arXiv:2601.00602v1 [math.CO] 2 Jan 2026

关于 $\triangle$-自由图中长诱导彩虹路径的一个猜想

N.R. Aravind、Shiwali Gupta 和 Rogers Mathew

计算机科学与工程系，印度理工学院海得拉巴分校。{aravind, cs21resch11002, rogers}@iith.ac.in

关键词： 无三角形图、诱导路径、彩虹路径、多彩路径、色数、正常着色、Gallai–Roy 定理、Gallai–Vitaver–Roy 定理。

摘要

给定一个色数为 k 的无三角形图 G，以及 G 的一个正常顶点着色 ϕ，人们猜想，在 ϕ 条件下，G 中包含一条有 k 个顶点的诱导彩虹路径。Scott 和 Seymour 证明了存在一条有 $(\log\log\log k)^{\frac{1}{3}-o(1)}$ 个顶点的诱导彩虹路径。我们将此结果改进为 $(\log k)^{\frac{1}{2}-o(1)}$ 个顶点。此外，我们证明存在一条可见 $\frac{k}{2}$ 种颜色的诱导路径。

1 引言

本文用 $[n]$ 表示 $\{1,2,\ldots,n\}$，其中 n 是正整数。本文中所有对数均以 2 为底。全文中我们考虑有限简单图。给定图 G，我们用 $V(G)$ 表示其顶点集，用 $E(G)$ 表示其边集。对于顶点 $v \in V(G)$，我们用 $N_G(v)$ 表示它在 G 中的邻域。使用 k 种颜色对 G 进行正常顶点着色（或称为 G 的 k 着色），是指一个函数 $\phi\colon V(G) \longrightarrow [k]$，满足对于每条边 $uv \in E(G)$，$\phi(u) \neq \phi(v)$。使得存在 k 着色的 G 的最小正整数 k，称为 G 的色数，记作 $\chi(G)$。我们用“有色图”一词表示一个元组 (G,ϕ)，其中 G 是所考虑的图，ϕ 是 G 的正常着色。

给定一个有色图 $(G,\ \phi)$，若路径 P 属于 G，且在 ϕ 下 P 的所有顶点颜色各不相同，则称其为彩虹路径。若路径 P 的顶点所呈现的颜色种类数至少为 k，则称其为 k-彩色路径。等价地，P 含有颜色各不相同的 k 个顶点，但与 k 相比，P 中的顶点数可以大得多。若路径 P 属于 G，且其中任意两个不连续顶点在 G 中均不相邻，则称其为诱导路径。路径的阶是其中顶点的数量。

对于无三角形图 G，Gyárfás [5] 通过对 $\chi(G)$ 进行归纳，证明了 G 含有一条具有 $\chi(G)$ 个顶点的诱导路径。Gallai–Roy 定理 [3, 8]蕴含，每个定向图都包含一条阶数等于其色数的有向路径：将每条边定向为指向颜色较大的端点后，每条有向路径都成为彩虹路径，因此存在一条阶数等于其色数的彩虹路径。总之，给定一个彩色无三角形图 (G, ϕ)，(i) G 含有一条阶数为 $\chi(G)$ 的诱导路径；(ii) G 含有一条阶数为 $\chi(G)$ 的彩虹路径。本文第一作者提出了以下关于诱导彩虹路径的猜想（参见 [1]）。

猜想 1. *[1]* 每个彩色无三角形图 (G, ϕ) 都包含一条由 $\chi(G)$ 个顶点构成的诱导彩虹路径。

尽管这一猜想在一般情形下仍未解决，但已有若干部分结果。Babu 等人 [1] 研究了该猜想的一个较弱版本，并证明当图的围长等于其色数时，该结论成立。图的围长是其最短圈的长度；若图中不存在圈，则围长为无穷大。随后，Gyárfás 和 Sárközy [6] 研究了围长至少为五的有色图 (G, ϕ) 上的猜想。他们证明，(G, ϕ) 包含一条由 $(\log \chi(G))^{1-o(1)}$ 个顶点构成的诱导彩虹路径。最近，Basavaraju 等人 [2] 改进了这一关于围长至少为 5 的图的结果，他们证明 (G, ϕ) 包含一条由 $\Omega(\sqrt{\chi(G)})$ 个顶点构成的诱导彩虹路径。上述两项结果的证明都关键地利用了 G 是 C_4-自由这一事实，因此无法推广到无三角形图。Scott 和 Seymour [9]研究了不对围长作任何限制的完整一般情形下的猜想。他们证明，每个彩色无三角形图 (G, ϕ) 都包含一条由 $(\log \log \log \chi(G))^{\frac{1}{3}-o(1)}$ 个顶点构成的诱导彩虹路径。

