arXiv:2601.00631v1 [math.NT] 2 Jan 2026

一个关于单位区间上欧拉–黎曼ζ函数、双伽马函数与余切的不等式

Michael Andrew Henry [格拉茨工业大学]

2025年6月23日

摘要

我们证明了一个涉及分析学中三个著名函数的不等式，即余切、欧拉–黎曼ζ函数和双伽马函数。除了给出该结果的一个简单证明外，我们还提出了一个猜想性的加强版本，并对这一问题的起源作了若干备注。

1 引言

黎曼 ζ函数是特殊函数

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

其中 $\Re(s) > 1 \in \mathbb{C}$。自然，关于 ζ最著名的问题是黎曼猜想；然而，近年来作者们一直在研究各种涉及 $\zeta(s)$的问题，其中 s 被限制在 $\mathbb{R}$的某个子集内。此类文章的例子可参见 [1], [2], [3], [4], [7], [8], [9], [12]。我们通过给出一个涉及限制在单位区间上的ζ函数的新不等式，提出了这类结果的一种新形式。

本文中，双伽马函数定义为 $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$，其中$\Gamma(z)$是欧拉对阶乘函数的推广。我们要证明如下结论

定理 1. 对于满足 $0 < x < 1$ 的 x *s*，关系式

$$\pi \cot \pi x < \zeta(x) - \psi(x)$$

成立。

2 备注

简而言之，我们对这个问题及其求解方法作几点说明。定理 1 中出现三角函数余切函数并不完全令人意外，因为例如，利用黎曼的 ζ(*s*) 函数方程，即

$$\zeta(1-s) = \frac{2\,\Gamma(s)\cos(\pi s/2)}{(2\pi)^s}\zeta(s), \tag{1}$$

或者等价地

$$\zeta(s) = \frac{2\,\Gamma(1-s)\sin(\pi s/2)}{(2\pi)^{1-s}}\zeta(1-s),$$

（见 [5], 第 259 页），我们可以形式上写成

$$\pi \cot \pi s = \left(\frac{(2\pi)^{2s}\,\zeta(1-2s)}{\zeta(2s)}\right)^2 \frac{\Gamma(1-2s)}{2\,\Gamma(2s)}. \tag{2}$$

更有意思的是，定理 1 将 ζ(*x*) 与 ψ(*x*) 的一个简单加法函数，同 ζ(*x*) 与 Γ(*x*) 的比值联系起来，如式 (2) 所示（定义域需作适当限制）。

我们以余切函数表述定理 1，是因为该函数满足一种相当强的复制性质（据推测，此性质最早由 [17], 定义，另见 [18]）。有时，具有这种所谓复制性质的函数称为库伯特函数（源自 [19]）。我们在一个定义中稍微调整了这一命名。

定义 1. 若函数 $f(x)$ 在区间 (0,1) 上满足以下无穷函数方程，则称其为权为 ω 的 库伯特 - 克努特 函数

$$\frac{1}{p^\omega}\sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{x+k}{p}\right) = f(x) \tag{3}$$

对所有 $p \in \mathbb{N}$，以及某个固定的、依赖于 f 的 $\omega \in \mathbb{C}$。

Kubert-Knuth 函数有如下级数解释，有助于阐明函数方程的意义。假设 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n q^n$ 是 f （即 $q := e^{2\pi i x}$）在区间 (0,1) 上的傅里叶展开。那么，如果 f 是一个 Kubert-Knuth 函数，则可得，对于任意的 $p \in \mathbb{N}$，关系

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{pn} q^n \tag{4}$$

成立。我们可以通过一个例子来说明这一点。函数 $\cot \pi x$ （相差复数倍和一个加性常数）或许是最典型的 Kubert-Knuth 函数，其傅里叶展开也是众所周知的。利用几何级数

$$\frac{1}{1-x} := \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{5}$$

对 $|x| < 1$ 有效，那么显然，如果 $a_n = 1$，恒等式

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{pn} x^n$$

对任意 $p \in \mathbb{N}$ 都成立。代入 $x \mapsto q = e^{2\pi i x}$ 可得

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{2}\left(1 + i \cot \pi x\right)$$

