arXiv:2601.00601v1 [math.GN] 2 Jan 2026

波兰空间上连通关系的复杂度

Michal Hevessy*数学分析系，数学与物理学院，查理大学，布拉格，捷克

Yusuf Uyar†数学系，文理学院，中东技术大学，安卡拉，土耳其

Benjamin Vejnar‡数学分析系，数学与物理学院，查理大学，布拉格，捷克

摘要

我们系统地研究了三种不同的连通性等价关系：弧连通、连续统连通，以及由直径递减的连续统链连接。研究主要从博雷尔约化的角度展开，所涉及的空间主要是波兰空间。结果表明，所有被研究的等价关系都彼此相关，并且与弧连接关系密切相关。除其他结果外，研究证明了平面上的弧连接关系是 Borel 可约于 Vitali 等价关系的，因而具有非常低的复杂度。对于平面的局部紧子集上的链式连续统连接关系，也得到了同样的结论；同时还证明，在这些集合上，连续统连接关系具有更高的复杂度。

*电子邮箱：hevessy@karlin.mff.cuni.cz；Orcid：0009-0003-4192-2407。该作者获得了SVV-2025-260827项目和捷克科学基金会24-10705S项目的资助。

†电子邮箱：yuyar@metu.edu.tr；Orcid：0009-0005-8082-2972。该作者在攻读硕士学位期间获得了 TÜBİTAK-BİDEB 2210-E 项目的资助。

‡电子邮箱：vejnar@karlin.mff.cuni.cz；Orcid：0000-0002-2833-5385。该作者获得了捷克科学基金会项目 24-10705S 的资助。2020 年数学主题分类：54H05；03E15；54F16；54E50关键词与短语：博雷尔约化、分类、连通性

1 引言

设 X 是一个度量空间。我们考虑以下三种等价关系

$$E_X^A = \{(x,\ y) \in X \times X :\ X \text{中存在一条包含 } x \text{ 和 } y\}\text{的弧}E_X^C = \{(x,\ y) \in X \times X :\ X \text{中存在一个包含 } x \text{ 和 } y\}\text{的连续统}E_X^{CC} = \{(x,\ y) \in X \times X : \text{对于所有 } \varepsilon > 0,\ \text{都存在连续统 } K_0,\ \ldots\ldots,\ K_n \subset X,\ n \in \mathbb{N},\ \text{其直径为 } < \varepsilon,\ \text{使得 } x \in K_0,\ y \in K_n \text{ 并且对于 } 0 \leq i < n\},\ K_i \cap K_{i+1} \neq \emptyset$$

在 X上，分别称为弧连接关系、连续统连接关系 和链式连续统连接关系 （或简称链连接关系）。所有这些等价关系都描述了给定空间中的一种连通性概念。我们将看到，连续统连接关系和链连接关系可以在某些相关的其他超空间上实现为弧连接关系（见定理 33 和命题 39）。

本文从博雷尔可约性的角度研究这三个等价关系的复杂度。为此，我们主要将研究范围限定在波兰空间，即完全可度量化的可分拓扑空间，尽管在任意度量空间上，这些都是定义良好的等价关系。我们将在下一节回顾博雷尔复杂性理论的基本概念。在波兰空间上，可以很容易地证明这三个等价关系都是解析集。弧连接关系是文献中研究得最为广泛的关系；在适当之处，本文将引用其中一些相关工作。

2025年，Debs 和 Saint Raymond 证明，在平面的某个 G_δ 子集上，弧连接关系是 Borel [5]。这引出了一个非常自然的问题，该问题由最后一位作者在2025年抽象分析冬季学校期间提出：平面上的紧子集之间的弧连接关系是否博雷尔可约于 Vitali 等价关系?

我们将针对平面上的任意波兰子集，更一般地回答这个问题。更确切地说，我们证明，平面波兰空间上的弧连接关系可以博雷尔归约到最简单的等价关系之一，即 Vitali 等价关系。我们还证明，平面上的局部紧子集所具有的链连接关系也同样如此，而连续统连接关系则并非如此。我们还指出，存在一些连续统的例子，其上弧连接关系是非博雷尔解析集 [1, 11, 12]。现有结果与新结果的总结见表 1。

这些结果大多给出了相应空间上的上界，而且不仅如此，它们还是最优的，因为我们构造了达到这些上界的空间。两个例外是在平面子集上考察的连续统连接关系和链连接关系。尽管我们构造了一些平面空间，其连续统连接关系和链连接关系并非平凡关系，但我们不知道这些关系在一般的平面波兰空间上是否甚至是博雷尔的。

在 [20], Solecki 研究了不可分解连续统上的composant等价关系。连续统连接关系可视为波兰空间上这一等价关系的推广。还值得注意的是，对于 Knaster连续统等某些连续统， [17, 2.9] composant等价关系与弧连接关系重合。

表 1：结果汇总

	波兰	局部紧波兰空间	$G_\delta \subset \mathbb{R}^2$	局部紧 $\subset \mathbb{R}^2$
E_X^A	普遍解析集 注30 [1]	普遍解析集 注30 [1]	E_0 定理28 注29	E_0 定理28 注29
E_X^C	普遍解析集 注30	E_1 命题34 例 35	$\geq E_1$ 例 35 问题 1、2	E_1 命题34 例 35
E_X^{CC}	普遍解析集 注30	$(\mathbb{R}/\ell_\infty)^\mathbb{N}$ 定理 42 例 49	$\geq E_0$ 注29 问题3、4	E_0 注29 定理 45

由 Peano连续统的性质 [17, 第八章] 可知，链连接关系可视为弧连接关系的推广。事实上，我们将证明，满足一些非常自然的假设时，这两种关系会重合（引理43、46和推论44）。

与这些等价关系的研究密切相关的，是研究波兰空间的所有紧子集（或所有子连续统）的超空间中，具有单个连接等价类的子空间集合的描述复杂度。文献中已针对弧连接关系以及更为常见的连通性概念，对此进行了大量研究（见 [4, 6]）。值得一提的是，平面中所有弧连通子集在所有紧子集的超空间中构成的集合具有极高的复杂度，正如 [6], 所示；这与我们的结果形成对比：平面本身的弧连接关系并不十分复杂。关于多种连通性概念的描述复杂度研究，详尽综述请参见 [14] 。

2 预备知识

本节为研究连通性关系的复杂度奠定基础。我们介绍博雷尔等价关系理论中的基本定义和例子，随后给出连续统理论中必要的定义和结果。此外，我们也会陈述波兰空间的超空间的一些性质。

2.1 博雷尔等价关系

我们使用博雷尔可约性的概念来确定等价关系的复杂度。关于博雷尔等价关系理论和不变描述集合论的更多细节，可参见例如 [7]。

若一个可测空间与某个波兰空间的博雷尔σσ代数同构，即与该空间的开子集生成的 σσ代数同构，则称其为标准 *Borel* 空间 。我们将标准 Borel 空间的可测子集称为博雷尔集合。事实证明，波兰空间的任何博雷尔子集都是标准 Borel 空间。标准 Borel 空间 X 上的等价关系 E 称为博雷尔等价关系 ，如果 E 是乘积空间 $X \times X$的博雷尔子集。标准 Borel 空间之间的映射，若其对博雷尔子集的原像是博雷尔集合，则称为博雷尔映射 。

定义 1。 设 X， Y为标准 Borel 空间，且 E， F分别是 X， Y上的博雷尔等价关系。若 E 是*Borel* 可约 到 F，记作$E \leq_B F$，则称之为 Borel 可约；这意味着存在一个博雷尔映射 f: $X \to Y$，称为博雷尔约化，使得

$$xEy \iff f(x)Ff(y)$$

对所有 x， $y \in X$。我们称 E与 F*Borel* 双可约 ，记作 $E \sim_B F$，如果$E \leq_B F$ 且 $F \leq_B E$。此外，只要 $E \leq_B F$ 且 $F \not\leq_B E$，我们就写作 $E <_B F$ 。

注。 博雷尔约化在某种意义上比较博雷尔等价关系的复杂度。如果有 $E \leq_B F$，这直观地意味着 E 的结构包含在 F的结构中，因此 E 的复杂度不高于 F。因此，这是博雷尔等价关系上的一种相对复杂性概念，有时也称为 Borel 复杂度。

总的来说，我们的目标是从连接关系到一些已充分理解的博雷尔等价关系构造博雷尔约化。因此，我们需要回顾一些博雷尔等价关系的例子。我们从最简单的一类博雷尔等价关系开始。

定义 2。 设 X 是一个标准 Borel 空间， E 是 X上的博雷尔等价关系。若 E 可 Borel 约化到某个标准 Borel 空间上的恒等关系，我们就称 E 光滑 。

光滑等价关系有几种刻画方式。对我们来说，波兰空间上的以下条件就足够了。不过，我们注意到，它还可以通过多种方式推广。

定理 3 ([7, 定理 6.4。4])。 设 X 是一个波兰空间， E 是 X 上的博雷尔等价关系，并且 E 的每个等价类都是闭集。那么， E 是光滑的。

另一种非常常见、对我们相当有用的等价关系如下。

定义 4。 等价关系 E_0 定义为

$$xE_0y \iff \exists m\ \forall n \geq m\ x(n) = y(n).$$

对所有 x， $y \in 2^{\mathbb{N}}$ 都成立。有时也称为*Vitali* 等价关系。

注。 容易看出， E_0 可以写成一列博雷尔等价关系的可数递增并，且其中每个等价类都是有限的。满足这一条件的任何博雷尔等价关系都称为超有限。可以证明， E_0 是普适超有限 Borel 等价关系，也就是说，任何超有限博雷尔等价关系都 Borel 可约到 E_0 （见 [7, 第 7.2] 节）。

