arXiv:2601.00620v1 [math.CO] 2 Jan 2026

利用控制和顶点对参数对重构猜想进行约化

J. Antony Aravind和 S. Monikandan 数学系 马诺尼亚姆·孙达拉纳尔大学 印度泰米尔纳德邦蒂鲁内尔维利
antonyaravind123@gmail.com,
monikandans@msuniv.ac.in

摘要

如果一个图可由其所有删去一个顶点的子图（称为 G的牌组）唯一确定至同构，则称该图可重构。重构猜想（RC）断言，每个至少有三个顶点的有限简单图都可重构。本文证明，支配数为 $\gamma(G) = 2$ 的图类可由牌组 $D(G)$识别。我们还建立了 RC 的一个新约化：当且仅当所有满足$\gamma(G) = 2$ 或 $\mathrm{diam}(G) = \mathrm{diam}(\overline{G}) = 2$ 的 2-连通图 G 均可重构时，RC 成立。为帮助重构，我们引入两个新参数： $dv(G, k_1, k_2, k_3)$，用于统计图 G 中满足以下条件的非邻接顶点对数量：有 k_1 个公共邻点、 k_2 个仅与第一个顶点相邻的邻点，以及 k_3 个仅与第二个顶点相邻的邻点；另一个参数 $dav(G, k_1, k_2, k_3)$则以类似方式定义，用于相邻顶点对。对于至少有 12 个顶点且$G(\geq 3)$的连通图，我们证明这些参数可通过递归方程和归纳法从 $D(G)$重构。最后，我们证明，在某些条件下，直径为二的 k-测地图可重构；这些条件要求顶点度等于由这些参数导出的特定子集的大小，且满足 $\gamma(G)\ \gamma(\overline{G})\ \geq 3$ 。

Keyw关键词： 支配数； k-测地图；可识别；可重构。

学科分类：05C60, 05C75。

1 引言

本文研究有限简单无向图。对于任意图 G，我们将其顶点集记为 $V(G)$，将其边集记为 $E(G)$。本文未明确给出的术语均遵循 [10] 中所述的标准约定。顶点 v 在 G中的 $deg_G v$ （或简称为 $deg\ v$）的度表示与其关联的边数v. 从顶点 u 到顶点 v 的路径称为 $u,\ v$-路径；若存在这样的路径，则距离 $d_G(u,\ v)$，或简称为 $d(u,\ v)$，是最短 $u,\ v$-路径的长度。 G的直径记为 $\mathrm{diam}(G)$，是 $V(G)$ 中任意两个顶点之间的最大距离。

本研究由原子能部下属印度孟买 NBHM 的一项重大研究项目资助。批准令编号：02011/14/2022/NBHM(R.P)/ R&D II/10491。

G的连通度记为 $\kappa(G)$，是指移除最少数量的顶点后使 G 不连通或只剩下一个顶点。邻域 $N_G(v)$，或简称为 $N(v)$，由所有与 v相邻的顶点组成， $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. 对于子集 $S \subseteq V(G)$，由 S 诱导的子图记为 $G[S]$. 。记号 $[n]$表示集合 $\{1, 2, ..., n\}$; 如果一个集合 A 可以与某个 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$建立双射，则称其为有限集，其大小为 $[n]$ 。这个 n 就是 A的大小，记为 $|A|$. 。在图 G中，集合 $S \subseteq V(G)$是支配集，当且仅当 S 之外的每个顶点都至少与 S中的一个顶点相邻；支配数 $\gamma(G)$是此类集合中最小集合的大小。

删点子图 （或卡片） $G - v$ 是从 G中删除一个顶点 v 及其所有关联边后形成的无标号子图。 G 的牌组 由所有此类卡片构成，记作 $\mathscr{D}(G)$。 如果图 H 与 G. 具有相同的牌组，那么图 H 就是 G 的重构 。如果所有具有相同牌组的图都与该图同构，则称该图可重构 。若图族 $\mathcal{F}$ 中某个图的所有重构仍属于 $\mathcal{F}$ ，则称图族 $\mathcal{F}$ 可识别 ；若该图的所有属于 $\mathcal{F}$ 的重构都与其同构，则称图族 $\mathcal{F}$ 弱可重构的 。若图族 $\mathcal{F}$ 既可识别又弱可重构，则称其可重构，这意味着 $\mathcal{F}$ 中的每个图都可重构。图的参数 p 若在某个图的所有重构中取值相同，则称该参数可重构。重构猜想 （RC）断言，所有至少有三个顶点的图都是可重构的。关于这一问题的全面综述，参见 [1], [2], [5] 和 [6]中的调查文章。

1988 年，Yang Yongzhi [11] 证明，重构猜想成立当且仅当每个二连通图都可重构。有向图重构猜想（DRC）被 Stockmeyer[9], 证伪，这意味着重构猜想的证明必须依赖无向图特有、无法推广到有向图的性质。其中一种性质与图的补图中的距离有关，并得到以下两个已确立结果的支持：图 G 可重构当且仅当其补图 G 可重构；若 diam(G) > 3, 则 diam(G) < 3.“。基于这些结果，Gupta 等人 [4] 于 2003 年证明，重构猜想成立当且仅当所有满足 diam(G) $= 2$ 或同时满足 diam(G) $= 3$ 和 diam(G) $= 3$ 的连通图 G 均可重构。Ramachandran 和 Monikandan[8] 进一步细化了这一结果，证明重构猜想成立当且仅当所有满足 diam(G) $= 2$ 或 diam(G) $=$ diam(G) $= 3$ 的 2-连通图G 均可重构。Devi Priya 和 Monikandan [3] 还给出了一项进一步的约简，证明所有满足 diam(G) $= 2$ 或 diam(G) =diam(G) $= 3$ 的距离遗传二连通图 G 均可重构。

Bondy 和 Hemminger [1] 提出了两种证明重构猜想的策略：重构一类类图，最终涵盖所有图；或重构图参数。沿着后一种思路，Gupta 等人[4] 定义了两个参数 pv(G, i)（针对 $i \in [0, n-2]$），用于统计 G 中恰有 i 条长度为二的路径连接的不相邻顶点对的数量；而 pav(G, i)（针对 $i \in [0, n-2]$ ）则统计相邻顶点对的相同数量。他们证明了以下定理。

