arXiv:2601.00634v1 [math.PR] 2 Jan 2026

随机均衡经济学的热力学形式主义

Esa Nummelin[1]，**和 Elja Arjas**[2]

[1] *Department of Mathematics and Statistics, University of Helsinki, e-mail:* leena.nummelin@gmail.com

[2] *Department of Mathematics and Statistics, University of Helsinki, e-mail:* elja.arjas@helsinki.fi

摘要： 在经济学中，要按照物理科学通常采用的标准构建完美模型，通常并不可行。尤其是，经济均衡的观测值可能与基于模型的先验预期值显著偏离。从数学上看，此时后验观测到的均衡可能构成大偏差，也就是说，它落在中心极限定理的有效范围之外。以此为出发点，我们提出一种研究随机经济均衡理论的新方法。借鉴概率论的最新进展，我们主张大偏差理论与随机均衡经济学密切相关。由此，随机均衡经济学的形式体系便与经典统计力学相类似，因为大偏差理论也是统计力学的数学基础。因此，熵、配分函数和正则概率等热力学概念可以自然地引入随机均衡经济学。本文着重讨论两个基本原理的经济学类比：热力学第二定律和吉布斯条件原理。

MSC2020 主题分类： 主要分类 60F10, 82Bxx, 91Bxx。**关键词和短语：** 经济均衡、大偏差理论、统计力学、熵。

1. 引言

1.1. 问题设定

现代理论经济学的理想，是使所考察的模型与现实之间建立对应关系；这种对应关系在物理科学中具有鲜明的典型特征。

经典均衡理论关注以下基本问题：

Problem 0。是否存在均衡，即是否存在一个价格向量，使经济中的总超额需求为零?

在经典理论中，总超额需求是一个已知的确定性函数（例如 Debreu [13]），均衡价格被定义为该函数的零点。在现实中，超额需求是未知的，但人们仍然隐含地认为，均衡价格是假设的总超额需求函数的零点。

继 Arrow、Debreu 和 McKenzie 于 20 世纪 50 年代的开创性工作之后（[2], [3], [13], [31]），一般（确定性的）均衡理论成为一个重要的研究课题，并在 20 世纪 60 年代和 70 年代得到进一步发展，最终达到如今的成熟状态。

与所有人类行为一样，经济行为在某种程度上是不可预测的，并且往往是不理性的。与物理科学相比，在经济学中，模型与现实之间永远不可能实现完全对应。无论构建得多么精巧，经济模型都只是对现实世界的近似表示，模型与现实之间的差异对应于先验不确定性。

对不确定性的考虑促使我们研究一整个构型系综，其中每个构型都与一个权重（先验概率）相结合，用以表示人们先验地相信该构型为真的程度。这些信念可以是“理性的猜测”，也可以建立在例如对从经济主体集合中适当选取的代表性样本的微观经济行为所进行的早期系统性统计研究之上。这些信念可以通过规定一个先验概率法则来进行数学描述。

鉴于此，考虑均衡模型是很自然的，这类模型是随机的，而非确定性的。为此，我们假设均衡模型中的参数是随机变量，因此模型的均衡也具有随机性。

我们还假设经济规模很大，即参与的个体数量很多。随机经济中以概率 1 存在均衡这一问题，曾由 Hildenbrand [19] 进行过著名研究。

对于大型随机经济，可以提出的第一个特殊问题如下：

Problem 1. 随机均衡与基于模型的先验期望值之间存在怎样的先验关系？更具体地说，是否存在大数定律（LLN）和中心极限定理（CLT）？

关于问题 1 的解，开创性研究出自 Bhattacharya 和 Majumdar [6]。与确定性均衡不同，自 20 世纪 70 年代初 Hildenbrand、Bhattacharya 和 Majumdar 发表开创性论文以来，人们对随机经济均衡理论的兴趣一直不大。基于概率论一般领域的最新进展，我们在此提出一种研究该理论的新方法，并指出大偏差理论在这一背景下的重要作用。

我们提出两个基本问题，涉及先验随机均衡模型与关于已实现均衡的后验观察之间的贝叶斯类型互动。

我们所说的后验（宏观经济）观察，是指对某个已实现的宏观经济变量或数量的观察，例如经济整体或某个经济部门中某些商品的均衡价格、消费或生产，或者属于某一特定“类型”的经济主体数量。我们重点关注观察涉及系统中已实现均衡价格的情形。

需要解决的第一个新问题如下：

Problem 2. 假设实现的均衡已被后验观测到。那么这一观测的先验概率是多少？

请注意，如果先验模型“良好”，那么由于大数定律和中心极限定理，这一概率理应“较高”。此外，在这种情况下，其数值可以借助中心极限定理进行近似，见第 2.5 节。

然而，由于经济模型并不完美，后验观测到的均衡可能显著偏离基于模型的先验期望值，在这种情况下，观测值的先验概率很小。事实上，可以认为，此时观测到的均衡代表了一种大偏差（LD），因为它落在中心极限定理的适用区域之外。这是因为中心极限定理仅在渐近意义下的一个小区域内成立，其标准差的量级为 $\frac{1}{\sqrt{n}}$，参见第 2.5 节。

我们接着讨论由均衡的后验观测（可能代表一次大偏差）引发的推断问题：

Problem 3.在观察到已实现的均衡后，支配随机经济的后验概率律是什么？

这一推断问题在经典非随机均衡理论中也会出现。也就是说，由于对真实系统的后验观测与基于模型的预测之间（不可避免地）存在矛盾，因此有必要在一定程度上重新建模。在确定性情形下，此类模型的特定版本仍不可避免地带有临时拼凑的性质。

Remark. 这些观点与贝叶斯统计推断和决策理论中的熟悉概念有一定相似之处，但也存在明显差异。在贝叶斯统计推断中，基于经验观测（数据）并运用贝叶斯公式，将假定的模型参数先验分布更新为相应的后验分布。在这两种情况下，都可以通过对相应似然关于模型参数分布进行积分，计算未来可观测量的预测概率。

1.2. 结果简述

问题2和问题3在经典统计力学的形式体系中有着密切的对应。这是因为，大偏差理论在统计力学中所起的作用，可以看出与其在随机均衡经济学中的作用相似。

问题2的设定最终被证明是热力学第二定律的一个对应形式。为此，请回想经典第二定律（积分形式）将热力学熵与温度、内能和热力学配分函数联系起来，见（2.7）。

我们认为，在随机均衡经济学中，信息量定义为观测到某个均衡的概率倒数的对数，应被视为统计力学中热力学熵的对应物。随机均衡经济学第二定律进而将经济熵与相应的经济配分函数联系起来。

经济学第二定律是在无限大经济体的理想极限下得出的，这一极限对应于热力学极限；其依据是一个关于随机均衡价格的大偏差定理（TLD）。该大偏差定理给出了观测到先验预料之外的均衡的先验概率公式。经济学第二定律因此可被解释为对先验均衡模型优劣的信息论度量。

问题3的设定对应于热力学吉布斯条件化原理（GCP），该原理刻画了热力学正则概率律如何成为温度测量值所对应的热力学系统的支配概率律。典范概率律属于由总能量生成的指数概率分布族，参见第3.1节。

根据吉布斯条件原理的经济学类比，在观测到均衡的条件下，支配随机经济的后验概率律是由随机总超额需求生成的指数族中的一个典范成员（第3.2节）。GCP 是关于宏观经济随机变量的条件大数定律的一种形式（第5.2节中的定理5.1）。

本文分为两部分。第一部分阐述大规模随机经济的热力学形式体系，重点讨论热力学第二定律和吉布斯条件原理的经济学类比。第二部分则在大偏差理论的框架下，将经济学第二定律和吉布斯条件原理表述为数学定理。

作为例证，我们详细考察理想随机经济这一特殊情形，其中假设经济主体在统计上相同且相互独立，它是经典热力学理想气体的类比。作为一个特别的例子，我们研究“理想”随机柯布-道格拉斯经济。

文献中似乎没有容易查阅的统计力学大偏差理论基础介绍。因此，为了方便可能对此并不熟悉的读者，并指出随机均衡经济学与统计力学之间所提出的类比，我们在每章开篇都简要回顾相关的统计力学基础及其大偏差理论基础。

我们尽量使本书的论述自成一体，从而避免引用一般的大偏差理论。对于对该

理论感兴趣的读者，我们推荐 Bucklew [10] 以及 Dembo 和 Zeitouni [15]的专著。

第一部分：热力学形式体系

2. 第二定律

2.1. 热力学第二定律

随机均衡理论所提出的形式体系与统计力学的形式体系类似。因此，为了指出这种类比，我们将在第 2.1 节和第 3.1 节回顾经典热力学第二定律和吉布斯条件原理。

考虑一个由 n 粒子 $i = 1, 2, ..., n$组成的物理系统。它们的位置 $\rho_i \in \mathbb{R}^3$ 和动量 $\theta_i \in \mathbb{R}^3$ 构成粒子构型 ω，属于热力学系综 $\Omega \doteq \mathbb{R}^{6n}$。每个粒子构型$\omega$ 都对应一个能量 $U(\omega)$（$\doteq$ 即粒子的动能之和与该粒子构型对应的势能之和 ω）。

根据刘维尔定理，勒贝格测度 $d\omega$ （= 欧几里得体积）在 $\mathbb{R}^{6n}$ 下的哈密顿动力学过程中保持不变（参见 [29]: 第 1 章）。这意味着勒贝格测度可以视为“先验概率律”。在统计力学中，先验模型“完全不完善”，因为先验而言，所有构型 ω 的概率都相等。

对温度 T 的观测（测量）将热力学系统限制在一个紧致的能量壳层内:

$$\{|U - E| < \Delta\} \doteq \{\omega \in \Omega : \ |U(\omega) - E| < \Delta\}. \tag{2.1}$$

这里， E 表示温度为 T时的内能， Δ 表示“无限薄”能量壳层的厚度。（符号“点”表示按定义相等。）

热力学熵 S 定义为该能量壳层体积的对数:

$$S \doteq \log \mathrm{Vol}\{|U - E| < \Delta\}, \tag{2.2}$$

（[37]: 第32页）。

热力学配分函数 Λ（β）定义为能量的拉普拉斯变换:

$$\Lambda(\beta) \doteq \int e^{-\beta U(\omega)} d\omega, \ \beta > 0, \tag{2.3}$$

其中，共轭变量 β 表示逆温度： $T \doteq \frac{1}{\beta}$。与逆温度 β 相关的内能 $E(\beta)$定义–为其导数

$$E(\beta) \doteq -\frac{d}{d\beta} \log \Lambda(\beta). \tag{2.4}$$

在物理学中，这个量通常记作 $\langle U(\beta)\rangle$。

热力学第二定律将熵引入为一种广延热力学变量。根据这一定律，无穷小的可逆加热dQ 会使熵按比例增加，比例系数为温度的倒数：

$$dS = \beta dQ. \tag{2.5}$$

对于恒定体积（不做功）的系统，加入的热量只会影响系统的内能。因此，对于恒定体积的系统，我们有

$$dS = \beta dE. \tag{2.6}$$

对（2.6）分部积分，并结合（2.4），可得第二定律的等价积分形式：

$$\begin{aligned} S(\beta) &= \beta E(\beta) - \int E(\beta) d\beta \\ &= \beta E(\beta) + \log \Lambda(\beta). \end{aligned} \tag{2.7}$$

第二定律是在理想极限 $n = \infty$ （所谓的热力学极限）下，由关于总能量 U的大偏差定理得出的，见第 4.1 节。

Example: The classical ideal gas. 在经典理想气体中，粒子之间不存在相互作用，因此能量完全由各个粒子的动能构成，见 [29]: 第 2.1 节。因此，系综中只需纳入粒子的动量：

$$\Omega \doteq \{\omega = (\theta_1, ..., \theta_n) : \ \theta_i \in \mathbb{R}^3\} = R^{3n}.$$

粒子 i 的动能 u_i 由其“结构函数”给出

$$u_i = u(\theta_i) = \frac{|\theta_i|^2}{2m}$$

它的动量 θ_i （“热力学特征”）和质量 m。（非标准术语“结构函数”和“热力学特征”指的是它们在经济学中的类比，参见第2.4节。）因此，总能量就简单地成为这些量之和

$$U(\omega) = \sum_{i=1}^{n} u(\theta_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\theta_i|^2}{2m}. \tag{2.8}$$

在此处以及其他许多地方，我们在符号表示中省略对系统大小 n 的依赖。

因此，理想气体的配分函数是与单个粒子相关的配分函数的 n 次方：

$$\Lambda(\beta) \doteq \int \cdots \int e^{-\beta \sum_{i=1}^{n} \frac{|\theta_i|^2}{2m}} d\theta_1 \cdots d\theta_n = \lambda(\beta)^n, \tag{2.9}$$