在本文中，我们改进了 Scott 和 Seymour 在 [9] 中给出的界。我们证明，每个彩色无三角形图 (G, ϕ) 都包含一条具有 $(\log \chi(G))^{\frac{1}{2}-o(1)}$ 个顶点的诱导彩虹路径。此外，如果将彩虹路径的要求放宽为多彩路径，那么我们证明，彩色无三角形图 (G, ϕ) 包含一条诱导的 $\chi_{(G)\ 2}$ -多彩路径。

2 我们的结果

我们首先在本节中定义证明所需的一些定义和记号。以下定义来自 [9]。图 G 的一个分层 是序列 $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$，其中各项是 $V(G)$ 的两两不相交子集，并满足 $W_1 \uplus W_2 \uplus \cdots \uplus W_n = V(G)$。如果对于每个 $i \in [n]$ 都有 $\chi(G[W_i]) \leq k$，则 $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ 称为 k-可着色分层。给定一个分层 $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ 以及顶点 $u, v \in V(G)$，如果 $u \in W_i$、$v \in W_j$ 和 $i > j$，则称 u 比 v 更晚。

给定一个无向图 G（分别地，定向图 $\overrightarrow{G}$）以及一个子集 $S \subseteq V(G)$（分别地，$V(\overrightarrow{G})$），我们用 $G[S]$（分别地，$\overrightarrow{G}[S]$）表示由 S 诱导的 G（分别地，$\overrightarrow{G}$）的子图。我们用 $P = v_1 - v_2 - \cdots - v_k$ 表示一个阶为 k 的路径，并用 $\overrightarrow{P} = v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k$ 表示一个阶为 k 的有向路径。

设 $P = v_1\text{-}\ v_2\text{-}\ \cdots\text{-}\ v_k$ 是一条有 k 个顶点的路径。对于任意 $1 \le i \le k$，我们用 P_{v_i} 表示路径 $v_1\text{-}\ v_2\text{-}\ \cdots\text{-}\ v_i$。设 $P' = v_1\text{-}\ v_2\text{-}\ \cdots\text{-}\ v_\ell$ 和 $P'' = w_1\text{-}\ w_2\text{-}\ \cdots\text{-}\ w_r$ 是图 G 中的两条路径。假设 $v_\ell w_1 \in E(G)$。那么，我们用 $P'\text{-}\ P''$ 表示路径 $v_1\text{-}\ v_2\text{-}\ \cdots\text{-}\ v_\ell\text{-}\ w_1\text{-}\ w_2\text{-}\ \cdots\text{-}\ w_r$。

下面陈述的引理是对 [9]中命题 2.2的重新表述。主要区别在于参数 r的选择。在 [9], 中， r 的取值由 Galvin、Rival 和 Sands 定理 [4], 推出，其中 $r = 2^{2^{2^{s^3}}}$。相比之下，我们使用 $r = 4 \cdot 2^{2(s-1)\log(s-1)}$，其值显著更小。这一改进为无三角形图中最长诱导彩虹路径的阶提供了更好的界。

引理 1。 设 $s \ge 3$ 是一个整数，且 $r = 4 \cdot 2^{2(s-1)\log(s-1)}$。令$(G, \phi)$ 为一个具有 $\chi(G) \ge k \cdot r$ 的有色图，其中 k 是某个正整数。令$(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ 为 G的一个k-可染分层。那么，以下陈述中必有一项成立：

(i) 在 ϕ下， G 包含一条以 s 个顶点为端点的诱导彩虹路径。***(ii)*** $\exists i \in [n]$ 以及一个顶点$v \in W_i$，还有一个由 s 个顶点组成的集合；在 ϕ下，这些顶点的颜色两两不同，均位于 v之后，且都与 v相邻。