定理 1。 [4] 参数 pv(G, i) 和 pav(G, i)$\forall i \in [0, n-2]$ 是可重构的。

由于已知顶点数不超过十一的图均可重构 *[7]*, ，本文聚焦于顶点数至少为十二的图。本文引入两个新参数， $dv(G, k_1, k_2, k_3)$ 和 $dav(G, k_1, k_2, k_3)$，其中 $dv(G, k_1, k_2, k_3)$

统计图 G 中不相邻顶点 x 和 y 组成的顶点对，其中有 k_1 个顶点同时与二者相邻x 和 y，有 k_2 个顶点仅与 x相邻，还有 k_3 个顶点仅与 y. 相邻。但$dav(G, k_1, k_2, k_3)$ 统计图 G 中相邻顶点 x 和 y 组成的顶点对，其中有 k_1 个顶点同时与 x 和 y相邻，有k_2 个顶点仅与 x （y is $excluded$ ）相邻，还有 k_3个顶点仅与 y （ x is $excluded$ ）相邻。第2节中，我们基于支配数和直径对重构猜想（RC）进行了简化。要从牌组 $\mathscr{D}(G)$中确定顶点对（相邻或不相邻）的公共邻点数和度，支配数 $\gamma(G)$ 必须大于二：若 $\gamma(G) = 1$，则 G 有一个度为$_G\, x = n - 1$的全邻顶点 x，因而可重构；若 $\gamma(G) = 2$，则两个顶点 u、v（相邻与否皆可）支配 $V(G)\backslash\{u, v\}$，但无法从 $\mathscr{D}(G)$中推断它们的度，因为没有任何一张卡片同时包含这两个顶点以及 G的其余部分。因此，在第3节和第4节中，我们刻画满足$\gamma(G) = 2$ 的图的结构，并证明此类图可由 $\mathscr{D}(G)$识别。对于满足 $\gamma(G) > 2$ 的图，第5节运用新参数 $dv(G, k_1, k_2, k_3)$和 $dav(G, k_1, k_2, k_3)$统计不相邻和相邻顶点对（并纳入度），并证明这些参数可从 $\mathscr{D}(G)$重构。最后，在第6节中，我们在特定参数条件下重构 k-测地图G，其满足 $diam(G) = diam(\overline{G}) = 2$。

以下两个定理在图重构领域广为人知。

定理 2. G 可重构，当且仅当 $\overline{G}$ 可重构。

定理 3. 非连通图可重构。

引理 4. 若 G 是连通图且 $diam(\overline{G}) \geq 3$，则 $\gamma(G) = 2$.

证明. 若 $\mathrm{diam}(\overline{G}) \geq 3$，则 G 中存在不相邻顶点 u 和 v，且 $d_G(u, v) \geq 3$。因此，u 和 v 在 G. 中没有公共邻点。因此，在 G，顶点 u和 v 相邻，且每个其他顶点至少与其中一个相邻。因此 $\{u, v\}$ 是G 的支配集，所以 $\gamma(G) \leq 2$.。由于 G 不含孤立顶点，G 中不存在与所有其他顶点相邻的顶点。因此 $\gamma(G) \geq 2$，所以$\gamma(G) = 2$.

□

2 重构猜想的一个简化

本节聚焦于由支配数（$\gamma(G)$）和直径（$\mathrm{diam}(G)$）定义的特定连通图类，旨在缩小猜想的适用范围。

定理 5. 所有连通图均可重构，当且仅当所有满足 $\gamma(G) = 2$ 或 $diam(G) = diam(\overline{G}) = 2$ 的连通图G 均可重构。

证明。 必要性显然。为证明充分性，假设所有满足以下任一条件的连通图均可重构：G 满足 $\gamma(G) = 2$，或 "$\mathrm{diam}(G) = \mathrm{diam}(\overline{G}) = 2, \gamma(G) \geq 3$ and $\gamma(\overline{G}) \geq 3$"。由于直径为 1 或 2 的图均可识别，我们根据 $\mathrm{diam}(G)$. 分情况讨论。

若 $\mathrm{diam}(\overline{G}) = 1$，$\overline{G}$ 是一个完全图，因此它可重构。假设直径$(\overline{G}) = 2$. 现在，如果直径$(G) = 1$，那么 $G \cong K_n$，因此 G 是可重构的。如果直径$(G) = 2$，那么根据我们的假设，G 是可重构的。如果直径$(G) \geq 3$，那么

$\gamma(\overline{G}) = 2$，根据引理 4，且根据我们的假设，G 是可重构的。因此，假设直径(G) ≥ 3. 现在，根据引理 4，$\gamma(G) = 2$，因此根据我们的假设，G 是可重构的。

□

定理 6. *(Yongzhi[11])* 每个连通图都可重构，当且仅当每个2-连通图都可重构。

定理 7. 重构猜想成立，当且仅当所有满足 G *such that* $\gamma(G) = 2$ *or* 直径$(G) =$ 直径$(G) = 2$ 的2-连通图都可重构。

证明。 这可由先前的结果推出：

- **非连通图**：定理 3 确认所有非连通图都可重构。

- **连通图**：定理 5 指出，所有连通图都可重构，当且仅当指定的类别 $\gamma(G) = 2$ or 直径$(G) =$ 直径$(G) = 2$都可重构。

- **重构猜想的关联：** 重构猜想适用于所有至少有三个顶点的图。由于图要么是连通的，要么是非连通的，而非连通的情形已解决，因此重构猜想 是否成立取决于连通图。定理 5 将其归结为指定的类别，因此重构猜想成立，当且仅当这些类别都可重构。

□

3 满足 G with $\gamma(G) = 2$ 的图

对于满足 G with $\gamma(G) = 2$, 的图，有两个顶点 u 和 v 构成一个支配集。这两个顶点在图 G – 中可能相邻，也可能不相邻，它们之间的邻接关系并未确定。图 G, 的顶点集记为 $V(G)$, ，划分为以下四个子集：

- $\{u, v\}$：两个支配顶点
- X_u：仅与 u 相邻而不与 v. 相邻的顶点集
- X_v：仅与 v 相邻而不与 u. 相邻的顶点集
- X_{uv}：同时与 u 和 v. 相邻的顶点集

表述如下： $V(G) = \{u, v\} \cup X_u \cup X_v \cup X_{uv}$.
这一划分意味着， G 中的每个顶点要么是 u, v 要么属于 X_u、X_v 或 X_{uv}，具体取决于它与 u 和 v. 的邻接关系。由于 $\{u, v\}$ 是一个支配集， $V(G) - \{u, v\}$ 中的每个顶点都必须与 u 或 v 至少一个相邻。我们来验证这一点：

- X_u 中的顶点与 u 相邻（且不与 v相邻），因此它们受 u.支配
- X_v 中的顶点与 v 相邻（而不与 u相邻），因此它们受到 v支配 .