其中

$$\lambda(\beta) \doteq \int_{R^3} e^{-\beta u(\theta)} d\theta = \int_{R^3} e^{-\frac{\beta|\theta|^2}{2m}} d\theta = (\int_R e^{-\frac{\beta x^2}{2m}} dx)^3 = (2\pi m)^{\frac{3}{2}} \beta^{-\frac{3}{2}}. \tag{2.10}$$

理想气体的内能为

$$E(\beta) = ne(\beta), \tag{2.11}$$

其中

$$e(\beta) \doteq -\frac{d}{d\beta} \log \lambda(\beta) = \frac{3}{2\beta} \tag{2.12}$$

表示单个粒子的内能。因此，对于理想气体，第二定律的积分形式（2.7）变为

$$S(\beta) = n(\log \lambda(\beta) + \beta e(\beta)) = \frac{3n}{2}(-\log \beta + \log 2\pi em). \tag{2.13}$$

2.2. 随机经济及其均衡

我们考虑一个经济系统（简称经济），其中某些商品$j = 1.....l+1$由一组经济主体进行交易。

我们假设存在一个参数 n，称为规模参数。（通常， n 就是经济主体的数量。）我们假设所讨论的是一个“大型经济”；也就是说，在精确的定理中令 $n \to \infty$。

令 $Z^j(p)$ 表示商品 $j \in \{1, ..., l+1\}$ 在价格 $p \in \mathbb{R}_+^{l+1}$下的总超额需求 。（上标表示商品。）我们假设，对于每个 j和 p，总超额需求都是定义在底层概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量，即

$$Z^j(p) = \{Z^j(\omega; p);\ \omega \in \Omega\},$$

其中， $Z^j(\omega; p)$ 是变量 ω 的可测映射，参见例如 [8]: 第 182 页。

我们将 Ω 称为宏观经济系综，并将其元素 ω 称为宏观经济构型。（这种略显特别的术语源于与统计力学的类比，参见第 2.1 节。）底层概率测度 P 称为先验宏观经济概率律。

我们作出以下两个标准假设：

(i) 对每个常数 $a > 0$， $Z^j(ap) \equiv Z^j(p)$（零次齐次性）；以及

(ii) $\sum_{j=1}^{l+1} p^j Z^j(p) \equiv 0$ (Walras' law).

按照惯例，省略符号 ω。由于零次齐次性，价格在不失一般性的情况下可以归一化为属于价格单纯形

$$S^l \doteq \{p \in \mathbb{R}_+^{l+1} : \sum_{j=1}^{l+1} p^j = 1\}.$$

瓦尔拉斯定律意味着，对于任意满足 $p^{l+1} > 0$ 的价格 $p \in S^l$，第 $l+1$ 种商品的总超额需求由其他商品的总超额需求决定：

$$Z^{l+1}(p) = -(p^{l+1})^{-1} \sum_{j=1}^{l} p^j Z^j(p).$$

因此，我们省略第 $l+1$ 个分量，并将向量

$$Z(p) \doteq (Z^1(p), ..., Z^l(p)) \in \mathbb{R}^l$$

由商品 $j = 1,...,l$ 的总超额需求组成的向量，简称（随机）总超额需求。

随机均衡价格（*r.e.p.*）定义为满足以下条件的价格向量$p^* = \{p^*(\omega);\ \omega \in \Omega\}$，即随机总超额需求为零：

$$Z(\omega; p^*(\omega)) = 0, \tag{2.14}$$

简言之：

$$Z(p^*) = 0.$$

Let

$$EZ(p) \doteq \int Z(\omega; p) P(d\omega)$$

表示（确定性的）期望总超额需求函数。其零点 p_e^*称为（先验）期望均衡价格：

$$EZ(p_e^*) = 0.$$

Remarks: (i) 随机均衡价格构成一个随机集：

$$\pi^* = \{\pi^*(\omega); \omega \in \Omega\},$$

其中

$$\pi^*(\omega) = \{p \in S^l : \ Z(\omega; p) = 0\}$$

表示在实现的宏观经济配置ω下的均衡价格集合。因此，$p^*(\omega)$表示 $\pi^*(\omega)$中的任意一个元素。

（ii）随机均衡还有一个更一般的概念：依赖于宏观经济配置 ω 和价格 p 的随机变量 $X(p) = \{X(\omega; p);\ \omega \in \Omega\} \in \mathbb{R}^d$ （对于某个 $d \geq 1$），称为宏观经济随机变量。此类变量的例子包括整个经济或某个宏观经济部门的总需求、供给、生产或其份额。此外，如果经济主体可以划分为有限个不同的类型，那么属于这些类别的主体数量可以视为宏观经济随机变量，参见下文例（iii）。

对于任意随机均衡价格 p^*，令

$$x^* \doteq n^{-1}X(p^*)$$

表示该均衡价格下宏观经济随机变量的均值。

称二元组（p^*，x^*）为随机复合均衡（*r.c.e.*），参见 [36]: 第 4.3 节。

Examples: (i) 在由 n 个经济主体 $i = 1$、.....、n组成的标准科布-道格拉斯交换经济（简称 CD经济）中，主体 i 的个体超额需求由向量

$$\zeta_i(p) \doteq \Big(\frac{a_i^j}{p^j} p \cdot e_i - e_i^j;\ j = 1, ..., l \Big), \tag{2.15}$$

给出，其中 $a_i \doteq (a_i^1$，.....、$a_i^{l+1}) \in S^l$ 是份额参数，$e_i \doteq (e_i^1$，.....、$e_i^{l+1}) \in \mathbb{R}^{l+1}$是初始禀赋，而 $p \cdot e_i \doteq \sum_{k=1}^{l+1} p^k e_i^k$是主体$i$的初始财富。

在随机CD经济中，份额参数 a_i 和初始禀赋e_i 是随机变量。

随机总超额需求等于随机个体超额需求之和 $\zeta_i(p)$:

$$Z(p) \doteq \sum_{i=1}^{n} \zeta_i(p) = \left(\frac{1}{p^j} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{l+1} a_i^j e_i^k p^k - \sum_{i=1}^{n} e_i^j;\ j = 1, ..., l \right).$$

然后通过以下方式得到随机均衡价格

$$p^* = \left(\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^j \right)^{-1} (W^*)^j;\ j = 1, ..., l+1 \right), \tag{2.16}$$

其中 $W^* = ((W^*)^1$，.....，$(W^*)^{l+1})$ 是（随机）随机矩阵的左特征向量（对应特征值 1）

$$A = (a^{jk};\ j, k = 1, ..., l+1) \doteq \left(\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^j \right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} a_i^k e_i^j;\ j, k = 1, ..., l+1 \right), \tag{2.17}$$

归一化使得 $p^* \in S^l$。（特别地，如果矩阵 A 是不可约的（例如，[41]），那么只有一个（唯一的）随机均衡价格p^*。）

商品 j 上的预期总超额需求为

$$EZ(p) = \sum_{i=1}^{n} E\zeta_i(p) = \left(\frac{1}{p^j} \sum_{k=1}^{l+1} M_{a;e}^{jk} p^k - M_e^j;\ j = 1, ..., l \right),$$

其中

$$\begin{aligned} M_{a;e}^{jk} &\doteq \sum_{i=1}^{n} E(a_i^j e_i^k), \\ M_e^k &\doteq \sum_{i=1}^{n} E e_i^k = \sum_{j=1}^{l+1} \mu_{a;e}^{jk}. \end{aligned}$$

期望均衡价格为

$$p_e^* = ((M_e^j)^{-1}(w_e^*)^j;\ j = 1, ..., l), \tag{2.18}$$

其中 w_e^* 是随机矩阵的特征值为 1 的左特征向量

$$A_e = (a_e^{jk};\ j, k = 1, ..., l+1) \doteq ((M_e^j)^{-1} M_{a;e}^{kj};\ j, k = 1, ..., l+1),$$

满足归一化条件 $p_e^* \in S^l$。同样，如果 A_e 不可约，那么期望均衡价格 p_e^*唯一。

(ii) 在随机（单期）金融市场（[36]: 例 2）中，参数 a_i（≐ 主体 i的风险厌恶程度）、 μ_i（≐ 主体 i 对期末资产价值的主观预期向量）、 Σ_i（≐ 主体 i 对期末资产价值相关性的主观预期矩阵）以及 e_i（≐ i 的初始禀赋）均为随机变量。（这里存在“双重随机性”：个体的主观预期 μ_i 和 Σ_i 也被视为随机变量。）

(iii) 随机复合均衡的概念可通过以下生存模型 加以说明（例如参见 [7]）。考虑上文所述的随机柯布-道格拉斯经济。假设对于每个价格 p，都存在一个生存水平 $w(p)$，使得主体 i 只有在其初始禀赋为 $e_i \in \mathbb{R}^{l+1}$ 且初始财富超过该水平时才能存活，即 $p \cdot e_i \geq w(p)$。令 $\chi_{\{p \cdot e_i < w(p)\}}$表示未存活指示变量，也就是说，若不等式 $p \cdot e_i < w(p)$成立，则其值为 1，否则为 0。因此，未存活个体的总数 $N(p)$可表示为以下总和

$$N(p) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{\{p \cdot e_i < \underline{w}(p)\}}.$$

由均衡价格 p^* 和（该均衡下）未存活个体的平均数量$n^* \doteq n^{-1} N(p^*)$组成的数对 $(p^*,\ n^*)$，现在是随机复合均衡的一个例子。

2.3. 随机均衡经济学第二定律

令 p 为属于价格单纯形 S^l.的任意价格

我们将观测价格在 δ–邻域内均衡价格 p定义为观测到一个随机均衡价格，该价格与 p的距离小于 δ，即事件

$$\{\omega \in \Omega : \text{ there exists a r.e.p. } p^*(\omega) \text{ such that } |p^*(\omega) - p| < \delta\}. \tag{2.19}$$

我们将 (2.19) 视为对 δ–邻域内价格 p所实现的（“真实”）均衡价格的观测。假定“容差” δ 可以忽略，因此我们可以说是在价格 p处观测到均衡价格。下文将观测 (2.19) 简记为

$$\exists p^* : |p^* - p| < \delta. \tag{2.20}$$

在接下来的精确定理中，我们令 $\delta \to 0$。

设 A 是任意一个概率为 $P(A)$ 的事件。观测事件 A 时的信息量 $\mathcal{I}(A)$ 定义为其概率倒数的对数：

$$\mathcal{I}(A) \doteq \log \frac{1}{P(A)} = -\log P(A)$$

（例如，[11]）。因此，观测一个概率较高的“常见”事件，信息量较低；而观测一个“罕见”事件，信息量较高。

定义 2.1。在价格 p 处观测到随机均衡价格时，其经济熵 $I(p)$ 定义为信息含量：

$$I(p) \doteq \mathcal{I}(\exists p^* : |p^* - p| < \delta) \doteq -\log P(\exists p^* : |p^* - p| < \delta). \tag{2.21}$$

总超额需求 $Z(p)$ 的拉普拉斯变换（*L.t.*）定义为函数

$$\Lambda(\alpha; p) \doteq Ee^{\alpha \cdot Z(p)} = \int e^{\alpha \cdot Z(\omega; p)} P(d\omega), \ \alpha \in \mathbb{R}^l. \tag{2.22}$$

（宏观经济）配分函数 $\Lambda(p)$ 定义为其最小值：

$$\Lambda(p) \doteq \min_{\alpha \in \mathbb{R}^l} \Lambda(\alpha; p).$$

随机变量的 L.t. 的对数（即所谓的累积量生成函数）已知是凸函数，参见例如 [8]: 第 148 页。由此特别可知，若存在参数 $\alpha = \alpha(p) \in \mathbb{R}^l$ 使得

$$\frac{\partial \log \Lambda}{\partial \alpha}(\alpha(p); p) = 0, \tag{2.23}$$

那么必然有

$$\Lambda(p) = \Lambda(\alpha(p); p). \tag{2.24}$$

由于与逆温度概念的热力学类比，变量 $\alpha(p)$ 被称为共轭变量（与价格 p 相关）。（稍后我们将证明，共轭变量的存在等价于 p 是所谓的可能的均衡价格，参见第 4.2 节中的定理 4.1。）

根据随机均衡经济学第二定律，经济学熵等于配分函数对数的负值：

随机均衡经济学第二定律：

$$I(p) = -\log \Lambda(p). \tag{2.25}$$

REMARKS: (i) 观察（2.19）是观察（2.1）中热力学温度的经济学类比。

(ii) 第二定律是在极限 $n = \infty, \quad \delta = 0,$ 下，由一个关于随机均衡价格的大偏差定理得到的。根据 TLD

$$\mathcal{I}(\exists p^* : |p^* - p| < \delta) + \log \Lambda(p) = \varepsilon(n, \delta)n,$$

其中，当 $n \to \infty$ 和 $\delta \to 0$ 时，$\varepsilon(n, \delta) \to 0$，参见第 4.3 节中的定理 4.2。

