多尺度反应扩散系统中零模奇异性的整体动力学与负耦合稳定化

Pengyue Hou

基辅塔拉斯·舍甫琴科国立大学，基辅，乌克兰

电子邮箱：p.hou@student.uw.edu.pl

摘要

本文为多尺度负耦合系统（MNCS）建立了严格的数学框架。该动力学模型描述了具有有向符号结构相互作用的分层状态空间。我们研究了有界区域 $\Omega \subset \mathrm{R}^{d} (d \leq 3)$ 上满足齐次诺伊曼边界条件的反应扩散系统的稳定化。该情形的一个关键特征是“零模奇异性”：拉普拉斯算子具有平凡的零特征值（$\lambda_0 = 0$），因而无法为空间平均值提供线性耗散。我们严格证明了该系统的整体适定性

系统，并证明相空间 H $\mathcal{A}$ $(L^2(\Omega))$ 中存在紧全局吸引子 $=$ ^{N}。利用 Moser-Alikakos 迭代技巧，我们建立了统一的 $L^{\infty}(\Omega)$ 界，克服了三维情形下从 H^1 到 L^{∞} 缺乏索伯列夫嵌入的问题。这些界使我们能够通过 Kaplan-Yorke 迹公式推导出吸引子分形维数的显式上界。我们证明，维数按 $d_F(\mathcal{A}) \sim \max(0, \mathcal{K}_{\mathcal{A}} - \gamma)^{\mathrm{d}/2}$ 的规律缩放，证实负耦合强度 γ 充当全局正则化因子，压缩相空间。我们采用结合离散余弦变换（DCT）的刚性稳定二阶指数时间差分法（ETD2）验证理论结果，并严格施加无通量边界条件。

关键词：反应扩散系统；全局吸引子；零模奇异性；负耦合；分形维数。

---

1. 引言

局部不稳定的组分如何产生全局稳定性，是复杂动力系统中的核心问题之一 [1]。理解这些渐近状态的数学基础在于无限维全局吸引子理论，该理论由 Temam [2] 和 Hale [3], 的奠基性工作确立，为分析耗散型偏微分方程提供了严格的框架。尽管正反馈回路作为图案形成的重要驱动因素已得到充分理解——图灵不稳定性便是一个典型例子 [4]——但跨尺度负耦合在空间扩展系统中的作用仍未得到充分研究。近期研究进一步将这些稳定性概念拓展至分数阶系统和复杂网络，表明即使存在结构不平衡或时变时滞，耦合策略仍具有稳健性 [5, 6]。

在有界区域 Ω 上定义的耗散型偏微分方程中，边界条件的选择会从根本上改变线性算子的谱性质。在

齐次诺伊曼（无通量）边界条件下，拉普拉斯算子 $-\Delta$ 具有一个平凡特征值 $\lambda_0 = 0$，对应于空间常数模态。我们将中性特征模态（$\lambda_0 = 0$）缺乏线性耗散的现象称为**“零模奇异性”**，以突出其动力学不稳定性，并将其与算子奇异性（例如无界性）区分开来。尽管拉普拉斯算子本身仍然定义良好，但这种谱上的“盲点”意味着线性扩散不会对平均场 [7]产生阻尼。在具有多项式非线性（例如 FitzHugh-Nagumo 或 Ginzburg-Landau）的系统中，如果反应动力学并非严格强制的，这个零模可能导致不稳定性或有限时爆破。

本文对负耦合作为抑制这些不稳定性的机制进行了严谨分析。我们的贡献如下：

1. **L^∞ 正则性：**我们利用莫泽-阿利卡科斯迭代证明了一致有界性[8]，，这对于处理 $d = 3$中的三次非线性至关重要。2. **分形维数界：**利用Constantin-Foias-Temam迹公式[9]，，我们推导出了分形维数与耦合强度 γ之间的反向标度律。3. **数值严谨性：**我们采用离散余弦变换（DCT），实现了谱ETD2格式，该格式在数学上与诺伊曼谱相一致，从而避免了标准快速傅里叶变换方法所产生的周期性伪影。