- X_{uv} 中的顶点同时与 u 和 v相邻，因此它们同时受到二者支配 .

这证实了 $\{u,v\}$ 之外的每个顶点都与 u 或 v 中至少一个相邻，满足 $\gamma(G) = 2$。顶点 u 和 v 本身就在支配集中，因此不需要由其他顶点支配。因此，无论 u 和 v 在 G. 中是否相邻，支配条件都成立

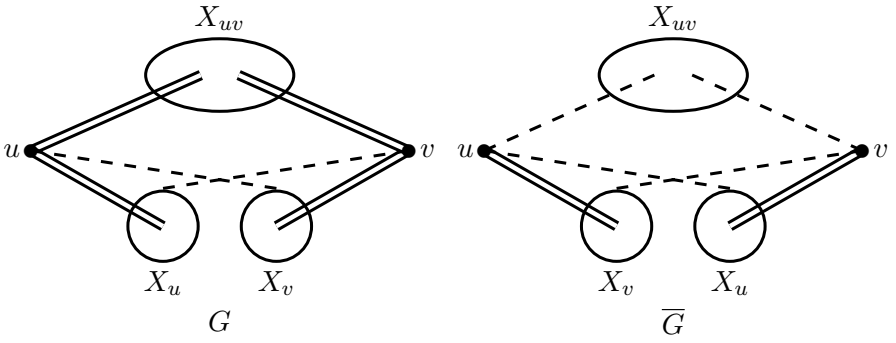

图1：图 $G \in \mathscr{H}$ 及其补图的结构

请注意，在上述图示中， u 和 v 表示单个顶点，而 X_u, X_v 和 X_{uv} 表示顶点子集。双线表示相连的实体之间存在所有可能的边，单条虚线表示不存在任何边，而两个顶点子集之间或两个顶点之间没有连线，则意味着它们之间的边是可选的 – 它们可能存在，也可能不存在。

4 支配数为二的图可识别

由于具有全邻顶点的图以及阶不超过十一的图均可重构，我们只考虑阶至少为十二且支配数至少为二的图。我们定义 $\mathscr{H} = \{G|\gamma(G) = 2\}$，即支配数为 2 的图族，并根据直径将其划分为三个互不相交的子族:

$\mathscr{H}_1 = \{G|\gamma(G) = 2 \text{ 和 } diam(G) = \overline{1}\}$.
$\mathscr{H}_2 = \{G|\gamma(G) = 2 \text{ 和 } diam(G) = \overline{2}\}$.
$\mathscr{H}_3 = \{G|\gamma(G) = 2 \text{ 和 } diam(G) \geq \overline{3}\}$.

引理8。 $\mathscr{H}_1 = \emptyset$.

证明。 假设存在一个图 $G \in \mathscr{H}_1$. 那么 diam$(G) = 1$, 即 G 是一个完全图。因此，对于某个 $n.$, $G \cong K_n$ 但条件 $\gamma(G) = 2$ 迫使 $\overline{n = 2}$, 而这一情况我们此前已经排除，不予考虑。因此， $\mathscr{H}_1 = \emptyset$. □

引理 9。 对于一个图 G , 其直径为 $\overline{diam(G) = 2}$, $\gamma(G) = 2$ 当且仅当 $\overline{pav(G,\ 0)} > 0$.

证明。必要性：假设 $\gamma(G) = 2$. 令 $\{u,v\}$ 是 G 的支配集。那么$\overline{uv \notin E(G)}$, 否则 $d_G(u,\ v) \geq 3$, 这与图 G具有 diam$(G) = 2$.相矛盾

现在，在 $\overline{G}$ 中，顶点 u 和 v 相邻，且其他顶点中没有一个是 u 和 v 的公共邻点。这意味着 $pav(G, 0) > 0$.

充分性：假设 $pav(G,0) > 0$. 那么存在一对相邻顶点 x和 y，它们位于 G 中，且每个其他顶点要么恰好与其中一个相邻，要么与两者都不相邻。因此，在 G，顶点 x 和 y 不相邻，且每个其他顶点都至少与其中一个相邻。因此，集合 $\{x, y\}$ 是 G 的支配集，所以 $\gamma(G) \leq 2$. 但是，条件 $\mathrm{diam}(G) = 2$ 迫使 $\gamma(G) = 2$. □

引理 10. 类 $\mathscr{H}_2$ 是可识别的。

证明。根据图 G，的给定牌组 $\mathscr{D}(G)$，构造牌组 $\mathscr{D}(G)$（定理 2），并计算可重构参数 $pv(G, 0)$ 和 $pav(G, 0)$（定理 1）。如果 $pv(G, 0) = 0$，那么 $\mathrm{diam}(\overline{G}) = 2$. 此外，如果 $pav(G, \overline{0}) > 0$，那么根据引理 9，$\gamma(G) = 2$，并将 G 置于 $\mathscr{H}_2$. 中。因此，$\mathscr{H}_2$ 是可识别的。 □

引理 11. 类 $\mathscr{H}_3$ 是可识别的。

证明。从 G 的牌组 $\mathscr{D}(G)$ 中，计算 $pv(G, 0)$，即没有公共邻点的非相邻顶点对的数量；该数量是可重构的（类似于定理 1）。如果 $pv(G, 0) > 0$，那么 $\mathrm{diam}(G) \geq 3$（因为这类顶点对之间存在一条长度至少为三的路径）。由引理 4，$\gamma(G) = 2$，因此 $G \in \mathscr{H}_3$，使得 $\mathscr{H}_3$ 可识别。 □

定理 12. 类 $\mathscr{H}$ 是可识别的。

证明。我们根据 $\mathrm{diam}(G)$ 分三种情况讨论。可以从 G. 的牌组确定 $\mathrm{diam}(G)$ 的值是 1、2 还是大于 2。