(iii) 熵是随机均衡价格可能取值 p 的“稀有度度量”。也就是说，对于随机均衡价格而言，先验预料之外的“稀有”取值具有较大的熵，而先验预料之中的“常见”取值则具有较小的熵。

因此，随机均衡经济学的第二定律可以解释为：它提供了一种信息论度量，用于衡量先验均衡模型的优劣：

也就是说，如果先验均衡模型“良好”，那么由于大数定律，随机均衡价格 p^* 的观测值 p 接近其先验期望值 p_e^*，因此具有较高的先验概率。因此，其熵 $I(p)$较小，因为根据定义，熵等于信息量。另一方面，随机均衡价格的某个先验稀有取值的实现具有较大的熵，这表明先验模型“较差”。

(iv) 对随机均衡价格的部分观测是指在价格单纯形的某个子集中观测随机均衡价格 p^*：

$$\exists p^* \in B, \quad \text{where } B \subset S^l.$$

例如，当观测到某些商品子集的价格时，情况就是如此，参见 [36]: 例 3.1。此外，如果在动态金融市场中，资产的价格

仅观测到某个有限时刻为止，那么这就代表了（对整个价格过程的）部分观测，参见 [36]: 例 3.2。

根据最小熵原理，对均衡价格的部分观测的熵等于观测集中的熵最小化价格的熵:

$$I(B) \doteq \mathcal{I}(\exists p^* \in B) = I(p^*_B),$$

其中

$$p^*_B \doteq \operatorname{argmin}\{I(p) : \ p \in B\}.$$

这是一个关于部分观测的大偏差定理，见 [36]: 定理 3.4。

(v) 在价格—变量对（p, x）处对随机复合均衡的一次观测 $\in S^l \times \mathbb{R}^d$ 是指事件的发生

$$\{\omega \in \Omega : \text{ there exists a r.e.p. } p^*(\omega) \text{ such that } |p^*(\omega)-p| < \delta \text{ and } |x^*(\omega)-x| < \delta\}, \tag{2.26}$$

其中, $x^*(\omega) \doteq n^{-1}X(\omega; p^*(\omega))$ 表示宏观经济随机变量 $X(\omega; p)$ 在均衡状态下的均值。观测（2.26）简写为

$$\exists p^* : \ |p^* - p| < \delta, |x^* - x| < \delta. \tag{2.27}$$

这里, $\delta > 0$ 也是一个"无穷小"常数。

与在 (p, x) 处观测到 r.c.e. 相关的（双变量）熵 $I(p, x)$ 定义为该观测中的信息量:

$$\begin{aligned} I(p,x) &\doteq \mathcal{I}(\exists p^* : |p^* - p| < \delta, |x^* - x| < \delta) \\ &\doteq -\log P(\exists p^* : |p^* - p| < \delta, |x^* - x| < \delta). \end{aligned}$$

双变量配分函数 $\Lambda(p, x)$ 定义为

$$\Lambda(p,x) \doteq \Lambda(\alpha(p,x), \beta(p,x); p),$$

其中

$$\Lambda(\alpha, \beta; p) \doteq Ee^{\alpha \cdot Z(p) + \beta \cdot X(p)} = \int e^{\alpha \cdot Z(\omega;p) + \beta \cdot X(\omega;p)} P(d\omega), \ \alpha \in R^l, \beta \in R^d,$$

表示双变量拉普拉斯变换，而双变量共轭变量$\alpha(p, x)$ 和 $\beta(p, x)$ 是以下方程的解

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \log \Lambda(\alpha(p,x), \beta(p,x); p) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \log \Lambda(\alpha(p,x), \beta(p,x); p) &= nx, \end{aligned} \tag{2.28}$$

参见 [36]: 第 4.3 节。

根据一条广义第二定律，双变量复合均衡的熵可以用双变量配分函数 $\Lambda(p, x)$ 和共轭变量 $\beta(p, x)$ 表示：

$$I(p,x) = -\log \Lambda(p,x) + n\beta(p,x) \cdot x, \tag{2.29}$$

参见 [36]: 第 4.3 节。

在第 2.2 节的例（iii）中，在（p^*, n^*）处对随机复合均衡的观测（p, x）意味着同时观测随机均衡价格 p^* 在 p 处的值，以及在 x处未存活个体的比例 $n^* \doteq n^{-1}N$ （p^*）。双变量熵 I（p, x）就是这一观测的信息量。

2.4. 理想随机经济

现在，我们借助一类特殊的简单随机经济来说明一般结果。这类随机经济由于类似于统计力学中的理想气体，被称为理想随机经济：

我们假设，主体 i 的个体超额需求 ζ_i（p）是借助随机参数 θ_i（主体 i 的经济特征）和价格 p 的确定性结构函数 z（θ_i; p）得到的：

$$\zeta_i(p) = z(\theta_i; p).$$

经济特征 θ_i 被假定构成一个 $\mathbb{R}^m$值（对于某个 $m \geq 1$）的独立同分布（i.i.d.）随机变量序列。

请注意，由于统计独立性在确定性变换下得以保持，因此对于每个价格 p，个体超额需求也都是独立同分布的。因此，在理想经济中，总超额需求是独立同分布随机变量之和：

$$Z(\omega; p) = \sum_{i=1}^{n} z(\theta_i; p). \tag{2.30}$$

宏观经济配置 ω 现在定义为个体特征构成的向量： $\omega \doteq (\theta_1, ..., \theta_n) \in \Omega \doteq \mathbb{R}^{mn}$.

令 $f(\theta)$ 表示经济特征的共同概率分布函数（p.d.f.），即

$$P(\theta_i \in A) = \int_A f(\theta) d\theta \quad \text{for } i = 1, 2, ..., \ A \subset \mathbb{R}^m. \tag{2.31}$$

我们称 $f(\theta)$ 为先验微观经济概率密度函数 由此可知，先验宏观经济概率律 $P(d\omega)$ 是乘积概率律，在该概率律下，经济特征 θ_i 是服从 $f(\theta)$ 分布的独立同分布随机变量，即

$$P(d\omega) = f(\theta_1)\cdots f(\theta_n)d\theta_1\cdots d\theta_n. \tag{2.32}$$

Let

$$\mu(p) \doteq E\zeta_i(p) = \int z(\theta;p)f(\theta)d\theta$$

表示个体超额需求<*style id='3*>。由于

$$EZ(p) = n\mu(p),$$

期望均衡价格也是期望个体超额需求的零点:

$$\mu(p_e^*) = 0. \tag{2.33}$$

由于个体总超额需求相互独立，理想随机经济中的总超额需求的拉普拉斯变换等于个体超额需求的拉普拉斯变换的 n次方:

$$\begin{aligned}\Lambda(\alpha;p) &\doteq Ee^{\alpha\cdot Z(p)}\\ &= Ee^{\alpha\cdot\sum_{i=1}^{n}\zeta_i(p)}\\ &= Ee^{\alpha\cdot\zeta_1(p)}\cdots Ee^{\alpha\cdot\zeta_n(p)}\\ &= \lambda(\alpha;p)^n,\end{aligned}$$

其中

$$\lambda(\alpha;p)\doteq Ee^{\alpha\cdot\zeta_i(p)} = \int e^{\alpha\cdot z(\theta;p)}f(\theta)d\theta.$$

由此可知，配分函数是个体配分函数 $\lambda(p)$的 n次方:

$$\Lambda(p) = \lambda(p)^n, \tag{2.34}$$

其中

$$\lambda(p)\doteq\min_{\alpha}\lambda(\alpha;p) = \lambda(\alpha(p);p), \tag{2.35}$$

且共轭变量 $\alpha(p)$ 满足方程

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\lambda(\alpha(p);p) = 0, \tag{2.36}$$

参见（2.23）。

鉴于（2.25），理想经济的第二定律可写为

$$I(p) = -n\log\lambda(p). \tag{2.37}$$

EXAMPLES: （i）在理想随机柯布-道格拉斯经济中，经济特征

$$\theta_i \doteq (a_i, e_i) \in S^l \times R^{l+1}$$

构成一列独立同分布的随机变量。根据公式 (2.15)，结构函数为

$$z(\theta; p) = z(a, e; p) \doteq (\frac{a^j}{p^j} p \cdot e - e^j;\ j = 1, ..., l),\ \theta \doteq (a, e) \in S^l \times R^{l+1}. \quad (2.38)$$

因此，商品 j 上的个体超额需求的期望值为

$$\mu(p) = ((p^j)^{-1} \sum_{k=1}^{l+1} \mu_{a;e}^{jk} p^k - \mu_e^j;\ j = 1, ..., l), \quad (2.39)$$

其中

$$\mu_{a;e}^{jk} \doteq E(a_i^j e_i^k) = \int \int a^j e^k f(a, e) da de,$$

$$\mu_e^k \doteq E e_i^k = \sum_{j=1}^{l+1} \mu_{a;e}^{jk},$$

且 $f(\theta) = f(a,\ e)$ 表示微观经济学概率密度函数。

根据方程 (2.33) 和 (2.39)，期望均衡价格为

$$p_e^* = \left(\frac{(w_e^*)^j}{\mu_e^j};\ j = 1, ..., l \right),$$

其中 w_e^* 是随机矩阵的一个左特征向量

$$A_e \doteq \left(\frac{\mu_{a;e}^{kj}}{\mu_e^j};\ j, k = 1, ..., l+1 \right),$$

满足归一化条件 $p_e^* \in S^l$，参见（2.16）和（2.17）。如果 A_e 是不可约的，那么仅存在唯一预期均衡价格 p_e^*。

理想随机 CD 经济中个体超额需求的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha; p) &= \int_{S^l} \int_{R^{l+1}} e^{\alpha \cdot z(a,e;p)} f(a, e) da de \\ &= \int_{S^l} \int_{R^{l+1}} e^{\sum_{j=1}^{l} \alpha^j ((p^j)^{-1} a^j p \cdot e - e^j)} f(a, e) da de. \end{aligned}$$

共轭参数 $\alpha(p) \in R^l$ 是方程 (2.36) 的解，即此处该方程组的解

$$\int_{S^l} \int_{R^{l+1}} ((p^j)^{-1} a^j p \cdot e - e^j) e^{\Sigma_{j=1}^{l} \alpha^j(p) ((p^j)^{-1} a^j p \cdot e - e^j)} f(a, e) da de = 0,\ j = 1, ..., l.$$

对于个体配分函数，我们得到以下公式

$$\begin{aligned}\lambda(p) &= \lambda(\alpha(p);p)\\ &= \int_{S^l}\int_{R^{l+1}} e^{\sum_{j=1}^{l}\alpha^j(p)((p^j)^{-1}a^jp\cdot e-e^j)}f(a,e)dade,\end{aligned}$$

参见（2.35）。根据（2.37），理想随机 CD 经济的第二定律具有如下形式

$$I(p)=-n\log\int_{S^l}\int_{R^{l+1}} e^{\sum_{j=1}^{l}\alpha^j(p)((p^j)^{-1}a^jp\cdot e-e^j)}f(a,e)dade.$$

（ii）由 n 个统计上独立且同分布的金融主体构成理想随机金融市场。主体 i 的经济特征 θ_i 自然可选为一个 m 维（$m=l^2+2l+2$）向量，其中包括其风险参数 $a_i\in R$、其主观预期向量 $\mu_{\psi;i}\in R^l$ 和协方差 $\Sigma_{\psi;i}\in R^{l\times l}$，以及其初始禀赋 $e_i\in R^{l+1}$:

$$\theta_i\doteq(a_i,\mu_{\psi;i},\Sigma_{\psi;i},e_i),\ i=1,...,n.$$

个体超额需求的结构函数为（参见 [9]）

$$\begin{aligned}z(\theta;p) &= z(a,\mu_\psi,\Sigma_\psi,e)\\ &\doteq (a\Sigma_\psi)^{-1}\mu-\frac{p^T(a\Sigma_\psi)^{-1}\mu-p^Te}{p^T(a\Sigma_\psi)^{-1}p}(a\Sigma_\psi)^{-1}p.\end{aligned}$$