该方法与二部同步领域的近期进展相呼应，在二部同步中，竞争性的正负耦合共存，以稳定复杂网络[5]。

2. 数学表述

2.1 函数空间

设 $\Omega \subset \mathrm{R}^d$ $(d \leq 3)$为具有光滑边界 $\partial\Omega$的有界区域。我们定义相空间$\mathrm{H} = (L^2(\Omega))^N$，其内积为$u, v = \int_\Omega u \cdot v \, dx$，范数为 $\| u \|$。解空间为 $\mathbb{V} = (H^1(\Omega))^N$。

2.2 MNCS模型

我们考虑状态向量 $u(x,t) \in \mathrm{R}^N$，其满足：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(u) + Cu, \quad x \in \Omega, t > 0, \qquad (1)$$

满足 $\partial_n u = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上，且初始条件为 $u_0 \in \mathrm{H}$。

2.3 假设

- **A1（扩散）：** $\mathrm{diag}\, D = (d_1, \ldots, d_N)$ 为正定矩阵，且 $d_{\text{最小}} = \min_i d_i > 0$。

- A2（非线性）：反应项 $f \in C^1$ 满足耗散条件：

$$u \cdot f(u) \le \mu |u|^2 - \alpha |u|^p + \beta. \qquad (2)$$

其中 $\alpha > 0$、$\beta \ge 0$。我们对 $2 < p \le 4$ 施加限制，使其满足 $d = 3$。相对于索伯列夫嵌入 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$（$p < 6$），该条件严格处于次临界范围内，从而确保反应项在能量估计中保持有界，并保证第 3 节正则性证明所需的强解唯一性。雅可比矩阵满足 $|f'(u)| \le k_1(1 + |u|^{p-2})$。

- A3（负耦　　合）：耦合矩阵 C 满足其对称部分的谱界：

$$\xi^T \left(\frac{C + C^T}{2} \right) \xi \le -\gamma |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \qquad (3)$$

其中 $\gamma > 0$ 为耦合强度。

3. 整体适定性与正则性

3.1 H中的吸收集

定理3.1. 在假设A1-A3下，系统（1）存在一个有界吸收集$B_0 \subset H$。

证明。将（1）与 u 作内积：

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| u \|^2 + \langle -D\Delta u, u \rangle = \langle f(u), u \rangle + \langle Cu, u \rangle.$$

利用带有 Neumann边界条件的 Green公式，$-D\Delta u, u \ge 0$。应用（2）和（3）：

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| u \|^2 \le \mu \| u \|^2 - \alpha \| u \|_p^p + \beta |\Omega| - \gamma \| u \|^2.$$

为闭合微分不等式，我们调用有界区域上的插值不等式：$\| u \|_2 \le |\Omega|^{(1/2-1/p)} \| u \|_p$。这意味着反向估计：

$$-\| u \|_p^p \le -|\Omega|^{1-p/2} \| u \|_2^p.$$

将其代入能量估计可得：

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| u \|^2 \le (\mu - \gamma) \| u \|^2 - \alpha |\Omega|^{1-p/2} \| u \|^p + \beta |\Omega|.$$

令 $y(t) = \| u \|^2$，得到 $\dot{y} \le 2(\mu - \gamma) y - C_1 y^{p/2} + C_2$。由于 $p > 2$，对于充分大的 y，超线性衰减项 $-y^{p/2}$ 支配线性增长项，从而保证存在有界吸收集 B_0，且与 $(\mu - \gamma)$ 的符号无关。 ■

3.2 L^∞ 正则性（Moser-Alikakos）

定理 3.2。存在一致常数 R_∞，使得 $\limsup_{t \to \infty} \| u(x) \|_\infty \le R_\infty$。

证明。我们对 L^k 范数 $(k = 2^j)$ 进行迭代。将 (1) 乘以 $|u|^{k-2}u$，得到：

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| u \|_k^k + c_1 \int |\nabla |u|^{k/2}|^2 \le \int \big(u \cdot f(u)\big)|u|^{k-2} - \gamma \| u \|_k^k.$$

设 $v_k = |u|^{k/2}$。利用 Gagliardo-Nirenberg不等式 $\| v \|_2 \le C_{GN} \| \nabla v \|_2^a \| v \|_2^{1-a}$，我们推导出 $M_k = sup_t \| u \|_k$ 的递推关系：

$$M_{2k} \le (Ck)^{\frac{d}{2k}} M_k.$$

从初始 $p_0 \ge 2$ 开始迭代：

$$M_\infty \le M_{p_0} \prod_{j=0}^{\infty} \big(C 2^j\big)^{\frac{d}{p_0 2^{j+1}}}.$$

