，因此

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} (\phi, S(t,\tau)\mu_n) \\
=&\lim_{n\to\infty} (\phi, p^*(t+\tau,\tau)\mu_n) \\
=&\lim_{n\to\infty} (p(t+\tau,\tau)\phi, \mu_n) = (p(t+\tau,\tau)\phi, \mu) \\
=&(\phi, p^*(t+\tau,\tau)\mu) = (\phi, S(t,\tau)\mu),
\end{aligned}$$

正如所需。最后，我们证明（iv）。

应用 Lévy 的 对于函数 $\phi_n(x) = \|x\|^2_{\ell^2\times\ell^2} \wedge n$ 的定理，由（5.6）可推得

$$\begin{aligned}&\int_{\ell^2\times\ell^2} \|x\|^2_{\ell^2\times\ell^2}\,[S(t,\tau)\mu](dx) = \lim_{n\to\infty}\int_{\ell^2\times\ell^2}\phi_n(x)\,[S(t,\tau)\mu](dx)\\&= \lim_{n\to\infty}\int_{\ell^2\times\ell^2}\mathbb{E}[\phi_n(\varphi(t+\tau,\tau,x))]\mu(dx) = \int_{\ell^2\times\ell^2}\mathbb{E}\big[\|\varphi(\tau+t,\tau,x)\|^2_{\ell^2\times\ell^2}\big]\,\mu(dx).\end{aligned} \tag{5.7}$$

于是由引理 4.1 可得，对所有 $\mu\in\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)$,

$$\begin{aligned}\|S(t,\tau)\mu\|^2_{\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)} &= \int_{\ell^2\times\ell^2}\|x\|^2_{\ell^2\times\ell^2}\,[S(t,\tau)\mu](dx)\\&= \int_{\ell^2\times\ell^2}\mathbb{E}\big[\|\varphi(\tau+t,\tau,x)\|^2_{\ell^2\times\ell^2}\big]\,\mu(dx)\\&\leqslant Ce^{-\varpi t}\int_{\ell^2\times\ell^2}\|x\|^2_{\ell^2\times\ell^2}\mu(dx)\\&\leqslant C\|\mu\|^2_{\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)} + CR(\tau+t) < \infty.\end{aligned} \tag{5.8}$$

因此， $S(t,\ \tau)\mu\in\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)$。

□

由引理 4.1，我们得到一个 $\mathcal{D}$-拉回吸收集，其针对 S ，如下所述。

Le理 5.4. 假设(2.8)–(2.10)、(4.1)和(5.3) 成立。给定 $\tau\in\mathbb{R}$，定义 e

$$K(\tau) = B_{\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)}\Big(L_1^{1/2}(\tau)\Big), \tag{5.9}$$

其中

$$\begin{aligned}L_1(\tau) = C\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\varpi(\tau-s)}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|\kappa_k(s)\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\|h(s)\|^2\right)\mathrm{d}s + C\int_{-\infty}^{\tau}e^{-\varpi(\tau-s)}\|\delta(s)\|^2\,\mathrm{d}s\\+ C\int_{-\infty}^{\tau}e^{-\varpi(\tau-s)}\big(\|f_2(s)\|^2 + \|f_1(s)\|^2\big)\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{5.10}$$

于是，族 $K = \{K(\tau):\ \tau\in\mathbb{R}\}$ 属于 $\mathcal{D}$ ，并构成余循环 S 的一个闭 $\mathcal{D}$-拉回吸收集。

证明。 论证沿用 [37, 38]的策略。

步骤 *1*: *()* 的闭性。 设 $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset K(\tau)$，且假设 $\mu_n \rightharpoonup \mu_0$属于 $\mathcal{P}(\ell^2\times\ell^2)$。根据 $K(\tau)$ 的定义，我们有

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{\ell^2\times\ell^2}\|x\|^2_{\ell^2\times\ell^2}\,\mu_n(dx) \leq L_1(\tau). \tag{5.11}$$

对于每个 $m\in\mathbb{N}$，定义有界连续截断

$$\phi_m(x) := \|x\|^2_{\ell^2\times\ell^2}\wedge m \in C_b(\ell^2\times\ell^2),\quad 0\leq\phi_m\uparrow\|x\|^2_{\ell^2\times\ell^2}.$$

由于 $\phi_m \in C_b(\ell^2 \times \ell^2)$ 且 $\mu_n \rightharpoonup \mu_0$，因此，对于每个固定的 m,

$$\int_{\ell^2\times\ell^2} \phi_m(x)\,\mu_0(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_{\ell^2\times\ell^2} \phi_m(x)\,\mu_n(dx) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\ell^2\times\ell^2} \|x\|^2_{\ell^2\times\ell^2}\,\mu_n(dx) \le L_1(\tau).$$

令 $m \to \infty$，并利用贝波-列维单调收敛定理可得

$$\int_{\ell^2\times\ell^2} \|x\|^2_{\ell^2\times\ell^2}\,\mu_0(dx) = \lim_{m\to\infty} \int_{\ell^2\times\ell^2} \phi_m(x)\,\mu_0(dx) \le L_1(\tau).$$

因此 $\mu_0 \in K(\tau)$，从而每个 $K(\tau)$ 都是闭的。

步骤 *2*：拉回吸收性质。固定 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $D \in \mathcal{D}$。对于任意 $t \ge 0$ 和 $\mu \in D(\tau - t)$，由 (5.6) 和引理 4.1，可得

$$\begin{aligned}
\|S(t,\tau-t)\mu\|^2_{\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)} &= \int_{\ell^2\times\ell^2} \|x\|^2_{\ell^2\times\ell^2}[S(t,\tau-t)\mu](dx) \\
&= \int_{\ell^2\times\ell^2} \mathbb{E}\big[\|\varphi(\tau,\tau-t,x)\|^2_{\ell^2\times\ell^2}\big]\,\mu(dx) \\
&\le Ce^{-\varpi t}\int_{\ell^2\times\ell^2} \|x\|^2_{\ell^2\times\ell^2}\mu(dx) + CR(\tau) \\
&\le Ce^{-\varpi t}\|D(\tau-t)\|^2_{\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)} + CR(\tau). \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

根据温和性条件 (3.4)，存在 $T = T(\tau,\ D) > 0$，其与 $\epsilon_i,\ \gamma_i (i = 1,\ 2)$ 无关，使得对所有 $t \ge T$ 和 $0 < \epsilon_i,\ \gamma_i \le 1$,

$$Ce^{-\varpi t}\|D(\tau-t)\|^2_{\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)} \le R(\tau).$$

将其与 (5.12) 结合可得

$$\|S(t,\tau-t)\mu\|^2_{\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)} \le L_1(\tau), \quad \forall\, t \ge T,$$

这意味着 $S(t,\ \tau - t)D(\tau - t) \subseteq K(\tau)$。因此，$K$ 是 S 在 $\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)$ 中的一个拉回吸收集。

步骤 *3*：证明 K 属于 $\mathcal{D}$。由 (5.9)、(5.10) 和 (2.10)，可得

$$e^{\varpi\tau}\|K(\tau)\|^2_{\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)} = e^{\varpi\tau}L_1(\tau) \to 0, \quad \text{as } \tau \to -\infty.$$

因此，$K = \{K(\tau):\ \tau \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{D}$。证明至此完成。 □

现在我们给出与 (2.11)-(2.12) 相关的 S 的 $\mathcal{D}$-回拉渐近紧性。

引理 5.5。假设(2.8)–(2.10)和(4.1)成立。则 S 在$\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)$中是 $\mathcal{D}$-拉回渐近紧的；也就是说，对于任意 $\tau \in \mathbb{R}$，当 $t_n \to +\infty$ 且 $\mu_n \in D(\tau - t_n)$ 满足 $D \in \mathcal{D}$时，序列$\{S(t_n, \tau - t_n)\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)$中具有一个收敛子列。

证明。 根据引理 5.4 中建立的拉回吸收性质以及对偶关系 (5.6)，存在 $N_1 = N_1(\tau,\ D) \in \mathbb{N}$和一个常数 $M = M(\tau) > 0$，其与 ϵ和 D无关，使得对所有$n > N_1$,

$$\|S(t_n, \tau - t_n)\mu_n\|^2_{\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)} = \int_{\ell^2\times\ell^2} \mathbb{E}\big[\|\varphi(\tau, \tau - t_n, x)\|^2_{\ell^2\times\ell^2}\big]\, \mu_n(dx) \le M. \tag{5.13}$$