（iii）考虑第 2.2 节中描述的生存模型（其中的例（iii））。

根据大数定律，在适当的正则条件下，均衡价格 p^* 下未存活个体的比例 $n^*=n^{-1}N(p^*)$ 先验上接近于随机选取的主体在期望均衡价格下未存活的概率:

$$n^*\approx n_e^*\doteq P(p_e^*\cdot e<\underline{w}(p_e^*)).$$

然而，同样由于先验模型并不完善，实际实现的比例 n^* 很可能在该模型中构成一次大偏差。对价格为p 的随机均衡价格以及在 x 处的未存活个体比例进行同时观测，其信息量由广义第二定律 (2.29) 给出。由于假设个体之间具有统计独立性，广义第二定律现在具有如下形式（参见 (2.37)）

$$I(p,x)=-n\log\lambda(p,x)+n\beta(p,x)\cdot x,$$

其中，$\lambda(p,\ x)$ 和 $\beta(p,\ x)$ 分别表示个体配分函数和共轭参数，它们定义为方程 (2.28) 的解。

2.5. 第二定律与中心极限定理

根据大数定律，随机均衡价格先验“接近”其期望值：

$$p^* \to p_e^* \text{ as } n \to \infty,$$

([6], [33])。

关于随机均衡价格（r.e.p.）([6])的中心极限定理表明，随机均衡价格 p^* 相对于其期望值 p_e^* 的“小偏差”渐近服从正态分布。具体而言，在适当的正则条件下

$$\sqrt{n}(p^* - p_e^*) \to \mathcal{N}(0, \Sigma) \text{ as } n \to \infty,$$

其中，$\mathcal{N}(0, \Sigma)$表示一个均值为零、协方差为 Σ的多元正态随机向量。因此

$$p^* \approx \mathcal{N}(p_e^*, n^{-1}\Sigma) \text{ for large } n \tag{2.40}$$

因此，随机均衡价格 p^* 本身的分布标准差渐近地具有 $\frac{1}{\sqrt{n}}$这一小量级。这意味着中心极限定理描述的是“中观经济中间尺度” $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 上的随机波动，该尺度介于“微观”与“宏观经济尺度” $\frac{1}{n}$ 和1之间。

由此可知，若随机均衡价格 p^* 的观测值 p 恰好落在距其期望值 p_e^*约 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的范围内，那么根据（2.40），可借助中心极限定理近似计算这一观测结果的概率：

$$\begin{aligned} P(\exists p^* : |p^* - p| < \delta) &= P(\exists p^* : |\sqrt{n}p^* - \sqrt{n}p| < \sqrt{n}\delta) \\ &\approx C n^{\frac{l}{2}} \delta^l e^{-\frac{n}{2}(p-p_e^*)^T \Sigma^{-1}(p-p_e^*)}, \end{aligned}$$

其中，C 是一个常数，并且同样地，假定“容差” $\delta > 0$ 很小。此外，由于 $\frac{\log(C n^{\frac{l}{2}} \delta^l)}{n} \to 0$ 当 $n \to \infty$时，该概率具有指数阶

$$e^{-\frac{n}{2}(p-p_e^*)^T \Sigma^{-1}(p-p_e^*)}.$$

因此，在距 p_e^*约为 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的距离处，熵近似为

$$I(p) \doteq -\log P(\exists p^* : |p^* - p| < \delta) \approx \frac{n}{2}(p - p_e^*)^T \Sigma^{-1}(p - p_e^*).$$

这种基于中心极限定理的近似与第二定律一致（正如其应当的那样）。也就是说，

$$-\log \Lambda(p) \approx \frac{n}{2}(p - p_e^*)^T \Sigma^{-1}(p - p_e^*),$$

当 p 接近 p_e^* 时（参见 [34]: 公式（3.2）] 以及 [6]: 定理 4.1(iii)]）。

在其（狭窄的）有效范围之外，这种基于中心极限定理的第二定律近似不再有效，因此使用它在数学上是不合理的。

REMARK. 介观尺度在统计力学中指的是热力学平衡中的微小高斯随机涨落。

3. 吉布斯条件原理

3.1. 热力学中的吉布斯条件原理

设 $\beta > 0$ 为任意固定的逆温度。

根据热力学配分函数 $\Lambda(\beta)$ 的定义 (2.3),

$$P(d\omega|\beta) \doteq \Lambda(\beta)^{-1} e^{-\beta U(\omega)} d\omega \tag{3.1}$$

它是热力学系综 Ω 上的一个概率律。它称为正则概率律（在 β处）。相应的概率分布函数（p.d.f.）

$$p(\omega|\beta) \doteq \Lambda(\beta)^{-1} e^{-\beta U(\omega)} \tag{3.2}$$

称为正则概率分布函数。

能量 $U = (U(\omega);\ \omega \in \Omega)$ 可视为正则概率律 $P(d\omega|\beta)$ 下的一个随机变量，而内能 $E(\beta)$ 可解释为它的期望。也就是说，根据 (2.3) 和 (2.4)，我们有

$$\begin{aligned} E(U|\beta) &\doteq \int U(\omega) P(d\omega|\beta) \\ &= \Lambda(\beta)^{-1} \int U(\omega) e^{-\beta U(\omega)} d\omega \\ &= -\frac{d}{d\beta} \log \int e^{-\beta U(\omega)} d\omega \\ &= E(\beta). \end{aligned} \tag{3.3}$$

根据吉布斯条件原理 *(GCP)*，热力学系统由测得温度下的典范概率律支配。（回想一下，温度 $T = \frac{1}{\beta}$ 的测量意味着能量 $U(\omega)$ 位于相应内能 $E(\beta)$ 的邻域内，见 (2.1)。）

Example: The ideal gas. 鉴于 (2.9) 和 (2.10)，理想气体的典范概率律具有以下乘积形式:

$$P(d\omega|\beta) = \Lambda(\beta)^{-1} e^{-\beta \sum_{i=1}^{n} u(\theta_i)} d\omega = f(\theta_1|\beta) \cdots f(\theta_n|\beta) d\theta_1 \cdots d\theta_n,$$

其中

$$f(\theta|\beta) = \lambda(\beta)^{-1} e^{-\beta u(\theta)} = (2\pi m)^{-\frac{3}{2}} \beta^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\beta|\theta|^2}{2m}},\ \theta \in R^3, \tag{3.4}$$

是定义在 R^3 上的高斯概率分布函数，称为微正则概率密度函数

因此，根据吉布斯条件原理，理想气体中粒子的动量 θ_i 是服从高斯微正则概率密度函数的独立同分布随机变量。

3.2. 随机均衡经济学中的吉布斯条件原理

吉布斯条件原理在随机的均衡经济学中有一个类比:

假设我们观察到随机均衡价格 p^* 在价格 p 处（见 2.19）。由于大数定律, 观测值 p 必然等于（或至少"接近"）未知的"真实"后验宏观经济概率律 P（$d\omega|\exists p^*:\ |p^*-p|<\delta$）下的期望均衡价格。因此，在理想极限 $n=\infty$, $\delta=0$ 下，我们应有

$$E(Z(p)|\exists p^*:|p^*-p|<\delta)\doteq\int Z(\omega;p)P(d\omega|\exists p^*:|p^*-p|<\delta)=0.$$

这意味着，后验宏观经济概率分布函数 g（$\omega|\exists p^*:\ |p^*-p|<\delta$），定义为相对于先验律的后验宏观经济概率律的密度,

$$g(\omega|\exists p^*:|p^*-p|<\delta)P(d\omega)\doteq P(d\omega|\exists p^*:|p^*-p|<\delta)$$

应满足以下关系

$$\int Z(\omega;p)g(\omega|\exists p^*:|p^*-p|<\delta)P(d\omega)=0. \tag{3.5}$$

尽管条件（3.5）是后验概率密度函数的必要条件，但仅凭这一条件不足以对其作出唯一刻画。吉布斯条件原理的经济学类比将把所谓的典范宏观经济概率密度函数 刻画为后验概率密度函数。正如预期的那样，典范宏观经济概率密度函数满足（3.5），见（3.9）。

由条件（3.5）启发，我们给出以下定义:

定义3.1. 若价格 p 是变换后的宏观经济概率律 $P_g(d\omega;\ p)\doteq g(\omega;\ p)P(d\omega)$下的期望均衡价格，即存在一个严格为正的概率分布函数 $g(\omega;p)>0$, $\int g(\omega;\ p)P(d\omega)=1$, 使得 p，则称其为（先验）可能的均衡价格（*p.e.p.*），即:

$$E_gZ(p)\doteq\int Z(\omega;p)g(\omega;p)P(d\omega)=0. \tag{3.6}$$

满足（3.6）的概率分布函数 $g(\omega;p)$，可视为后验宏观经济概率密度函数 $g(\omega|\exists p^*:\ |p^*-p|<\delta)$的候选项。

对于任何存在满足方程 (2.23) 的共轭参数 $\alpha(p)$的价格 p，我们都可以与之关联一个概率密度函数；由于热力学类比，它被称为典范宏观经济概率密度函数:

$$g(\omega|p)\doteq\Lambda(p)^{-1}e^{\alpha(p)\cdot Z(\omega;p)} \tag{3.7}$$

我们将在定理 4.1 中证明，共轭参数$\alpha(p)$的存在等价于 p 是可能的均衡价格。典范宏观经济概率密度函数这一记法预示了它作为后验宏观经济概率密度函数的作用。

概率律

$$P(d\omega|p) \doteq g(\omega|p)P(d\omega) = \Lambda(p)^{-1}e^{\alpha(p)\cdot Z(\omega;p)}P(d\omega) \tag{3.8}$$

称为典范（宏观经济）概率律。

与热力学公式 (3.3) 类比，price p 是相关典范概率律下的期望均衡价格：

也就是说，根据 (2.22)、(2.23) 和 (2.24)，我们有

$$\begin{aligned} E(Z(p)|p) &\doteq \int Z(\omega;p)g(\omega|p)P(d\omega) \\ &= \Lambda(p)^{-1}\int Z(\omega;p)e^{\alpha(p)\cdot Z(\omega;p)}P(d\omega) \\ &= \Lambda(\alpha(p);p)^{-1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Lambda(\alpha(p);p) \\ &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\log\Lambda(\alpha(p);p) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

这意味着典范概率密度函数是后验宏观经济概率密度函数的一个候选项。

事实上，根据吉布斯条件原理的经济学类比，在观测到随机均衡价格为某个可能的均衡价格这一条件下，随之得到的后验宏观经济概率分布函数由典范宏观经济概率密度函数给出：

随机均衡经济学中的吉布斯条件原理：

$$g(\omega|\exists p^* : |p^* - p| < \delta) = g(\omega|p). \tag{3.10}$$

Remarks: (i)当然，等价地，根据(3.10)，后验宏观经济概率律由典范宏观经济概率律给出：

$$P(d\omega|\exists p^* : |p^* - p| < \delta) = P(d\omega|p).$$

在下文中，我们将经常使用概率律而非概率分布函数来表述 GCP。

（ii）从几何角度看，可能的均衡价格的定义意味着：0 属于总超额需求分布的支撑集的凸包的拓扑内部，参见第 4.2 节中的定理 4.1。

（iii）作为一个定理，GCP 关注的是关于宏观经济随机变量的条件大数定律（第5.2节中的定理 5.1）。根据条件大数定律，在观测到随机均衡价格的条件下，宏观经济随机变量以其正则期望为中心。

（iv）根据最小熵原理（PME），在对随机均衡价格进行部分观测的条件下（见2.3中的注释（iv）），后验随机均衡价格等于与该观测相容的熵最小化价格：

$$\exists p^* \in B \Rightarrow p^* = p^*_B,$$

参见 [36]：定理3.7。结合GCP可知，在对均衡价格进行部分观测的条件下，后验宏观经济概率律由与熵最小化价格相对应的典范概率律给出：

$$P(d\omega|\exists p^* \in B) = P(d\omega|p^*_B),$$

参见 [36]: 定理4.7。

（v）类比于将可能的均衡价格表征为总超额需求的累积量生成函数的导数的零点，可以将可能复合均衡（*p.c.e.*）表征为一对（$p,\ x$）$\in S^l \times R^d$，使得共轭变量 α（$p,\ x$）和 β（$p,\ x$）可通过方程（2.28）相互关联。

与 p.c.e. $(p,\ x)$ 相关联的典范宏观经济概率律 定义为

$$P(d\omega|p,x) \doteq \Lambda(p,x)^{-1} e^{\alpha(p,x)\cdot Z(\omega;p)+\beta(p,x)\cdot X(\omega;p)} P(d\omega). \tag{3.11}$$

根据广义吉布斯条件原理，在观察到价格—变量对 $(p,\ x)$ 处的随机复合均衡后，起支配作用的后验宏观经济概率律由与该观察相关联的典范宏观经济概率律 (3.11) 给出：

$$P(d\omega|\exists p^* : |p^* - p| < \delta, |x^* - x| < \delta) = P(d\omega|p,x).$$

3.3. 理想随机经济的吉布斯条件原理

考虑第2.4节所述的理想随机经济。根据式（2.30）、（2.32）、（2.34）和（3.8），典范宏观经济概率律具有乘积形式

$$\begin{aligned} P(d\omega|p) &= \Lambda(p)^{-1} e^{\sum_{i=1}^{n} \alpha(p)\cdot z(\theta_i;p)} f(\theta_1)\cdots f(\theta_n) d\theta_1 \cdots d\theta_n \\ &= f(\theta_1|p)\cdots f(\theta_n|p) d\theta_1 \cdots d\theta_n, \end{aligned} \tag{3.12}$$