已知博雷尔等价关系 E_0 与 $\mathbb{R}$ [7, 上的 Vitali 等价关系 Borel 双可约 4]。可以证明，从以下意义上说，它是最简单的博雷尔等价关系之一：任意博雷尔等价关系 E 要么是光滑的，要么是 $E_0 \leq_B E$。我们需要关于 E_0的若干结果。首先介绍一个结果：将一个等价关系分解为若干博雷尔部分，其中每个部分都博雷尔可约于 E_0。

引理 5. 设 X 是一个标准 *Borel* 空间，且 E 是 X上的博雷尔等价关系。假设 X_n 是 X 的一个 E-不变博雷尔子集，并且对所有 $n \in \mathbb{N}$都有 $E|_{X_n} \leq_B E_0$。那么 $E \leq_B E_0$。

证明。 不失一般性，我们可以假设各个 X_n 两两不相交；否则，我们可以对所有 $n \geq 1$用 $X_n \setminus \bigcup_{m<n} X_m$ 替换 X_n。那么，由空间 $\mathbb{N} \times 2^{\mathbb{N}}$ 上由下式定义的博雷尔等价关系 $\sim$ 这一事实，可得该结论：

$$(n, x) \sim (k, y) \iff n = k \text{ and } xE_0y$$

是 Borel 可约到 E_0 的。 □

树化性的概念在后文也会很有用。回顾一下，如果一个等价关系的所有等价类都至多包含可数个元素，就称它为可数。

定义 6。 设 X 是一个标准 Borel 空间， E 是 X 上的一个博雷尔等价关系。若存在一个博雷尔无环图 G，称为 E 的树化，使得 G 的连通分支与 E 的等价类一致，则称 E 是可树化的。

具有简单树化的可数博雷尔等价关系预计具有较低的博雷尔复杂度，正如下文所述，事实确实如此。

命题 7 ([10, 注记 6。8])。 设 X 是一个标准 *Borel* 空间，且 E 是 X 上的可数 *Borel* 等价关系。假设 G 是 E 的树化，并且 G 的度小于 2。那么 $E \leq_B E_0$。

在考虑局部紧波兰空间上的连续统连接关系时，以下等价关系会自然而然地出现。

定义 8。 等价关系 E_1 定义如下：

$$xE_1y \iff \exists m\, \forall n \geq m\, \forall k\, x(n, k) = y(n, k)$$

对所有 $x,\ y \in 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$。

注记。 可以表示为光滑等价关系的可数递增并的博雷尔等价关系称为超光滑。可以证明关系 E_1 是超光滑的。不仅如此， E_1 还是普适超光滑等价关系（见 [7, 第 8.1] 小节）。

我们再引入一个稍后会证明很有用的等价关系。

定义 9. 等价关系 $\mathbb{R}/\ell_\infty$ 定义为

$$x\mathbb{R}/\ell_\infty y \iff x - y \in \ell_\infty$$

对于所有 $x,\ y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$。

还可以证明，该关系是一个特殊类博雷尔等价关系上的通用博雷尔等价关系。

定理 10 ([7, 定理 8.4.2])。 设 E 是波兰空间 X上的一个 K_σ 等价关系。那么 $E \leq_B \mathbb{R}/\ell_\infty$。

上面列出的所有等价关系都是博雷尔的。此外，可以证明它们的复杂度严格递增。

定理 11 ([7, 命题 6.1.7、定理 8.1.6、第 15.2] 节**)**。等价关系 E_0 不是光滑的，且 $E_0 <_B E_1 <_B \mathbb{R}/\ell_\infty$。

2.2 连续统理论与三叉连续统

本文将广泛讨论连续统，为此我们需要连续统理论中的若干结果。有关详细信息和未定义概念，请参阅 [17] 。

回顾一下，若连续统 K 中任意两个子连续统的交集都是连通的，则称 K 为单连通交；若 K 的每个子连续统都是单连通交的，则称其为遗传单连通。接下来，我们将证明，在某些特殊类别的连续统上，所研究的等价关系具有一些良好性质。若一个连续统同胚于弧（分别为圆、树）的逆极限，则称其为弧状（分别为圆状、树状）。

我们回顾不同类型三叉连续统的定义，并讨论它们之间的关系。

定义 12。简单三叉连续统是由三条弧组成的连续统，这三条弧交于同一个点。

定义 13。若存在 $L \in \mathcal{C}(K)$，使得 $K \setminus L$ 至少有三个连通分支，则称连续统 K 为三叉连续统。

还有一种限制更少的三叉连续统概念。

定义 14. 若一个连续统 K 是三个彼此相交的子连续统的并，且其中任何一个都不包含在另外两个的并中，则称它为弱三叉连续统 。

显然，任何简单三叉连续统都是三叉连续统。事实证明，尽管弱三叉连续统的概念比三叉连续统更弱，但任何弱三叉连续统都包含一个三叉连续统。

定理 15 ([21, 定理 1。8])。 任何包含弱三叉连续统的连续统都包含三叉连续统。

在所有连接等价关系的研究中，三叉连续统都是至关重要且会频繁出现的概念。三叉连续统如此重要的主要原因，是 Moore 的以下结果。

定理 16 ([16,定理 1])。 平面中任意一族两两不相交的三叉连续统都是可数的。

这一结果也是平面中的连接等价关系与高维空间中的连接等价关系在行为上存在诸多本质差异的主要原因。

以下这些无三叉连续统的性质也会有所帮助。回顾一下，如果一个连续统不包含三叉连续统，就称它为无三叉的 。

引理17 ([18, 引理 3。3])。 设 K 是一个无三叉连续统，且设 A、$B \in \mathcal{C}(K)$。那么 $B \setminus A$ 和 $A \cap B$ 的连通分支都至多有两个。

引理 18 ([18, 引理 3。5])。 设 K 是一个无三叉连续统，且设 A、$B \in \mathcal{C}(K)$满足 $A \cap B$ 不连通。那么 $B \setminus A$ 是连通的。

我们还将使用以下充分条件，判断一个连续统是否包含三叉连续统。

引理 19. 设 K 是一个满足以下条件的连续统：存在两个点 x、$y \in K$，以及三个两两不同的连续统 K_1、K_2、$K_3 \subset K$，使得

1. K_i 在 $i \in \{1,2,3\}$下介于 x 和 y 之间不可约，
2. $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$。

那么 K 包含一个三叉连续统。

证明。如果对于任意互异的 i,j,k，都有 $K_i \not\subset K_j \cup K_k$，那么$K_1 \cap K_2 \cap K_3 \neq \emptyset$，因此 K是一个弱三叉连续统。于是，根据定理 15， K 包含一个三叉连续统。因此，不失一般性，我们可以假设 $K_1 \subset K_2 \cup K_3$。

反设 K 不包含三叉连续统。设 $X =$$K_2 \setminus K_3$和 $Y = K_3 \setminus K_2$。注意到 X和 Y在 K中都是开集。我们分两种情况讨论。

首先，假设存在一些点 $a \in X \setminus K_1$ 和 $b \in Y \setminus K_1$。那么我们可以在 K 中找到 a的开邻域 U_a 和 b 的开邻域 U_b，使得$U_a \subset X$ 满足$U_a \cap K_1 = U_a \cap K_3 = \emptyset$，并且 $U_b \subset Y$满足 $U_b \cap K_1 = U_b \cap K_2 = \emptyset$。考虑$C_x^a$在集合（$K_2 \setminus U_a$）中的连通分支 x，以及 C_x^b在集合（$K_3 \setminus U_b$）中的连通分支 x。由边界碰撞定理可知， $C_x^a \cap \partial U_a \neq \emptyset$、$C_x^a \cap \partial U_b = \emptyset$、 $C_x^b \cap \partial U_b \neq \emptyset$ 和 $C_x^b \cap \partial U_a = \emptyset$。注意到 $y \notin C_x^a \cup C_x^b$。由于 $K_1 \cap \partial U_a = K_1 \cap \partial U_b = \emptyset$ 且 $x \in K_1 \cap C_x^a \cap C_x^b$，我们得到 $K_1 \cup C_x^a \cup C_x^b$是一个弱三叉连续统。因此，根据定理 15 K，包含三叉连续统。

其次，假设 $X \subset K_1$ 或 $Y \subset K_1$。不失一般性，假设 $X \subset K_1$。由不可约性可知， $K_2 \cap K_3$必定是不连通的，因此根据引理17，它有两个连通分支，记为 A 和 B。设 $x \in A$ 且 $y \in B$。

由引理 18 可知， X 和 Y都是连通的。由于 $A \cup B$ 是不连通的，且 $K_2 = A \cup B \cup X$，我们还可得出 $X \cup A$ 和 $X \cup B$ 都是连通的。由引理17可知，$K_1 \cap K_2$ 有两个连通分支，记为 C_1 和C_2。不失一般性，我们可以假设 $X \subset C_1$ 且 $x \in C_1$。由于 K_1在 x 和 y之间不可约，因此 $y \notin C_1$。由于 $X \subset C_1$ 和 $X \cup B$ 是连通的，我们可知 $C_1 \cup B \subset K_2$是连通的，因而 $C_1 \cap B \neq \emptyset$。注意，$K_1 \cap Y \neq \emptyset$，否则我们会有 $K_2 \subset K_1$，这是不可能的。令$c \in C_1 \cap B$，并令 C_c为 $K_1 \cap K_3$中 c的一个连通分支。于是我们有 $C_c \cap Y \neq \emptyset$。注意， $B \not\subset K_1$，否则 $C_1 \cup B$ 将是 K_1的一个真子连续统，且包含 x 和 y。于是，空间 $C_1 \cup B \cup C_c$ 是一个弱三叉连续统。因此，根据定理 15， K 包含一个三叉连续统。 □