成立。经过归一化，我们得到已知的傅里叶展开

$$\frac{1+q}{1-q} = i \cot \pi x = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^n.$$

这也表明了 Kubert-Knuth 函数与 s 阶多重对数或那些定义如下的函数（就我们的用途而言）之间的密切关系

$$\mathrm{Li}_s(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s},$$

其中 $1 \geq z \in \mathbb{C}$ 和 $s \in \mathbb{C}$ 是任意的。注意到 $1/(1-x) = \mathrm{Li}_0(x)/x$成立，等等。另请参阅相关研究 [21] 和 [22]。

注 1。 我们定义为 *Kubert-Knuth* 函数的函数通常被称为复制性函数，如 *[14], [15], [17],* 和 *[18],* 中所述；或者被称为库伯特函数，如 *[16]* 和 *[23]*中所述；然而，有时，式（*3*）(3) 中 *Kubert-Knuth* 性质的表达式本身就被称为乘法公式，例如参见 *[24],* 第 *60* 页。还有不同的观点， *[20]* 中将这一乘法公式作为函数方程进行讨论（另见 *[11]*）。因此，关于 *Kubert-Knuth* 函数的论文散见于各种不同的术语之下，相关文章往往相互重叠，或提供不完整的参考文献目录。这些函数非常有趣，呈现出多种形式，值得进行尚待撰写的百科全书式分析。

上文提到，Kubert-Knuth 性质很强。这是因为，当 $\omega = 1$ 见定义 1 时，它能在区间 (0，1) 上刻画 $\cot \pi x$（参见例如 [13] 和 [23]）。其他 Kubert-Knuth 函数也具有这一性质，例如受限伯努利多项式（见 [6]）等。关于 Kubert-Knuth 函数的讨论至此结束。

3 证明

下面给出一些备注，以缩小需要证明的范围。于是，众所周知的恒等式

$$\psi(1-x) - \psi(x) = \pi \cot \pi x$$

是经典结果（或可见 [24], 第 14 页），因此，定理 1 的不等式等价于证明，对于 $0 < x < 1$，关系式

$$\psi(1-x) < \zeta(x) \tag{6}$$

成立。因此，我们证明 (6) 的方法是寻找某个 f，其中“夹逼”论证相当于证明

$$\psi(1-x) + \frac{1}{1-x} < f(x) \leq \zeta(x) + \frac{1}{1-x} \tag{7}$$

成立。这一思路由下面这个优美的

定理 2 (Elezovi´c、Giordano 和 Pe˘cari´c)。 设 $\gamma = -\psi(1)$。只要 $0 < x < \infty$，不等式

$$\log\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{x} \leq \psi(x) \leq \log\left(x + \frac{1}{e^{\gamma}}\right) - \frac{1}{x}.$$

成立。

证明。参见 [10]。 □

由定理 2 可轻易得到以下特例:

推论 1. 若 $0 < x < 1$ 成立，则

$$\psi(1-x) + \frac{1}{1-x} \leq \log\left(1 - x + \frac{1}{e^{\gamma}}\right)$$

成立。

从该推论中我们得到以下结论

引理 1. 在区间 $0 < x < 1$ 上，函数

$$\log\left(1 - x + \frac{1}{e^{\gamma}}\right) \tag{8}$$

单调递减。

证明。 我们通过证明导数在单位区间上为负来完成此证明。我们发现

$$\frac{d}{dx}\log(1 - x + e^{-\gamma}) = -\frac{1}{1 - x + e^{-\gamma}}$$

成立，结论显然可得。 □

在证明引理 1 后，我们将式 (7) 中的函数 $f(x)$ 取为

$$f(x) := bx + \frac{1}{2}$$

其中 $b = B_1(\gamma) = \gamma - \frac{1}{2}$, $B_1(x)$ 是第一伯努利多项式。显然， $f(x)$ 的这一取法在单位区间上单调递增，这与引理 1 所述的 $\log(1 - x + e^{-\gamma})$ 相矛盾。因此，考虑到

$$\lim_{x\to 0}\log\left(1 - x + \frac{1}{e^{\gamma}}\right) = \log(1 + e^{-\gamma}) = 0.44...$$