由切比雪夫（马尔可夫）不等式，(5.13) 推出，对于任意 $R_1 > 0$ 和所有 $n > N_1$,

$$\int_{\ell^2\times\ell^2} \mathbb{P}\big(\|\varphi(\tau, \tau - t_n, x)\|^2_{\ell^2\times\ell^2} > R_1\big)\, \mu_n(dx) \le \frac{M}{R_1} \xrightarrow[R_1\to\infty]{} 0.$$

因此，对于每个 $\tau \in \mathbb{R}$,对于 $\eta > 0$ 和 $m \in \mathbb{N}$，可以选取 $R_2 = R_2(\tau, \eta, m) > 0$，使得对所有 $n > N_1$ ，

$$\int_{\ell^2\times\ell^2} \mathbb{P}\big(\|\varphi(\tau, \tau - t_n, x)\|^2_{\ell^2\times\ell^2} > R_2\big)\, \mu_n(dx) < \frac{\eta}{2^{m+1}}. \tag{5.14}$$

由于 $\mu_n \in D(\tau - t_n)$ 和 $D \in \mathcal{D}$，温和性条件 (3.4) 保证存在 $H_m = H_m(\tau, D, \eta, m) > N_1$，使得对所有 $n \ge H_m$,

$$Ce^{-\varpi t_n}\|\mu_n\|^2_{\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)} \le Ce^{-\varpi t_n}\|D(\tau - t_n)\|^2_{\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)} < \frac{\eta}{2^{2m+2}}.$$

在 (4.10) 中令 $\xi(\omega) \equiv x \in \ell^2 \times \ell^2$，则存在一个整数 $n_m = n_m(\tau, D, \eta, m)$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\ell^2\times\ell^2} \mathbb{E}\left[\sum_{|i|>n_m} |\varphi_i(\tau, \tau - t_n, x)|^2\right] \mu_n(dx) < \frac{\eta}{2^{2m+2}} + Ce^{-\varpi t_n}\int_{\ell^2\times\ell^2} \|x\|^2_{\ell^2\times\ell^2}\mu_n(dx).$$

结合这两个估计可得，对所有 $n \ge H_m$,

$$\int_{\ell^2\times\ell^2} \mathbb{E}\left[\sum_{|i|>n_m} |\varphi_i(\tau, \tau - t_n, x)|^2\right] \mu_n(dx) < \frac{\eta}{2^{2m+1}}.$$

再次应用切比雪夫不等式可得

$$\int_{\ell^2\times\ell^2} \mathbb{P}\left(\sum_{|i|>n_m} |\varphi_i(\tau, \tau - t_n, x)|^2 > \frac{1}{2^m}\right) \mu_n(dx) \le 2^m \int_{\ell^2\times\ell^2} \mathbb{E}\left[\sum_{|i|>n_m} |\varphi_i|^2\right] \mu_n(dx) < \frac{\eta}{2^{m+1}}. \tag{5.15}$$

定义

$$Y_{1,m} = \Big\{\varphi \in \ell^2 \times \ell^2 :\ \|\varphi\|^2_{\ell^2\times\ell^2} \le R_2\Big\}, \tag{5.16}$$

$$Y_{2,m} = \Big\{\varphi \in \ell^2 \times \ell^2 :\ \sum_{|i|>n_m} (|u_i|^2 + |v_i|^2) \le 2^{-m}\Big\}, \tag{5.17}$$

并令 $Y_m := Y_{1,m} \cap Y_{2,m}$。 由 (5.16) 可知，集合 $\{(\varphi_i)_{|i|\le n_m} :\ \varphi \in Y_m\}$ 在有限维空间 $\mathbb{R}^{2n_m+1} \times \mathbb{R}^{2n_m+1}$ 中有界，因此是预紧的。因此，它可以被有限个半径为 Y_m 的开球覆盖

。结合来自 $Y_{2,m}$ 的小尾部估计，这表明 Y_m 可以被 $\ell^2 \times \ell^2$ 中有限个半径为 $2^{-(m-1)/2}$ 的开球覆盖。

对于每个固定的 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $m \in \mathbb{N}$，我们可以选取一个紧集 $K_m = K_m(\tau)$，使得对于所有 $n \geq H_m$，

$$\int_{\ell^2 \times \ell^2} \mathbb{P}(\varphi(\tau, \tau - t_n, x) \in K_m)\, \mu_n(dx) > 1 - \frac{\eta}{2^m}.$$

结合 (5.14)–(5.15)，定义 $\mathcal{Y}_m := Y_m \cup K_m$。则 $\mathcal{Y}_m$ 在 $\ell^2 \times \ell^2$ 中存在一个由半径为 $2^{-(m-1)/2}$ 的球构成的有限开覆盖，并且对于所有 $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\ell^2 \times \ell^2} \mathbb{P}(\varphi(\tau, \tau - t_n, x) \in \mathcal{Y}_m)\, \mu_n(dx) > 1 - \frac{\eta}{2^m}.$$

令 $\mathcal{Y} := \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{Y}_m$。则 $\mathcal{Y}$ 是闭且全有界的，因此在 $\ell^2 \times \ell^2$ 中是紧的。此外，对于每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\ell^2 \times \ell^2} \mathbb{P}(\varphi(\tau, \tau - t_n, x) \in \mathcal{Y})\, \mu_n(dx) \geq 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta}{2^m} = 1 - \eta.$$

由于 $\eta > 0$ 是任意的，结合 Prohorov定理，族 $\{S(t_n,\ \tau - t_n)\mu_n\}$ 在 $\mathcal{P}(\ell^2 \times \ell^2)$ 中是紧的，由此完成证明。 □

接下来，我们证明 (2.11)-(2.12) 在 $\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)$ 上的 $\mathcal{D}$-拉回测度吸引子的存在性、唯一性和周期性。

定理 5.6. 假设(2.8)-(2.10)和(4.1) 成立。那么对于每个 $0 < \epsilon_i, \gamma_i \leqslant 1,\ i = 1,2$，与(2.11)-(2.12) 相关联的系统 S存在唯一的 $\mathcal{D}$-拉回测度吸引子 $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(\tau) \colon \tau \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)$，对于每个 $\tau \in \mathbb{R}$，其表达式为

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\tau) = \omega(K, \tau) &= \{\psi(0, \tau) : \psi \text{ is a } \mathcal{D}\text{-complete orbit of } S\} \\ &= \{\xi(\tau) : \xi \text{ is a } \mathcal{D}\text{-complete solution of } S\}, \end{aligned} \tag{5.18}$$

其中 $K = \{K(\tau) \colon \tau \in \mathbb{R}\}$ 是 S 的 $\mathcal{D}$-拉回吸收集，如引理 *5.4* 所述。

证明. 由引理 5.3 可知， S 是 $\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)$ 上的连续非自治动力系统。注意，根据引理 5.4， S 在 $\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)$ 中有一个闭的 $\mathcal{D}$-拉回吸收集 K；根据引理 5.5， S 在 $\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)$ 中是 $\mathcal{D}$-拉回渐近紧的。因此， S 的 $\mathcal{D}$-拉回测度吸引子的存在性和唯一性可直接由命题3.10得出。

□

现在我们考察测度吸引子 $\mathcal{A}$ 的周期性。

定理5.7。 假设 (2.8)-(2.10)、(4.1) 和(5.3) 成立。那么，对于每个 $0 < \epsilon_i$、 $\gamma_i \leqslant 1$、 $i = 1$、2，与 (2.11)-(2.12) 相关的 S在 $\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)$中都有唯一的 χ-周期 $\mathcal{D}$-拉回测度吸引子 $\mathcal{A}$ 。

证明。 根据（5.9）和（5.10），我们发现 K 是 ω-周期的。此外，由引理 5.2 和（5.4）可知，与系统（2.11）-（2.12）相关联的非自治动力系统 S 也是 χ-周期的。χ-周期的。因此，根据命题3.10，我们可以推断测度吸引子 $\mathcal{A}$ 的周期性。 □

6 拉回测度吸引子的上半连续性 s

本节中，我们证明 $\mathcal{D}$-拉回测度吸引子关于非自治随机格点系统的上半连续性，当噪声强度（ϵ_i、 γ_i、 $i = 1$、 $2\to 0$， 记 $\lambda_0 = (0、 0、0、 0)$ $\lambda = (\epsilon_1、 \epsilon_2、 \gamma_1、 \gamma_2)$。