我们还需要一个关于连续统的超空间的事实。

定理20 ([8, 定理 14.9])。 设 K 为一个连续统。那么，空间 $\mathcal{C}(K)$ 是弧连通的。

2.3 预备结果

本小节介绍波兰空间的超空间以及这些超空间上的博雷尔结构的性质方面的已有结果，这些结果将在全文中使用。更多详情请参阅 [9] 。

设 X 为一个波兰空间。我们将 X 的非空紧子集所构成的超空间以及 X 中的连续统所构成的超空间分别记为 $\mathcal{K}(X)$ 和 $\mathcal{C}(X)$。我们赋予 $\mathcal{K}(X)$维托里斯拓扑，该拓扑可由豪斯多夫

度量诱导。回忆一下，这使得 $\mathcal{K}(X)$成为波兰空间，而空间 $\mathcal{C}(X)$是 $\mathcal{K}(X)$的一个闭子集。我们还注意到，所有 X 的非空闭子集所构成的超空间$\mathcal{F}(X)$上的Effros-Borel 结构是标准博雷尔结构。此外，集合$\mathcal{K}(X)$以及因此的 $\mathcal{C}(X)$是 $\mathcal{F}(X)$的Borel子集。

本文中最常用的结果之一是 Lusin-Novikov 一致化定理。

定理 21 ([9, 定理 18。10] Lusin-Novikov)。 设 X、Y是标准博雷尔空间，且 $P \subset X \times Y$是博雷尔集。如果 P的每个截面 P_x、 $x \in X$都是可数的，那么 P有一个博雷尔一致化，因此投影 $\pi_1(P)$ 是博雷尔集。

另一个有用的结果是，存在定义在闭子集上的博雷尔选择函数。

定理 22 ([9, 定理 12。13])。 设 X 是一个波兰空间。那么存在一个博雷尔函数 $S\colon \mathcal{F}(X) \to X$，使得对于每个 $H \in \mathcal{F}(X)$， $S(H) \in H$。

研究弧连接关系时，考虑超空间 $\mathcal{K}(X)$中的所有弧所组成的集合自然很有用。我们分别用 $\mathcal{J}(X)$和 $\mathcal{S}(X)$表示 X 中的所有弧以及所有简单闭曲线的集合。事实证明，这两个子集都是博雷尔集。此外，我们还有以下性质。

命题 23 ([2])。 设 X 是一个波兰空间。那么 $\mathcal{J}(X)$ 和 $\mathcal{S}(X)$ 是 $\mathcal{K}(X)$的 *Borel*子集，并且存在一个博雷尔映射 e： $\mathcal{J}(X) \to \mathcal{K}(X)$，它将每条弧映射到其端点构成的集合。

通过将映射 e 拆分为两个映射，可以进一步改进这一结果。

引理 24 ([5])。 设 X 是一个波兰空间。那么存在两个博雷尔映射e_1, e_2： $\mathcal{J}(X) \to X$，使得对每个 $I \in \mathcal{J}(X)$，都有 $e(I) = \{e_1(I)\ e_2(I)\}$，其中 e是命题 *23* 中的映射。

如前所述，促使这项研究展开的一个重要结果是，平面子集上的弧连接关系是博雷尔的。我们还要回顾，波兰空间的子集恰好是其波兰子空间。

定理 25 ([5, 定理 1])。 设 $X \subset \mathbb{R}^2$ 是一个子集。那么 E_X^A 是博雷尔的。

3 弧连接关系

本节中，我们研究弧连接关系。设 X 是一个度量空间， C 是 X的一个弧连通分支。那么 C有三种可能的形式，见[5]。第一种情况是， C 只包含一个点。第二种情况是， C 是一个区间（闭、开或半开区间）的连续像；此时它是一个 K_σ，因而是一个 Borel子集。最后一种情况是， C 包含一条简单三叉连续统；此时 C 称为三叉弧连通分支。我们将证明，在某种意义上，弧连接关系的复杂度由平面空间中非三叉、非平凡弧分支的复杂度决定；而在一般波兰空间中，它则由三叉弧连通分支的复杂度决定。Debs 和 Saint Raymond 证明了，只要三叉弧连通分支是博雷尔的，其他弧分支的博雷尔性就能得到保证。

定理 26 ([5, 命题 10])。 设 X 是一个波兰空间。假设所有具有三叉弧连通分支的点的并集是博雷尔集。那么，所有具有平凡弧分支的点所成的集合也都是博雷尔集。

本节的主要结果是，在平面的一个 G_δ 子集上，弧连通关系 Borel 可约于 E_0。我们先给出一个更一般的定理。然后可以利用 [5] 的结果将该定理应用于平面情形。我们还将展示该定理在高维中的一个应用。

定理 27。 设 X 是一个波兰空间，并设

$$X_T = \{x \in X : \ x \ has \ a \ triodic \ arc \ component\}.$$

假设 X_T和 E_X^A 是博雷尔的。那么 $E_X^A \leq_B E_0 \times E_X^A|_{X_T}$。

证明。 由于任何波兰空间都可以嵌入希尔伯特空间中，我们不妨假设 $X \subset \ell_2(\mathbb{N})$。设

$$X_P = \{x \in X : \ x \text{ has trivial arc component}\}$$

并令 $X_N = X \setminus (X_T \cup X_P)$。根据定理 26，所有集合 X_T, X_P, X_N都是博雷尔集，并且它们是 E_X^A-不变的。注意，任何包含简单闭曲线的非三岔弧分支本身都是一条简单闭曲线。考虑

$$C = \{(x, S) \in X_N \times \mathcal{S}(X) : x \in S\},$$

其中 $\mathcal{S}(X)$ 是 X中所有简单闭曲线的集合。集合 C 是博雷尔集，因为根据命题 23， $\mathcal{S}(X)$ 是博雷尔集。对于每个 $x \in X_N$，截面 C_x 至多包含一条简单闭曲线，因此根据定理 21，我们得到 $X_S = \pi_1(C)$ 是博雷尔集。记 $X_A = X_N \setminus X_S$。我们有， X_A 是一个 E_X^A-不变的博雷尔集，并且它是所有满足以下条件的点的集合：其弧连通分支是非平凡的，且不包含任何三叉连续统或简单闭曲线。

首先，我们证明 $E_X^A|_{X_A} \leq_B E_0$。令 $\mathcal{J}(X)$ 为 X 中所有弧的集合。根据命题 23， X 中所有弧构成的集合 $\mathcal{J}(X)$ 是博雷尔集；此外，按照引理 24 定义在 $\mathcal{J}(X)$ 上的映射 e， e_1, e_2 也是博雷尔映射。我们在 $\mathcal{J}(X)$ 上定义一个辅助等价关系E_A ，表示属于同一个弧连通分支

$$E_A = \{(I, J) \in \mathcal{J}(X) \times \mathcal{J}(X) : e_1(I) E_X^A e_1(J)\}.$$

由于 E_X^A 是博雷尔集，因此 E_A 也是。对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $p \in \mathbb{R}$，考虑集合

$$S(n, p) = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}) : x(n) = p\},$$

它是 $\ell_2(\mathbb{N})$ 的一个闭子集。对于任意两个不同的实数 p 和 r，考虑由下式给出的博雷尔集 $\mathcal{J}(n, \ p, \ r)$

$$\bigcup_{\{i,j\}=\{1,2\}} \{J \in \mathcal{J}(X) : S(n, p) \cap J = \{e_i(J)\}, S(n, r) \cap J = \{e_j(J)\}, e_1(J) \in X_A\}.$$

这是 X_A 中所有弧构成的集合，这些弧仅在端点处与互不相交的闭集合 $S(n, \ p)$ 和 $S(n, \ r)$ 相交。我们将使用命题 7 来证明 $E_A|_{\mathcal{J}(n,p,r)}$

对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和任意互不相同的 $p,\ r \in \mathbb{R},\ E_0$ 都是 Borel 可约的。固定任意 $n \in \mathbb{N}$ 和互不相同的 $p,\ r \in \mathbb{R}$。考虑博雷尔集 $D = D_1 \cap D_2$，其中

$$D_1 = \{(I, J, \Gamma) \in \mathcal{J}(n,p,r)^2 \times \mathcal{J}(X) : I \neq J, e(\Gamma) \subset e(I) \cup e(J)\} \text{ and}$$

$D_2 = \{(I,\ J,\ \Gamma) \in \mathcal{J}(n,\ p,\ r)^2 \times \mathcal{J}(X)\colon\ \Gamma \cap S(n,\ p) = \emptyset$ 或 $\Gamma \cap S(n,\ r) = \emptyset$ 或 $\Gamma = I \cup J\}$.

