arXiv:2601.00642v1 [math.DS] 2 Jan 2026

解流形简单性的一种直接方法

Hans-Otto Walther

2026年1月5日

摘要

含状态依赖时滞的微分方程通常仅在相应的解流形 $X \subset C^1([-h,0],\mathbb{R}^n)$上定义连续可微的解算子半流。对于具有离散状态依赖时滞的系统，我们在 X 的一个邻域上构造了一个微分同胚，将 X 映射到由 $\phi'(0) = 0$给出的子空间的一个开子集。这与关于解流形性质的早期工作相一致。不过，本文的方法是全新的，并摒弃了迄今为止一直发挥重要作用的所有光滑性以外的假设。与近期的一项案例研究相比，该方法更为直接，因为它避免了代数时滞系统 理论。

关键词：时滞微分方程，状态依赖时滞，解流形

2020年美国数学学会学科分类：主要分类：34K43、34K19、34K05；次要分类：58D25。

1 引言

对于如下时滞微分方程

$$x'(t) = g(x(t-d))$$

其时滞 $d = d(x(t)) \in [0, h]$ 与状态有关，可以在一个特定的状态空间——解流形上进行线性化。将其化为时滞泛函微分方程的一般形式后

$$x'(t) = f(x_t), \tag{1}$$

其中 $f: U \to \mathbb{R}^n$ 定义在映射集 $[-h, 0] \to \mathbb{R}^n$ 上，在 $t = 0$ 处具有左导数，且 x_t 表示平移限制 $x|[t-h, t]$，则解流形是集合

$$X = X_f = \{\phi \in U : \phi'(0) = f(\phi)\}.$$

设 $C_n^1 = C^1([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ 和 $C_n = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$。对于 $U \subset C_n^1$ 开且 f 连续可微，并满足附加性质

(e) 每个导数 $Df(\phi): C_n^1 \to \mathbb{R}^n$、$\phi \in U$ 都具有一个线性延拓 $D_e f(\phi): C_n \to \mathbb{R}^n$，且映射

$$U \times C_n \ni (\phi, \chi) \mapsto D_e f(\phi)\chi \in \mathbb{R}^n$$

是连续的

集合 $X_f \subset C_n^1$ 若非空，则是余维为 n 的连续可微子流形，并且方程 (1) 的可微解的片段 x_t $x: [-h, t_x) \to \mathbb{R}^n$、$0 < t_x \leq \infty$ 在 X_f 上定义了一个连续半流，其解算子 $x_0 \mapsto x_t$、$0 \leq t$ 都是连续可微的 [7, 3]。

弱光滑性（e）是[6]中引入的一种性质的变体。由性质（e）可容易得出，映射

$$U \ni \phi \mapsto D_e f(\phi) \in L_c(C_n, \mathbb{R}^n)$$

是局部有界的。然而，一般而言，该映射并不连续；特别是对于 f 表示具有状态依赖时滞的方程时，便会出现这种情况。

若 $f = 0$ 解流形是闭子空间

$$X_0 = \{\phi \in C_n^1 : \phi'(0) = 0\}.$$

本文延续了一系列关于一般情况下解流形性质的研究成果 [4, 9, 5] 。这些成果都在各种假设条件下保证

在 f上，解流形是简单的，或者说可以进行正则化；也就是说，存在一个定义在 X_f 邻域上的微分同胚，将 X_f 变换为子空间 X_0的一个开子集。特别是，解流形 X_f 具有整体坐标图。

设给定时滞泛函 k: d_κ, $C_n^1 \supset U_d \to [-h, 0] \subset \mathbb{R}, \ldots, k$，以及映射$g$：$\mathbb{R}^{kn} \to \mathbb{R}^n$ 。与 [5] 中一样，我们考虑以下微分方程系统 n

$$x'(t) = g(x(t + d_1(x_t)), \ldots, x(t + d_k(x_t))) \tag{2}$$

其中含有状态依赖时滞，行向量是列向量的简写

$$(x_1(t+d_1(x_t)), \ldots, x_n(t+d_1(x_t)), \ldots, x_1(t+d_k(x_t)), \ldots, x_n(t+d_k(x_t)))^{tr} \in \mathbb{R}^{kn}.$$