我们分析由方程 (2.11)-(2.12) 给出的非自治随机格点系统。值得注意的是，前面各节得出的所有结果在 $\lambda \to \lambda_0$ 的情形下均成立。为强调解对参数 ϵ_i 和 γ_i 的依赖性（ $i = 1,2$），我们引入记号 $\varphi^\lambda(t, \tau, \xi)$，表示系统 (2.11)-(2.12) 的解，其中 τ 表示初始时刻，$\xi \in L^2_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega\ \ell^2 \times \ell^2)$ 表示初始状态。

给定参数 $\epsilon_i, \gamma_i \in [0, 1]$，令 $p^\lambda(t, \tau)$ 表示与解 $\varphi^\lambda(t, \tau, \xi)$ 对应的转移算子，而 $(p^\lambda)^*(t, \tau)$ 表示与 $p^\lambda(t, \tau)$ 相关联的对偶算子。对于每个 $t \in \mathbb{R}^+$ 和 $\tau \in \mathbb{R}$，我们定义非自治动力系统 $S^\lambda(t, \tau)$： $\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2) \to \mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)$ 为由下式给出的映射

$$S^\lambda(t, \tau)\mu = (p^\lambda)^*(\tau + t, \tau)\mu, \quad \forall \mu \in \mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2). \tag{6.1}$$

令 $\mathcal{A}^\lambda$ 为 $\mathcal{D}$-拉回测度吸引子 S^λ，我们建立了问题 (2.11)-(2.12) 的解在 ϵ_i， γ_i， $i = 1$， $2 \to 0$ 时的收敛性。

L引理 6.1. 假设(2.8)-(2.9) 成立。那么给定 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $T > 0$，有

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \sup_{\mu\in\mathcal{A}(\tau)} d_{\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)} \left(\widetilde{S}^\lambda(t, \tau)\mu, S^{\lambda_0}(t, \tau)\widetilde{\mu}\right) = 0. \tag{6.2}$$

~其中 $S(\tau + T， \tau)\mu$ 表示 $S_N(\tau + T， \tau)\mu$ 的零扩张，度量 $d_{\mathcal{M}(X)}$ 定义为

$$d_{\mathcal{P}(X)}(\mu_1, \mu_2) = \sup_{\phi\in L_b(X),\|\phi\|_L\leqslant 1} |(\phi, \mu_1) - (\phi, \mu_2)|, \quad \forall \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(X).$$

证明。 设 $\varphi^\lambda(t) = \varphi^{(\epsilon_1,\epsilon_2,\gamma_1,\gamma_2)}(t， \tau， \varphi_\tau)$ 和 $\varphi^{\lambda_0}(t) = \varphi^{(\epsilon_{1,0},\epsilon_{2,0},\gamma_{1,0},\gamma_{2,0})}(t， \tau， \varphi_\tau)$ 满足对所有 $t \in [\tau, \tau + T]$， $\lambda \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ 均成立。由 (2.11)-(2.12) 和 Itô 公式可得

$$\begin{aligned}
&\|u^\lambda(t) - u^{\lambda_0}(t)\|^2 \\
=&\|\xi^\lambda - \xi^{\lambda_0}\|^2 - 2d_1 \int_\tau^t \|B(u^\lambda(s) - u^{\lambda_0}(s))\|\mathrm{d}s - 2a_1 \int_\tau^t \|u^\lambda(s) - u^{\lambda_0}(s)\|^2\mathrm{d}s \\
&+ b_1 \int_\tau^t \langle F(u^\lambda, v^\lambda) - F(u^{\lambda_0}, v^{\lambda_0}), u^\lambda - u^{\lambda_0}\rangle\mathrm{d}s - b_2 \int_\tau^t \langle G(u^\lambda) - G(u^{\lambda_0}), u^\lambda - u^{\lambda_0}\rangle\mathrm{d}s \\
&+ 2(\epsilon_1 - \epsilon_{1,0}) \int_\tau^t \sum_{k\in\mathbb{N}} \left\langle \aleph_k(s, u^\lambda(s)), u^\lambda(s) - u^{\lambda_0}(s)\right\rangle \mathrm{d}W_k(s)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2\epsilon_{1,0}\int_\tau^t\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big\langle\sigma_k(s,u^\lambda)-\sigma_k(s,u^{\lambda_0}),u^\lambda(s)-u^{\lambda_0}(s)\Big\rangle\,\mathrm{d}W_k(s)\\
&+\int_\tau^t\sum_{k\in\mathbb{N}}\|(\epsilon_1-\epsilon_{1,0})\aleph_k(s,u^\lambda(s))+\epsilon_{1,0}(\sigma(s,u^\lambda)-\sigma(s,u^{\lambda_0}))\|^2\mathrm{d}s\\
&+\int_\tau^t\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{0<y_k<1}\Big(\|u^\lambda(s-)-u^{\lambda_0}(s-)+(\epsilon_2-\epsilon_{2,0})\hat{\aleph}_k(s,u)+\epsilon_{2,0}\Xi\|^2\\
&-\|u^\lambda(s-)-u^{\lambda_0}(s-)\|^2\Big)\tilde{L}_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y_k)\\
&+\int_\tau^t\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{0<y_k<1}\|(\lambda-\lambda_0)\hat{\aleph}+\lambda_0\Xi\|^2\nu_k\mathrm{d}y_k\mathrm{d}s,
\end{aligned}\tag{6.3}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\|v^\lambda(t)-v^{\lambda_0}(t)\|^2\\
=&\|\xi^\lambda-\xi^{\lambda_0}\|^2-2d_2\int_\tau^t\|B(v^\lambda(s)-v^{\lambda_0}(s))\|\mathrm{d}s-2a_2\int_\tau^t\|v^\lambda(s)-v^{\lambda_0}(s)\|^2\mathrm{d}s\\
&-b_1\int_\tau^t\langle F(u^\lambda,v^\lambda)-F(u^{\lambda_0},v^{\lambda_0}),v^\lambda-v^{\lambda_0}\rangle\mathrm{d}s+b_2\int_\tau^t\langle G(u^\lambda)-G(u^{\lambda_0}),v^\lambda-v^{\lambda_0}\rangle\\
&+2(\gamma_1-\gamma_{1,0})\int_\tau^t\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big\langle\aleph_k(s,v^\lambda(s)),v^\lambda(s)-v^{\lambda_0}(s)\Big\rangle\,\mathrm{d}W_k(s)\\
&+2\gamma_{1,0}\int_\tau^t\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big\langle\sigma_k(s,v^\lambda)-\sigma_k(s,v^{\lambda_0}),v^\lambda(s)-v^{\lambda_0}(s)\Big\rangle\,\mathrm{d}W_k(s)\\
&+\int_\tau^t\sum_{k\in\mathbb{N}}\|(\gamma_1-\gamma_{1,0})\aleph_k(s,v^\lambda(s))+\gamma_{1,0}(\sigma(s,v^\lambda)-\sigma(s,v^{\lambda_0}))\|^2\mathrm{d}s\\
&+\int_\tau^t\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{0<y_k<1}\Big(\|v^\lambda(s-)-v^{\lambda_0}(s-)+(\gamma_2-\gamma_{2,0})\hat{\aleph}_k(s,v)+\gamma_{2,0}\Xi\|^2\\
&-\|v^\lambda(s-)-v^{\lambda_0}(s-)\|^2\Big)\tilde{L}_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y_k)\\
&+\int_\tau^t\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{0<y_k<1}\|(\gamma_2-\gamma_{2,0})\hat{\aleph}_k(s,v^\lambda(s))+\gamma_{2,0}\Xi\|^2\nu_k\mathrm{d}y_k\mathrm{d}s,
\end{aligned}\tag{6.4}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\aleph_k(s,\cdot)\triangleq h_k(s)+\sigma_k(s,\cdot),\\
&\hat{\aleph}_k(s,\cdot)\triangleq\kappa_k(s)+q(s,\cdot,y_k),\\
&\Xi\triangleq q(s,\cdot,y_k)-q(s,\cdot,y_k).
\end{aligned}\tag{6.5}
$$