- 如果 $\mathrm{diam}(\overline{G}) = 1$，那么 $\overline{G} \cong K_n$，且 G 不连通，这是可重构的（定理 3）。由于 $\gamma(K_n) = n > 2$，$G \notin \mathscr{H}$.
- 如果 $\mathrm{diam}(\overline{G}) = 2$，则计算 $pav(G, \overline{0})$（定理 1）。如果 $pav(G, 0) > 0$，那么 $\gamma(G) = 2$（引理 9），因此 $G \in \mathscr{H}_2 \subset \mathscr{H}$；如果 $pav(G, 0) = 0$，那么 $\gamma(G) \neq 2$，因此 $G \notin \mathscr{H}$.
- 如果 $\mathrm{diam}(\overline{G}) \geq 3$，那么 $\gamma(G) = 2$（引理 11），且 $G \in \mathscr{H}_3 \subset \mathscr{H}$.

因此，$\mathscr{H}$ 是可识别的。

□

5 度数计数

令 $dv(G, k_1, k_2, k_3)$ 表示图 G 中不相邻顶点 x 和y 的顶点对数量，其中有 k_1 个顶点同时与 x 和 y 相邻，k_2 个顶点仅与 x 相邻，且 k_3 个顶点仅与 y. 相邻。令 $dav(G, k_1, k_2, k_3)$ 表示图 G 中相邻顶点 x 和 y 的顶点对数量，其中有 k_1 个顶点同时与 x 和 y 相邻，k_2 个顶点仅与 x (y *is excluded*) 相邻，且 k_3 个顶点仅与y (x *is excluded*) 相邻。

定理 13. 对于一个有 n 个顶点的连通图 G 以及 $k_2 \neq k_3$,

$$\sum_{i=1}^{n} dv(G - v_i, k_1, k_2, k_3) = (n - 2 - k_1 - k_2 - k_3)dv(G, k_1, k_2, k_3)$$
$$+(k_1+1)dv(G, k_1+1, k_2, k_3)+(k_2+1)dv(G, k_1, k_2+1, k_3)+(k_3+1)dv(G, k_1, k_2, k_3+1). \tag{1}$$

证明。为证明这一点，我们通过统计具有特定邻点性质的非邻接顶点对如何在所有卡片中对 $dv(G-v_i, k_1, k_2, k_3)$ 作出贡献，来计算左侧 $\sum_{i=1}^{n} dv(G - v_i, k_1, k_2, k_3)$,。回顾一下， $dv(G, k_1, k_2, k_3)$ 表示在 G 中满足以下条件的非邻接顶点对 $\{u, v\}$ 的数量：有 k_1 个顶点同时与 u 和 v 相邻，有 k_2 个顶点仅与 u 相邻,，还有 k_3 个顶点仅与 v. 相邻。我们考察 G 中的四类顶点对，以及删除一个顶点时它们所作出的贡献：

(1) G 中参数为 (k_1, k_2, k_3) 的顶点对：令 $\{u, v\}$ 为 G 中的一对不相邻顶点，其中有 k_1 个顶点同时与 u 和 v 相邻,，有 k_2 个顶点仅与 u 相邻,，还有 k_3 个顶点仅与 v. 相邻。在牌组 $\mathscr{D}$, 中，考察以下卡片：

. $G-u$ 和 $G-v$：这对 $\{u, v\}$ 不存在（因为删除了一个顶点）。. w 是与 u 或v 相邻的 $k_1+k_2+k_3$ 个顶点之一的卡片 $G-w$：删除 w 会减少邻点数，因此这对 $\{u, v\}$ 在 $G-w$中不再恰有 k_1、k_2、k_3 个邻点，故不会对$dv(G-v_i, k_1, k_2, k_3)$作出贡献。. 其余卡片：总共有 n 个顶点，排除 u、 v和 $k_1+k_2+k_3$ 个邻点后，剩下 $n-(2+k_1+k_2+k_3)$张卡片（注意 u和v 彼此不同，且 $k_2 \neq k_3$ 确保了不对称性）。在每张卡片中， $\{u, v\}$仍是一对不相邻的顶点， k_1、k_2、k_3 保持不变，因此对$dv(G-v_i, k_1, k_2, k_3)$贡献1。因此，每一对这样的顶点都会出现在 $n-(2+k_1+k_2+k_3)$张卡片中，总贡献为$(n-2-k_1-k_2-k_3)dv(G, k_1, k_2, k_3)$。

（2）具有 (k_1+1, k_2, k_3) 的顶点对属于 G:

考虑 $\{u, v\}$ 中一对 G，它们有 k_1+1 个公共邻点， k_2 个顶点仅与 u, 相邻，且 k_3 个顶点仅与 v. 相邻。在 $G-w$, 中， w 是其中一个公共邻点：

。删除 w 会使公共邻点减少到 k_1 个，而 k_2 和 k_3 保持不变，因此 $\{u, v\}$ 在 $G-w$ 中成为一个 (k_1, k_2, k_3)-顶点对，为 $dv(G-w, k_1, k_2, k_3)$ 贡献 1。在剩余的 $n-$ 张 (k_1+1) 卡片中，该顶点对要么消失（若删除了 u 或 v），要么有 k_1+1 个公共邻点，而不是 k_1. 个。这样的卡片有 k_1+1 张，因此总贡献为 $(k_1+1)dv(G, k_1+1, k_2, k_3)$。

(3) G 中与 $(k_1$、k_2+1、$k_3)$ 对应的顶点对：

取一对顶点 $\{u, v\}$，它们有 k_1 个公共邻点；有 k_2+1 个顶点仅与 u 相邻，另有 k_3 个顶点仅与 v 相邻，考虑 $G-w$，其中 w 是仅与 v 相邻的 k_3+1 个顶点之一：

- 删除 w 后，顶点数减少至 k_2 个，这些顶点仅与 u 相邻；而 k_1 和 k_3 保持不变，因此 $\{u, v\}$ 在 $G-w$. 中构成一个 $(k_1,\ k_2,\ k_3)$-对

。 在其他卡片中，这一对要么消失，要么保留 k_2+1.。有 k_2+1 张这样的卡片时，其贡献为 $(k_2+1)dv(G,\ k_1,\ k_2+1,\ k_3)$。

(4) 在 G 中，带有 (k_1,k_2,k_3+1) 的顶点对：

对于一对顶点 $\{u,v\}$，有 k_1 个公共邻点， k_2 个顶点仅与 u, 相邻， k_3+1 个顶点仅与 v 相邻：

• 删除 w 个顶点后，计数调整为 k_3,，而 k_1 和 k_2 保持不变，因此 $\{u,v\}$ 符合 $G-w$.• 中的 (k_1,k_2,k_3)。在其他情况下，该顶点对要么消失，要么保留 k_3+1.。这种情况出现在 k_3+1 张卡片中，产生 $(k_3+1)dv(G,k_1,k_2,k_3+1)$.