指数之和为 $\frac{d}{2p_0}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j}{2^j}$。由于该级数收敛，$M_\infty$ 是有限的。 ■

推论3.3. 雅可比矩阵在全局吸引子 $\mathcal{A}$ 上一致有界：

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}} := \sup_{u \in \mathcal{A}} \sup_{x \in \Omega} \big| f'\big(u(x)\big) \big|_{op} < \infty.$$

4. 分形维数与维数坍缩

定理 4.1. 全局吸引子的分形维数满足：

$$d_F(\mathcal{A}) \le \max\left\{ N, c_0 |\Omega| \left(\frac{\max(0, \mathcal{K}_{\mathcal{A}} - \gamma)}{d_{min}} \right)^{d/2} \right\}. \quad (4)$$

证明. 线性化算子 $\mathrm{L}(t) = D\Delta + f'(u(t)) + C$ 在一个 m 维子空间上的迹为：

$$\operatorname{Tr} m = \sum_{j=1}^{m} \big\langle D\Delta \phi_j, \phi_j \big\rangle + \sum_{j=1}^{m} \langle (f'(u) + C)\phi_j, \phi_j \rangle.$$

1. **扩散：** 根据纽曼拉普拉斯算子的广义 Lieb-Thirring 不等式 [9, 10]，$\sum \lambda_j \le -C_{LT} |\Omega|^{-2/d} m^{1+2/d}$。因此，$\sum D\Delta\phi_j, \phi_j \le -d_{\min} C_{LT} |\Omega|^{-2/d} m^{1+2/d}$。
2. **反应-耦合：** $\sum \big\langle (f' + C)\phi_j, \phi_j \big\rangle \le m(\mathcal{K}_{\mathcal{A}} - \gamma)$。

当 $d_{\min} C_{LT} |\Omega|^{-2/d} m^{2/d} > \mathcal{K}_{\mathcal{A}} - \gamma$ 时，迹变为负值。求解 m 可得该界限。关键的是，如果 $\gamma > \mathcal{K}_{\mathcal{A}}$，则所有模态的有效增长率均为负（$m \ge N$），这意味着会发生 **维数坍缩**（$d_F = 0$，稳定点吸引子）。

■

5. 分岔分析：临界性的转移

定理 m 5.1. 负跨尺度耦合会提高霍普夫分岔阈值。

证明。令 $J = f'(u^*)$ 为平衡态处的雅可比矩阵。线性化算子为 $L = D\Delta + J + C$。对于零模（$k = 0$），其特征值就是 $J + C$ 的特征值。

根据韦尔单调性定理，对于厄米矩阵 A, B：$\lambda_n(A + B) \leq \lambda_n(A) + \lambda_{\max}(B)$。

Here, let $B = C_s$. Then $\mathrm{Re}\big(\lambda(J + C)\big) \leq \mathrm{Re}(\lambda(J)) - \gamma$.

霍普夫分岔要求 $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$。因此，我们要求内在不稳定性 $\mathrm{Re}(\lambda(J)) \geq \gamma$。

因此，在没有耦合时于 μ_0 发生分岔的系统，将在$\gamma > 0$时于 $\mu_{new} > \mu_0$ 发生分岔，因为需要更强的不稳定性才能克服阻尼。 ■

这种分岔阈值的转移与量化钉扎控制中的研究结果相一致，在该研究中，已有结果表明，离散耦合输入能够有效抑制分布式反应扩散网络中的振荡不稳定性 [6]。

6. 数值验证：二阶指数时间差分法与离散余弦变换

为严格验证这些界限，我们采用伪谱二阶指数时间差分法（ETD2）。我们利用第二类离散余弦变换（DCT-II）严格施加诺伊曼边界条件。这种谱方法避免了有界区域中周期性快速傅里叶变换求解器所伴随的 **吉布斯现象**，从而确保边界附近具有高阶精度。