证明。由于 $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ 是 G 的一个可 k 着色的分层，因此每个 W_i, $i \in [n]$ 都存在一种使用 k 种颜色的正常着色，因而可以划分为 k 个部分（其中一些部分可能为空集），且每个部分都是 G 中的一个独立集。令 $W_{i_1}, W_{i_2}, \ldots, W_{i_k}$ 表示 W_i, $i \in [n]$ 的 k 个部分。现在，我们将 $V(G)$ 划分为 k 个部分，记作 $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_k)$，其中每个 $Z_j := W_{1_j} \uplus W_{2_j} \uplus \cdots \uplus W_{n_j}$。由于 $\chi(G) \ge k \cdot r$，存在某个 Z_j, $1 \le j \le k$，使得 $\chi(G[Z_j]) \ge r$。令 G_j 表示 $G[Z_j]$。现在，将 G_j 的每条边都从颜色较低的顶点定向到颜色较高的顶点。所得定向图记为 $\overrightarrow{G_j}$。以下观察由 $\overrightarrow{G_j}$ 的定义直接得出。

观察 1. $\overrightarrow{G_j}$ 是一个有向无环图。

观察 2. $\overrightarrow{G_j}$ 中的每条有向路径都是一条彩虹路径。

我们在 $V(\overrightarrow{G_j}) = W_{1_j} \uplus W_{2_j} \uplus \cdots \uplus W_{n_j}$上定义一个排序 π，使得 W_{1_j}的所有顶点按从左到右的顺序最先出现（并列时任意打破平局），随后是W_{2_j}的所有顶点，依此类推。我们将定向图 $\overrightarrow{G_j}$拆分为两个子图 $\overrightarrow{G_j^1}$和 $\overrightarrow{G_j^2}$，二者均定义在完整的顶点集 $V(\overrightarrow{G_j})$ 上。子图 $\overrightarrow{G_j^1}$的边集由 $\overrightarrow{G_j}$的所有正向边（即从左向右的边）组成；子图 $\overrightarrow{G_j^2}$的边集由 $\overrightarrow{G_j}$的所有反向边（即从右向左的边）组成，其中左右方向均相对于 π而言。由观察 1 和观察 2，我们得到如下结论。

观察 3。 在 $\overrightarrow{G_j^i}$、 $i \in \{1, 2\}$ 中，有向诱导路径也是 $\overrightarrow{G_j}$ 中的有向诱导彩虹路径。此外，它在 G_j 中也是诱导彩虹路径，在 G 中亦然。

根据 Gallai–Vitaver–Roy 定理（ [7], 9 9 $r \le \chi = \chi \le$例 .），$\chi\ \overrightarrow{G_j^1} \cdot \chi\ \overrightarrow{G_j^2}$ $\chi\ \overrightarrow{G_j^i} \ge \sqrt{r}$ $i \in \{1, 2\}$ $\overrightarrow{P^1} = x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_{\ell_1}$ 我们有（$\overrightarrow{G_j}$） （$\overrightarrow{G_j^1} \cup \overrightarrow{G_j^2}$） （） （）。因此，对于某个，有（）。令：

并且 $\overrightarrow{P^2} := y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_{\ell_2}$ 分别是 $\overrightarrow{G_j^1}$ 和 $\overrightarrow{G_j^2}$ 中的最长有向路径。根据 Gallai–Roy 定理 [3, 8] 和观察 2，我们有

观察 4. $\overrightarrow{P^1}$ 和 $\overrightarrow{P^2}$ 都是带有 $\ell_1 \geq \sqrt{r}$ 或 $\ell_2 \geq \sqrt{r}$ 的彩虹路径。

根据我们从 $\overrightarrow{G_j}$ 构造 $\overrightarrow{G_j^1}$ 和 $\overrightarrow{G_j^2}$ 的方式，我们得到以下观察。

观察 5. ***(i)*** 设 $1 \leq a < b \leq \ell_1$。那么，相对于分层 $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$，x_b 晚于 x_a。

(ii) 设 $1 \leq a < b \leq \ell_2$。那么，相对于分层 $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$，y_a 晚于 y_b。

如果引理的陈述 (ii) 成立，那么我们的证明就完成了。假设陈述 (ii) 不成立。那么由观察 4 和观察 5，可得以下结论。下文中，令 $X := V(\overrightarrow{P^1}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{\ell_1}\}$ 且 $Y := V(\overrightarrow{P^2}) = \{y_1, y_2, \ldots, y_{\ell_2}\}$。