其中

$$f(\theta|p) \doteq \lambda(p)^{-1} e^{\alpha(p)\cdot z(\theta;p)} f(\theta) \tag{3.13}$$

是定义在经济特征集合 Θ 上的概率分布函数。它称为典范微观经济密度函数（与价格 p 相关联）。因此，在典范宏观经济概率律下，经济特征是服从典范微观经济概率密度函数的独立同分布随机变量。

由此可应用 GCP（3.10）得出，在理想随机经济中，若观测到的随机均衡价格为 p，则以此为条件，该经济仍是理想的，即经济特征是独立同分布的，且后验微观经济概率密度函数由典范微观经济概率密度函数给出：

$$f(\theta|\exists p^* : |p^* - p| < \delta) = f(\theta|p). \tag{3.14}$$

Examples: (i) 再次考虑理想随机柯布-道格拉斯经济。根据 GCP，在观测到均衡价格的条件下，后验经济仍是理想柯布-道格拉斯经济，其后验微观经济概率密度函数就是典范微观经济概率密度函数：

$$\begin{aligned} f(a,e|\exists p^* : |p^* - p| < \delta) &= f(a,e|p) \\ &\doteq \lambda(p)^{-1} e^{\alpha(p)\cdot z(a,e;p)} f(a,e) \\ &= \lambda(p)^{-1} e^{\Sigma_{j=1}^{l} \alpha^j(p)((p^j)^{-1} a^j p \cdot e - e^j)} f(a,e). \end{aligned} \tag{3.15}$$

参见（3.13）和（2.38）。

（ii）再次考虑第 2.2 节例（iii）中的生存模型，并假设其基础柯布-道格拉斯经济是理想的。假设在价格 p 下观测到随机均衡价格 p^*，以及在 x 处未存活个体的比例 x^*（参见第 2.3 节注释（iv））。由此得到的后验微观经济概率密度函数现在由相应的典范微观经济概率密度函数 $f(a, e|p, x)$ 给出：

$$f(a,e|\exists p^* : |p^* - p| < \delta, |x^* - x| < \delta) = f(a,e|p,x).$$

如果仅观测到未存活个体的比例 x^*，即我们仅对随机复合均衡 (p^*, x^*) 进行了部分观测，那么根据 PME 和 GCP，后验微观经济概率密度函数为

$$f(a,e||x^* - x| < \delta) = f(a,e|x) \doteq f(a,e|p(x),x),$$

其中 $p(x)$表示使双变量熵（2.29）在价格变量上达到最小值的价格：

$$I(p(x),x) = \min_p I(p,x) = \min_p(-n \log \lambda(p,x) + n\beta(p,x)\cdot x).$$

第二部分：精确结果

4. 大偏差定理

4.1. 作为大偏差定理的热力学第二定律

设 $\beta > 0$ 为任意一个固定的逆温度。

回顾第 3.1 节，热力学系统的能量 $U = \{U(\omega);\ \omega \in \Omega\}$ 可视为系综 Ω 上、遵循典范概率律 $P(d\omega|\beta)$ 的随机变量。还需回顾的是，此时内能 $E(\beta)$ 等于 U 的期望。

假设能量在典范概率律 $P(d\omega|\beta)$; 下满足（弱）大数定律；也就是说，

$$\lim_{n\to\infty} P(n^{-1}|U - E(\beta)| < \varepsilon|\beta) = 1 \text{ for all } \varepsilon > 0. \tag{4.1}$$

在这一假设下，热力学第二定律可以表述为一个关于能量的大偏差定理（TLD）。

为此，令 $\delta > 0$ 为任意一个固定常数。于是可以证明,

$$|\log Vol(|U - E(\beta)| < n\delta) - (\log \Lambda(\beta) + \beta E(\beta))| < n\delta \text{ eventually.} \tag{4.2}$$

“最终”与“对于所有充分大的 n”含义相同。显然，这也意味着以下结论:

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} |n^{-1}[\log Vol(|U - E(\beta)| < n\delta) - (\log \Lambda(\beta) + \beta E(\beta))]| = 0. \tag{4.3}$$

热力学第二定律（2.8）的（积分形式）是在理想极限 $n = \infty,\ \ \delta = 0$.下由（4.3）得到的

为证明（4.2），首先注意到，由于（4.1），

$$\gamma_n \doteq \log P(|U - E(\beta)| < \frac{n\delta}{2\beta}) \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

另一方面，根据正则概率律的定义（3.1），我们也可以写成

$$\gamma_n = \log \int\limits_{\{|U-E(\beta)|<\frac{n\delta}{2\beta}|\beta\}} e^{-\beta U(\omega)} d\omega - \log \Lambda(\beta). \tag{4.4}$$

显然,

$$|\log \int\limits_{\{|U-E(\beta)|<\frac{n\delta}{2\beta}\}} e^{-\beta U(\omega)} d\omega - \log Vol(|U-E(\beta)| < \frac{n\delta}{2\beta}) + \beta E(\beta)| \le \frac{n\delta}{2}, \tag{4.5}$$

结合（4.4）和（4.5），可得:

$$|\log Vol(|U-E(\beta)|<\frac{n\delta}{2\beta})-(\log\Lambda(\beta)+\beta E(\beta))|\leq\frac{n\delta}{2}+\gamma_n,$$

由此显然可得式（4.3）。

Example: The ideal gas 理想气体粒子 $u_i=\frac{|\theta_i|^2}{2m}$ 的能量在正则系综定律下是独立同分布随机变量。因此，由于关于独立同分布随机变量的经典大数定律，TLD 的假设（4.1）自动成立:

$$\lim_{n\to\infty}P(|n^{-1}U-\frac{3}{2\beta}|<\delta|\beta)=1\text{ for all }\delta>0.$$

（回顾式（2.11）和（2.12）中的内能公式。）

鉴于式（2.13）给出的理想气体熵公式，TLD 可写成如下形式 (4.2)

$\lim_{\delta\to0}\lim_{n\to\infty}|n^{-1}\log Vol(|n^{-1}U-\frac{3}{2\beta}|<\delta)+\frac{3}{2}\log\beta-\frac{3}{2}\log 2\pi em|<n\delta$ 事件最终。

4.2. 可能的均衡价格的刻画

为了能够将经济学第二定律表述为 TLD，我们需要对可能的均衡价格作如下刻画。

如果存在一个低维仿射超平面 $H\subset R^{l'}$，使得 $l'<l$ (P) $X\in H$，我们就称随机变量 $X\in R^l$ 为退化的。否则，我们称 X 为非退化的。

随机变量 X 的支撑集定义为满足 $P(X\in F)=1$ 的最小拓扑闭集 F。

定理 4.1. 设 p 是一个任意属于其内部的价格

$$\mathring{S}^l\doteq\{p\in S^l:\ p^j>0\ for\ all\ j=1,...,l+1\}$$

价格单纯形 S^l。假设超额需求 $Z(p)$ 是非退化的。那么，以下四个条件等价:

(i) p 是可能的均衡价格;

(ii)0 属于总超额需求分布支撑集的凸包的拓扑内部;

(iii) there exists a conjugate parameter $\alpha(p)\in R^l$ satisfying (2.23);

(iv) 价格 p 是正则概率律下的期望均衡价格:

$$E(Z(p)|p)\doteq\int Z(\omega;p)P(d\omega|p)=\int Z(\omega;p)g(\omega|p)P(d\omega)=0.$$

证明。 假设 p 是一个可能的均衡价格，即存在一个严格为正的概率密度函数 $g(\omega; p)$，使得 p 是变换后的概率律 $P_g(d\omega; p) \doteq g(\omega; p)P(d\omega)$下的期望均衡价格。由于 P 和 P_g 彼此绝对连续（作为测度，参见 [8]: 第422页），因此 $Z(p)$ 在 P_g下也不是退化的。众所周知，非退化随机变量的期望属于该随机变量分布支撑集的凸包的拓扑内部。这就证明了(ii)。

现在假设 (ii) 成立。随机变量的累积量生成函数（≐拉普拉斯变换的对数）的导数，在累积量生成函数的定义域与该随机变量支撑集的凸包内部之间定义了一个双射（[38]: 定理 26.5, [5]: 命题 9.7，[32]）。因此可知，0 属于累积量生成函数导数 $\log \Lambda(\alpha; p)$ 的值域，也就是说，共轭参数 $\alpha(p) \in R^l$ 存在。

(iv) 可由 (iii) 推出，这一点已在 (3.9) 中证明。
(iv) ⇒(i) 这一推论显然成立。 □

4.3. 随机均衡经济学第二定律作为大偏差定理

我们现在能够将第二定律表述为一个关于随机均衡价格的大偏差定理（TLD）。

为此，令 p 为价格单纯形 S^l内部 $\mathring{S}^l$ 的任意一个可能的均衡价格。我们提出三个假设:

(i) 随机总超额需求 $Z(p)$在典范概率律 $P(d\omega|p)$下满足（弱）大数定律，即

$$\lim_{n\to\infty} P(|n^{-1}Z(p)| < \varepsilon|p) = 1 \text{ for all } \varepsilon > 0.$$

回顾定理 4.1， $E(Z(p)|p) = 0$。

(ii) 平均总超额需求 $n^{-1}Z(q)$的二阶导数在价格 p的某个闭邻域U 上有界；也就是说，存在常数$A_2 < \infty$ 使得

$$|n^{-1}Z''(q)| < A_2 \text{ for } q \in \overline{U}.$$

(iii) 导数（矩阵） $Z'(p) \in R^{l\times l}$ 可逆，而且平均总超额需求的导数的逆有界；也就是说，存在常数 $A_{-1} < \infty$ 使得

$$|nZ'(p)^{-1}| < A_{-1}.$$

定理 4.2. 在上述假设 *(i) - (iii)* 下，对任意 $\delta > 0$,

$$|\mathcal{I}(\exists p^* : |p^* - p| < \delta|) - \log \Lambda(p)| < \varepsilon(\delta)n \text{ } eventually,$$

其中 $\varepsilon(\delta) \to 0$ 作为 $\delta \to 0$。

REMARK.显然，定理 4.1 的陈述意味着

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}|n^{-1}[\mathcal{I}(\exists p^*:|p^*-p|<\delta)+\log\Lambda(p)]|=0.$$

证明。证明的前半部分与热力学 TLD 的证明类似，参见第 4.1 节。

首先注意到，由于 (i)，

$$\gamma_n \doteq \log P(|Z(p)|<n\varepsilon|p)\to 0 \text{ as } n\to\infty.$$

另一方面，根据典范宏观经济概率律的定义 (3.8)，我们也可以写成

$$\gamma_n=\log\int\limits_{\{|Z(p)|<n\varepsilon\}} e^{\alpha\cdot Z(\omega;p)}P(d\omega)-\log\Lambda(p). \tag{4.6}$$

显然，

$$|\log\int\limits_{\{|Z(p)|<n\varepsilon\}} e^{\alpha\cdot Z(\omega;p)}P(d\omega)-\log P(|Z(p)|<n\varepsilon)|\le|\alpha|n\varepsilon, \tag{4.7}$$

结合 (4.6) 和 (4.7)，我们得到：

$$|\log P(|n^{-1}Z(p)|<\varepsilon)-\log\Lambda(p)|\le|\alpha|n\varepsilon+\gamma_n. \tag{4.8}$$

现在，利用标准中值定理和一个特殊的反函数定理（见 [36]: 引理 2.5），可以证明假设 (ii) 和 (iii) 意味着：当且仅当在 p 的邻域内存在随机均衡价格时，平均总超额需求 $n^{-1}Z(p)$ 才在 0 的邻域内，参见[36]: 定理 2.2 的证明。因此，可以由 (4.8) 推得

$$|\log P(\exists p^*:|p^*-p|<\delta|)-\log\Lambda(p)|<\varepsilon(\delta)n \text{ eventually},$$

其中 $\varepsilon(\delta)\to 0$ as $\delta\to 0$。这证明了所断言的 TLD。 □

REMARKS: (i) 假设 (i) 是热力学 TLD 中 (4.1) 的对应形式。

(ii) 用概率表示，TLD 的表述可以写为：

$$\Lambda(p)e^{-n\varepsilon(\delta)}<P(\exists p^*:|p^*-p|<\delta)<\Lambda(p)e^{n\varepsilon(\delta)} \text{ eventually}.$$

如果只有右侧的不等式成立，即：

$$P(\exists p^*:|p^*-p|<\delta)<\Lambda(p)e^{n\varepsilon(\delta)} \text{ eventually},$$

那么称大偏差上界 在 p 处成立。仅大偏差上界便意味着随机均衡价格的大数定律（[36]: 定理 3.5）。

(iii) 关于假设 (iii) 的一种较弱替代版本，参见 [23]。

(iv) 根据关于部分观测的 TLD，在适当的正则条件下，我们有

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}|\mathcal{I}(\exists p^* \in B) + \log \Lambda(p_B^*)| = 0,$$