由（2.2）—（2.6）和（6.3）—（6.4）可得

$$
\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[\tau,t]}\|\varphi^\lambda(r)-\varphi^{\lambda_0}(r)\|^2\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\leqslant & \mathbb{E}\left(\|\xi^{\lambda}-\xi^{\lambda_0}\|^2\right)+C\int_{\tau}^{t}\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[\tau,s]}\|\varphi^{\lambda}(r)-\varphi^{\lambda_0}(r)\|^2\right)\mathrm{d}s \\
& +2(\epsilon_1-\epsilon_{1,0})\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[\tau,t]}\left|\int_{\tau}^{r}\sum_{k\in\mathbb{N}}\left\langle\aleph_k(s,u^{\lambda}(s)),u^{\lambda}(s)-u^{\lambda_0}(s)\right\rangle\mathrm{d}W_k(s)\right|\right) \\
& +2\epsilon_{1,0}\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[\tau,t]}\left|\int_{\tau}^{r}\sum_{k\in\mathbb{N}}\left\langle\sigma_k(s,u^{\lambda})-\sigma_k(s,u^{\lambda_0}),u^{\lambda}(s)-u^{\lambda_0}(s)\right\rangle\mathrm{d}W_k(s)\right|\right) \\
& +\mathbb{E}\left(\int_{\tau}^{t}\sum_{k\in\mathbb{N}}\|(\epsilon_1-\epsilon_{1,0})\aleph_k(s,u^{\lambda}(s))+\epsilon_{1,0}(\sigma(s,u^{\lambda})-\sigma(s,u^{\lambda_0}))\|^2\mathrm{d}s\right) \\
& +\mathbb{E}\Big(\sup_{r\in[\tau,t]}\Big|\int_{\tau}^{r}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{0<y_k<1}\Big(\|u^{\lambda}(s-)-u^{\lambda_0}(s-)+(\epsilon_2-\epsilon_{2,0})\hat{\aleph}_k(s,u)+\epsilon_{2,0}\Xi\|^2 \\
& -\|u^{\lambda}(s-)-u^{\lambda_0}(s-)\|^2\Big)\tilde{L}_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y_k)\Big|\Big) \\
& +\mathbb{E}\left(\int_{\tau}^{t}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{0<y_k<1}\|(\epsilon_2-\epsilon_{2,0})\hat{\aleph}+\epsilon_{2,0}\Xi\|^2\nu_k\mathrm{d}y_k\mathrm{d}s\right) \\
& +2(\gamma_1-\gamma_{1,0})\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[\tau,t]}\left|\int_{\tau}^{r}\sum_{k\in\mathbb{N}}\left\langle\aleph_k(s,v^{\lambda}(s)),v^{\lambda}(s)-v^{\lambda_0}(s)\right\rangle\mathrm{d}W_k(s)\right|\right) \\
& +2\gamma_{1,0}\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[\tau,t]}\left|\int_{\tau}^{r}\sum_{k\in\mathbb{N}}\left\langle\sigma_k(s,v^{\lambda})-\sigma_k(s,v^{\lambda_0}),v^{\lambda}(s)-v^{\lambda_0}(s)\right\rangle\mathrm{d}W_k(s)\right|\right) \\
& +\mathbb{E}\left(\int_{\tau}^{t}\sum_{k\in\mathbb{N}}\|(\gamma_1-\gamma_{1,0})\aleph_k(s,v^{\lambda}(s))+\gamma_{1,0}(\sigma(s,v^{\lambda})-\sigma(s,v^{\lambda_0}))\|^2\mathrm{d}s\right) \\
& +\mathbb{E}\Big(\sup_{r\in[\tau,t]}\Big|\int_{\tau}^{r}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{0<y_k<1}\Big(\|v^{\lambda}(s-)-v^{\lambda_0}(s-)+(\gamma_2-\gamma_{2,0})\hat{\aleph}_k(s,v)+\gamma_{2,0}\Xi\|^2 \\
& -\|v^{\lambda}(s-)-v^{\lambda_0}(s-)\|^2\Big)\tilde{L}_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y_k)\Big|\Big) \\
& +\mathbb{E}\left(\int_{\tau}^{t}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{0<y_k<1}\|(\gamma_2-\gamma_{2,0})\hat{\aleph}_k(s,v^{\lambda}(s))+\gamma_{2,0}\Xi\|^2\nu_k\mathrm{d}y_k\mathrm{d}s\right). \qquad (6.6)
\end{aligned}
$$

接下来，我们估计（6.6）右端的各项。对于（6.6）右端的第三项，由（2.8）—（2.9）和 Burkholder-Davis-Gundy 不等式可得

$$
\begin{aligned}
& 2(\epsilon_1-\epsilon_{1,0})\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[\tau,t]}\left|\int_{\tau}^{r}\sum_{k\in\mathbb{N}}\left\langle\aleph_k(s,u^{\lambda}(s)),u^{\lambda}(s)-u^{\lambda_0}(s)\right\rangle\mathrm{d}W_k(s)\right|\right) \\
\leqslant & 2(\epsilon_1-\epsilon_{1,0})C\mathbb{E}\left(\left(\int_{\tau}^{t}\sum_{k\in\mathbb{N}}\|\aleph_k(s,u^{\lambda}(s))\|^2\|u^{\lambda}(s)-u^{\lambda_0}(s)\|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
& 2(\epsilon_1-\epsilon_{1,0})C\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[\tau,t]}\|u^{\lambda}(s)-u^{\lambda_0}(s)\|\left(\int_{\tau}^{t}\sum\|\aleph_k(s,u^{\lambda}(s))\|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[\tau,t]}\|u^{\lambda}(s)-u^{\lambda_0}(s)\|^2\right)+4(\epsilon_1-\epsilon_{1,0})^2\int_{\tau}^{t}\sum_{k\in\mathbb{N}}\|\aleph_k(s,u^{\lambda}(s))\|^2\mathrm{d}s\\
&\leqslant \frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[\tau,t]}\|u^{\lambda}(s)-u^{\lambda_0}(s)\|^2\right)+8(\epsilon-\epsilon_{1,0})^2\int_{\tau}^{t}\sum_{k\in\mathbb{N}}(\|h_k(s)\|^2+\|\sigma_k(t,u^{\lambda}(s))\|^2)\mathrm{d}s\\
&\leqslant \frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[\tau,t]}\|u^{\lambda}(s)-u^{\lambda_0}(s)\|^2\right)+8(\epsilon_1-\epsilon_{1,0})^2\int_{\tau}^{t}\sum_{k\in\mathbb{N}}(\|h_k(s)\|^2)\mathrm{d}s\\
&\quad+16(\epsilon-\epsilon_{1,0})^2\alpha^2\|\delta\|^2\int_{\tau}^{t}(1+\|u^{\lambda}\|^2)\mathrm{d}s,
\end{aligned}\tag{6.7}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\sup_{r\in[\tau,t]}\Big|\int_{\tau}^{r}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{0<y_k<1}\Big(\|u^{\lambda}(s-)-u^{\lambda_0}(s-)+(\epsilon_2-\epsilon_{2,0})\hat{\aleph}_k(s,u)\\
&+\epsilon_{2,0}\Xi\|^2-\|u^{\lambda}(s-)-u^{\lambda_0}(s-)\|^2\Big)\tilde{L}_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y_k)\Big|\Big)\\
\leqslant&\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[\tau,t]}\left|\int_{\tau}^{r}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{0<y_k<1}2\left\langle(\epsilon_2-\epsilon_{2,0})\hat{\aleph}_k(s,u)+\epsilon_{2,0}\Xi,u^{\lambda}(s-)-u^{\lambda_0}(s-)\right\rangle\tilde{L}_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y_k)\right|\right)\\
&+\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[\tau,t]}\left|\int_{\tau}^{r}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{0<y_k<1}\|(\epsilon_2-\epsilon_{2,0})\hat{\aleph}_k(s,u)+\epsilon_{2,0}\Xi\|^2\tilde{L}_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y_k)\right|\right)\\
\leqslant&C\mathbb{E}\left(\left(\int_{\tau}^{t}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{0<y_k<1}\|(\epsilon_2-\epsilon_{2,0})\hat{\aleph}_k(s,u)+\epsilon_{2,0}\Xi\|^2\|u^{\lambda}(s)-u^{\lambda_0}(s)\|^2\nu_k\mathrm{d}y_k\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\
&+C^2\mathbb{E}\left(\left(\int_{\tau}^{t}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{0<y_k<1}\|(\epsilon_2-\epsilon_{2,0})\hat{\aleph}_k(s,u)+\epsilon_{2,0}\Xi\|^2\nu_k\mathrm{d}y_k\mathrm{d}s\right)\right)\\
\leqslant&\frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[\tau,t]}\|u^{\lambda}-u^{\lambda_0}\|^2\right)+2C^2\mathbb{E}\left(\left(\int_{\tau}^{t}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{0<y_k<1}\|(\epsilon_2-\epsilon_{2,0})\hat{\aleph}_k(s,u)+\epsilon_{2,0}\Xi\|^2\nu_k\mathrm{d}y_k\mathrm{d}s\right)\right)\\
\leqslant&4C^2\mathbb{E}\Big(\Big(\int_{\tau}^{t}\int_{0<y_k<1}\Big((\epsilon_2-\epsilon_{2,0})^2\sum_{k\in\mathbb{N}}\|\kappa_k(s)+q(t,u^{\lambda}(s-),y_k)\|^2\\
&+\epsilon_{2,0}^2\sum_{k\in\mathbb{N}}\|q(s,u^{\lambda}(s),y_k)-q(s,u^{\lambda_0}(s),y_k)\|^2\Big)\nu_k\mathrm{d}y_k\mathrm{d}s\Big)\Big)\\
&+\frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[\tau,t]}\|u^{\lambda}-u^{\lambda_0}\|^2\right)\\
\leqslant&8C^2(\epsilon_2-\epsilon_{2,0})^2\mathbb{E}\Big(\int_{\tau}^{t}\|\kappa_k(s)\|^2\mathrm{d}s\Big)+16C^2(\epsilon_2-\epsilon_{2,0})^2\alpha^2\|\delta\|^2\mathbb{E}\Big(\Big(\int_{\tau}^{t}\Big(1+\|u^{\lambda}\|^2\Big)\mathrm{d}s\Big)\\
&+C\epsilon_{2,0}^2\mathbb{E}\Big(\Big(\int_{\tau}^{t}\|u^{\lambda}-u^{\lambda_0}\|^2\Big)\nu_k\mathrm{d}y_k\mathrm{d}s\Big)\Big)\\
&+\frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[\tau,t]}\|u^{\lambda}-u^{\lambda_0}\|^2\right).
\end{aligned}\tag{6.8}
$$