将这些贡献相加，在单顶点删除下， $G-v_i$ 中没有其他顶点对会产生 k_1,k_2,k_3 （因为 $k_2\neq k_3$ 确保了角色各不相同），因此：

$$\sum_{i=1}^{n} dv(G-v_i,k_1,k_2,k_3)=(n-2-k_1-k_2-k_3)dv(G,k_1,k_2,k_3)$$
$$+(k_1+1)dv(G,k_1+1,k_2,k_3)+(k_2+1)dv(G,k_1,k_2+1,k_3)+(k_3+1)dv(G,k_1,k_2,k_3+1). \tag{2}$$

□

推论 14。 当 $k_2=k_3=k$时，定理 13 中的方程简化为：

$$\sum_{i=1}^{n} dv(G-v_i,k_1,k,k)=(n-2-k_1-2k)dv(G,k_1,k,k)+(k_1+1)dv(G,k_1+1,k,k)+$$
$$(k+1)dv(G,k_1,k,k+1). \tag{3}$$

Proof. 将 $k_2=k_3=k$ 代入定理 13 的方程。原始项为 e:

$$\sum_{i=1}^{n} dv(G-v_i,k_1,k_2,k_3)=(n-2-k_1-k_2-k_3)dv(G,k_1,k_2,k_3)$$
$$+(k_1+1)dv(G,k_1+1,k_2,k_3)+(k_2+1)dv(G,k_1,k_2+1,k_3)+(k_3+1)dv(G,k_1,k_2,k_3+1). \tag{4}$$

令 $k_2=k_3=k$，则变为：

$$\sum_{i=1}^{n} dv(G-v_i,k_1,k,k)=(n-2-k_1-k-k)dv(G,k_1,k,k)+(k_1+1)dv(G,k_1+1,k,k)+$$
$$(k+1)dv(G,k_1,k+1,k)+(k+1)dv(G,k_1,k,k+1). \tag{5}$$

由于 k_2和 k_3相等，项 $dv(G,\ k_1,\ k+1,\ k)$ 和 $dv(G,\ k_1,\ k,\ k+1)$ 统计的是对称顶点对（顶点 u 和 v 可以互换角色），但在 $G-v_i$ 中，删除一个仅与 u 或 v 相邻的顶点会产生相同的移位。不过，定理 13 假设$k_2\neq k_3$，因此我们通过指出 k_2+1 和 k_3+1 项会合并为一种移位来作出调整，从而得到一个 $(k+1)dv(G,\ k_1,\ k,\ k+1)$ 项，因为这对顶点的对称性简化了计数。因此，结论如所述成立。

□

定理 15。 对于一个有 n 个顶点且满足 $G \notin \mathcal{H}$ 的连通图 G，所有 $0 \leq k_1+k_2+k_3 \leq n-3$ 的参数$dv(G, k_1, k_2, k_3)$ 以及所有 $0 \leq k_1+2k \leq n-3$ 的参数 $dv(G, k_1, k, k)$ 均可重构。

证明。 我们针对 $G \notin \mathcal{H}$ （即 $\gamma(G) \geq 3$）证明这一点，重点考察两种情况： $k_2 \neq k_3$和 $k_2 = k_3 = k$.

情况 1： $k_2 \neq k_3$. 考虑 $dv(G, k_1, k_2, k_3)$，其中 $k_1+k_2+k_3 \leq n-i$ 对 $i = 3$，4，.....，n.我们对 i 使用归纳法，证明这些参数可由G 的牌组重构:

。基本情形（$i = 3$）：令 $k_1 + k_2 + k_3 = n - 3$. 在定理 13 中，项 $dv(G, k_1 + 1, k_2, k_3)$ $dv(G, k_1, k_2 + 1, k_3)$ 和 $dv(G, k_1, k_2, k_3 + 1)$ 的和为 $n - 2$，超过了 $n - 3$，因此它们为零（含有 n 个顶点的图中不存在这样的顶点对）。因此，$\sum_{i=1}^{n} dv(G - v_i, k_1, k_2, k_3) = (n-2-k_1-k_2-k_3)dv(G, k_1, k_2, k_3)$，且由于 $n - 2 - (n - 3) = 1$，$dv(G, k_1, k_2, k_3) = \sum_{i=1}^{n} dv(G - v_i, k_1, k_2, k_3)$，可由 $\mathscr{D}(G)$ 计算得到，因此 $dv(G, k_1, k_2, k_3)$ 对 $i = 3$. 可重构。归纳步骤：假设对 $i = m - 1$， $dv(G, k_1, k_2, k_3)$ 中满足 $k_1 + k_2 + k_3 = n - (m - 1)$ 的情形可重构。对于 $i = m$，令 $k_1 + k_2 + k_3 = n - m$. 根据假设，已知 $dv(G, k_1 + 1, k_2, k_3)$ $dv(G, k_1, k_2 + 1, k_3)$ 和 $dv(G, k_1, k_2, k_3 + 1)$（其和为 $n - m + 1 = n - (m - 1)$）。利用定理 13，$\sum_{i=1}^{n} dv(G - v_i, k_1, k_2, k_3) = (n-2-k_1-k_2-k_3)dv(G, k_1, k_2, k_3)+(k_1+1)dv(G, k_1+1, k_2, k_3) + (k_2 + 1)dv(G, k_1, k_2 + 1, k_3) + (k_3 + 1)dv(G, k_1, k_2, k_3 + 1)$，等式左边可由 $\mathscr{D}(G)$ 得知，右边的其他项也已给出，因此 $dv(G, k_1, k_2, k_3)$ 可解（因为 $n - 2 - (n - m) = m - 2 \geq 1$）。所以它可重构。由归纳法， $dv(G, k_1, k_2, k_3)$ 对 $i = 3$、4、.....、 n 均可重构，涵盖了 $0 \leq k_1 + k_2 + k_3 \leq n - 3$.