由于集合 $\mathcal{J}(n,\ p,\ r)$ 仅包含来自不含简单闭曲线的非三岔弧分支的弧，因此截面 $D_{(I,J)}$ 对于任意一对弧 $(I,\ J)$ 至多包含一条弧。因此，由定理 21 可知，集合 $E = \pi_{1,\ 2}(D)$ 是博雷尔集。我们将证明$G = (\mathcal{J}(n,\ p,\ r)\ E)$ 是 $E_A|_{\mathcal{J}(n,p,r)}$ 的博雷尔树化，并满足命题 7 的假设。

G 是图这一事实由构造可知。我们需要证明，图 G 的连通分支恰好是 $E_A|_{\mathcal{J}(n,p,r)}$ 的等价类。取 $(I,\ J) \in E_A|_{\mathcal{J}(n,\ p,\ r)}$。令 K为同时包含 I 和 J 的最小弧；显然这样的弧存在，因为我们处于一个不含简单闭曲线的非三岔弧分支中。由于 K 是紧致的，来自 $\mathcal{J}(n,\ p,\ r)$ 且位于 K 中的弧至多只有有限条。不妨设

$$\{I = I_0, I_1, \ldots, I_k = J\} \subset \mathcal{J}(n,p,r)$$

是按所列顺序包含于 K 中的弧。令 $0 \leq i < k$，并令 K' 为包含 I_i 和 I_{i+1} 的最小弧。于是 $(I_i, I_{i+1}, K') \in D$，因为 K' 不包含 $\mathcal{J}$ 中除 I_i 和 I_{i+1} 以外的元素，(n,p,r)。由此可得 $(I_i, I_{i+1}) \in E$。这个论证表明，I 和 J 属于图 G 的同一个连通分支。反过来，若 $(I,J) \in E$，则根据 G 的定义，显然有 $(I,J) \in E_A|_{\mathcal{J}(n,p,r)}$。

由于我们只考虑不含简单闭曲线的非三岔弧分支，因此 G 是无环的，且度至多为 2。因此，$E_A|_{\mathcal{J}(n,p,r)}$ 可数，故根据命题 7，$E_A|_{\mathcal{J}(n,\ p,\ r)} \leq_B E_0$。令

$$M(n,p,r) = \{(x, J) \in X_A \times \mathcal{J}(n,p,r) : xE_Ae_1(J)\},$$

这是一个博雷尔集。由于 $E_A|_{\mathcal{J}(n,p,r)}$ 是可数的，我们得到，对于任意 $x \in X_A$，截面 $M(n, p, r)_x$ 是可数的。于是，根据定理 21，$M(n,p,r)$ 存在博雷尔一致化。此外，这个一致化是从 $E_X|_{\pi_1(M(n,p,r))}$ 到 $E_A|_{\mathcal{J}(n,p,r)}$ 的博雷尔约化，这意味着 $E|_{\pi_1(M(n,p,r))} \leq_B E_0$。显然，对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 以及互不相同的 p、$r \in \mathbb{R}$，我们都有 $\pi_1(M(n,p,r))$ 是 E_X^A-不变的。容易看出

$$X_A = \bigcup_{\substack{p \neq q \in \mathbb{Q} \\ n \in \mathbb{N}}} \pi_1\left(M(n,p,r)\right).$$

我们还得到，$E_X^A|_{X_S} \leq_B E_0$，其中先前定义的集合 C 是一个见证，并且 $E_X^A|_{X_P}$ 本身就是相等关系。综合所有部分，我们得到

$$\{\pi_1(M(n,p,r))\colon\ p,q \in \mathbb{Q},\ p \neq r \text{ and } n \in \mathbb{N}\} \cup \{X_S, X_P\}$$

是引理 5 中的一个集合，因此 $E_X^A|_{X_N \cup X_P} \leq_B E_0$。由于 X_T 和 $X_N \cup X_P$ 是 E_X^A-不变且互不相交的，我们得到

$$E_X \leq_B E_X|_{X_N \cup X_P} \times E_X|_{X_T} \leq_B E_0 \times E_X|_{X_T}\ .$$ □

注。定理 27 的直观含义是，E_X^A 在波兰空间 X 上的任何复杂行为都必须源自三叉弧连通分支。

现在，我们可以利用这个定理证明，平面上的弧连接关系博雷尔约化于 E_0。

定理28。 设 X 是平面的一个 G_δ 子集。那么 $E_X^A \leq_B E_0$。

证明。 根据定理 25，我们有 E_X^A 是博雷尔集。由于三叉弧连通分支只有可数多个，集合

$$X_T = \{x \in X : x \text{ has a triodic arc component}\}$$

也是博雷尔集。由于只有可数多个等价类，$E_X^A|_{X_T} \leq_B \mathrm{id}(\mathbb{N})$。因此，

$$E_X^A \leq_B E_0 \times E_X^A|_{X_T} \leq_B E_0 \times \mathrm{id}(\mathbb{N}) \leq_B E_0,$$

其中，第一个博雷尔约化由定理 27 得出，最后一个则是显然的。 □

注 29。 设 K 是Knaster连续统（见 [17, 2.9]）。一些作者也将此连续统称为桶柄连续统。根据 K的性质，我们有， K 上的composant等价关系与 E_K^A重合，因此得到 $E_0 \leq_B E_K^A$，如 [20]所示。所以，由定理28可知 $E_K^A \sim_B E_0$。这也可以按照 [22] 中的方法直接证明。事实上，对于任意广义 Knaster 连续统，都可以证明 E_K^A 与E_0 具有博雷尔双可约性（见 [23]）。

如引言中所述，存在一些连续统 $X \subset \mathbb{R}^3$，使得 E_X^A 是解析但非博雷尔的 [1, 11, 12]，因此不能放宽可嵌入平面的假设。一个自然的问题是， $X \subset \mathbb{R}^2$ 是 G_δ 子集这一描述复杂度假设能否削弱。我们稍后将证明，这个问题的答案是否定的。也就是说，我们将构造平面的一个 F_σ 子集X，使得 E_X^A 甚至不是解析等价关系。

注 30。 Becker [1, 定理 4.1]指出，任何解析等价关系都可以实现为 $\mathbb{R}^3$的某个紧子集上的弧连接关系。Becker 没有给出完整的证明；不过，该证明可以在 [24, 定理 3.2]中找到。事实上，对该构造稍加修改，便可得到一个波兰空间，在其上，弧连接关系、连续统连接关系和链连接关系彼此相同。

我们以两个简单的结果结束本节。其中一个是将定理 27 应用于类圆连续统，另一个是这样一个事实：乘积空间上的弧连接关系在本质上与该空间上弧连接关系的乘积相一致。我们将证明，所有已研究的连接关系都具有后一性质。

推论31。 设 X 是一个类圆连续统。则 $E_X^A \leq E_0$。

证明。 由于 X 是类圆的，它不包含任何三叉连续统。因此，该结果直接由定理 27 得出。 □

命题 32。 设 X 是一个波兰空间。则 $E_{X^\mathbb{N}}^A$ 与$(E_X^A)^\mathbb{N}$博雷尔同构，因此 $E_{X^\mathbb{N}}^A \sim_B (E_X^A)^\mathbb{N}$。

证明。 这是显而易见的，因为当且仅当对于每个 $n \in \mathbb{N}$， $X^\mathbb{N}$ 中的两个点$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^\mathbb{N}$ 在 X 中弧连通时，它们在 $X^\mathbb{N}$ 中弧连通。 □

4 连续统连接关系

连续统连接关系可以看作是在 [20]中研究的composant等价关系的一种可能推广。显然，紧空间上的连续统连接关系是光滑的，因为只要 X 是紧的，空间 $\mathcal{C}(X)$本身就是紧的。在连续统上，这个关系只有一个等价类。

事实证明，连续统连接关系与弧连接关系密切相关。事实上，如下所示，在相应的连续统超空间上，连续统连接关系与弧连接关系本质上是相同的。

定理 33. 设 X 是一个波兰空间。那么 $E_X^C \sim_B E^A_{\mathcal{C}(X)}$。

证明。（$\leq_B$）考虑映射 $f\colon X \to \mathcal{C}(X)$，其定义为 $x \mapsto \{x\}$。该映射连续，因而是博雷尔映射。我们将证明它是所需的博雷尔约化。设 $(x,y)\in E_X^C$。那么存在 $K \in \mathcal{C}(X)$，使得 $x,y \in K$。根据定理20，我们知道空间 $\mathcal{C}(K)$ 是弧连通的。因此，存在一条弧 $I \subset \mathcal{C}(K)$，从$\{x\}$ 到 $\{y\}$。由于 $\mathcal{C}(K) \subset \mathcal{C}(X)$，因此 $\{x\}$ 和 $\{y\}$ 在 $\mathcal{C}(X)$ 中也由一条弧连接。对于反向蕴含，假设 $(\{x\},\{y\}) \in E^A_{\mathcal{C}(X)}$。那么存在连续映射 $\varphi\colon [0,1] \to \mathcal{C}(X)$，满足 $\varphi(0) = \{x\}$ 且 $\varphi(1) = \{y\}$。由于 $[0,1]$ 是一个连续统，且 φ 与并集映射都是连续的，我们得出 $\bigcup_{t\in[0,1]} \varphi(t)$ 是一个连续统。因此，$(x,y) \in E_X^C$。

($\geq_B$) 考虑一个博雷尔选择函数 $S\colon \mathcal{C}(X) \to X$，如定理 22 中所述。我们将证明 S 是所需的博雷尔约化。令 $(K,\ L) \in E^A_{\mathcal{C}(X)}$。由于 $\mathcal{C}(K)$ 和 $\mathcal{C}(L)$ 是弧连通的，我们可以在 $\mathcal{C}(X)$ 中找到一条弧，连接 $\{S(K)\}$ 与 $\{S(L)\}$。由此，采用与前面类似的论证可知，$S(K)$ 和 $S(L)$ 包含于 X 中的某个连续统内。反向蕴含也可用与上文第一个博雷尔约化相同的推理得到。 □

紧空间上连续统连接关系的性质可用于证明，局部紧波兰空间上的连续统连接关系是超光滑的。

命题34。设 X 是一个局部紧波兰空间。则 $E_X^C \leq_B E_1$。

证明。由于 X 是局部紧且可分的，我们可以找到一个开集的递增序列 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得 G_n 是紧致的，并且 $X = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n}$。定义

$$E_n = E^C_{\overline{G_n}} \cup \mathrm{id}(X)$$

对于任意 $n \in \mathbb{N}$。容易看出，对于每个$n \in \mathbb{N}$，E_n 都是 X 上的等价关系。注意，由于 G_n 是紧致的，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，G_n 中的任意两点能够由 $\overline{G_n}$ 中的一个连续统连接，当且仅当它们属于 G_n的同一个连通分支。特别地，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，E_n 的等价类要么是点，要么是G_n 的连通分支。因此，E_n 在 X中具有闭的等价类，根据定理 3，我们得到对于每个 $n \in \mathbb{N}$，E_n 都是光滑的。我们将证明$E_X^C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$。

事实 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subset E_X^C$很容易得出，因为对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $E_n \subset E_X^C$。对于另一个包含关系，取 $(x,\ y) \in E_X^C$。那么存在 $K \in \mathcal{C}(X)$，使得 $x,\ y \in K$。由于 K 是紧致的，对于某个 $n_0 \in \mathbb{N}$，有 $K \subset G_n$。因此 $(x,\ y) \in E_{n_0} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$。这就完成了 E_X^C 是超光滑的证明。 □

事实证明，即使在平面中，连续统连接关系也可能严格比弧连接关系复杂。

例35. 存在平面的一个局部紧子集 X，使得 $E_X^C \sim_B E_1$.