成立，且

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } \alpha = 0 \\ \gamma & \text{if } \alpha = 1 \end{cases} \tag{9}$$

成立，关系式 $\log(1-x+e^{-\gamma}) \leq f(x)$ 成立，符合要求。

根据上述讨论，我们已将定理 1 的证明简化为只需证明：若 $0<x<1$，则关系

$$f(x) \leq \zeta(x) + \frac{1}{1-x}$$

成立。因此，下面的内容就是下一节

证明。 首先，我们证明函数 $\zeta(x) + 1/(1-x)$ 在区间 $(0,1)$ 上严格递增。为此，回顾以下经典公式：当 $\Re(s) > -1$ 成立时，关系

$$\zeta(s) + \frac{1}{1-s} = \frac{1}{2} - s\int_1^\infty \frac{\{t\} - \frac{1}{2}}{t^{s+1}} dt$$

成立（见 [24], 第 144 页）。对于满足 $0<x<1$ 的 x，我们定义

$$I(x) := \int_1^\infty \frac{\{t\} - \frac{1}{2}}{t^{x+1}} dt.$$

或者，若

$$I_n(x) := \int_n^{n+1} \frac{t-n-\frac{1}{2}}{t^{x+1}} dt,$$

then

$$I(x) := \sum_{n=1}^{\infty} I_n(x).$$

根据 $I(x)$ 的定义可直接观察到，若 $0<x_0<x_1<1$，则 $-\infty < I(x_1) < I(x_0) < 0 \iff \infty > -I(x_1) > -I(x_0) > 0$成立。因此，我们得到

$$\zeta(x) + \frac{1}{1-x} = x|I(x)| + \frac{1}{2}$$

正如我们所希望的那样，即严格递增。在端点处，考虑以下经典且易于证明的事实：

$$\lim_{x\to\alpha}\left(\zeta(x) + \frac{1}{1-x}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } \alpha = 0 \\ \gamma & \text{if } \alpha = 1 \end{cases}$$

成立（例如参见 [24],第 91–92 页）。因此，我们可以由式 (9) 得出：

$$f(x) = bx + \frac{1}{2} \leq \zeta(x) + \frac{1}{1-x}$$

成立。至此，证明完毕。 □

注 2. 对于 $x \in \{0 < x < 1 : \ x \in \mathbb{R}\}$,

$$\zeta(x) + \frac{1}{1-x}$$

严格递增这一事实已在 *[12]*中通过级数截断法证明。

4 结论

在研究上述关系的过程中，我们发现了许多其他问题。我们将其中与定理 1 最密切相关的一个问题留给读者：

猜想 $\mathbf{1}$ $\overline{b} = \overline{B_1\ \gamma} = \gamma + \frac{1}{2}$ – $b =$. $B_1\ \gamma = \gamma - \frac{1}{2}$ $B_1\ x$ $\gamma = -\psi\ 1$

在此猜想中，我们定义 :() 和 () :（再次说明，() 是第一伯努利多项式，()是欧拉–马歇罗尼常数）。那么，若 $0 < x < 1$，我们猜想关系

$$\pi \cot \pi x + x < \zeta(x) - \psi(x) < \pi \cot \pi x + \overline{b}x + b$$

成立。

利用 Kubert-Knuth 函数的级数解释，若该猜想成立，则可为.....的傅里叶展开系数提供界

$$\zeta(x) - \psi(x),$$

通过仅考虑实数的小数部分这一简单技巧来实现周期性。这个猜想可以与黎曼猜想的一个初等判据联系起来。其新颖之处在于，假设该猜想为真，黎曼猜想就可以“归结”为关于 $\zeta(x)$ 在 $0 < x < 1$ 上行为的问题。由于这一问题的表述相当技术化，而且我们并不认为它会更容易处理，因此将细节留给读者（相关分析的完整内容见 [16], [25]）。