对于 t 上的第四项　　方程右端，依据 (2.8) 和 BDG不等式，我们得到

$$
\begin{aligned}
&2\epsilon_{1,0}\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[\tau,t]}\left|\int_\tau^r\sum_{k\in\mathbb{N}}\left\langle\sigma_k(s,u^\lambda)-\sigma_k(s,u^{\lambda_0}),u^\lambda(s)-u^{\lambda_0}(s)\right\rangle\mathrm{d}W_k(s)\right|\right)\\
\leqslant&\frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[\tau,t]}\|u^\lambda(s)-u^{\lambda_0}(s)\|^2\right)+C\epsilon_{1,0}^2\int_\tau^t\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[\tau,s]}\|u^\lambda(r)-u^{\lambda_0}(r)\|^2\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}\tag{6.9}
$$

对于 (6.6) 右侧的第五项，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\int_\tau^t\sum_{k\in\mathbb{N}}\|(\epsilon_1-\epsilon_{1,0})\aleph_k(s,u^\lambda(s))+\epsilon_{1,0}(\sigma(s,u^\lambda)-\sigma(s,u^{\lambda_0}))\|^2\mathrm{d}s\right)\\
\leqslant&C(\epsilon_1-\epsilon_{1,0})^2\int_\tau^t\mathbb{E}\left(2\alpha^2\|\delta\|^2(1+\|u^\lambda(s)\|^2)\right)\mathrm{d}s\\
&+C\epsilon_{1,0}^2\int_\tau^t\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[\tau,s]}\|u^\lambda(s)-u^{\lambda_0}(s)\|^2\right)\mathrm{d}s
\end{aligned}\tag{6.10}
$$

对于 (6.6) 的其他项（v-方程），可以采用相同的方法。对于所有 $t\in[\tau,\tau+T]$和 $\mathbb{E}(\|\xi^\lambda\|^2_{L^2(\Omega;\ell^2\times\ell^2)})\leqslant K(\tau)$，我们有

$$
\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[\tau,t]}\|\varphi^\lambda-\varphi^{\lambda_0}\|^2\right)\leqslant C(\lambda-\lambda_0)^2+C\int_\tau^t\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[\tau,t]}\|\varphi^\lambda-\varphi^{\lambda_0}\|^2\right)\mathrm{d}s.\tag{6.11}
$$

其中，C 是任意的正数常量，其值可能随行而变。对 (6.11) 应用 Gronwall不等式，我们有

$$
\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[\tau,t]}\|\varphi^\lambda-\varphi^{\lambda_0}\|^2\right)\leqslant C(\lambda-\lambda_0)^2e^{C(t-\tau)}.\tag{6.12}
$$

于是，对于 $\tau\in\mathbb{R}$、$K(\tau)$ 和 $t\in\mathbb{R}^+$，我们得到

$$
\sup_{\mathbb{E}(\|\xi\|^2)\leqslant K^2(\tau)}\mathbb{E}\left(\|\varphi^\lambda(\tau+t,\tau,\xi)-\varphi^{\lambda_0}(\tau+t,\tau,\xi)\|^2\right)\leqslant\vartheta(\lambda),\tag{6.13}
$$

其中，当 $\lambda\to\lambda_0$ 时，$\vartheta(\lambda)\to\lambda_0$。按照 [37, 38]，中提出的方法，给定 $\varepsilon>0$，由 $\mathcal{A}(\tau)$ 的紧性可知，存在一个紧集 C_ε，它属于 X，使得

$$
\sup_{\mu\in\mathcal{A}(\tau)}\mu(X\setminus C_\varepsilon)=\sup_{N\in\mathbb{N}}\sup_{\mu\in\mathcal{A}(\tau)}\widetilde{\mu}(X\setminus C_\varepsilon)\leqslant\varepsilon.\tag{6.14}
$$

注意到，对于所有 $x,\hat{x}\in X$ 以及满足 $\|\phi\|_{L_b}\leq1$ 的 $\phi\in L_b(X)$，$|\phi(x)-\phi(\hat{x})|\leq2$，由 (6.14) 可知，对于所有 $N\in\mathbb{N}$,

$$
J^1:=\sup_{\mu\in\mathcal{A}(\tau)}\sup_{\|\phi\|_{L_b}\leq1}\int_{X\setminus C_\varepsilon}\mathbb{E}\Big[\phi(\varphi^\lambda(\tau+T,\tau,y))-\phi(\varphi^{\lambda_0}(\tau+T,\tau,y))\Big]\,\mu_N(dz)
$$

$$\leq 2P(\Omega) \sup_{\mu\in\mathcal{A}(\tau)} \mu(X\setminus C_\varepsilon) \leq 2\varepsilon. \tag{6.15}$$

注意到，由 (6.13) 可知，对于 $\|\phi\|_{L_b}\leq 1$，且 C_ε 是紧的，$|\phi(x)-\phi(\hat{x})|\leq \|x-\hat{x}\|_X$，我们有

$$\begin{aligned} J^2 &:= \sup_{\mu\in\mathcal{A}(\tau)} \sup_{\|\phi\|_{L_b}\leq 1} \int_{X\cap C_\varepsilon} \mathbb{E}\left[\phi(\varphi^\lambda(\tau+T,\tau,y)) - \phi(\varphi^{\lambda_0}(\tau+T,\tau,y))\right]\mu(dy) \\ &\leq \sup_{\mu\in\mathcal{A}(\tau)} \int_{X\cap C_\varepsilon} \mathbb{E}\|\varphi^\lambda(\tau+T,\tau,y)-\varphi^{\lambda_0}(\tau+T,\tau,y)\|_X\,\mu(dy) \\ &\leq \sup_{\mu\in\mathcal{A}(\tau)} \int_{X\cap C_\varepsilon} \left(\mathbb{E}\|\varphi^\lambda(\tau+T,\tau,y)-\varphi^{\lambda_0}(\tau+T,\tau,y)\|_X^2\right)^{1/2}\mu(dy) \\ &< \varepsilon. \end{aligned} \tag{6.16}$$