情况 2： $k_1 = k_2 = k$. 对于 $dv(G, k_1, k, k)$，其中 $0 \leq k_1 + 2k \leq n - 3,$，同样应用推论 14:

。对于 $k_1 + 2k = n - 3$， $dv(G, k_1 + 1, k, k)$ 和 $dv(G, k_1, k, k + 1)$，它们的和为 $n - 2$，因此它们为零。于是，$dv(G, k_1, k, k) = \sum_{i=1}^{n} dv(G - v_i, k_1, k, k)$，这是可重构的。 。归纳地，若已知 $k_1 + 2k = n - m$ 及先前的值，则推论 14 可解出 $dv(G, k_1, k, k)$。

因此，所有此类参数都是可重构的。 □

定理 16. 对于一个具有 n 个顶点且 $k_2 \neq k_3$ 的连通图 G，以下结论成立:

$$\sum_{i=1}^{n} dav(G - v_i, k_1, k_2, k_3) = (n - 2 - k_1 - k_2 - k_3)dav(G, k_1, k_2, k_3) + (k_1+1)dav(G, k_1+1, k_2, k_3) + (k_2+1)dav(G, k_1, k_2+1, k_3) + (k_3+1)dav(G, k_1, k_2, k_3+1).$$

(6)

证明。我们计算总和 $\sum_{i=1}^{n} dav(G-v_i, k_1, k_2, k_3)$，其中 $dav(G, k_1, k_2, k_3)$ 统计 G 中的相邻顶点对 $\{u, v\}$：有 k_1 个公共邻点、k_2 个仅与 u 相邻的顶点，以及 k_3 个仅与 v 相邻的顶点。论证与定理10类似，但针对相邻顶点对作了调整：

1. **G 中满足 (k_1, k_2, k_3) 的顶点对：**
取 G 中的一个相邻顶点对 $\{u, v\}$，其有 k_1 个公共邻点、k_2 个仅与 u 相邻的顶点，以及 k_3 个仅与 v 相邻的顶点。在牌组中：

$G - u$ 和 $G - v$ 中都不存在顶点对 $\{u, v\}$。

在 $G-w$ 中，若 w 是 $k_1+k_2+k_3$ 个邻点之一，删除 w 会改变计数（例如，删除一个公共邻点会使 u 和 v 不再相邻，或改变 k_1），因此 $\{u, v\}$ 不会计入 $dav(G - w, k_1, k_2, k_3)$。

- 在剩余的 $n-2-k_1-k_2-k_3$ 张卡片中（不包括 u、v及其邻点），$\{u, v\}$ 仍与未改变的 k_1、k_2、k_3 相邻，每次贡献 1。

总计：$(n - 2 - k_1 - k_2 - k_3)dav(G、\ k_1、\ k_2、\ k_3)$。

2. **G 中满足 $(k_1 + 1、\ k_2、\ k_3)$ 的顶点对：**
对于一对相邻顶点 $\{u, v\}$，它们有 $k_1 + 1$ 个公共邻点，其中 k_2 仅与 u 相邻，而k_3 仅与 v 相邻；删除其中一个公共邻点后，数量降至 k_1，同时保持 u 与 v 相邻，因此在 k_1+1 张卡片中，对 $dav(G-w、\ k_1、\ k_2、\ k_3)$ 有贡献。总计：$(k_1 + 1)dav(G、\ k_1 + 1、\ k_2、\ k_3)$。

3. **G 中具有（$k_1,\ k_2 + 1,\ k_3$）的顶点对：**
一个有 k_1 个公共邻点的相邻顶点对，其中 $k_2 + 1$ 个仅与 u相邻，k_3 个仅与 v 相邻，在 w 是 $k_2 + 1$ 个顶点之一时，会在 $G - w$ 中产生贡献，化简为k_2，遍及 $k_2 + 1$ 张卡片。

总计：$(k_2 + 1)dav(G,\ k_1,\ k_2 + 1,\ k_3)$。

4. 中具有（$k_1,\ k_2,\ k_3 + 1$）的：类似地，一个具有 $k_1,\ k_2,\ k_3 + 1$ 的顶点对，在删除一个仅与 v相邻的顶点时，会在 $k_3 + 1$ 张卡片中产生贡献，得到$(k_3 + 1)dav(G,\ k_1,\ k_2,\ k_3 + 1)$。

将这些结果相加，并由 $k_2 \neq k_3$ 确保各项贡献互不相同，即得所述等式。

□

推论17。当 $k_2 = k_3 = k$，定理 16 化简为：

$$\sum_{i=1}^{n} dav(G - v_i, k_1, k, k) = (n-2-k_1-2k)dav(G, k_1, k, k) + (k_1+1)dav(G, k_1+1, k, k) + (k + 1)dav(G, k_1, k, k + 1) \quad (7)$$

证明。 将 $k_2 = k_3 = k$ 代入定理 16:

$$\sum_{i=1}^{n} dav(G-v_i, k_1, k, k) = (n-2-k_1-2k)dav(G, k_1, k, k)+(k_1+1)dav(G, k_1+1, k, k)+$$
$$(k+1)dav(G, k_1, k+1, k) + (k+1)dav(G, k_1, k, k+1). \quad (8)$$

由于当 $k_2 = k_3$ 时， u 和 v 相邻且对称，因此术语 $dav(G,\ k_1,\ k+1,\ k)$ 和 $dav(G,\ k_1,\ k,\ k+1)$ 表示同一个移位（删除一个仅与其中一个相邻的顶点后，计数会降至 k ），于是合并为单个 $(k+1)dav(G,\ k_1,\ k,\ k+1)$ 项，这与推论 11 中关于 dv 的模式一致。 □

定理 18。 对于具有 n 个顶点且满足 $G \notin \mathcal{H}$ 的连通图 G ， 参数$dav(G, k_1, k_2, k_3)$ 对所有 $0 \leq k_1 + k_2 + k_3 \leq n - 3$ 和 $dav(G, k_1, k, k)$ 对所有 $0 \leq k_1 + k + k \leq n - 3$ 均可重构。