其中 $B \subset S^l$ 是凸的， p_B^* 表示 B 中的熵最小化价格，参见 [36]: 定理 3.4。部分观测的最小熵原理（参见 2.3 中的注释 (iii)）可由此在理想极限 $n = \infty$. 下得到

4.4. 理想随机经济的大偏差定理

定理 4.1 的以下推论给出了价格 p 成为理想随机经济中可能的均衡价格的充分条件。

令 Θ 表示微观经济学概率密度函数严格为正的参数值集合:

$$\Theta \doteq \{\theta \in R^m;\ f(\theta) > 0\}.$$

其拓扑闭包 Θ 等于经济主体的经济特征 θ_i的支撑集，参见第 4.2 节。

推论 4.1. 设 p 为价格单纯形内部 $\mathring{S}^l$ 中的任意价格。假设

(i) 经济特征 θ_i 是维度为$m \geq l$的有界随机变量;

(ii) 微观经济学概率密度函数 $f(\theta)$ 在其支撑集 Θ;上连续;

(iii) 结构函数的导数 $\frac{\partial z}{(\theta;p)\,\partial\theta}$ 在 $\Theta \times \mathring{S}^l$上连续；并且

(iv) 存在一个参数 $\theta = \theta(p) \in \Theta$ ，使得 $z(\theta(p); p) = 0$ ，且矩阵 $\frac{\partial z}{(\theta;}$ $\frac{}{\partial\theta^p} \in \underline{R^{m\times l}})$ 在 $\theta = \theta(p)$处具有满秩$(= l)$ 。

那么 p就是一种可能的均衡价格。

证明。 由 (i) 和 (ii) 可知，支撑集 Θ 是紧集，而 $\overline{\Theta}$ 是其（相对）开子集。此外，根据 (iii) 和 (iv)，并应用隐函数定理（例如参见 [24]），结构函数函数

$z(\theta;p)$ 在 $\theta(p)$ 的某个邻域内可逆，即存在常数 $\delta>0$，使得对于 $|z|<\delta$，存在 $\theta=\theta(p,\ z)\in\Theta$，满足

$$z(\theta(p,z);p)\equiv z.$$

此外，逆函数 $\theta(p,\ z)$ 是其变量 p 和z 的连续函数。令 $\varepsilon>0$ 为任意正数。由 (iii) 可知，结构函数 $z(\theta;p)$ 连续，因此存在一个常数 $\eta_\varepsilon>0$，使得只要 $|\theta-\theta(p,\ z)|<\eta_\varepsilon$，就有$|z(\theta;\ p)-z|<\varepsilon$。由 (ii) 可知，$f(\theta)$ 在 $\theta(p,\ z)\in\Theta$ 的某个邻域内严格为正，因此对于任意 $|z|<\delta$,

$$P(|z(\theta_i;p)-z|<\varepsilon)\geq P(|\theta_i-\theta(p;z)|<\eta_\varepsilon)=\int\limits_{\{|\theta-\theta(p;z)|<\eta_\varepsilon\}} f(\theta)d\theta>0,$$

也就是说，0 属于个体超额需求 $\zeta_i(p)=z(\theta_i;p)$ 的分布的支撑集的拓扑内部。回顾定理 4.1 的证明中所用的论证，可知 0 属于导数$\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\lambda(\alpha;p)$ 的值域。根据同一定理和关系式 (2.36)，p是一个可能的均衡价格。

□

在下面的推论中，我们提出一组充分条件，使 TLD 对理想随机经济成立：

推论 4.2。令 $p\in\mathring{S}^l$ 为任意值。假设推论 *4.1* 的条件 *(i) - (iv)* 成立（因此 p 是一个可能的均衡价格）。此外，假设

(v) 导数 $\partial^2 z(\theta;p)\,\partial p^2$ 在 $\Theta\times U$ 上连续，其中$U\subset\overline{\mathring{S}^l}$ 是 p 的某个闭邻域；并且

(vi) $z(\theta;p)$ 是确定性函数 $z(p)$ 的有界扰动（即，$z(p)$ 不依赖于参数 θ），具体如下：

$$\rho\doteq\max_{\theta\in\overline{\Theta}}|\frac{\partial z}{\partial p}(\theta;p)z'(p)^{-1}-I|<1.$$

那么，*TLD* 在价格 p 处成立。

证明。我们证明一般 TLD（定理 4.2）的假设 (i) - (iii) 成立。

回想一下，在典范宏观经济概率律下，经济特征是独立同分布的，并服从典范概率密度函数 $f(\theta|p)$。因此，作为其确定性变换，微观经济随机变量 $\zeta_i(p)=z(\theta_i;p)$ 也服从独立同分布。由此，一般 TLD 的假设 (i) 可直接由独立同分布随机变量的大数定律推出。

条件 (v) 意味着，$\partial^2 z(\theta;q)/\partial q^2$ 在紧集 $\Theta \times U$ 上有界，且其上界为某个常数 A_2 。因此

$$|Z''(q)| = |\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 z(\theta_i;q)}{\partial q^2}| \leq A_2 n \text{ on } \overline{U}.$$

因此，TLD 的假设 (ii) 成立。

根据 (vi)，我们有

$$|n^{-1}Z'(p)z'(p)^{-1} - I| = |n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial z}{\partial p}(\theta_i;p)z'(p)^{-1} - I| \leq \rho,$$

由此可得

$$|Z'(p)^{-1}| < \frac{|z'(p)^{-1}|}{n(1-\rho)},$$

也就是说，对于 $A_{-1} = \frac{|z'}{(p^{-1}|)}{1-\rho}$，TLD 的假设 (iii) 得到满足。 □

REMARKS: (i) 条件 (vi) 可以大幅弱化（[23]）。也就是说，只需假设个体预期超额需求的导数 $\mu'(p)$ 非奇异。显然，在柯布-道格拉斯情形中，Det $\mu'(p) = 0$是一个多项式方程，因此，除价格集合 p 中一个勒贝格零测集外，$\mu'(p)$ 均为非奇异。

(ii) 假设 $l = 1$，使得 p 和 $z(\theta;p)$ 是标量。自然可以假设 $z'(p) < 0$。在这种情况下，条件 (vi) 变为

(vi') $$(2-\delta)z'(p) \leq \frac{\partial z}{\partial p}(\theta;p) \leq \delta z'(p) \text{ for some } \delta > 0.$$

推论 4.1 的以下推论给出了价格 $p \in \mathring{S}^l$ 在理想 CD 经济中成为可能的均衡价格的充分条件。令

$$\Theta \doteq \{\theta = (a,e) \in S^l \times R^{l+1} : \ f(a,e) > 0\}.$$

推论 4.3。假设

(i) 初始禀赋 e_i 有界；

(ii) 微观经济学概率密度函数 $f(a,e)$ 在支撑集 Θ上连续；并且

(iii) 微观经济学概率密度函数 $f(a,e)$ 在 $a = p,\ e \equiv 1$处严格为正（即，$\theta(p) \doteq (p, 1) \in \Theta$）。

那么 p是一个可能的均衡价格。

证明。 我们验证推论 4.1 的条件 (i)-(iv)：

对于理想随机 CD 经济，经济特征 $\theta = (a, e)$的维度 m 为 $2l + 1$，符合推论 4.1 的要求。由于份额参数属于（有界）单纯形 S^l，因此经济特征 $\theta_i = (a_i, e_i)$有界，符合要求。

显然，CD 主体的结构函数 (2.38) 关于其变量 $a \in S^l$、 $e \in R^{l+1}$ 和 $p \in \mathring{S}^l$ 是无穷阶可微的。因此，推论 4.1 的条件 (iii) 自动得到满足。

直接计算可得

$$z(\theta(p); p) = z(p, 1; p) = 0.$$

此外，容易看出，导数

$$\frac{\partial z(a, e; p)}{\partial a} \in R^{(l+1)\times l})$$

在 $\theta(p) = p$,1 处具有（满）秩 $(= l)$。因此，推论 4.1 的条件 (iv) 也得到满足。 □

在下面的推论中，我们给出 TLD 对理想随机 CD 成立的一组充分条件。为简单起见，我们假设 $l = 1$。

推论 4.4。 假设 $l = 1$，且推论 *4.3* 的条件 *(i)-(iii)* 成立。此外，假设

(iv) 商品 2 的初始禀赋远离零且有上界，并且商品 1 的份额参数远离零，即对于某些常数 $e^2 > 0$、 $e^2 < \infty$、 $a^1 > 0$.，有 $e^2 \le e^2 \le e^2$ 和 $a^1 \le a^1$

则 *TLD* 成立。

证明。 我们检验推论 4.2 的条件 (i)-(v) 和 (vi') 是否得到满足。

推论 4.2 的条件 (i)-(iv) 已在推论 4.3 的证明中得到验证。条件 (v) 源于价格单纯形内部 CD 主体的结构函数的光滑性，参见推论 4.3 的证明。

为验证条件 (vi') 得到满足，首先注意到

$$\frac{\partial z}{\partial p}(a, e; p) = -p^{-2} a^1 e^2.$$

令 $z(p)$ 表示参数为 $a = (a^1, a^2)$ $e = (1, 2e^2)$ 的确定性 CD 主体的个体超额需求，使得

$$z(p) = \frac{1 - p}{p} \bar{e}^2 - \frac{1}{2}$$

and

$$z'(p) = -p^{-2} \bar{e}^2.$$

直接计算可得，条件 (vi') 对以下情况成立

$$\delta = \frac{\underline{a}^1 \underline{e}^2}{\bar{e}^2}.$$

□

5. 条件大数定律

5.1. 作为条件大数定律的热力学吉布斯条件原理

设 $\beta > 0$ 为一个固定的逆温度。

回想一下，在 β 处测量逆温度，意味着粒子构型 ω 属于能量壳层 $\{|U - E(\beta)| < \Delta\}$，其中$E(\beta)$表示在 β处的内能，而 Δ 表示能量壳层的厚度。在条件大数定律的精确表述中，$\Delta = n\delta$，其中 n 是粒子总数，$\delta \to 0$。

变量 $X = \{X(\omega); \omega \in \Omega\}$，它取决于粒子构型$\omega \in \Omega$，称为热力学变量。这样的变量可以视为正则概率律 $P(d\omega|\beta)$ $\beta > 0$.下的随机变量

作为一个定理，热力学吉布斯条件原理是关于热力学变量的条件大数定律。

如果某个热力学变量 X 正则 （在 β处），即对于 X，在正则概率律 $P(d\omega|\beta)$ 下（弱）大数定律成立，且具有几何速率，那么对所有 $\varepsilon > 0$，都存在常数 $\eta = \eta(\varepsilon; \beta) > 0$，使得

$$P(n^{-1}|X - E(X|\beta)| < \varepsilon|\beta)) > 1 - e^{-n\eta} \text{ eventually.} \tag{5.1}$$

根据条件大数定律，在测得 β处的逆温度后，正则热力学变量会集中 在其正则均值附近；也就是说，在能量壳层 $\{|U-E(\beta)| < \Delta\}$ 内，那些粒子构型 ω 所占总体积的比例中，热力学变量 $X(\omega)$ 接近其正则期望 $E(X|\beta)$ 的比例接近于 1。

具体而言，条件大数定律如下:

假设热力学 TLD 的陈述 (4.3) 在β处成立，即

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} |n^{-1}[\log \mathrm{Vol}(|U - E(\beta)| < n\delta) - (\log \Lambda(\beta) + \beta E(\beta))]| = 0. \tag{5.2}$$

令 X 为任意正则热力学变量，并令 $\varepsilon > 0$ 为任意常数。那么，对于所有充分小的 $\delta > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{Vol}(|X - E(X|\beta)| < n\varepsilon, |U - E(\beta)| < n\delta)}{\mathrm{Vol}(|U - E(\beta)| < n\delta)} = 1. \tag{5.3}$$

为证明这一点，首先注意到，通过反转正则概率律的定义公式 (3.1)，我们可以借助正则概率律表示任意（博雷尔）子集$A \subset \Omega$ 的体积：

$$\mathrm{Vol}(A) = \int_A d\omega = \Lambda(\beta) \int_A e^{\beta U(\omega)} P(d\omega|\beta).$$

令 $\varepsilon > 0$ 为任意常数，并令 $\eta = \eta(\varepsilon; \beta)$ 满足（5.1）。此外，令 $0 < \delta < \frac{\eta}{2\beta}$ 为任意值。现在可以写成

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(|X - E(X|\beta)| \geq n\varepsilon, \quad & | \quad U - E(\beta)| < n\delta) \\
&= \Lambda(\beta) \int\limits_{\{|X-E(X|\beta)|\geq n\varepsilon,\ |U-E(\beta)|<n\delta\}} e^{\beta U(\omega)} P(d\omega|\beta) \\
&\leq \Lambda(\beta) e^{\beta E(\beta) + \beta\delta n} P(|X - E(X|\beta)| \geq n\varepsilon|\beta) \\
&< \Lambda(\beta) e^{\beta E(\beta) + \beta\delta n} e^{-n\eta} \text{ eventually, by (5.1),} \\
&< \Lambda(\beta) e^{\beta E(\beta)} e^{-n\frac{\eta}{2}} \quad \text{because } \delta < \frac{\eta}{2\beta}.
\end{aligned}$$