利用 $v\in\mathcal{M}(X)$ 的 $\operatorname{supp}\tilde{v}\subset X$，当 $\lambda\to\lambda_0$ 时，由此可得

$$\int_X \phi(x)[S(t,\tau)\mu](dx) = \int_X \mathbb{E}\phi(\varphi(t,\tau,x))\mu(dx), \quad \forall\,\mu\in\mathcal{M}(X),\,\phi\in C_b(X).$$

that

$$\begin{aligned} &\sup_{\mu\in\mathcal{A}(\tau)} d_{\mathcal{M}(X)}\left(\widetilde{S}^\lambda(\tau+T,\tau)\mu,\, S^{\lambda_0}(\tau+T,\tau)\tilde{\mu}\right) \\ =& \sup_{\mu\in\mathcal{A}(\tau)} \sup_{\|\phi\|_{L_b}\leqslant 1} \left|\int_X \phi(x)\left[\widetilde{S}(\tau+T,\tau)\mu\right](dx) - \int_X \phi(x)\left[S(\tau+T,\tau)\tilde{\mu}\right](dx)\right| \\ =& \sup_{\mu\in\mathcal{A}(\tau)} \sup_{\|\phi\|_{L_b}\leqslant 1} \left|\int_X \phi(y)\left[S(\tau+T,\tau)\mu\right](dy) - \int_X \mathbb{E}\phi(\varphi^{\lambda_0}(\tau+T,\tau,x))\tilde{\mu}(dx)\right| \\ =& \sup_{\mu\in\mathcal{A}(\tau)} \sup_{\|\phi\|_{L_b}\leqslant 1} \left|\int_X \mathbb{E}\phi(\varphi^\lambda(\tau+T,\tau,y))\mu(dy) - \int_X \mathbb{E}\phi(\varphi^{\lambda_0}(\tau+T,\tau,y))\mu(dy)\right| \\ \leqslant& J^1+J^2<3\varepsilon, \end{aligned}$$

整个证明完毕。 □

根据引理 5.4，可以验证

$$K=\left\{K(\tau)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]\times[0,1]\times[0,1]\times[0,1]}\mathcal{A}_\lambda(\tau):\tau\in\mathbb{R}\right\}\in\mathcal{D}. \tag{6.17}$$

下面给出本节的主要结果。

定理 6.2. 假设(2.8)-(2.9)、(2.10)和(4.1) 成立。那么对于 $\tau\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} d_{\mathcal{P}_2(\ell^2\times\ell^2)}(\mathcal{A}_\lambda(\tau),\mathcal{A}_{\lambda_0}(\tau))=0. \tag{6.18}$$

证明. 由 (6.17) 定义的 $K^\lambda = \{K^\lambda(\tau) : \tau \in \mathbb{R}\}$，是 S^λ 的一个闭 $\mathcal{D}$-拉回吸收集，对所有 $\lambda \in [0,1]^4$ 均一致。具体而言，对于每个 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}(\tau) : \tau \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{D}$，都存在一个时间 $T_1 = T_1(\tau, \mathcal{D}) > 0$，使得

$$\bigcup_{t \geq T_1} \bigcup_{\lambda \in [0,1]^4} S^\lambda(t, \tau - t)\, \mathcal{D}(\tau - t) \subseteq K(\tau). \tag{6.19}$$

结合 $\mathcal{A}^\lambda$ 的不变性，可直接得出，对于所有 $\lambda \in [0,1]^4$ and$\tau \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A}^\lambda(\tau) \subseteq K^\lambda(\tau)$。

接下来，任取 $\eta > 0$。由于对于 $(\mathcal{P}_2(\ell^2 \times \ell^2)\, d_{\mathcal{P}(\ell^2 \times \ell^2)})$ 中的 S， $\mathcal{K}^\lambda = \{\mathcal{K}^\lambda(\tau) : \tau \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{D}$ 且 $\mathcal{A}^\lambda = \{\mathcal{A}^\lambda(\tau) : \tau \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}$-**PMAs**，因此存在一个时刻 $T_2 = T_2(\tau, K, \mathcal{A}) > 0$，使得

$$\sup_{\mu \in \mathcal{K}(\tau - T_2)} d_{\mathcal{P}(\ell^2 \times \ell^2)}\big(S(T_2, \tau - T_2)\mu,\, \mathcal{A}(\tau)\big) = d_{\mathcal{P}(\ell^2 \times \ell^2)}\big(S(T_2, \tau - T_2)\, K^\lambda(\tau - T_2),\, \mathcal{A}(\tau)\big) < \frac{\eta}{2}. \tag{6.20}$$

由 (6.2),

$$\sup_{\mu \in \mathcal{K}(\tau - T_2)} d_{\mathcal{P}(\ell^2 \times \ell^2)}\big(S^\chi(T_2, \tau - T_2)\mu,\; S(T_2, \tau - T_2)\mu\big) < \frac{\eta}{2}. \tag{6.21}$$

因此，利用 (6.20)、(6.21) 以及对所有 $\lambda \in [0,1]^4$ 均有 $\mathcal{A}^\lambda(\tau - T_2) \subseteq K^\lambda(\tau - T_2)$ 这一事实，可得对所有 $\lambda \in$ (0,1),

$$\begin{aligned}
&\sup_{\mu \in \mathcal{A}^\lambda(\tau - T_2)} d_{\mathcal{P}(\ell^2 \times \ell^2)}\big(S^\lambda(T_2, \tau - T_2)\mu,\, \mathcal{A}(\tau)\big) \\
&\leq \sup_{\mu \in \mathcal{K}(\tau - T_2)} d_{\mathcal{P}(\ell^2 \times \ell^2)}\big(S^\lambda(T_2, \tau - T_2)\mu,\, S(T_2, \tau - T_2)\mu\big) \\
&\quad + \sup_{\mu \in \mathcal{K}(\tau - T_2)} d_{\mathcal{P}(\ell^2 \times \ell^2)}\big(S(T_2, \tau - T_2)\mu,\, \mathcal{A}(\tau)\big) < \eta.
\end{aligned}$$

鉴于 $\mathcal{A}^\lambda$ 的不变性，可知对于所有 $\lambda \in$ (0,1),

$$d_{\mathcal{P}(\ell^2 \times \ell^2)}\big(\mathcal{A}^\lambda(\tau),\, \mathcal{A}(\tau)\big) = \sup_{\mu \in \mathcal{A}^\lambda(\tau)} d_{\mathcal{P}(\ell^2 \times \ell^2)}\big(\mu,\, \mathcal{A}(\tau)\big) < \eta.$$

至此，证明完成。 □

7 数值模拟示例

在此 本节将对一维随机常微分方程进行数值模拟 :

$$\begin{aligned}
du(t) = &\left[-2.5\, u(t) + u^2(t)\, v(t) - u^3(t) + e^{-t}\right] dt + \epsilon_1 \left[h(t) + \sigma(t, u(t))\right] dW(t) \\
&+ \epsilon_2 \int_{\mathbb{R}} \left[\kappa(t) + q(t, u(t), y)\right] \tilde{L}(dy, dt),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
dv(t) = &\left[-v(t) - u^2(t)\,v(t) + u^3(t) + e^{-t}\right]\,dt + \gamma_1\left[h(t) + \sigma(t, v(t))\right]\,dW(t) \\
&+ \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} \left[\kappa(t) + q(t, v(t), y)\right]\,\tilde{L}(dy, dt),
\end{aligned} \tag{7.1}
$$

其中 $u(0) = 2.0$, $v(0) = 0.0$, 其中 $p = 1$, $\lambda \in [0, 1]^4$,

$$
h(t) = \cos(2t), \quad \sigma(t, x) = e^{-t^2}x^2, \quad \kappa(t) = \sin(2t), \quad q(t, x, y) = \frac{e^{-t^2}x^2}{1 + y^2}.
$$

该数值格式基于适用于含 L´evy 噪声的随机微分方程的欧拉–丸山方法。模拟在区间 $[0, T]$ 上进行, $T = 10.0$, 采用固定时间步长 $\Delta t = 0.001$, 共得到 $N = 10,000$ 个时间步。L´evy 噪声建模为复合泊松过程，其跳跃强度为 $\lambda_{\text{Poisson}} = 2.0$，高斯跳跃幅度为 $y_{n,\,j} \sim \mathcal{N}(0,\ \sigma^2_{\text{jump}})$, 其中 $\sigma_{\text{jump}} = 1.0$。布朗增量模拟为 $\Delta W_n \sim \mathcal{N}(0,\ \Delta t)$。

离散格式如下:

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} = &\, u_n + \left[-2.5u_n + u_n^2 v_n - u_n^3 + e^{-t_n}\right]\Delta t + \varepsilon_1\left[\cos(2t_n) + e^{-t_n^2}u_n^2\right]\Delta W_n \\
&+ \varepsilon_2 \sum_{j=1}^{P_n}\left[\sin(2t_n) + \frac{e^{-t_n^2}u_n^2}{1 + y_{n,j}^2}\right] y_{n,j}, \\
v_{n+1} = &\, v_n + \left[-v_n - u_n^2 v_n + u_n^3 + e^{-t_n}\right]\Delta t + \varepsilon_1\left[\cos(2t_n) + e^{-t_n^2}v_n^2\right]\Delta W_n \\
&+ \varepsilon_2 \sum_{j=1}^{P_n}\left[\sin(2t_n) + \frac{e^{-t_n^2}v_n^2}{1 + y_{n,j}^2}\right] y_{n,j},
\end{aligned}
$$