证明。令 $\mathbb{P}$ 为伪弧。在 [20], 中，Solecki 证明了 $\mathbb{P}$上的 composant 等价关系（记作 F）与 E_1 Borel 双可约。将此等价关系记为 F。令 $x \in \mathbb{P}$ 并考虑 $X = \mathbb{P} \setminus \{x\}$。由命题34可得$E_X^C \leq_B E_1$。因此，只需证明 $E_1 \leq_B E_X^C$。我们将证明$F \leq_B E_X^C$。为此，令 C 为包含 x的 $\mathbb{P}$ 的 composant。现在取$y \in C \setminus \{x\}$ 并考虑函数 $f\colon \mathbb{P} \to X$，其定义为

$$f(p) = \begin{cases} p, & p \in \mathbb{P} \setminus C \\ y, & p \in C. \end{cases}$$

那么 f 是从 F 到 E_X^C 的一个博雷尔约化，因此 $F \leq_B E_X^C$。 □

为证明平面的 G_δ 子集上的弧连接关系是博雷尔的，Debs 和 Saint Raymond 使用了 Becker 和 Pol 的结果 [2, 命题51]: 当且仅当该关系的所有等价类都是博雷尔集时，这些空间上的弧连接关系才是博雷尔的。我们将在下文证明，平面上的连续统连接关系也满足同样的结论。然而，对于解析等价关系，这两个条件通常并不等价。

定理 36. 设 X 是平面中的一个 G_δ 子集。那么，当且仅当 E_X^C 的每个等价类都是博雷尔集时，E_X^C 才是博雷尔集。

证明。任何博雷尔等价关系的每个等价类显然都是博雷尔集。对于另一个方向，假设 E_X^C 的每个等价类都是博雷尔集。令

$$A = \{(x, y, K) \in X^2 \times \mathcal{C}(X) : x, y \in K,\ K \text{ is irreducible between } x \text{ and } y\}.$$

我们将证明这个集合是博雷尔集。考虑集合

$$B = \{(x, y, K, L) \in X^2 \times \mathcal{C}(X)^2 : x, y \in K,\ x, y \in L \text{ and } L \subsetneq K\},$$

不难看出，该集合是博雷尔集。对于任意的 $(x,\ y,\ K) \in X^2 \times \mathcal{C}(X)$，截面

$$B_{(x,y,K)} = \{L \in \mathcal{C}(K) : x, y \in L\} \setminus \{K\}.$$

是一个 K_σ 集，因为 $\mathcal{C}(K)$ 是紧致的。由 Arsenin-Kunugui定理[9,定理 3546]可知，$\pi_{1,\ 2,\ 3}(B)$ 是博雷尔集。但由于 A 等于

$$\{(x, y, K) \in X^2 \times \mathcal{C}(X) : x, y \in K\} \setminus \pi_{1,2,3}(B),$$

它是一个博雷尔集。

现在，令 X_T 为 E_X^C 中所有包含三叉连续统的等价类的并。根据定理 16，这样的等价类至多可数。由于我们假设每个等价类都是博雷尔集，因此 X_T 是博雷尔集。令 $X_N = X \setminus X_T$，并考虑

$$C = A \cap (X_N^2 \times \mathcal{C}(X)).$$

根据引理 19，对于任意的$(x,\ y)\ \in\ X_N \times X_N$，截面 $C_{(x,y)}$ 至多包含两个连续统，因此根据定理 21，$\pi_{1,\ 2}(C)$是博雷尔集。我们注意到，包含在某个连续统中的任意两个点，也包含在一个以它们为端点的不可约连续统中。因此，我们有$\pi_{1,\ 2}(C)$ $=\ E_X^C|_{X_N}$，所以它是一个博雷尔等价关系。由于 X_T和 X_N都是E_X^C-不变的，我们有 $E_X^C = E_X^C|_{X_N} \cup E_X^C|_{X_T}$，因此$E_X^C$ 是一个博雷尔等价关系。 □

尽管弧连接关系与连续统连接关系之间存在相似之处，但我们不知道平面子集上的连续统连接关系是否总是博雷尔的。

本节最后给出一个结果，它将空间上的连续统连接关系的乘积与乘积空间上的相应关系联系起来，方式与前文相同。

命题 37。 设 X 是一个波兰空间。那么 $E_{X^{\mathbb{N}}}^C$ 与 $(E_X^C)^{\mathbb{N}}$ 博雷尔同构，因此 $E_{X^{\mathbb{N}}}^C \sim_B (E_X^C)^{\mathbb{N}}$。

证明。 这同样可以轻易推出。设 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \in\ X^{\mathbb{N}}$。如果 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 包含在 $X^{\mathbb{N}}$ 中的某个连续统内，那么对于每个 $n \in \mathbb{N}$，点 x_n 和 y_n 都包含在 X 中的某个连续统内，因为连续统的投影仍是连续统。另一方面，如果对于每个 $n \in \mathbb{N},\ x_n$ 和 y_n 都包含在 X 中的某个连续统内，那么 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 就包含在 $X^{\mathbb{N}}$ 中，因为可数多个连续统的乘积仍是连续统。 □

5 链式连续统连接关系

本节介绍一些关于链式连续统连接关系复杂度的结果。链式连续统连通这一性质有时也称为连续统链可性，但为避免与可链连续统混淆，我们不采用这一称法。关于链式连续统连通连续统的一些结果见 [3, 13]。我们从一个与链连接关系相关的辅助等价关系开始。

定义 38. 设 X 是一个波兰空间，且 $\varepsilon\ >\ 0$。我们定义等价关系

$$E_X^{CC,\varepsilon} = \{(x,y) \in X \times X : \exists K_0,\dots,K_k \in \mathcal{C}_\varepsilon(X),\ k \in \mathbb{N},\ \text{such that } x \in K_0,\ y \in K_k \text{ and } K_i \cap K_{i+1} \neq \emptyset \text{ for } 0 \le i < k\}$$

在 X 上，其中 $\mathcal{C}_\varepsilon(X)\ =\{K \in \mathcal{C}(X) : \mathrm{diam}(K)\ <\varepsilon\}$。

注。 对于一般的波兰空间 X，等价关系 $E^{CC}{}_{,X}^{\ \ \varepsilon}$ 和 E_X^{CC} 可能取决于 X 上度量的选择。另一方面，对于紧空间 X，E_X^{CC} 不取决于所赋予的度量。不过，我们所证明的链连接关系的所有性质都与度量无关，因此在证明中不指定任何度量。换言之，这些结果对任意选择的相容度量都成立。

我们将从证明链连接关系与弧连接关系密切相关开始本节。

命题 39. 设 X 是一个波兰空间，且 $\varepsilon > 0$。那么 $E^{CC}_{X}{}^{\varepsilon} \sim_B E^A_{\mathcal{C}_\varepsilon(X)}$。

证明。($\leq_B$) 考虑由 X 到 $\mathcal{C}_\varepsilon(X)$ 的连续映射 $x \mapsto \{x\}$。令 $x, y \in X$。若 $(x, y) \in E^{CC}_{X}{}^{\varepsilon}$，则可以按照定理 33 的证明中的类似方法证明 $(\{x\}, \{y\}) \in E^A_{\mathcal{C}_\varepsilon(X)}$。现在，假设存在连续函数 $\varphi\colon [0,1] \to \mathcal{C}_\varepsilon(X)$，使得 $\varphi(0) = \{x\}$ 且 $\varphi(1) = \{y\}$。令 d为与 X的拓扑相容的度量。

由 $[0,1]$的紧致性可知，$\sup_{r\in[0,1]} \operatorname{diam} \varphi(r) < \varepsilon$。因此，存在$\eta > 0$ 使得 $\sup_{r\in[0,1]} \operatorname{diam} \varphi(r) = \varepsilon - \eta$。由于 φ 一致连续，存在 $\delta > 0$使得 $|r - s| < \delta$蕴含 $d_H(\varphi(r)\ \varphi(s)) < \eta/2$。令 $I \subseteq [0,1]$为长度小于 δ的闭区间。取 $x_0, y_0 \in \bigcup \varphi(I)$，使得 $x_0 \in \varphi(r_0)$ 且 $y_0 \in \varphi(s_0)$，其中 $r_0, s_0 \in I$。由于 $d_H(\varphi(r_0)\ \varphi(s_0)) < \eta/2$，存在 $x' \in \varphi(r_0)$ 使得$d(x', y_0) < \eta/2$。由此可得 $d(x_0, y_0) < d(x_0, x') + d(x', y_0) < (\varepsilon - \eta) + \eta/2 < \varepsilon$，这表明紧集 $\bigcup \varphi(I)$ 的直径小于 ε。