为将系统 (2) 重写为形式 (1)，引入泛函 v: $U_d \to \mathbb{R}^{kn}$ 较为方便，其分量 v_μ: $U_d \to \mathbb{R}$, $\mu = 1, \ldots, kn$定义如下

$$v_\mu(\phi) = \phi_\nu(d_\kappa(\phi))$$

其中 $\kappa \in \{1, \ldots, k\}$ 和 $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ 由 $\mu = (\kappa - 1)n + \nu$给出。令

$$U = U_d \cap v^{-1}(V) \subset C_n^1$$

并定义 $f : U \to \mathbb{R}^n$ 如下

$$f(\phi) = g(v(\phi)).$$

那么，对于片段属于 U的解，方程 (2) 与 (1) 等价。

这些结果 [4, 9, 5] 除了光滑性之外，还要求满足其他假设，即 $D_e f$ [4]的有界性；在最简单的情形下，时滞与零保持正距离 [9], ，或者对时滞进行因式分解，其中涉及映射到有限维空间的线性映射 [9, 5]。作为一个不受此类假设限制的例子，我们可以提及 [2]的蛋白质合成模型。

在本文中，我们摒弃光滑性之外的假设，并考虑系统（2），其中

(g,d) V 和 U_d 为开集， g 连续可微，且所有泛函d_κ、 $\kappa = 1$、.....、 k均连续可微并具有性质（*e*）。

主要结果定理 3.4 和定理 4.2 保证了解流形在某些开集 $U \subset U$ 上的限制 $X_f \cap U$ ^ ^ 具有正则性。

定理 3.4 可视为更一般的结果，其中集合 $\hat{U}$ 是嵌套集 U_* 的凸开子集，并且这些嵌套集穷尽 U。定理 4.2 则断言，每个流形 $X_f \cap U_*$ 都具有正则性。通过假设时滞泛函具有更高的光滑性，可以克服凸性带来的限制。此外，在附加有界性假设下，很容易得到整个解流形的正则性。

在下文最后的第 5 节中，我们给出一些示例：其中定理 3.4 或定理 4.2 的假设均得到满足，但 $[4, 9, 5]$ 中关于解流形简单性的各项结果，都至少有一项假设不成立。

本文在案例研究 $[11]$ where$n = 1 = k$ 中有某种先声。两篇论文的一项主要区别在于， $[11]$ 采用代数时滞系统的框架 $[8, 10]$ ，并从将 U 提升到 $C^1 \times \mathbb{R}$ 中的时滞图开始；与本文采用的直接方法相比，这造成了相当大的迂回。另一项区别是，在 $[11]$中，假设单时滞严格为正，这一点比乍看之下更为苛刻。

一个尚待解决的开放问题是，在定理 3.4 或定理 4.2 的光滑性假设下，对整个解流形进行正则化。

记号与约定。对于拓扑空间 T 的子集 $A \subset B$ ，如果 A 关于 B 上的相对拓扑是开集，则称 A 在 B 中是开的。 A 的闭包和内部分别记为 $cl\, A$ 和 $int\, A$。

对于向量空间 V 中的元素 $v,\ \tilde{v}$ ，

$v+[0,1](\tilde{v}-v) = \{w \in V$：存在 $t \in [0,1]$ 使得 $w = v+t(\tilde{v}-v)\}$.

对于赋范向量空间中的元素 x 和非空子集 A ，

$$dist(x, A) = \inf_{a \in A} |x - a|$$

映射在给定自变量处的导数和偏导数是连续线性映射，用大写 D 表示。对于定义域包含于 $\mathbb{R}^n$ 中的映射，$\partial_\nu g(x) = D_\nu g(x)\mathbf{1}$。若 $n = 1$，则 $\phi'(t) = D\phi(t)\mathbf{1}$。

作为线性算子的微分 $C_n^1 \to C_n$ 记为 ∂。

在 $\mathbb{R}^n$ 上，我们使用范数

$$\max_{\nu=1,\dots,n} |x_\nu| \le |\xi| \le \sum_{\nu=1}^{n} |\xi_\nu|.$$

对于实数 $a < b$，我们考虑由连续映射$[a,b] \to \mathbb{R}^n$ 组成的 Banach空间 $C([a,b], \mathbb{R}^n)$，其范数定义为 $|\chi| = \max_{a\le t\le b} |\chi(t)|$。由于在 $\mathbb{R}^n$ 上选择了该范数，我们有

$$\max_{\nu=1,\dots,n} |\phi_\nu| \le |\phi| \le \sum_{\nu=1}^{n} |\phi_\nu| \quad \text{on} \quad C_n.$$