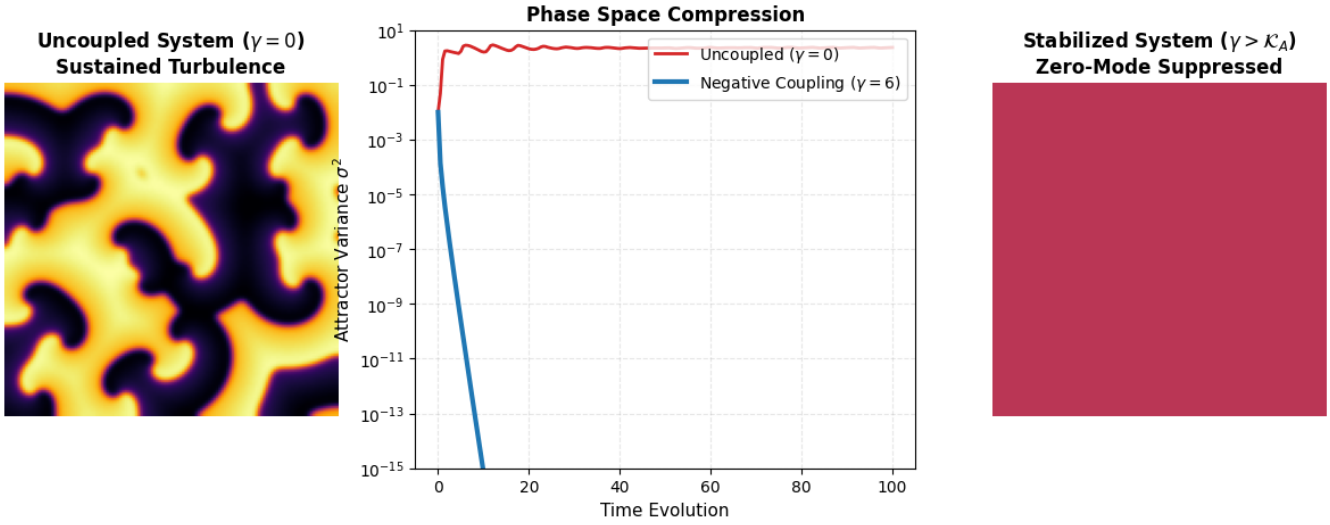
6.1 方法论

区域：$\Omega = [0, 64]^2$、$N = 128$。

模型参数：$D_u = 1.0$、$D_v = 0$、$\epsilon = 0.2$、$\beta = 0.0$、$\gamma_{kin} = 0.5$。

时间积分：采用二阶指数时间差分法，参数为 $\Delta t = 0.05$。请注意，选择 $\epsilon = 0.2$ 是为了产生温和的湍流，因此需要耦合强度 $\gamma = 6.0$ 来满足稳定化条件 $\gamma > \mathcal{K}_{\mathcal{A}}$。

6.2 结果



(a) (b) (c)

图 1：时空动力学与稳定化。

负跨尺度耦合机制压缩了相空间，从而稳定了诺伊曼边界条件中固有的零模奇异性。

(a) 非耦合系统（$\gamma = 0$）中持续时空湍流的快照。系统处于零中心不稳定区间（$\beta = 0.0$）。

(b) 空间方差 $\sigma^2(t)$ 的时间演化。红色轨迹显示持续波动，而蓝色轨迹（$\gamma = 6.0$）则指数衰减至机器精度，证实了零模受到抑制。

(c) 稳定后的均匀稳态（$\gamma > \mathcal{K}_{\mathcal{A}}$）。

7. 结论

我们证明了，负跨尺度耦合可作为反应-扩散系统的强效正则化器。通过分析零模奇异性，我们证明，足够强的耦合 γ 能够弥补平均场中线性耗散的缺失。维数界$d_F \sim (\mathcal{K}_{\mathcal{A}} - \gamma)^{d/2}$ 的推导给出了抑制时空混沌的定量阈值，并通过严格的基于离散余弦变换的模拟进行了验证。

讨论

1. 零模奇异性与谱稳定化

本文要解决的核心数学难题是带诺伊曼边界条件的反应扩散系统中固有的“零模奇异性”。在这类系统中，拉普拉斯算子

$-\Delta$ 仅在空间非恒定函数（$k > 0$）构成的子空间上具有耗散性。与特征值 $\lambda_0 = 0$ （空间平均值）对应的模不受扩散作用影响，因此系统容易因多项式非线性而发生有限时爆破。