我们可以用有限个长度小于 δ 的闭区间 I_0、……、I_n 覆盖区间 $[0,1]$。于是，$\bigcup \varphi(I_0)$、……、$\bigcup \varphi(I_n)$ 是 $\mathcal{C}_\varepsilon(X)$ 中连接 x 与 y 的连续统链；证明 $\bigcup \varphi(I_i)$ 是连续统的论证与定理 33 中的论证类似。

($\geq_B$) 在 $\mathcal{C}_\varepsilon(X)$ 上的博雷尔选择函数与定理 33 中的做法相同。 □

由于 $E^{CC}_X = \bigcap_{n\geq 1} E^{CC}_{X}{}^{\frac{1}{n}}$，由上面的命题可知，对于任意波兰空间 X^n，都有 $E^{CC}_X \sim_B \bigcap_{n\geq 1} E^A_{\mathcal{C}_1(X)}$。我们将链连接关系表示为可数交，因此下面关于关系乘积的可约性结果将会很有用。

引理 40。设 X、Y 为标准博雷尔空间，且对所有 $n \in \mathbb{N}$，E_n、F_n 分别是定义在 X 和 Y 上的博雷尔等价关系。假设对所有 $n \in \mathbb{N}$，$E_n \leq_B F_n$。则 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \leq_B \prod_{n\in\mathbb{N}} F_n$。

证明。对于任意 $n \in \mathbb{N}$，令 $f_n\colon X \to Y$为从 E_n 到 F_n的一个博雷尔约化。于是定义 $f\colon X \to Y^{\mathbb{N}}$为 $f(x) = (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$。我们证明 f是所需的博雷尔约化。容易看出映射 f是博雷尔的。设 $(x, y) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$。对于所有 $n \in\mathbb{N}$，由于 f_n是博雷尔约化，我们有 $(f_n(x)\ f_n(y)) \in F_n$。但这意味着 $(f_n(x)\ f_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$属于乘积 $\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n$。反过来，假设 $(f_n(x)\ f_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$属于乘积 $\prod_{n\in\mathbb{N}} F_n$。那么，由于每个 f_n都是博雷尔约化，对于每个$n \in \mathbb{N}$，我们都有 $(x, y) \in E_n$，从而 $(x, y) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$。□

我们将在后文使用这一结果。接下来，我们继续讨论，证明在局部紧波兰空间上，$E^{CC}_{X}{}^{\varepsilon}$ 的 Borel 复杂度存在一个上界。

引理 41. 设 X 是一个局部紧波兰空间，且 $\varepsilon > 0$。那么 $E^{CC}_{X}{}^{\varepsilon}$ 是一个K_σ 等价关系。

证明。由于 X 是局部紧且可分的，我们可以找到一个开集递增序列 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中这些开集属于 X，满足 G_n 是紧致的且 $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$。对于任意$\varepsilon > 0$，我们定义

$$E^\varepsilon_n = E^{CC,\varepsilon}_{\overline{G_n}} \cup \mathrm{id}(X).$$

我们证明 E_n^ε 是 K_σ，并且 $E^{CC,\ X}{}^{\ \varepsilon} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^\varepsilon$。固定 $k \in \mathbb{N}$。那么

$$\{(x,y) \in \overline{G_n} \times \overline{G_n} : \exists K_0, \dots, K_k \in \mathcal{C}(\overline{G_n}) \text{ of diameter } \leq \delta \text{ such that } x \in K_0,\ y \in K_k \text{ and } K_i \cap K_{i+1} \neq \emptyset \text{ for } 0 \leq i < k\}$$

对于任意 $\delta > 0$，它都是一个紧集，因为定义该集合的所有关系都是紧集上的闭关系。因此，该集合

$$E_{n,k}^\varepsilon = \{(x,y) \in \overline{G_n} \times \overline{G_n} : \exists K_0, \dots K_k \in \mathcal{C}_\varepsilon(\overline{G_n}) \text{ such that } x \in K_0,\ y \in K_k \text{ and } K_i \cap K_{i+1} \neq \emptyset \text{ for } 0 \leq i < k\}$$

是 K_σ，因为它可以表示为前述形式的集合的可数并。但于是 $E^{CC,\ G_n}{}^{\ \varepsilon} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_{n,\ k}^\varepsilon$。这意味着 E_n^ε是一个 K_σ 集合。

由于对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $E_n^\varepsilon \subset E^{CC,\ X}{}^{\ \varepsilon}$，因此我们有 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^\varepsilon \subset E^{CC,\ X}{}^{\ \varepsilon}$。对于另一包含关系，设 $(x,\ y) \in E^{CC,\ X}{}^{\ \varepsilon}$。于是存在 $k \in \mathbb{N}$ 和 $K_0,\ \dots,\ K_k \in \mathcal{C}_\varepsilon(X)$，使得$x \in K_0$、$y \in K_k$，且对于 $0 \leq i < k$，有 $K_i \cap K_{i+1} \neq \emptyset$。对于任意 $i \in \{0, ..., k\}$，我们都可以找到$n_i \in \mathbb{N}$，使得 $K_i \subset G_{n_i}$，因为 K_i 是紧致的。令 $m =$ 为 $\max_{0\leq i\leq k} n_i$。于是对于所有 $0 \leq i \leq k$，都有 $K_i \in G_m$，从而 $(x,\ y) \in E_m^\varepsilon \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^\varepsilon$。

因此，$E^{CC,\ X}{}^{\ \varepsilon}$ 是一个 K_σ 等价关系。 □

我们可以将这一结果与普适 K_σ 等价关系的存在性结合起来，从而界定局部紧波兰空间上链式连续统连接关系的复杂度。

定理 42. 设 X 是一个局部紧波兰空间。那么 $E_X^{CC} \leq_B (\mathbb{R}/\ell_\infty)^{\mathbb{N}}$。

证明. 我们有 $E_X^{CC} = \bigcap_{n\geq 1} E^{CC,\ X}{}^{\ \frac{1}{n}}$。此外，根据引理 41 和定理 10，对于所有 $n \geq 1$，都有 $E^{CC,\ X}{}^{\ \frac{1}{n}} \leq_B \mathbb{R}/\ell_\infty$。因此，根据引理 40，$E_X^{CC} \leq_B (\mathbb{R}/\ell_\infty)^{\mathbb{N}}$。 □

我们稍后将证明这个上界是最优的。不过，事实证明，平面上的情况要简单得多。首先，我们陈述一个技术性引理，说明在一些温和的假设下，链连接与弧连接关系相同。

引理 43。 设 X 为一个度量空间。假设对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$E^{CC,\ X}{}^{\ \frac{1}{n}}$的任何等价类都不包含三叉连续统。那么 $E_X^{CC} = E_X^A$。

证明。 我们需要证明两个包含关系。包含关系 $E_X^A \subset E_X^{CC}$显然成立。为证明另一个包含关系，设 $(x,\ y) \in E_X^{CC}$。对于每个 $n \geq 1$，令 C_n 为包含 x 和 y的 $E^{CC,\ X}{}^{\ \frac{1}{n}}$ 的等价类。根据假设，对于任意$n \geq 1$，C_n 不包含三叉连续统。此外，根据引理 19，点 x 和 y 至多包含于 C_n 中两个不同的、在它们之间不可约的连续统内。由于对于每个 $n \geq 1$都有 $C_{n+1} \subset C_n$，存在一个在 x 和 y之间不可约的连续统 $K \subset X$，其中对于每个 $n \geq 1$，K 包含于 x 和 y之间的一个 $\frac{1}{n}$-连续统链中。我们证明 K 是一个皮亚诺连续统，因此它是弧连通的。为此，我们使用皮亚诺连续统的标准刻画（见 [17, 定理 8.4]）。

取 $\delta > 0$，并令 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{1}{n} < \delta$。我们可以找到 $k \in \mathbb{N}$ 和 $K_0,\ \dots\dots,\ K_k \in \mathcal{C}_1(X)$，使得 $x \in K_0$、$y \in K_k$、$K \subset \bigcup_{i=0}^k K_i$，并且对每个 n 都有 $K_i \cap K_{i+1} \neq \emptyset$

$0 \le i < k$。由于 $K \subset \bigcup_{i=0}^{k} K_i$，且 $\bigcup_{i=0}^{k} K_i$ 是一个不包含任何三叉连续统的连续统，根据引理17，对于每个 $0 \le i \le k$， $K \cap K_i$ 至多有两个连通分支。对于每个 $0 \le i \le k$，令 K_i^0， $K_i^1 \in \mathcal{C}_1(X)$ 满足 $K \cap K_i = K_i^0 \cup K_i^1$。于是我们有

$$K = \bigcup_{i=0}^{k} \bigcup_{j=0}^{1} K_i^j.$$

由于 δ 是任意的，我们得到 K 是一个皮亚诺连续统，因此 X 中存在一条弧连接 x 和 y。因此 $(x, y) \in E_X^A$。 □

推论44。设 X 是一个波兰空间。假设 X 不包含任何三叉连续统。那么 $E_X^{CC} = E_X^A$。

证明。这由引理 43 得出。 □

定理 45。设 X 是平面的一个局部紧子集。那么$E_X^{CC} \le_B E_0$。

证明。由引理 41，我们知道对于每个 $\varepsilon > 0$， $E^{CC,X}_{\frac{1}{n}}$ 都是博雷尔集。对于任意 $n \ge 1$，令 T_n 为 $E^{CC,X}_{\frac{1}{n}}$ 中所有包含三叉连续统的等价类之并。由于 $E^{CC,X}_{\frac{1}{n}}$ 是博雷尔集，根据定理 16， T_n 也是博雷尔集。注意，对所有 $n \ge 1$， $T_{n+1} \subset T_n$。令 $N_n = X \setminus T_n$，并考虑 $N = \bigcup_{n\ge1} N_n$ 和 $T = \bigcap_{n\ge1} T_n$。由于对于每个 $n \ge 1$， T_n 都是 E_X^{CC}-不变的，我们得到 T 和 N 也都是 E_X^{CC}-不变的。由引理 43，我们得到 $E_X^{CC}|_N = E_X^A|_N$。