*Pro*的。 我们将定理 15 的方法推广到 dav，假设 $G \notin \mathcal{H}$ ($\gamma(G) \geq 3$):

情况 1: $k_2 \neq k_3$。
对 i 进行归纳证明，其中 $k_1 + k_2 + k_3 = n - i$ 、 $i = 3$，4、.....、 n :
基本情形 ($i = 3$): 若 $k_1+k_2+k_3 = n-3$ ，则 $dav(G,\ k_1+1,\ k_2,\ k_3)$、 $dav(G,\ k_1,\ k_2+1,\ k_3)$ 和 $dav(G,\ k_1,\ k_2,\ k_3+1)$ 的和为 $n-2$ ，因此它们均为零。根据定理 16,

$$dav(G, k_1, k_2, k_3) = \sum_{i=1}^{n} dav(G - v_i, k_1, k_2, k_3),$$

可由 $\mathscr{D}(G)$ 计算。
归纳步骤: 假设 $dav(G,\ k_1,\ k_2,\ k_3)$ 中的 $k_1 + k_2 + k_3 = n - (m - 1)$ 可重构。对于 $i = m$、 $k_1 + k_2 + k_3 = n - m$，高阶项（其和为 $n - m + 1$ ）已知，而定理 13 可根据 $\mathscr{D}(G)$ 求出 $dav(G,\ k_1,\ k_2,\ k_3)$，因为 $n - 2 - (n - m) = m - 2 \geq 1$。

因此， $dav(G,\ k_1,\ k_2,\ k_3)$ 可重构至 n 。

情况 2: $k_2 = k_3 = k$。
对于 $k_1 + 2k = n - i$, $i = 3$、4、.....、 n , 使用推论17:

- 在 $i = 3$, $k_1+2k = n-3$ 处，高阶项为零，并且 $dav(G,\ k_1,\ k,\ k)$ 可以直接计算。

- 归纳地，利用前几步已知的值，通过推论17求解。

因此，所有指定的 dav 参数均可重构。 □

注释19. 参数 $dv(G, k_1, k_2, k_3)$ 和 $dav(G, k_1, k_2, k_3)$ 可以用于确定顶点对度数:

- 对于不相邻顶点 $\{u, v\}$，度数分别为 $deg\ u = k_1 + k_2$ （共同部分加上仅属于 u 的部分）和 $deg\ v = k_1 + k_3$ （共同部分加上仅属于 v 的部分）。
- 对于相邻顶点 $\{u, v\}$，由于它们互为邻点，其度分别为 $deg\ u = k_1 + k_2 + 1$ 和 $deg\ v = k_1 + k_3 + 1$，其中 $+1$ 计入了它们之间的相互邻接。

6 直径为 tw 的 k-测地图的重构 o

若每对顶点之间长度最短的路径至多有 k 条，则图 G 称为 k-测地图。令 $\mathcal{G}$ 为所有满足 $dv(G,0,k_2,k_3) =_0$ 且 $dv(G,0,k_2,k_3) = 0$ 的 k-测地图 G 的集合，其中对所有 k_2,k_3 均有 $0 \le k_2 + k_3 \le n-3$.。显然，对于 $G \in \mathcal{G}$. ，$\mathrm{diam}(G) = \mathrm{diam}(G) = 2$ 。本节证明， $\mathcal{G}$ 中的某个图子族是可重构的。本节中，我们始终假设 G 和 G 的支配数至少为三。令 $\mathscr{C}_1$ 为满足 $dv(G,k_1,k_2,k_3) > 0$ 且对某些 $k_1 \ge 1, k_2$ 和 k_3. 有 $dv(G,k_1-1,k_2,k_3) = 0$的图 $G \in \mathcal{G}$ 的集合。令 $\mathscr{C}_2$ 为满足 $dv(G,k_1,k_2,k_3) > 0$的图 $G \in \mathcal{G}$ 的集合，并且满足以下条件之一：对某些 $k_1,k_2 \ge 1$, k_3，有 $dv(G,k_1,k_2-1,k_3) = 0$ 且$|k_2-k_3| \ge 2$；或者对某些 $k_1,k_2,\ k_3 \ge 1$，有 $dv(G,k_1,k_2,k_3-1) = 0$且 $|k_2-k_3| \ge 2$.。给定 $k_1,k_2,k_3 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$，我们用 $S_G(k_1,k_2,k_3)$ 表示所有满足以下条件的顶点 $v \in V(G)$ 的集合：存在非邻点 $w \in V(G) \setminus N(v)$，使得 v 和 w 恰有 k_1 个公共邻点（即同时与 v 和 w相邻的顶点），恰有 k_2 个顶点与 v 相邻但不与 w相邻，并且恰有 k_3个顶点与 w 相邻但不与 v相邻。

定理20。 如果 $G \in \mathscr{C}_1$ ，且存在一个顶点 $x \in G$ ，使得 $deg_G x =\|S_{G-x}(k_1-1,k_2,k_3)|$，那么 G 是可重构的。

证明。 **识别：** 由于 $\mathscr{H}$是可识别的，我们可以假设 $G \notin \mathscr{H}$，并且对于所有 $0 \le k_1+k_2+k_3 \le n-3$，$dv(G,\ k_1,\ k_2,\ k_3)$ 都是可重构的（定理 13）。假设 $G \in \mathscr{C}_1$.。从 $\mathscr{D}(G)$ 中选取一张卡片 $G-x$，其中 $deg_G x = |S_{G-x}(k_1,\ k_2,\ k_3)|$.。由于 $deg_G x$，且子集 $S_{G-x}(k_1,\ k_2,\ k_3)$ 可由 $\mathscr{D}(G)$ 推导得出，因此这张卡片是可识别的。

弱重构：考虑一张卡片 $G-x$，其满足 $deg_G x = |S_{G-x}(k_1-1,k_2,k_3)|$.。由于 $G \in \mathscr{C}_1$, $dv(G,k_1-1,k_2,k_3) = 0$，但在 $G-x$ 中， $dv(G-x,k_1-1,k_2,k_3) > 0$，因为移除 x 会改变公共邻点的计数。要重构 G，引入一个顶点 x，将其加入 $G-x$，并将它与 $S_{G-x}(k_1-1,k_2,k_3)$ 中的所有顶点相连。这样便能唯一地恢复 G，因为没有其他配置满足该条件。□