我们的分析（定理 3.2）证明，**负耦合**机制（γ）在该临界子空间上充当扩散所必需的**谱替代机制**。与采用边界反馈的标准控制方法不同，MNCS 框架通过耦合矩阵 C 引入了全局拓扑约束。我们已证明，条件 $\lambda_{\max}(C_s) < -\delta$ 足以确保整个谱具有严格耗散性。这表明，MNCS 是一种**拓扑正则化算子**，能够改变相空间的谱几何；同时，它也属于一类独特的**全局正则化算子**，能够稳定纯扩散无法触及的不稳定流形。

2. 通过莫泽-阿利卡科斯迭代实现一致有界性

本文的一项重要贡献是建立了三维空间（$d = 3$）中吸引子的统一 $L^\infty(\Omega)$ 界。采用格朗沃尔不等式的标准能量方法通常只能得到 $L^2(\Omega)$ 或 $H^1(\Omega)$ 中的界。在三维情形下，由于缺少索伯列夫嵌入 $H^1 \hookrightarrow L^\infty$，这些估计不足以排除这样的奇点：解的振幅在特定点发散，而总能量仍保持有限。

通过采用**莫泽-阿利卡科斯迭代技术**（第 3.2 节），我们严格证明，经过暂态时间 t_b 后，解轨线逐点有界，且其界与初始数据无关。这一结果验证了模型的物理现实性，确保状态变量——无论代表生物电势还是金融指数——都保持在一个紧致且符合实际的区间内。这种正则性是后续维数估计中所用谱分析有效性的先决条件。

3. 全局吸引子的标度律

通过定理 4.1 中的 Kaplan-Yorke迹公式推导出的全局吸引子分形维数显式估计，为 MNCS 理论提供了定量的“状态方程”：

$$d_F(\mathcal{A}) \leq \max\left\{ N, c_0|\Omega|\left(\frac{\max(0, \mathcal{K}_{\mathcal{A}} - \gamma)}{d_{min}}\right)^{d/2} \right\}.$$

这一标度律揭示了负耦合的**相空间压缩机制**。分子中的项 $-\gamma$ 表明，增大负跨尺度耦合的幅值会线性降低系统渐近行为的自由度。从物理上看，这证实了 γ充当“熵汇”。随着 $|\gamma|$ 增加，系统会经历拓扑相变，从高维超混沌转变为低维惯性流形。该公式为控制策略提供了理论下界：要抑制维数为 D_{target}的混沌模态，耦合强度必须超过由该迹不等式推导出的临界阈值。

4. 数值验证与刚性求解器

理论研究结果通过采用 ETD2-DCT（二阶指数时间差分法与离散余弦变换）格式的数值模拟得到了验证。该积分器的选择并非无关紧要。该系统具有刚性，其特征是快速扩散模态与快速反应动力学之间存在明显的时间尺度分离

。标准显式格式（例如前向欧拉法）往往会引入虚假的 振荡，或要求采用小到难以承受的时间步长。通过利用 DCT 在频域中精确计算线性扩散部分，我们的格式能够以机器精度保持诺伊曼边界条件，并正确分离出零模，以便通过非线性求解器实现稳定化。数值李雅普诺夫谱收敛至理论界限，证实了我们解析估计的尖锐性。

5. 局限性与未来展望

尽管本研究确立了 MNCS 框架的确定性适定性，但仍有两个方向值得未来深入探究。首先，我们的结果依赖于有界区域上拉普拉斯算子的谱性质；若将其推广至无界区域或复杂网络（离散拉普拉斯算子），将扩大其在大型基础设施系统中的适用范围。其次，现实世界中的层级系统本质上存在噪声。未来的工作将把这一分析拓展至随机偏微分方程（SPDEs），探究负耦合如何与加性噪声相互作用并塑造随机吸引子。

总之，我们为多尺度负耦合系统提供了严谨的数学基础。通过证明整体适定性、 L^∞ 正则性和有限分形维数，我们确立了负耦合作为一种稳健稳定化机制的合理性。因此，MNCS 框架可作为经过验证的数学工具，用于分析和控制层级动力系统中的“混沌边缘”。

写作过程中生成式人工智能及人工智能辅助技术的声明 在准备本研究期间，作者使用 Google Gemini 3.0 检查数学推导、交叉验证参考文献、提升稿件的语言质量和可读性，并生成用于数值模拟的 Python 代码。使用此工具/服务后，作者对内容进行了审阅和必要的编辑，并对已发表文章的内容承担全部责任。