由定理28可得 $E_X^{CC}|_N = E_X^A|_N \le_B E_0$。我们将证明 $E_X^{CC}|_T$是光滑的，这足以得出结论：$E_X^{CC} \le_B E_0$，因为T和N都是E_X^{CC}-不变的。

不失一般性，我们可以假设每个 T_n 都非空，并且恰有可数无限多个 $E^{CC,X}_{\frac{1}{n}}$ 的等价类。令 $R_n = \{x_n^i : i \in \mathbb{N}\}$ 为一个集合，它在 $E^{CC,X}_{\frac{1}{n}}$ 中包含 T_n 的每个等价类中的恰好一个点，对所有$n \ge 1$均如此。给定 $x \in T$，令 $f(x)$为 $\prod_{n\ge1} R_n$ 中唯一满足以下条件的点：对每个 $n \ge 1$，都有$(x, f(x)) \in E^{CC,X}_{\frac{1}{n}}$。那么 $f: T \to \prod_{n\ge1} R_n$ 是一个博雷尔映射，因为单点集的原像要么为空，要么是一个 E_X^{CC}-类。容易验证， f 通过博雷尔映射将 T 约化为乘积上的相等关系。 □

我们不知道定理 45 是否适用于一般的平面 G_δ 集。不过，我们注意到，在上面的证明中，实质上只用到了这样一个事实：对每个 $\varepsilon > 0$， $E^{CC,X}_{\varepsilon}$ 都是博雷尔集。因此，若要使平面中某个 G_δ 子集 X 上的 E_X^{CC}与 E_0博雷尔可约，只需对一列趋于零的正实数， $E^{CC,X}_{\varepsilon}$ 是博雷尔集即可。

尽管弧连接关系与链连接关系一般并不相同，但二者密切相关。事实上，在波兰空间上存在一些自然的充分条件，可确保 E_X^{CC}与 E_X^A 相等。

引理 46. 设 X 是一个波兰空间。假设对于任意C_1、 $C_2 \in \mathcal{C}(X)$， $C_1 \cap C_2$ 都是连通的。那么 $E_X^{CC} = E_X^A$。

证明。 $E_X^A \subset E_X^{CC}$成立显然。我们将证明另一个包含关系。设 $(x, y) \in E_X^{CC}$。那么存在 $K \in \mathcal{C}(X)$，使得 $x, y \in K$。于是我们可以找到一个连续统 $C \subset K$，包含 x 和 y，且在这两点之间不可约。根据引理的假设， C 是唯一这样的连续统。

我们将证明 C 是一个皮亚诺连续统，因此弧连通。设$\varepsilon > 0$。我们可以找到 $K_0, \ldots, K_k \in \mathcal{C}_\varepsilon(X)$，其中某个 $k \in \mathbb{N}$ 满足：对于每个 $0 \leq i < k$，都有 $x \in K_0$、$y \in K_k$和$K_i \cap K_{i+1} \neq \emptyset$。由 C的唯一性可得 $C \subset \bigcup_{i=0}^{k} K_i$。根据引理的假设，对于每个 $0 \leq i < k$，都有 $C \cap K_i \in \mathcal{C}_\varepsilon(X)$。因此，$C$ 可被有限多个直径小于 ε的连续统覆盖。由于 ε 是任意的，我们根据皮亚诺连续统的刻画（定理 8.4]）得出 C 是一个皮亚诺连续统，因而弧连通。因此 $(x, y) \in E_X^A$。 □

注记 47。注意，对于遗传单连通连续统、类圆连续统或类弧连续统，引理 46 的假设均成立（见 [17,定理 12.1]。

同样，对于链连接关系，我们可以将空间的乘积与等价关系的乘积联系起来。

命题 48。设 X 为一个波兰空间。则 $E_{X^{\mathbb{N}}}^{CC}$ 与 $(E_X^{CC})^{\mathbb{N}}$博雷尔同构，因此$E_{X^{\mathbb{N}}}^{CC} \sim_B (E_X^{CC})^{\mathbb{N}}$。

证明。这由以下事实推出。首先，取乘积不会使集合的直径增大太多，而投影也不会使直径增大太多。其次，连续统的乘积和投影仍是连续统。

□

局部紧波兰空间上的链连接等价关系的复杂度上界实际上可以由一个连续统达到。

例 49。存在一个连续统 X，使得 $E_X^{CC} \sim_B (\mathbb{R}/\ell_\infty)^{\mathbb{N}}$。

证明。 我们构造一个连续统 X，使得 $(\mathbb{R}/\ell_\infty) \leq_B E_X^{CC}$。由于根据命题 48 有 $(\mathbb{R}/\ell_\infty)^{\mathbb{N}} \leq_B E_{X^{\mathbb{N}}}^{CC}$，并且根据定理 42 有 $E_{X^{\mathbb{N}}}^{CC} \leq_B (\mathbb{R}/\ell_\infty)^{\mathbb{N}}$，这就足够了。

我们将把该空间构造为一个逆极限。令 $V_0 = \{0\}$，并令 $V_{n+1} = V_n \times \{0, \ldots, n+1\}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$成立。令 X_n 为一个连通图，其顶点位于 V_n 中，任意两个不同的点 $x, y \in V_n$之间都有边，并满足 $\max_{0 \leq i \leq n} |x(i) - y(i)| \leq 1$。这里，图是指一个度量图，其中所有边都与 $[0, 1]$等距。

对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $f_n : X_{n+1} \to X_n$ 定义如下。如果 $n = 0$，则 f_0 将所有点映射到 V_0中的唯一点。对于 $n \geq 1$，我们在 V_{n+1} 上定义 f_n，使其为到 V_n上的自然投影。在边上，有两种可能性。如果端点的投影不同，则 f_n 将一条边同胚映射到另一条边上。如果端点被映射到同一点，则我们任取一条来自该投影的边，并令 f_n 将点之间的边映射到所选边的部分 $[0, 1/2]$ 上，使得 $t \mapsto (1 - |2t - 1|)/2$ 对 $t \in [0, 1]$成立。现在，令

$$X = \varprojlim(X_n, f_n).$$

考虑以下等价关系 E 在 $\prod_{n \in \mathbb{N}} \{0, \ldots, n\}$上

$$xEy \iff \exists N \in \mathbb{N} \text{ such that } \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n) - y(n)| \leq N.$$

由 [19, 命题 19] 可得 $E \sim_B \mathbb{R}/\ell_\infty$。因此，只需证明 $E \leq_B E_X^{CC}$。令

$$V = \varprojlim(V_n, f_n|_{V_{n+1}}).$$

于是存在一个自然同胚 $V \approx \prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,\dots,n\}$，我们将证明该同胚是从 E到 $E_X^{CC}|_V$ 的博雷尔约化。根据X的构造，若对于 x， $y \in \prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,\dots,n\} \approx V$有 $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n) - y(n)| \leq 1$，则 x 与 y可由一条弧连接。由此可知，若 x，$y \in \prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,\dots,n\} \approx V$使得 $(x,\ y) \in E$，则 $(x,\ y) \in E_X^A$，因而 $(x,\ y) \in E_X^{CC}$也成立。另一方面，若 $(x,\ y) \notin E$，则 X中任何包含点 x，y的连续统都是不可分解的，且直径至少为 $1/2$。此外，根据构造，任何直径足够小的连续统都是弧连通的。因此，若这些点能由直径足够小的连续统链连接，它们就必定能由一条弧连接，但这是不可能的。

□

如前所述，一个自然的问题是，所得的一些结果是否能够推广到高维空间或更一般的空间。我们已经提到，在 $\mathbb{R}^3$ 中存在一些连续统，它们回答了关于高维空间中的弧连接关系的问题。在这里，我们将构造一个波兰空间，同时回答关于所研究的所有连接关系的问题。事实上，这一构造深受 [11]的启发。我们还将证明，即使对于平面中的 F_σ子集，三个连接关系也都不一定是解析集。

例 50。 存在一个波兰空间 $X \subset \mathbb{R}^3$，使得 $E_X^C = E_X^{CC} = E_X^A$，并且所有这些等价关系都是 $X \times X$的解析但非博雷尔子集。

证明。 令 $\mathcal{C}_0$为 $[0,1]$中的康托尔三分集，并令 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$。根据解析集的标准性质，参见 [9, 练习14，3], 我们可以找到一个 G_δ集合 $G \subset \mathcal{C}$，使得 $\pi_1(G)$ 是 $\mathcal{C}_0$的解析但非博雷尔子集。

对于 x，$y \in \mathbb{R}^3$，用 A_x表示连接 x 和 y 的线段，并称$x_0 = (0,\ 0,\ 1)$。令 $Z = \mathcal{C}_0 \times [-1,2] \times \{0\}$ 并定义

$$Y = Z \cup \bigcup_{c\in\mathcal{C}} A_{c,x_0} \text{ and } X = Z \cup \bigcup_{c\in G} A_{c,x_0}\ .$$