现在，根据假设（5.2）：

$$\mathrm{Vol}(|U - E(\beta)| < n\delta) > \Lambda(\beta) e^{\beta E(\beta)} e^{-n\frac{\eta}{3}} \text{ eventually,}$$

如果 δ 足够小。因此，对于足够小的 δ，最终有

$$\frac{\mathrm{Vol}(|X - E(X|\beta)| \geq n\varepsilon, |U - E(\beta)| < n\delta)}{\mathrm{Vol}(|U - E(\beta)| < n\delta)} < \frac{\Lambda(\beta) e^{\beta E(\beta)} e^{-n\frac{\eta}{2}}}{\Lambda(\beta) e^{\beta E(\beta)} e^{-n\frac{\eta}{3}}} = e^{-n\frac{\eta}{6}}.$$

这证明了（5.3）成立（且收敛以几何速率进行）。

Example: The ideal gas. 请注意，对于理想气体，TLD 成立（第 4.1 节）。因此，对于任意正则热力学变量，条件大数定律自动成立。

对于理想气体，存在一类自然的正则热力学变量：

为此，令 $A \subset \mathbb{R}^3$ 为 $\mathbb{R}^3$, 的任意（博雷尔可测）子集，并令 $\chi_A(\theta) \doteq 1$ 或 0，分别对应于 $\theta \in A$ 或 $\theta \in A^c$，表示 A 的示性函数。

回想一下，在典范概率律下，粒子的动量 θ_i 是独立同分布的随机变量。因此，对它们进行的（确定性的）变换 $\chi_A(\theta_i)$ 也构成一个独立同分布序列。

我们将热力学变量 N_A 定义为具有动量 $\theta_i \in A$ 的粒子 i的数量：

$$N_A(\omega) \doteq \sum_{i=1}^{n} \chi_A(\theta_i).$$

由此可知， N_A 自动具有正则性。这是一个普遍结论：对于有界的独立同分布随机变量，大数定律中的收敛总是几何级数速度的（例如参见 [15]: 第 2.3 节）。显然

$$E(N_A|\beta) = nP(\theta_i \in A|\beta) = n\int\limits_A f(\theta|\beta),$$

其中， $f(\theta|\beta)$表示由式 (3.4) 给出的高斯正则概率密度函数。

令 $\hat{}n_A \doteq n^{-1}N_A$ 表示动量为 θ_i的粒子 i所占的比例。于是，变量 N_A 的条件大数定律可写为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}(|\hat{n}_A - \int\limits_A f(\theta|\beta)| < \varepsilon, |U - ne(\beta)| < n\delta)}{\mathrm{Vol}(|U - ne(\beta)| < n\delta)} = 1, \tag{5.4}$$

其中， $e(\beta) = \frac{3}{2\beta}$ 表示单个粒子的内能（见式 (2.12)），而ε 和 δ 与式 (5.3) 中的含义相同，都是很小的量。因此，在理想极限 $\varepsilon = 0$下，根据吉布斯条件原理，在测得的逆温度下，对于“绝大多数”粒子构型，动量位于 A内的粒子比例等于 A的正则概率。

按照概率与统计学的标准术语，这些比例 $\hat{}n_A, \quad A \subset R^3$，构成动量 θ_i. 的经验概率分布。条件大数定律的结果 (5.4) 意味着，在热力学极限 $n \to \infty$下，经验概率分布 $\hat{}n$ 收敛于与测得的逆温度相对应的典范概率分布。

5.2. 作为条件大数定律的经济学吉布斯条件原理

作为一个定理，经济学吉布斯条件原理是关于条件大数定律的，涉及宏观经济随机变量。

令 $p \in \mathring{S}^l$ 为一个固定的可能均衡价格（见第3.2节中的定义3.1）。我们提出三个假设 (i) - (iii):

(i) 大偏差定理的陈述在 p处成立，即

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} |n^{-1}[\mathcal{I}(\exists p^* : |p^* - p| < \delta) + \log \Lambda(p)]| = 0,$$

参见定理 4.2

设 $X(p) = \{X(\omega; p); \omega \in \Omega\}$ 为一个宏观经济随机变量，即一个依赖于价格 p 的随机变量。若满足以下条件（参见 (5.1)），则称其为（在价格 p处）正则：

(ii) 在规范概率律 $P(d\omega|p)$下， $X(p)$满足大数定律，且收敛速率为几何速率：对所有 $\varepsilon > 0$ ，均存在常数$\eta = \eta(\varepsilon; p) > 0$ 使得

$$P(n^{-1}|X(p) - E(X(p)|p)| < \varepsilon|p)) > 1 - e^{-n\eta} \text{ eventually.}$$

此外，我们作如下假设：

(iii) 平均总超额需求的导数以及宏观经济变量均值的导数，在价格$\underline{p}$的某个闭邻域 U 上有界；也就是说，存在常数 $A < \infty$ ，使得

$$|n^{-1}Z'(q)| \leq A \text{ on } \overline{U} \text{ and } |n^{-1}X'(q)| \leq A \text{ on } \overline{U}.$$

令 $X^* = X(p^*)$表示宏观经济随机变量$X(p)$在均衡时的值 。

根据条件大数定律，给定在价格 p处观测到一个随机均衡价格这一条件，正则宏观经济随机变量以这样的值为中心：若它们服从与观测到的均衡相对应的典范概率律，它们也会以这些值为中心：

定理 5.1。 在假设 *(i) - (iii)* 下，对于任意固定的 $\varepsilon > 0$ ，以及所有充分小的 $\delta > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P(n^{-1}|X^* - E(X^*|p)| < \varepsilon|\exists p^* : |p^* - p| < \delta) = 1.$$

证明。 通过对典范概率律的定义公式 (3.8) 求逆，我们可以借助典范概率律来表示先验宏观经济概率律：

$$P(d\omega) = \Lambda(p)e^{-\alpha(p)\cdot Z(\omega;p)}P(d\omega|p).$$

令 ε 和 $\gamma > 0$ 为任意常数。（γ 稍后将确定。）现在我们可以写成

$$\begin{aligned}
P(n^{-1}|X(p) &- E(X(p)|p)| \geq \varepsilon,\ n^{-1}|Z(p)| < \gamma) \\
&= \Lambda(p) \int_{\{n^{-1}|X(p)-E(X(p)|p)|\geq\varepsilon,\ n^{-1}|Z(p)|<\gamma\}} e^{-\alpha(p)\cdot Z(\omega;p)}P(d\omega|p) \\
&\leq \Lambda(p)e^{n|\alpha(p)|\gamma}P(n^{-1}|X(p) - E(X(p)|p)| \geq \varepsilon|p) \\
&< \Lambda(p)e^{n|\alpha(p)|\gamma}e^{-n\eta} \text{ eventually, by (iii),} \\
&= \Lambda(p)e^{-n\frac{\eta}{2}} \text{ if we choose } \gamma = \frac{\eta}{2|\alpha(p)|}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

现在，由于假设 (iii) 和标准的中值定理，我们可以得出结论：如果 $\delta > 0$ 足够小，那么事件 $\exists p^* : |p^* - p| < \delta$蕴含事件

$$|n^{-1}Z(p)| < \gamma.$$

因此，当 δ 足够小时，我们也有

$$P(n^{-1}|X(p) - E(X(p)|p)| \geq \varepsilon,\ \exists p^* : |p^* - p| < \delta) < \Lambda(p)e^{-n\frac{\eta}{2}} \text{ eventually.}$$

现在，根据假设 (i):

$$P(\exists p^* : |p^* - p| < \delta) > \Lambda(p)e^{-n\frac{\eta}{3}} \text{ eventually.}$$

因此，当 δ 足够小时，最终有

$$\begin{aligned} P(n^{-1}|X(p) &- E(X(p)|p)| \geq \varepsilon|\ \exists p^* : |p^* - p| < \delta) \\ &= \frac{P(n^{-1}|X(p) - E(X(p)|p)| \geq \varepsilon,\ \exists p^* : |p^* - p| < \delta)}{P(\exists p^* : |p^* - p| < \delta)} \\ &< \frac{\Lambda(p)e^{-n\frac{\eta}{2}}}{\Lambda(p)e^{-n\frac{\eta}{3}}} \\ &= e^{-n\frac{\eta}{6}}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

为完成证明，首先注意，由于 (iii) 和中值定理，若 $|p^* - p| < \delta$，则

$$|n^{-1}X(p^*) - n^{-1}X(p)| \leq A\delta.$$

因此，若 $\delta < \frac{\varepsilon}{A}$ 足够小，则

$$\begin{aligned} &P(n^{-1}|X^* - E(X^*|p)| \geq 3\varepsilon|\ \exists p^* : |p^* - p| < \delta) \\ &< P(n^{-1}|X(p) - E(X(p)|p)| \geq \varepsilon|\ \exists p^* : |p^* - p| < \delta). \end{aligned}$$

如上所证，当 $n \to \infty$ 时，此表达式 $\to 0$ 。 □

Remarks: (i) 关于假设 (ii) 的一个充分条件，参见 [36] 中的引理 4.2。

(ii) 注意，如果 $X(\omega; p) \equiv X(\omega)$ 是一个不依赖价格的宏观经济随机变量，那么假设 (iii) 对它显然成立。在这种情况下，条件大数定律具有如下形式

$$\lim_{n\to\infty} P(n^{-1}|X - E(X|p)| < \varepsilon|\exists p^* : |p^* - p| < \delta) = 1.$$

5.3. 理想随机经济的条件大数定律

考虑第2.4节中所描述的理想随机经济。一个随机变量 $\xi_i(p) = x(\theta_i; p)$ 若通过确定性结构函数 $x(\theta; p)$依赖于经济特征 θ_i 和价格 p，则称为（与主体 i相关的）微观经济随机变量。例如，主体的个体需求、供给、生产或类型（参见下文示例）都属于此类。回顾一下，统计独立性在确定性变换下得以保持。因此，微观经济随机变量 $\xi_i(p)$ 也独立同分布。

定义宏观经济随机变量 $X(p)$ 为以下总和

$$X(p) \doteq \sum_{i=1}^{n} \xi_i(p),$$

并令 $\hat{\ } \xi(p) \doteq n^{-1} X(p)$ 表示其均值。

令 $X^* \doteq X(p^*)$和 $\hat{\xi}^* \doteq \hat{\ } \xi(p^*)$分别表示均衡状态下宏观经济随机变量 $X(p)$ 的值和均值。

显然

$$E(X^*|p) = nE(\xi_i(p^*)|p) = n \int x(\theta; p^*) f(\theta|p) d\theta.$$

定理 5.1 的条件大数定律现在可表述如下：

推论5.1。 假设第 *4.4* 节中的推论*4.1*的条件 *(i)* 和 *(ii)* 成立。此外，假设

(iii) 在价格 p 处 *TLD* 成立（参见第 *4.4* 节中的推论 *4.2*）；并且

(iv) 导数 $\partial z_{(\theta;q)} \partial q$ 和 $\partial x_{(\theta;q)} \partial q$ 在 $\Theta \times U$ 上连续，其中 $U \subset \overline{\mathring{S}^l}$ 是 p 的某个闭邻域。

Then

$$\lim_{n \to \infty} P(|\hat{\xi}^* - \int x(\theta; p^*) f(\theta|p) d\theta| < \varepsilon | \exists p^* : |p^* - p| < \delta) = 1.$$

证明。 我们证明定理 5.1 的假设 (i)–(iii) 成立。回想一下，在第 4.4 节定理 4.1 的条件 (i) 和 (ii) 下，经济特征有界，且其支撑集 Θ 是紧集。根据 (iv)，微观经济随机变量 $\xi_i(p)$ 的结构函数 $x(\theta; p)$ 在 Θ上连续，因此 $\xi_i(p)$ $i = 1$, 2, ... 有界。还要回想一下，在典范宏观经济概率律下，经济特征是独立同分布的，并遵循典范概率密度函数 $f(\theta|p)$。定理 5.1 的假设 (ii) 现可由一项一般结果推出：有界独立同分布随机变量的大数定律收敛总是几何收敛。

由于条件 (iv), $\frac{\partial z}{(\theta;q)\ \partial q}$ 和 $\frac{\partial x}{(\theta;q)\ \partial q}$ 在紧集$\Theta \times U$上有界。因此，同样有 $\bar{}$

$$|n^{-1}Z'(q)| = |n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z(\theta_i;q)}{\partial q}|$$

and

$$|n^{-1}X'(q)| = |n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x(\theta_i;q)}{\partial q}|$$