参考文献

[1] E. Alkan。《关于ζ函数凸性猜想的解决》。载于：《数学分析与应用杂志》472.2（2019），第1987–2016页。[2] H. Alzer和M. K. Kwong。《黎曼ζ函数的平均值不等式》。载于：《积分变换与特殊函数》36.6（2025），第449–459页。[3] H. Alzer和M. K. Kwong。《黎曼ζ函数的一些不等式》。载于：《的里雅斯特大学数学研究所报告》53（2021），第5号，11页。[4] Horst Alzer。《关于黎曼ζ函数的一个双重不等式的注记》。载于：《数学展望》23.4（2005），第349–352页。[5] T. M. Apostol。《解析数论导论》。Springer Sci-ence+Business Media, Inc, 1976。[6] L. Carlitz。《关于伯努利多项式和欧拉多项式乘法公式的注记》。载于：《美国数学会会刊》4（1953），第184–188页。[7] P. Cerone。《特殊函数：逼近与界》。载于：《应用分析与离散数学》1.1（2007），第72–91页。[8] P. Cerone等。《涉及ζ函数的新不等式》。载于：《纯粹与应用数学不等式杂志》5.2（2004），第43篇，17页。 ISSN: 1443-5756。[9] H. Delange。《关于黎曼ζ函数对数导数的一点注记》。载于：《数学讨论》53.2（1987），第333–335页。[10] N. Elezovi´c、C. Giordano和J. Pe˘cari´c。《Gautschi不等式的最佳界》。载于：《数学不等式及其应用》3.2（2000），第239–252页。 ISSN：1331-4343。[11] T. Hilberdink。《开单位区间上余切函数的一个函数方程》。载于：《数学方程》61（2001），第179–189页。[12] T. Hilberdink。《正实数上的黎曼ζ函数不等式》。载于：《数学不等式及其应用》26.4（2023），第995–1002页。[13] R. J¨ager。《具有复制性的余切函数刻画》。载于：《数学手稿》56（1985），第167–175页。 ISSN：0025-2611。[14] H-H. Kairies。《特殊函数的函数方程》。载于：《数学方程》53（1997），第207–241页。

[15] H-H. Kairies. “复制性与函数空间”。载于：函数方程与不等式。第518卷。应用数学。Kluwer学术出版社，Dordrecht，2000年，第125–138页。[16] S. Kanemitsu 和 M. Yoshimoto。“法里级数与黎曼猜想”。载于：*Acta Arith.*75.4（1996），第351–374页。[17] D. E. Knuth。《计算机程序设计艺术》第*1*卷：基本算法。1968年。[18] D. E. Knuth。《计算机程序设计艺术》第*2*卷：半数值算法，第*2*版。1981年。[19] D. S. Kubert。“普遍普通分布”。载于：*Bull. Soc.Math. Fr.* 107（1979），第179–202页。 ISSN：0037-9484。[20] M. Kuczma、B. Choczewski 和 R. Ger。迭代函数方程。纽约：剑桥大学出版社，1990年。[21] J. C. Lagarias 和 W-C. W. Li。“勒奇ζ函数 III：多重对数与特殊值”。载于：*Res. Math. Sci.* 3（2016），论文编号2，共54页。[22] J. C. Lagarias 和 W-C. W. Li。“勒奇ζ函数 IV：黑克算子”。载于：*Res. Math. Sci.* 3（2016），论文编号33，共39页。[23] J. Milnor。“关于多重对数、赫尔维茨ζ函数和Kubert恒等式”。载于：*Enseign. Math. (2)* 29.3-4（1983），第281–322页。[24] H.M. Srivastava 和 J. Choi。ζ函数与 q-ζ函数、相关级数与积分。爱思唯尔公司，2012年。[25] M. Yoshimoto。“阿贝尔定理、法里级数与黎曼猜想”。载于：*Ramanujan J.* 8（2004）。