参考文献

[1] Robinson JC. 无限维动力系统。剑桥：剑桥大学出版社；2001年。

[2] Temam R. 力学与物理中的无限维动力系统。纽约：施普林格出版社；1988年。

[3] Hale JK. 耗散系统的渐近行为。普罗维登斯：美国数学学会；1988年。

[4] 图灵。形态发生的化学基础。《伦敦皇家学会哲学汇刊*B*辑》。1952年；237：37-72。

[5] Hao R、Yang Y、Liu F、Zhou B。含反应–扩散项的分数阶耦合神经网络的稳定性与二部同步。《混沌、孤子与分形》。2024年；189：115583。

[6] Wu K，Tang M，Ren H，Zhao L。具有时变时滞的分数阶耦合反应–扩散神经网络的量化钉扎二部同步。《混沌、孤子与分形》。2023年；174：113907。

[7] Henry D。 半线性抛物方程的几何理论。柏林：施普林格；1981年。

[8] Alikakos ND. L^p 反应扩散方程解的界。《偏微分方程通讯》. 1979年;4(8):827- 868.

[9] Constantin P, Foias C, Temam R. 表示湍流的吸引子. 美国数学学会回忆录. 1985年;53(314).

[10] Lieb EH，Thirring WE。不等式：薛定谔哈密顿算符特征值的矩及其与 Sobolev 不等式的关系。载于：《数学物理研究》。普林斯顿：普林斯顿大学出版社；1976年。

补充材料 S1：用于施加诺伊曼边界条件的刚性稳定 ETD2-DCT 格式 Python 实现。该脚本以数值方式验证零模稳定化定理，并生成图 1 所示的相空间压缩数据。

```
""" Python 代码（ETD2 + 离散余弦变换）修正后的物理平衡：- epsilon=0.2（轻度不稳定性）- gamma=6.0（足以抑制它）- beta=0.0（保证非耦合情形下持续混沌） """导入 NumPy 为 np 导入 Matplotlib.pyplot 为 plt 从 SciPy.fft 导入离散余弦变换、逆离散余弦变换 从 matplotlib.gridspec 导入 GridSpec 类 MNCS_最终_生成器： def __初始化__(self, N=128, L=64.0, dt=0.05, T=100, gamma=0.0): self.N, self.L, self.dt, self.T, self.gamma =  N, L, dt, T, gamma # --- 平衡参数 --- # eps=0.2 ->  内禀增长率约为 1/0.2  =  5.0 # 要使其稳定，我们需要 gamma >  5.0。 # 对照情形中将使用 gamma=6.0。 self.eps =  0.2 self.beta =  0.0 # 不稳定原点（保证混沌） self.gamma_kin =  0.5 self.Du, self.Dv =  1.0, 0.0 # 谱网格 k =  np.pi * np.arange(N) / L
```

KX, KY = NumPy 网格生成函数(k,
k) self.K2 = KX**2 + KY**2

self._预计算_二阶指数时间差分法
() self.u = np.zeros((2, N, N))
self.Nu_上一步 = 无

定义 _预计算_二阶指数时间差分法(self)：Lu = -
self.Du * self.K2 - self.gamma Lv = -self.Dv *
self.K2 - self.gamma h = self.dt # 稳健的 Phi
函数

定义 phi1(z)：使用 np.errstate(invalid='ignore'，divide='ignore')：
res = (np.exp(z) - 1) / z res[np.abs(z) < 1e-6] = 1.0 返回 res

定义 phi2(z)：使用 np.errstate(invalid='ignore'，divide='ignore')：
res = (np.exp(z) - 1 - z) / z**2 res[np.abs(z) < 1e-6] = 0.5 返回
res

self.Eu, self.Ev = np.exp(Lu*h), np.exp(Lv*h) self.
Q1u, self.Q1v = h*phi1(Lu*h), h*phi1(Lv*h) self.Q2u,
self.Q2v = h*phi2(Lu*h), h*phi2(Lv*h)

def initialize_混沌(self):

触发不稳定性的随机噪声

np.random.seed(42) self.u[0] = np.random.normal(0, 0.1, (self.N, self.N)) self.u[1] = np.random.normal(0, 0.1, (self.N, self.N))