其中 $P_n \sim$Poisson$(\lambda_{\text{Poisson}}\Delta t)$ 表示跳跃次数, 而 $y_{n,\,j}$ 表示跳跃幅值。

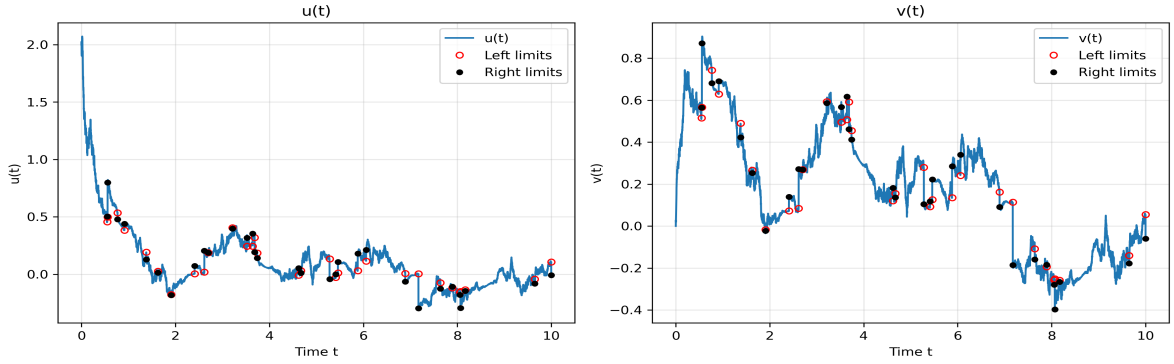

图 4: L´evy 过程的样本路径（$\lambda \neq \lambda_0$）

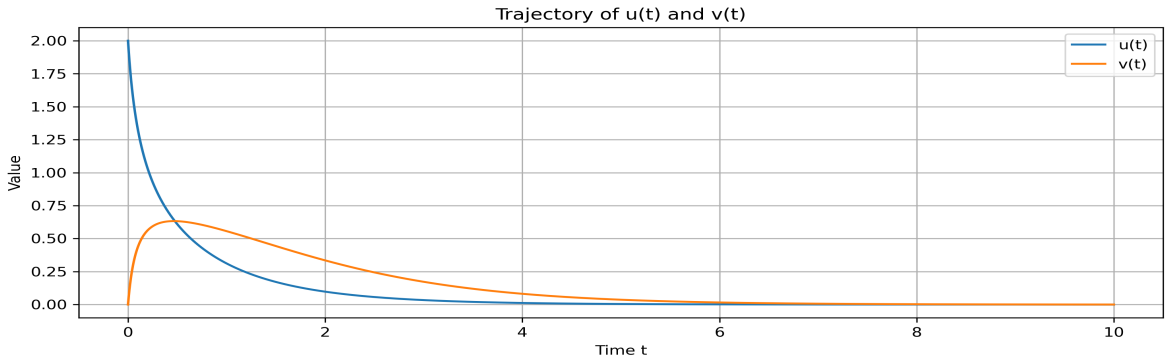

图5： L´évy 过程（$\lambda = \lambda_0$）的样本路径

综合图 3、Figure 4 和图5，我们在图中展示了确定性常微分方程系统（$\lambda = \lambda_0$）和随机常微分方程系统（$\lambda \neq \lambda_0$）的模拟结果。如图所示，由于噪声的影响，常微分方程轨迹在确定性轨迹附近波动，但总体上仍保持接近；随着 ϵ 趋于零，两条轨迹之间的距离也逐渐减小。这从数值上说明，在某种意义上，$\mathcal{A}^{\lambda}$（τ）$\to \mathcal{A}^{\lambda_0}$（$\tau$），当 $\lambda \to \lambda_0$。

致谢与基金资助

本研究得到中国国家自然科学基金（12161019、12361046）、贵州省基础研究计划（自然科学）（QKHJC-ZK [2022] YB 318）和贵州省教育厅自然科学研究项目（QJJ [2023] 011）的资助。

数据可用性

本文所述研究未使用任何数据。

作者贡献

Guofu Li：撰写审阅与编辑、撰写初稿；**Jianxin Wu**：撰写审阅与编辑；**Yunshun Wu**：撰写审阅与编辑。

声明

利益冲突 本稿件不存在利益冲突。

参考文献

[1] D . Applebaum, 《L´evy过程与随机微积分》, 剑桥大学出版社, 200 9.

[2] D. Applebaum 和 M. Siakalli. Lévy噪声驱动的随机微分方程的渐近稳定性. 应用概率杂志, 46 (2009) 1116-1129.[3] J.C. Art´es, J. Llibre, C. Valls, Higgins-Selkov系统与Selkov系统的动力学, 混沌、孤子与分形, 114 (2018); 145-150, DOI: 10.1016/j.chaos.2018.07.007.[4] Z. Brzeniak, T. Caraballo, J.A. Langa, Y. Li, 某些无界区域中随机二维Navier-Stokes方程的随机吸引子, 《微分方程杂志》, 255.11 (2013): 3897-3919, DOI: 10.1016/j.jde.2013.07.043.[5] P. W. Bates, K. Lu 和 B. Wang, 格点动力系统的吸引子, 国际分岔与混沌杂志, 11 (2001) 143-153.[6] P.W. Bates, X. Chen, A. Chmaj, 格点上双稳态动力学的行波, SIAM数学分析杂志, 35.2 (2003): 520-546, DOI: 10.1137/S0036141000374002.[7] P.W. Bates, K. Lu, B. Wang, 加权空间中非自治随机格点系统的吸引子, 《物理学D辑：非线性现象》, 289 (2014): 32-50, DOI: 10.1016/j.physd.2014.08.004.[8] W.J. Beyn, S.Y. Pilyugin, 无限格点上反应扩散系统的吸引子, 动力系统与微分方程杂志, 15.2 (2003): 485-515, DOI: 10.1023/B:JODY.0000009745.41889.30.[9] Z. Chen, D. Yang 和 S. Zhong, Lévy噪声驱动的随机格点系统的弱平均吸引子与周期测度, 《随机分析与应用》, 41 (2023) 509-544.[10] L.O. Chua 和 Tamas Roska, CNN范式, I EEE电路与系统汇刊I：基础理论与应用, 40.3 (1993): 147-156, DOI: 10.1109/81.222795.[11] L.O. Chua, Y. Yang, 细胞神经网络：理论, IEEE电路与系统汇刊, 35 (1988) 12570-1272.[12] S.N. Chow, W. Shen, 离散Nagumo方程的动力学：空间拓扑混沌, SIAM应用数学杂志, 55.6 (1995): 1764-1781, DOI: 10.1137/S0036139994261757.[13] S.N. Chow, J. Mallet-Paret, E.S.V. Vleck, 空间离散演化方程中的图案形成与空间混沌, 随机与计算动力学, 4.2 (1996): 109-178.[14] S.N. Chow, J. Mallet-Paret, W. Shen, 格点动力系统中的行波, 《微分方程杂志》, 149.2 (1998): 248-291, DOI: 10.1006/jdeq.1998.3478.[15] T. Caraballo, F. Morillas 和 J. Valero, 具有乘性噪声和非Lipschitz非线性项的随机格点动力系统的吸引子, 《微分方程杂志》, 253 (2012) 667-693.[16] T. Caraballo, F. Morillas 和 J. Valero, Banach空间中的时滞微分方程及延迟格点动力系统的吸引子, 离散与连续动力系统 , 34 (2014) 51-77.[17] T. Caraballo, A. Settati, Lahrouz A. Lahrouz, 纳入跳跃扰动的COVID-19流行病模型的随机阈值, 混沌、孤子与分形, 2024, 180: 114521.[18] C. Guo, Y. Guo, X. Li, 具有乘性噪声的非自治随机可逆Selkov系统的随机吸引子的上半连续性, 数学物理进展 2019, DOI: 10.1155/2019/2763245.[19] A. Gu, S. Zhou, Z. Wang, 非自治三组分可逆Gray-Scott系统的一致吸引子, Applied Mathematics and Computation, 219.16 (2013): 8718-8729, DOI: 10.1016/j.amc.2013.02.056.[20] A. Gu, 无界区域上非自治三组分可逆Gray-Scott系统的拉回吸引子, 抽象与应用分析, 2013, DOI: 10.1155/2013/719063.