在 U. 上有相同的常数作为上界。因此，定理 5.1 的假设 (iii) 得到满足。

□

Examples: (i) 考虑第 3.3 节中例 (ii) 的生存模型，并定义微观经济随机变量 $\xi_i(p) \doteq \chi_{\{p\cdot e_i < w\ (p)\ \}}$ 为未存活指示变量。

令 $N(p)$ 表示价格 p 下未存活个体的数量 i：

$$N(p) \doteq \sum_{i=1}^{n}\chi_{\{p\cdot e_i < w(p)\}},$$

并令 $\hat{}n(p) \doteq n^{-1}N(p)$ 表示价格p下未存活个体的比例。

比例 $\hat{}n(p) \doteq n^{-1}N(p)$ 可解释为价格 p. 下未存活的经验概率。作为独立同分布随机变量之和，宏观经济变量 $N(p)$ 自动满足正则性。

令 $N^* \doteq N(p^*)$ 和 $\hat{}n^* \doteq \hat{}n(p^*)$ 分别表示 $N(p)$ 和 $\hat{}n(p)$ 的均衡值 。显然

$$E(N^*|p) = nP(p^*\cdot e_i < w(p^*)|p) = n\int\limits_{\{p^*\cdot e_i < w(p^*)\}} f(\theta|p)d\theta.$$

因此，变量 $N(p)$ 的条件大数定律可写为

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{n}^* - \int\limits_{\{p^*\cdot e_i < w(p^*)\}} f(\theta|p)d\theta| < \varepsilon|\exists p^* : |p^* - p| < \delta) = 1.$$

这意味着，在以观测到均衡为条件时，未存活概率的经验概率收敛于其正则概率。

因此，根据吉布斯条件原理，在理想极限 $\varepsilon = 0$ 下，并且在一个观测到的均衡价格处，对于“绝大多数”宏观经济构型 ω，未存活个体的比例等于未存活的正则概率。

（ii）条件大数定律还意味着经济特征的整体经验概率分布收敛（参见作为类比的理想气体，第 5.1 节）。

为此，设 $A \subset \Theta$ 是微观经济学概率密度函数 $f(\theta)$ 的支撑集 $\Theta \subset R^m$ 的任意（博雷尔）子集，并设 $\chi_A(\theta)$ 表示 A 的示性函数。设具有特征 $\theta_i \in A$ 的个体 i 的数量为 N_A：

$$N_A(\omega) \doteq \sum_{i=1}^{n} \chi_A(\theta_i).$$

作为独立同分布的有界随机变量之和， N_A 自动满足正则性。显然

$$E(N_A|p) = nP(\theta_i \in A|p) = n \int_A f(\theta|p)d\theta.$$

令 $\hat{n}_A \doteq n^{-1}N_A$ 表示具有特征 $\theta_i \in A$的个体 i 所占的比例。这些比例 $\hat{n}_A$, $A \subset \Theta$，构成经济特征 θ_i的经验概率分布。

根据条件大数定律，经验概率分布收敛于与观测到的均衡相对应的正则概率分布：

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{n}_A - \int_A f(\theta|p)d\theta| < \varepsilon|\exists p^* : |p^* - p| < \delta) = 1,$$

参见（5.4）。因此，根据吉布斯条件原理，在理想极限 $\varepsilon = 0$ 下且在观测到的均衡价格处，对于“绝大多数”宏观经济构型 ω ，其经济特征属于 A 的个体比例等于 A的正则概率。

6. 简短回顾

以上我们论证了大偏差理论对于研究由大量参与个体构成的随机经济之均衡的重要性。

在概率论中，大偏差是指随机变量取值落在中心极限定理适用范围之外的情况。如果先验模型不完善，大型随机系统中必然会出现大偏差。

标准大偏差理论关注“广延”随机变量发生大偏差的概率；这类随机变量由大量“微观”随机变量的累积产生。最典型的例子是独立同分布随机变量之和。广延性也可以体现为时间上的广延性，此时将时间视为规模参数。

大偏差类型定理以指数形式表达大偏差的概率，其中指数与系统的规模参数成比例。该比例系数的补数称为

速率函数。由于热力学类比，速率函数也称为熵函数。大偏差理论给出的估计在中心极限定理适用范围之外同样有效。

吉布斯条件原理关注的是基于观测到的大偏差进行后验推断，即如何以数学上严谨的方式将此类观测纳入考量。根据 GCP，后验概率律属于由所考虑的随机变量生成的指数族。作为一个数学定理，GCP 是条件大数定律。

自 H. Cram´er [12]) 的开创性经典研究以来，大偏差理论已成为概率论的重要课题，随后也成为随机建模中的重要工具，例如应用于统计学、信息论、工程问题（[10], [15]）、大型通信网络建模 [42], 风险理论 [30], 动态宏观经济现象 [1], 资产价格校准[4],以及大型投资组合损失分析 [14]。

经济学与热力学之间类比关系的探索由来已久，参见 Samuelson [39]。受 Jaynes （ [21],[22] ）关于统计力学与信息论之间联系的观点启发，Foley （例如， [43]）进一步阐述了这一类比。

大偏差理论可视为统计力学内在数学结构的数学抽象，因为大型随机系统被理解为“热力学”系统。鉴于这种关联，所提出的随机经济均衡理论形式体系在概念和结构上都与统计力学的形式体系相似。Nummelin 指导的一篇博士论文 [23], 此前就已指出这种关联。

经典热力学系统是由大量粒子构成的物理系统（例如， [29] 或 [37]）。其目标是用少数几个热力学变量来描述系统的宏观行为。标准的热力学变量包括体积、压力、内能、温度和熵。如果某个变量与体积成比例，就称其为广延变量；如果它独立于体积，则称为强度变量。体积、内能和熵是广延变量的例子，而压力和温度则是强度变量。

热力学变量之间的关系由热力学状态方程描述。因此，例如，热力学第二定律的积分形式将热力学熵与温度、内能和配分函数联系起来，见公式（2.7）。

根据这一范式，热力学定律被假定为普遍成立，即支配任何热力学系统的行为，即使系统的行为尚未得到充分的数学理解。

与热力学系统一样，由大量经济主体构成的大型经济系统拥有许多“自由度”，但其中只有少数是可观测的。与统计力学中一样，可以区分广延变量（与经济规模成正比）和强度变量（独立于经济规模）。广延变量的例子包括某些商品的总需求和

供给，而价格则是典型的强度变量。

然而，尽管随机均衡价格具有内涵性，但作为随机总超额需求函数（具有外延性）的零点，它们仍遵循大偏差理论的原理，见 [33], [34], [35], [36]。因此，随机均衡理论是应用大偏差方法的潜在领域。

与统计力学一样，随机均衡理论的“热力学形式体系”体现了某些深层的普遍原理。这些原理的有效性并不局限于那些能够验证精确数学条件的随机经济。

致谢

我们感谢 Dario Gasbarra 对本文提出的宝贵建议。

参考文献

[1]Aoki, M.：《宏观经济建模新方法：演化随机动力学、多重均衡以及作为场效应的外部性》。剑桥大学出版社，1996。[2] Arrow, K.J.：经典福利经济学基本定理的扩展。载于：第二届伯克利数学统计与概率研讨会论文集，J. Neyman 编，加州大学出版社，1951，507-532。[3] Arrow, K.J. 和 Debreu, G.：竞争经济均衡的存在性。《计量经济学》22，265-290（1954）。[4] Avellaneda, M.：用于校准资产定价模型的最小熵算法及相关方法。载于：国际数学家大会论文集，第三卷，柏林，1998，545-563。[5] Azencott, R.：大偏差及其应用。载于 P.L Hennequin 编，´圣弗卢尔概率论暑期学校 VIII（1978），数学讲义 774，第1-176页。Springer，柏林，1980。[6] Bhattacharya, R.N. 和 Majumdar, M.：随机交换经济。《经济理论杂志》6，37–67（1973）。[7] Bhattacharya, R.N. 和 Majumdar, M.：关于刻画大型竞争经济中的生存概率。《经济设计评论》6，133-153（2001）。[8] Billingsley, P.：《概率与测度》，第3版。Wiley，纽约，1995。[9] Blomster, T.：金融市场中的随机均衡。《数学报告》第363号，赫尔辛基大学（2003）。[10] Bucklew, J.A.：《决策、仿真与估计中的大偏差技术》。Wiley，1990。[11] Cover, T.M. 和 Thomas, J.A.：《信息论基础》。Wiley，纽约，1991。[12] Cram´er,H.：概率论中的一个新定理——有限极限定理。载于：《科学与工业新进展》第736号，5-23（1938）。

[13] Debreu, G.：《价值理论》。Wiley，1959。[14] Dembo, A.、Deuschel, J-D. 和 Duffie, D.：大型投资组合损失。《金融与随机过程》8，3-16（2004）。[15] Dembo, A. 和 Zeitouni, O.：《大偏差及其应用》。Jones & Bartlett，波士顿，1993。[16] Ellis, R.S.：《熵、大偏差与统计力学》。Springer，纽约，1985。[17] Ellis, R.S.：《大偏差理论及其在统计力学中的应用》。莱什乌什物理学院讲义，2008年8月5日至8日。http://www.math.umass.edu/¨rellis[18] Foley, D.K.：市场统计均衡理论。《经济理论杂志》62，321-345（1994）。[19] Hildenbrand, W.：随机偏好与均衡分析。《经济理论杂志》3，414–429（1971）。[20]Hou, Yongming：关于随机纯交换经济的一些推断结果。《运筹学年鉴》。[21] Jaynes, Edwin T：信息论与统计力学。《物理评论》106，620（1957）。[22] Jaynes, Edwin T：信息论与统计力学。《物理评论》108，171（1957）。[23] Kuusela, M.：随机映射零点与不动点的大偏差及其在均衡经济学中的应用。《芬兰科学院学报：数学学位论文集》138。博士论文，数学与统计学系，赫尔辛基大学，2004。[24] Lang, S.：《实分析与泛函分析》。Springer，纽约，1993。[25] Lehtonen, T. 和 Nummelin, E.：部门经济的大偏差。《数学报告》第297号，赫尔辛基大学（2001）。[26] Lehtonen, T. 和 Nummelin, E.：理想气体大偏差的一级理论。《国际理论物理学杂志》29，621-635（1990）。[27] Majumdar, M. 和 Rotar, V.：相关主体随机交换经济中的均衡价格。《经济理论》15，531-550（2000）。[28] Majumdar, M. 和 Rotar, V.：关于大型随机交换经济均衡价格的一些一般结果。《运筹学年鉴》114，245-261（2002）。[29] Martin–L¨of, A.：《统计力学与热力学基础》。Springer，柏林，1979。[30] Martin–L¨of, A.：熵：风险理论中的一个有用概念。《斯堪的纳维亚精算学杂志》223-235（1986）。[31] McKenzie, L.：关于Graham世界贸易模型及其他竞争系统的存在性。《计量经济学》22，147-161（1954）。[32] Ney, P.：凸性与大偏差。《概率年刊》12，903-906（1984）。[33] Nummelin, E.：随机经济价格均衡的存在性与收敛性。《应用概率年刊》10，268–282（2000）。[34] Nummelin, E.：随机向量场的大偏差及其在经济学中的应用。《应用数学进展》24，222-259（2000）。

[35] Nummelin, E.：《随机经济中的均衡价格大偏差》。载于《概率、统计及其应用：献给 R. Bhattacharya 的论文集》，K. Athreya 和 M. Majumdar 编，IMS讲义—专著丛书，第41卷，2005年。[36]Nummelin, E.：《熵与经济均衡》。载于《墨西哥数学贡献》，《随机模型》，J.M. Gonz´ales-Barrios、J. Le´on 和 A. Meda 编。《当代数学》第336卷，41–74页，2003年。[37] Plischke, M. 和 Bergersen, B.：《平衡态统计物理学》，第2版，世界科学出版社，新加坡，1994年。[38] Rockafellar, R.T.：《凸分析》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1970年。[39] Samuelson, P.A.：最小均衡系统的结构。载于 Pfouts, R.W.（编），《经济学与计量经济学论文集：献给 Harold Hotelling 的论文集》。北卡罗来纳大学出版社，1960年。后收入 Stiglitz J.E.（编），1966年。《保罗·A·萨缪尔森科学论文集》，麻省理工学院出版社，马萨诸塞州剑桥，第651–686页。[40] Saslow, W.M.：热力学的经济学类比。《美国物理学杂志》67（12），1239–1247页（1999年）。[41] Seneta, E.：《非负矩阵与马尔可夫链》。Springer，第2版，1981年。[42] Shwartz, A. 和 Weiss, A.：《性能分析中的大偏差：排队系统、通信与计算》。查普曼-霍尔出版社，纽约，1995年。[43] Smith, E. 和 Foley, D.K.：经典热力学与经济一般均衡理论。《经济动态与控制杂志》32，7–65页（2008年）。