观察 6。 ***(i)*** $\overrightarrow{P^1}$ 中的每个顶点 x_i 在 $\overrightarrow{G_j^1}[X]$ 中至多有 $s-1$ 个出邻居。***(ii)*** $\overrightarrow{P^2}$ 中的每个顶点 y_i 在 $\overrightarrow{G_j^2}[Y]$ 中至多有 $s-1$ 个入邻居。

假设 $\ell_1 \geq \sqrt{r}$。考虑定向图 $\overrightarrow{G_j^1}[X]$。在 $\overrightarrow{G_j^1}[X]$ 上执行广度优先搜索（BFS），以 x_1 为起始顶点，并且遍历时仅使用出边。由此得到的广度优先搜索树以 x_1 为根；根据观察 6(i)，树中的每个顶点 x_i 至多有 $s-1$ 个子节点。若 d 表示这棵树在 $\sqrt{r}$ 个顶点上的深度，则 $\sqrt{r} \leq (s-1)^0 + (s-1)^1 + \cdots + (s-1)^d \leq 2(s-1)^d$（因为 $s \geq 3$）。因此，$d \geq \log_{(s-1)}\left(\frac{\sqrt{r}}{2}\right) = \log_{(s-1)}\left(\frac{2^{(s-1)}\log_{(s-1)}}{2}\right) = s-1$。由此，广度优先搜索树的深度至少为 $s-1$，因此 $\overrightarrow{G_j^1}[X]$ 有一条包含 s 个顶点的有向诱导路径。容易看出，这样一条路径也是 $\overrightarrow{G_j^1}$ 中的有向诱导路径。利用观察 3，我们可以得出结论：这样一条路径是 G 中的诱导彩虹路径。

假设 $\ell_2 \geq \sqrt{r}$。考虑定向图 $\overrightarrow{G_j^2}[Y]$。对 $G_j^2[Y]$，以 y_{ℓ_2} 为起始顶点，并仅使用入边进行遍历，执行广度优先搜索。证明的其余部分从略，因为论证与上文解释的情形 $\ell_1 \geq \sqrt{r}$ 类似。 □

令 r 如引理 1 的陈述中所定义。令 $w_s = 0$，并且对于 $j = s-1, \ldots, 1$，令 $w_j = w_{j+1}r + 1$。令 c 定义为

$$c = (w_1 + 1)r \tag{1}$$

下述引理是对 [9] 中陈述 2.3 的重新表述。

引理 2。 *[9]* 令 s 为任意正整数。令 $r = 4 \cdot 2^{2(s-1)\log(s-1)}$ 如引理 *1* 中所定义。令 c 如公式 *1* 中所定义。那么，每个含有 $\chi(G) > c$ 的彩色无三角形图 (G, ϕ) 都包含一条由 s 个顶点构成的诱导彩虹路径。

备注： 引理 *2* 的表述可以推广到团数有界的图，如 *Scott* 和 *Seymour* 在 *[9]* 中的陈述 *2.3* 所示。

由引理 1 和引理 2，我们得到以下定理。

定理 1. 每个彩色无三角形图(G,ϕ) 都包含一条具有$(\log \chi(G))^{\frac{1}{2}-o(1)}$个顶点的诱导彩虹路径，条件是 ϕ。

现在，我们放宽要求，不再要求得到彩虹路径，而只要求得到多彩路径。考虑一个彩色无三角形图（G，ϕ）。最大的 k 是多少，使得 G 包含一条 k-多彩路径? 如果 ϕ 是一种仅使用 $\chi(G)$ 种颜色的着色，那么 $k \leq \chi(G)$。因此，我们所能期望的最大 k 是 $k = \chi(G)$。

定理 2. 设 (G,ϕ) 是一个彩色无三角形图。在 ϕ 条件下，对于每个 $v \in V(G)$，都存在一条从 v 出发的诱导 $\frac{\chi(G)}{2}$ -多彩路径。

证明。 我们将对 $\chi(G)$ 使用归纳法来证明此结论。容易看出，当 $\chi(G) = 1$ 时，该结论在基例中成立。假设对于 $\chi(G) < k$，其中 $k \geq 2$，该结论成立。设 G 是一个满足 $\chi(G) = k$ 且使该结论不成立的极小图。取 v 中一个满足 $\phi(v) = c$ 的顶点 G 。归纳步骤中，我们首先从 G 中移除所有着色为“c”的顶点，包括顶点 v。令所得图为 G'; 注意到 $\chi(G') = k - 1$。因此，G' 中至少存在一个色数为 $k-1$ 的连通分量。