显然， X是 Y的 G_δ子集。对于任意 $x \in \mathcal{C}_0 \times \{-1\} \times \{0\}$，根据该构造，我们有 $(x,\ x_0) \in E_X^A$ 当且仅当 $\pi_1(x) \in \pi_1(G)$。因此， $[x_0]_{E_X^A} \cap \mathcal{C}_0 \times \{-1\} \times \{0\}$是一个解析但非博雷尔的集合，所以 E_X^A 是一个非博雷尔解析等价关系。

根据引理 46，我们有 $E_X^A = E_X^{CC}$。由于 Y的任意子连续统，以及由此 X的任意子连续统，都是弧连通的，因此得到 $E_X^C = E_X^A$。 □

例 51。 存在一个 $X \subset \mathbb{R}^2$ 的 F_σ 集，使得 $E_X^A = E_X^{CC} = E_X^C$，并且所有这些等价关系都不是 $X \times X$的解析子集。

证明。 令 $\mathcal{C}$ 为 $[0,1]$中的康托尔三分集。令 $A \subset \mathcal{C}$ 为一个余解析非博雷尔集，因此它不是解析集。由于 A 是余解析的，我们可以找到一个 F_σ子集 $B \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C}$，使得

$$A = \{x \in \mathcal{C} : \forall y \in \mathcal{C}\ \ (x,y) \in B\}$$

根据 [9,第 32.B 节]。现在，令

$$X_0 = \mathcal{C} \times ([-1,2] \setminus \mathcal{C}) \text{ and } X_1 = [0,1] \times \{-1\}.$$

很容易验证， X_0 和 X_1 是平面的 F_σ 子集。定义

$$X = X_0 \cup X_1 \cup B.$$

那么， X 就是平面的一个 F_σ 子集。令 $x = (0, -1)$。容易看出

$$A = [x]_{E_X^A} \cap (\mathcal{C} \times \{2\}).$$

如果 E_X^A 是解析集，那么 $[x]_{E_X^A}$ 也会是解析集，因此 A 也会是解析集。由此可知，E_X^A 不是解析集。根据引理 46，同样可以推出 $E_X^{CC} = E_X^A$。对于 $E_X^A = E_X^C$，只需注意到 X 的任意子连续统都是弧连通的。 □

某些平面 F_σ 集合上的等价关系甚至不是解析集，主要原因在于：研究波兰空间上的等价关系时，我们大量利用了由所有紧集（或所有连续统）构成的波兰空间中的弧或连续统。另一方面，除非改变底层拓扑，否则或许无法在一个 F_σ 子集上建立波兰空间结构；而一旦改变底层拓扑，该子集中的弧和连续统便会瓦解。

尽管在高维空间中，等价关系通常不是博雷尔集，但对于某些特殊类的空间，我们仍能界定连接关系的复杂度。

推论 52. 设 X 是一个树状连续统。那么 $E_X^A \leq_B (\mathbb{R}/\ell_\infty)^{\mathbb{N}}$。

证明。 由于 X 是树状连续统，因此它是遗传单连通的。由引理 46 可得 $E_X^A = E_X^{CC}$。因此，根据定理 42，我们得到 $E_X^A \leq_B (\mathbb{R}/\ell_\infty)^{\mathbb{N}}$。 □

事实证明，对于树状连续统这一类，我们甚至可以证明更多。

命题 53。 存在一个博雷尔等价关系 E，使得对于每个树状连续统 X，都有 $E_X^A \leq_B E$；并且对于某个树状连续统 T，有 $E \leq_B E_T^A$。

证明。 由 [15],，存在一个通用树状连续统 T。我们将证明 E_T^A 是所需的等价关系。设 X 是任意一个树状连续统，且 $\varphi\colon X \to T$ 是一个嵌入。显然，$(x, y) \in E_X^A$ 蕴含 $(\varphi(x)\ \varphi(y)) \in E_T^A$。另一方面，假设 $(\varphi(x)\ \varphi(y)) \in E_T^A$，并设 ψ 是在 T 中连接 $\varphi(x)$ 和 $\varphi(y)$ 的弧。若 ψ 不包含于 $\varphi(X)$，则空间 $\varphi(X) \cup \psi$ 是 T 的一个子连续统，但它不是单连通交，这与每个树状连续统都是遗传单连通的矛盾。第二部分显然成立。 □

6 个问题

在本节中，我们将讨论由本研究引出的一些开放问题。由于我们只能针对局部紧波兰空间证明其中一些结果，一个自然的问题是：这些结果是否在最一般的情形下仍然成立？根据定理 36，我们可以针对连续统连接关系表述如下问题。

问题 1. 对于任意 G_δ 子集 $X \subset \mathbb{R}^2$，E_X^C 是否为博雷尔？

如果这个问题的答案是肯定的，我们还可以进一步追问，连续统连接关系在平面空间上的复杂度是否有界。

问题 2. 对于任意 G_δ 子集 $X \subset \mathbb{R}^2$，E_X^C 是否为超光滑？

关于链式连续统连接关系，也可以提出类似的问题。

问题 3. 对于任意 G_δ 子集 $X \subset \mathbb{R}^2$，E_X^{CC} 是否为博雷尔集？

虽然对这个问题的肯定回答不足以为链连接关系的复杂度提供任何合理的上界，但我们猜想，对这个问题的肯定回答也会使下一个问题得到肯定回答（参见定理 45 后的讨论）。

问题 4. 是否存在这样的情况：$E_X^{CC} \leq_B E_0$ 对于任意 G_δ 子集 $X \subset \mathbb{R}^2$？

人们可以研究某些特殊的空间类别，并探究在特定情形下这些等价关系的确切表现。因此，下面的问题同样值得提出。

问题 5. E_T^A的确切复杂度是多少，其中 T 是一个通用树状连续统？

备注。 我们注意到，通用树状连续统并非唯一；然而，在任意一个通用树状连续统上，弧连接关系的复杂度基本相同。

参考文献

[1] H. Becker. 紧子集$\mathbf{R}^n$的道路连通分支数. 载于*LogicColloquium '95 (Haifa)*，第 11 卷*Lecture Notes Logic*，第 1–16 页. Springer，柏林，1998 年.[2] H. Becker 和 R. Pol. 关于完备空间中道路连通分支的注记. *TopologyAppl.*，114(1):107–114，2001 年.[3] J. Camargo、R. A. López 和 S. Macías. 关于弱连续统链可连与几乎连续统链可连的连续统. *Topology Appl.*，345：论文编号 108833，26 页，2024 年.[4] G. Debs 和 J. Saint Raymond. 波兰空间中连通性的描述复杂度. *Fund. Math.*，249(3):261–286，2020 年.[5] G. Debs 和 J. Saint Raymond. 平面上的弧式连接关系. *Topology Appl.*，353：论文编号 108975，6 页，2024 年.[6] G. Debs 和 J. Saint Raymond. 平面上弧连通紧子集集合的描述复杂度. 2025年.[7] S. Gao. 不变描述集合论，第 293 卷，丛书为纯粹与应用数学（博卡拉顿）. CRC Press，博卡拉顿，佛罗里达州，2009 年.[8] A. Illanes 和 S. B. Nadler, Jr. 超空间，第 216 卷，丛书为纯粹与应用数学专著与教材. Marcel Dekker, Inc.，纽约，1999 年. 基础知识与最新进展.[9] A. S. Kechris. 经典描述集合论，第 156 卷，丛书为数学研究生教材. Springer-Verlag，纽约，1995 年.

[10] A. S. Kechris 和 B. D. Miller。轨道等价专题，收录于数学讲义第 1852 卷。Springer-Verlag，柏林，2004年。

[11] K. Kunen 和 M. Starbird。度量连续统中的弧分支。$Topology\ Appl.$，14(2):167–170，1982年。[12] A. Le Donne。度量连续统中的弧分支。$Topology\ Appl.$，22(1):83–84，1986年。[13] A. Lelek。关于弱链式连续统。$Fund.\ Math.$，51:271–282，1962/63年。[14] A. Marcone。连续统理论中集合与二元关系的复杂度：综述。载于集合论，Trends Math.，第 121–147 页。Birkhäuser，巴塞尔，2006年。[15] M. C. McCord。普适的 $\mathcal{P}$-型紧致空间。$Michigan\ Math.\ J.$，13:71–85，1966年。[16] R. Moore。关于平面中的三叉连续统及平面连续统的连接点。美国国家科学院院刊，14(1):85–88，1928年。[17] S. B. Nadler, Jr. 连续统理论，收录于纯粹与应用数学专著与教材第 158 卷。Marcel Dekker, Inc.，纽约，1992年。入门读物。[18] P. Pellicer-Covarrubias。无三叉连续统的超空间 $C(p,\ X)$。$HoustonJ.\ Math.$，31(2):403–426，2005年。[19] C. Rosendal。博雷尔等价关系与拟序的共尾族。$J.Symbolic\ Logic$，70(4):1325–1340，2005年。[20] S. Solecki。不可分解连续统的组成部分空间。$Adv.Math.$，166(2):149–192，2002年。[21] R. H. Sorgenfrey。关于三叉连续统。$Amer.\ J.\ Math.$，66:439–460，1944年。[22] Y. Uyar。实平面上的一种非光滑道路连通关系。*arXiv* 预印本 *arXiv:2501.07916*，2025年。[23] W. T. Watkins。具有开粘合映射的某些逆极限空间的同胚分类。$Pacific\ J.\ Math.$，103(2):589–601，1982年。[24]F. Wu。基本群与描述集合论。*arXiv* 预印本 *arXiv:2512.02355*，2025年。