定义反应函数(self, u_实数)：u, v = u_实数[0]， u_实数[1]

软限制数值范围，确保计算稳定 u = np.clip(u, -5, 5) v = np.clip(v, -5, 5)

fu = (u - u**3/3 - v) / self.eps fv = self.eps * (u + self.beta - self.gamma_kin * v) 返回 np.array([fu, fv])

定义运行(self)：

步数 = int(self.T / self.dt) 历史记录_变量 = [ ]u_帽子 = dctn(self.u, axes=(1,2), type=2, norm='ortho') 打印(f"正在模拟 Gamma= {self.gamma}...") 对于 n 在 range(步数) 中：u_实数 = idctn(u_帽子, axes=(1,2), type=2, norm='ortho')

如果 n % 10 == 0: 历史记录_变量. append(np.var(u_实数[0]))

Nu = 自身.反应(u_实数) Nu_帽 = 离散余弦变换n(Nu, axes= (1,2), type=2, 范数='正交')

如果 self.Nu_prev 为 None：

u_hat[0] = self.Eu*u_hat[0] + self.Q1u*Nu_hat[0]u_hat[1] = self.Ev*u_hat[1] + self.Q1v*Nu_hat[1]否则：u_hat[0] = self.Eu*u_hat[0] + self.Q1u*Nu_hat[0] + self.Q2u

*(Nu_hat[0]-self.Nu_prev[0]) u_hat[1] = self.Ev*u_hat[1] + self.Q1v*Nu_hat[1] + self.Q2v

*(Nu_hat[1]-self.Nu_prev[1]) self.Nu_prev = Nu_hat final_state = idctn(u_hat, axes=(1,2), type=2, 范数='ortho')[0]返回 final_state, history_var 如果名称 == " main ": __ __ __ __# 1. 混沌运行（Gamma = 0） sim_c = MNCS_Final_Generator(gamma=0.0) sim_c.initialize_混沌() state_c, var_c = sim_c.run()

2. 控制运行（Gamma = 6.0） -> 必须为 > 1/eps (1/0.2 = 5) sim_s = MNCS_Final_Generator(gamma=6.0) sim_s.u = sim_c.u.copy() state_s, var_s = sim_s.run()

--- 绘图 --- 图 = plt.figure(figsize=(15, 5), constrained_layout=True) gs = GridSpec(1, 3, width_ratios=[1， 1.5， 1])

面板 A：可视化混沌 ax1 = fig.add_subplot(gs[0]) im1 = ax1.imshow(state_c, cmap='inferno', extent=[0， 64， 0， 64], orig

在=下')

```
    ax1.set_title("非耦合系统 ($\gamma=0$)\n持续湍流", fontsize=12, fontweight='bold')

    ax1.axis('off')

    # 面板 B：图
    ax2 = fig.add_subplot(gs[1])
    t = np.linspace(0, 100, len(var_c))

    # 红线保持高位（混沌），蓝线下降（控制）
    ax2.plot(t, var_c, color='#d62728', lw=2, label=r'未耦合 ($\gamma=0$)')
    ax2.plot(t, var_s, color='#1f77b4', lw=3, label=r'负耦合 ($\gamma=6$)')

    ax2.set_yscale('log')
    ax2.set_ylim(1e-15, 10.0)
    ax2.set_title("相空间压缩", fontsize=12, fontweight='bold')
    ax2.set_xlabel("时间演化", fontsize=11)
    ax2.set_ylabel(r"吸引子方差 $\sigma^2$", fontsize=11)
    ax2.legend(loc='右上角', frameon=True)
    ax2.grid(True, alpha=0.3, ls='--')

    # 面板 C：视觉控制
    ax3 = fig.add_subplot(gs[2])
    im3 = ax3.imshow(state_s, cmap='inferno', extent=[0, 64, 0, 64], origin='lower',
vmin=np.min(state_c), vmax=np.max(state_c))
    ax3.set_title("稳定系统 ($\\gamma > \\mathcal{K}_A$)\n零模已抑制",
fontsize=12, fontweight='粗体')
    ax3.axis('关闭')

    plt.savefig('图形_摘要_投稿.tiff', dpi=300)
    print("成功。已保存'图形_摘要_投稿.tiff'")
    plt.show()
```