[21] P. Gray, S. Scott，等温连续搅拌釜反应器中的自催化反应：隔离子与其他多稳态形式，《化学工程科学》，38（1983）：29-43，DOI：10.1016/0009-2509(83)80132-8。[22] P. Gray, S. Scott，等温连续搅拌釜反应器中的自催化反应：系统 $A+2B \to 3B$ 中的振荡与不稳定性； $B \to C$，《化学工程科学》39.6（1984）：1087-1097，DOI：10.1016/0009-2509(84)87017-7。[23] X. Han, W. Shen 和 S. Zhou，加权空间中随机格点动力系统的随机吸引子，《微分方程杂志》，250（2011）1235-1266。[24] X. Han, P.E. Kloeden, S. Sonner，格点动力系统全局吸引子的离散化，《动力系统与微分方程杂志》32（2020）1457-1474。[25] J.P. Keener，离散缝隙连接耦合对心肌中传播的影响，《理论生物学杂志》148.1（1991）：49-82，DOI：10.1016/S0022-5193(05)80465-5。[26] P.E. Kloeden, T. Lorenz，均方随机动力系统，《微分方程杂志》253（2012）1422-1438。[27]N.I. Karachalios, N. Athanasios, Yannacopoulos，离散非线性 Schr¨odinger 方程的整体存在性与紧吸引子，《微分方程杂志》217.1（2005）：88-123，DOI：10.1016/j.jde.2005.06.002。[28] D. Li, B. Wang，薄域上非自治随机反应扩散方程的拉回测度吸引子，《微分方程杂志》397（2024）232-261。[29] R. Li, S. Mi, D. Li，非自治随机三维整体修正 Navier-Stokes 方程的拉回测度吸引子，《动力系统定性理论》23，246（2024），https://doi.org/10.1007/s12346-024-01105-w。[30] H. Li，受加性噪声驱动的随机格点 Selkov 方程的吸引子[J],《应用数学与物理学杂志》，2019，7(06)：1329。[31] G. Li, X. Yang, L. Zhou, Y. Wang，受局部 Lipschitz L´evy 噪声驱动的可逆 Selkov 格点系统的弱均值随机吸引子，《电子应用数学杂志》（2024）第2卷第1期，40-63。[32] D. Li, X. Yang, G. Li, Y. Wu，非自治随机多孔介质格点系统的拉回测度吸引子与测度演化系统，《非线性科学与数值模拟通讯》（2025）109227。[33] D. Li, B. Wang, X. Wang，无界薄域上非自治随机反应扩散方程的极限行为，《数学物理杂志》60.8（2019），DOI：10.1016/j.jde.2016.10.024。[34] D. Li, B. Wang, X. Wang，随机时滞格点系统的周期测度，《微分方程杂志》272（2021），74-104。[35] Y. Li, F. Wang, P.E. Kloeden，具有多孔介质退化性的格点系统的扩展数值吸引子，《SIAM 应用动力系统杂志》，2023，22(3)：2282-2311。[36] Y. Li, S. Yang, T. Caraballo，离散时间拟线性格点系统数值吸引子的优化与收敛，《SIAM 数值分析杂志》，2023，61(2)：905-928。[37] Y. Li, C. Qiao, X. Tang，非线性随机板格点方程的拉回测度吸引子与有限维逼近。《数学方法与应用科学》（2025），1-16。

[38]Y. Li, G. Liu, P.E. Kloeden. 非线性噪声驱动的随机非局部抛物型方程的渐近自治测度吸引子。《动力系统定性理论》24(5)（2025），1-33。[39] S. Mi, D. Li, T. Zeng，非自治随机格点系统的拉回测度吸引子，《爱丁堡皇家学会学报A辑：数学》（2024）：1-20。[40] B. Schmalfuß，随机Navier–Stokes方程的长期行为，《数学通讯》152（1991）7-20。[41] B. Schmalfuß，随机Navier–Stokes方程的定性性质，《非线性分析：理论、方法与应用》28（1997）1545-1563。[42] L. Shi, J. Shen, K. Lu, B. Wang，无界区域上McKean–Vlasov随机反应扩散方程的不变测度、周期测度与拉回测度吸引子，（2024），arxiv预印本 arxiv:2409.17548。[43] E.E. SelKov，糖酵解中的自激振荡：一个简单动力学模型，《欧洲生物化学杂志》4.1（1968年）：79-86，DOI：10.1111/j.1432-1033.1968.tb00175.x。[44] E. Van Vleck 和 B. Wang，格点 FitzHugh–Nagumo系统的吸引子，《物理学D：非线性现象》212（2005）317-336。[45] B. Wang，非紧随机动力系统拉回吸引子存在性的充分必要判据，《微分方程杂志》253.5（2012）：1544-1583，DOI：10.1016/j.jde.2012.05.015。[46] B. Wang，Bochner空间中均值随机动力系统的弱拉回吸引子，《动力系统与微分方程杂志》31（2019）2177-2204。[47] B. Wang，无界区域上非线性噪声驱动的分数阶随机反应扩散方程的动力学，《微分方程杂志》268（2019）1-59。[48] B. Wang，具有非线性扩散项的随机Navier–Stokes方程的弱拉回吸引子，《美国数学会会刊》147（2019）1627-1638。[49] B. Wang，无界区域上反应扩散方程的吸引子，《物理学D》128（1999）41-52。[50] B. Wang，非线性噪声驱动的随机反应扩散格点系统动力学，《数学分析与应用杂志》477(1)，104-132（2019）[51] B. Wang，R^n 上非线性色噪声驱动的超临界波动方程的适定性与长期行为，《泛函分析杂志》283.2（2022）：109498，DOI：10.1016/j.jfa.2022.109498。[52] B. Wang 和 R. Wang，非线性噪声驱动的随机 Schr¨odinger 格点系统的渐近行为，《随机分析与应用》38（2020）213-237。[53] R. Wang, B. Guo 和 B. Wang，R^N 上非线性噪声驱动的分数阶FitzHugh–Nagumo系统的适定性与动力学，《中国科学：数学》64（2021）：2395-2436。[54] X. Wang, K. Lu, B. Wang，具有加性噪声和确定性非自治强迫项的时滞抛物型方程的随机吸引子，《SIAM 应用动力系统杂志》14.2（2015）：1018-1047，DOI：10.1137/140991819[55] X. Wang, K. Lu, B. Wang，无界区域上随机反应扩散方程的Wong–Zakai逼近与吸引子，《微分方程杂志》264.1（2018）：378-424，DOI：10.1016/j.jde.2017.09.006。

[56] Y. Wang, C. Guo, Y. Wu, 《局部 Lipschitz 噪声驱动的格点可逆 Selkov 系统不变测度/周期测度的存在性与稳定性》, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matem´aticas, 118.1（2024）: 42, DOI: 10.1007/s13398-023-01543-2.[57] X. Wang, J. Zhang, J. Huang, 《确定性与随机格点可逆 Selkov 系统数值吸引子的上半连续性》[J]. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 2024, 75(6): 237.[58]J. Xu, T. Caraballo, 《随机非局部偏微分方程的长期行为与 Wong–Zakai 逼近》, SIAM 数学分析杂志, 54.3（2022）: 2792-2844, DOI: 10.1137/21M1412645.[59] J. Xu, T. Caraballo, J. Valero, 《具有 L´evy 噪声的分数阶随机偏微分方程的动力学与大偏差》, SIAM 数学分析杂志, 2024, 56(1): 1016-1067.[60] Y. You, 《可逆自催化反应扩散系统的整体动力学与鲁棒性》, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 75.6（2012）: 3049-3071, DOI: 10.1016/j.na.2011.12.002.[61] Y. You, 《可逆 Schnackenberg 方程整体吸引子的上半连续性》, Studies in Applied Mathematics, 130.3（2013）: 232-263, DOI: 10.1111/j.1467-9590.2012.00565.x.[62] Y. You, 《随机可逆反应扩散系统的随机吸引子与鲁棒性》, 离散与连续动力系统, 34.1（2013）: 301-333, DOI: 10.3934/dcds.2014.34.301.[63] S. Yang, Y. Li, 《随机或确定性正弦-戈登格点方程的数值吸引子与逼近》[J]. Applied Mathematics and Computation, 2022, 413: 126640.[64] B. Zinner, 《离散 Nagumo 方程行波前解的存在性》, 《微分方程杂志》, 96.1（1992）: 1-27, DOI: 10.1016/0022-0396(92)90142-A.[65] J. Zhang, X. Wang, D. Huang, 《非自治随机格点可逆 Selkov 系统的拉回测度吸引子》, Stochastics and Dynamics（2025）: 2540003。