定理 21. 如果 $G \in \mathscr{C}_2$ ，并且存在一个顶点 $x \in G$ ，使得 $deg_G x =\|S_{G-x}(k_1,k_2-1,k_3)|$ 或 $deg_G x = |S_{G-x}(k_1,k_2,k_3-1)|$，那么 G 是可重构的。

证明. **识别：**
假设 $G \notin \mathscr{H}$，其中 $\mathscr{H}$是一个可识别类。参数 $dv(G,k_1,k_2,k_3)$统计具有 k_1 个公共邻点、 k_2 个仅与其中一个相邻的邻点，以及 k_3 个仅与另一个相邻的邻点的非邻接顶点对；根据 $\mathscr{D}(G)$, 对所有 $0 \le k_1+k_2+k_3 \le n-3$ 而言，这些参数均可重构（如定理 18 所述）。由于 $G \in \mathscr{C}_2$，我们有$dv(G,k_1,k_2,k_3) > 0$，但对于某个 $k_2 \ge 1$ 或某个 $k_3 \ge 1$， $dv(G,k_1,k_2-1,k_3) = 0$或 $dv(G,k_1,k_2,k_3-1) = 0$，其中 $|k_2-k_3| \ge 2$.。现在，从$\mathscr{D}(G)$中选取一张卡片 $G-x$，其中 $deg_G x = |S_{G-x}(k_1,k_2-1,k_3)|$ 或 $deg_G x = |S_{G-x}(k_1,k_2,k_3-1)|$.。这里，$S_{G-x}(k_1,k_2,k_3)$表示 $G-x$ 中参与此类非邻接顶点对的顶点集。由于 $deg_G x$ （ x 在 G中的邻点数）以及这些子集的大小都可由 $\mathscr{D}(G)$计算得出，因此这张卡片是可识别的。

弱重构：
Assu我不妨设 $deg_G x = |S_{G-x}(k_1,\ k_2-1,\ k_3)|$. 在 G，由于 e

$G \in \mathscr{C}_2$，$dv(G, k_1, k_2 - 1, k_3) = 0$，也就是说，在 G 中不存在恰有k_1 个公共邻点的非相邻顶点对：其中一个顶点独有 $k_2 - 1$ 个，另一个顶点独有 k_3 个。然而，在$G - x$中，$dv(G - x, k_1, k_2 - 1, k_3) > 0$，说明卡片中存在这类顶点对。这种变化是因为移除 x 会减少与其相邻的顶点的邻点数，从而在 $G - x$.中产生观察到的非相邻顶点对。要重构 G，从 $G - x$ 开始，引入一个新顶点 x，并将它连接到 S_{G-x}中的所有顶点（$k_1, k_2 - 1, k_3$）。这样便能唯一地恢复 G：将 x 连接到这些顶点，会消除由 $dv(G - x, k_1, k_2 - 1, k_3)$计数的非相邻顶点对，满足 $dv(G, k_1, k_2 - 1, k_3) = 0$，并符合度条件 $deg_G x = |S_{G-x}(k_1, k_2 - 1, k_3)|$.。任何其他连接方式都会改变度或无法使该参数归零，从而证实其唯一性。

□

7 结论

本文推广了 [4] 中的结果。对于图 $G \notin \mathscr{H}$，我们可以像第6节中那样使用这些参数重构图，也可以像定理 12 中那样识别图类。本文引入了两个新参数，$dv(G, k_1, k_2, k_3)$ 和 $dav(G, k_1, k_2, k_3)$，它们将非相邻顶点对和相邻顶点对的共同邻点数与顶点度相结合，从而拓展了先前的研究（例如，参考文献 [4]）。这些参数或可为图重构和识别提供工具，带来以下成果：

- **图类的重构**：对于满足 $\gamma(G)$ 的图 G（即不属于满足 $\gamma(G)$ 的图类 $\mathscr{H}$），定理20和定理21展示了 dv 如何帮助我们识别 k-测地图 G（其直径满足 $\mathrm{diam}(G) = \mathrm{diam}(G) = 2$），并在特定条件下实现弱重构。
- **图类识别**：定理 12 证明，类 $\mathscr{H}$（具有 $\gamma(G) = 2$ 的图）可从其牌组中识别。

重构猜想的解决如今取决于解决两个问题：

问题 1. 证明所有满足 G 且具有 $\gamma(G) = 2$ 的连通图都是弱可重构的。

问题 2. 证明所有满足 $\mathrm{diam}(G) = \mathrm{diam}(G) = 2$ 的连通图都是弱可重构的。

致谢。 本研究工作由印度政府原子能部印度国家高等数学委员会（NBHM）通过一项重大研究项目资助。批准令编号：02011/14/2022/NBHM(R.P)/ R&D II/10491。

参考文献

[1] Bondy, J.A.《图重构者手册》，载于《组合学综述》（英国组合学会议论文集），伦敦数学会数学讲义116（1991），221-252。

[2] Bondy, J.A., Hemminger, R.L. 图重构综述，《图论杂志》1（1977），227-268。[3] Devi Priya, P., Monikandan, S. 距离遗传二连通图的重构，《离散数学》341（2018），2326-2331。[4] Gupta, S.K., Pankaj Mangal, Vineet Paliwal. 重构猜想证明的若干进展，《离散数学》272（2003），291-296。[5] Harary, F. 重构猜想综述，载于：Bari, R.A., Harary, F.（编）《图与组合》，《数学讲义》第406卷。施普林格，柏林、海德堡，1974。[6] Lauri, J., Scapellato, R. 图自同构与重构专题，剑桥大学出版社，2003。[7] McKay, B.D. 小图是可重构的，《澳大利亚组合杂志》15（1997），123-126。[8] Ramachandran, S., Monikandan, S. 图重构猜想：利用补图、连通度和距离进行化简。《组合应用研究所通报》56（2009），103-108。[9] Stockmeyer, P.K. 竞赛图重构猜想不成立，《图论杂志》1（1977），19-25。[10] West, D.B.《图论导论》，第二版，普伦蒂斯-霍尔，2005。

[11] Yongzhi, Y. 若所有二连通图均可重构，则重构猜想成立，《图论杂志》12(2)（1988），237-243。