现在考虑 G' 的任意一个这样的连通分量 C_1 。设 P 是 G 中从 v 到 C_1 的一条最短路径，且满足 $|V(P) \cap V(C_1)| = 1$。 P 的第一个顶点是 v，P 的第二个顶点是 v 在 P 中的邻点，依此类推。设 P 的倒数第二个（或第二末尾的）顶点为 w 。注意，如果 v 在 G 中有一个邻点属于 $V(C_1)$，那么 w 不属于 C_1 和 $w = v$。设 $N_G(w) \cap V(C_1) = \{w_1, w_2, \ldots, w_\ell\}$。由于 G 是无三角形的， $\{w_1, w_2, \ldots, w_\ell\}$ 构成一个独立集。此外，由于 P 是从 w 到 C_1 的一条最短路径， w_i、 $1 \leq i \leq \ell$ 在 P 中唯一的邻点是顶点 w。设 G'' 是从 C_1 中删去 w_1、w_2、.....、w_ℓ 后得到的子图。由于 C_1 的色数为 $k-1$, G'' 中存在一个连通分量，记为 C_2，其色数至少为 $k-2$。

设 $w_i \in \{w_1, w_2, \ldots, w_\ell\}$ 是一个顶点，它在连通分量C_1中与 $V(C_2)$相邻。设 G''' 是由 $V(C_2) \cup \{w_i\}$诱导的 C_1的连通子图。我们有 $\chi(G''') \geq k-2$，根据归纳假设，在着色 ϕ下， G''' 中存在一条以 w_i为起点的诱导$\frac{k-2}{2}$-多彩路径 Q。

根据我们的构造，路径 Q 不含任何颜色为 ‘c’ 的顶点。现在考虑路径 $R = P_w$ - Q。该路径定义良好，因为 P_w 是 G 中连接 v 和 w的路径， Q 是 G 中以顶点 w_i 为起点的路径， $ww_i \in E(G)$，且$V(P_w) \cap V(Q) = \emptyset$。由于路径 R 中包含顶点 v，且该顶点可见颜色 ‘c’，因此路径 R可见 $1 + \frac{k-2}{2} = \frac{k}{2}$ 种颜色。

接下来需要证明的是 R 是一条诱导路径。根据定义，路径 P_w和 Q 都是诱导路径。因此，只需证明 P_w 中的顶点与 Q中的顶点之间没有边，除边 ww_i外。由于 P 是从 v 到 C_1的一条最短路径，除顶点 w外， P_w中的任何顶点在 Q中都没有邻点；否则，这样的一条边就会产生一条从 v 到 C_1的更短路径，这与 P的选取相矛盾。根据我们对 Q的构造， w 在 Q 中的唯一邻点是顶点 w_i。因此，将 P_w与 Q 连接起来便得到一条诱导路径 R。

□

参考文献

[1] Jasine Babu、Manu Basavaraju、L Sunil Chandran 和 Mathew C Francis。无三角形图中的诱导彩色路径。离散应用数学，255：109–116，2019年。[2] Manu Basavaraju、L Sunil Chandran、Mathew C Francis 和 Karthik Murali。Gyárfás–Sumner 猜想的变体：定向树与彩虹路径。图论杂志，108(1)：136–161，2025年。[3] Tibor Gallai。关于有向路径和回路。图论，38：2054，1968年。[4] Fred Galvin、Ivan Rival 和 Bill Sands。关于可迹图的 Ramsey 型定理。组合理论杂志 *B* 辑，33(1)：7–16，1982年。[5] András Gyárfás。完美图领域中的问题。数学应用，19(3-4)：413–441，1987年。[6] Andras Gyarfas 和 Gábor Sárközy。大色数图中的诱导彩色树和路径。电子组合学杂志，23(4)：P4，2016年。[7] László Lovász。组合问题与习题，第361卷。美国数学学会，2007年。[8] Bernard Roy。图的色数与最长路径。法国计算机科学与运筹学杂志，1(5)：129–132，1967年。[9] Alex Scott 和 Paul D. Seymour。大色数图的诱导子图 IX：彩虹路径。电子组合学杂志，24(2)：P2.53，2017年。