在连续可微映射的空间 $C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ 上，我们使用由 $|\phi|_1 = |\phi| + |\partial\phi|$ 给出的范数。

I_n 表示连续线性嵌入映射 $C_n^1 \ni \phi \mapsto \phi \in C_n$，且 $I = I_1$。对于 $\phi \in C_n$ 和 $\delta > 0$，$N_\delta(\phi) = \{\chi \in C_n : |\chi - \phi| < \delta\}$。

在从赋范空间 B 到赋范空间 E 的连续线性映射空间 $L_c(B,E)$ 上，我们使用由下式给出的范数

$$|L|_{L_c(B,E)} = \sup_{|b|\le 1} |Lb|$$

Banach空间 B 的连续可微子流形 M 在点 $z \in M$ 处的切空间，是由所有切向量 $\zeta = Dc(0)1$ 构成的向量空间 T_zM；这些切向量来自连续可微曲线 $c : (a,b) \to B$，满足 $a < 0 < b, c(0) = z, c((a,b)) \subset M$。

2 预备知识和一个引理

备注 (i) 如果 $d: \ C_n^1 \supset U_d \to [-h,0]^k \subset \mathbb{R}^k$ 是连续可微泛函 $\Delta: C_n \supset W_\Delta \to [-h,0]^k \subset \mathbb{R}^k$ 在 W_Δ 上的限制，则称其为开集意义下的限制，即

$$U_d = I_n^{-1}(W_\Delta) = W_\Delta \cap C_n^1 \quad \text{and} \quad d(\phi) = \Delta(I_n\phi) \quad \text{on} \quad U_d$$

那么 U_d 是开集，d 连续可微，并且具有性质（e），其中

$$D_e d(\phi)\chi = D\Delta(I_n\phi)\chi \quad \text{for} \quad \phi \in U_d,\ \chi \in C_n,$$

且映射 $U_d \ni \phi \mapsto D_e d(\phi) \in L_c(C_n, \mathbb{R}^n)$ 连续。

(ii) 如果连续可微映射 $f: \ C_n^1 \supset U \to \mathbb{R}^n$ 的所有分量 f_ν 都具有性质（e），则 f 也具有性质（e），其中 $D_e f(\phi)$，$\phi \in U$ 由下式给出

$$(D_e f(\phi))_\nu = D_e f_\nu(\phi) \quad \text{for} \quad \nu = 1,\dots,n,$$

反之亦然。

命题 2.1 泛函 v 是连续可微的，且

$$Dv_\mu(\phi)\hat{\phi} = \hat{\phi}_\nu(d_\kappa(\phi)) + \phi'_\nu(d_\kappa(\phi))Dd_\kappa(\phi)\hat{\phi} \tag{3}$$

对于 $\mu = (\kappa-1)n+\nu$，其中 $\kappa \in \{1,\dots,k\}$ 和 $\nu \in \{1,\dots,n\}$、$\phi \in U_d$以及$\hat{}$ $\phi \in C^1_n$。对于由式（3）给出的 $D_e v_\mu$，若以$\hat{}$ $\hat{}$中的 $\chi \in C_n$ 替代 ϕ，并以 $D_e d_\kappa(\phi)\chi$ 替代 $Dd_\kappa(\phi)\phi$，则满足条件（e）。

证明。函数 $\phi: [-h,0] \to \mathbb{R}$ 到函数 $\Omega\phi: [-2h,h] \to \mathbb{R}$ 的奇延拓 $\Omega\phi(-h-s) = 2\phi(-h)-\phi(-h+s)$ 和 $\Omega\phi(s) = 2\phi(0)-\phi(-s)$（其中 $0 < s \le h$）定义了一个连续线性映射 $\Omega: C^1 \to C^1([-2h,h],\mathbb{R})$。Banach空间 $C^1([-2h,h],\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ 的开子集 $C^1([-2h,h],\mathbb{R}) \times (-2h,h)$ 上的求值映射 $ev: C^1([-2h,h],\mathbb{R}) \times (-2h,h) \ni (\psi,s) \mapsto \psi(s) \in \mathbb{R}$ 连续可微，且

$$D\,ev(\psi,s)(\hat{\psi},\hat{s}) = D_1 ev(\psi,s)\hat{\psi} + D_2 ev(\psi,s)\hat{s} = \hat{\psi}(s) + \psi'(s)\hat{s},$$

见 [7]。设给定 $\mu = (\kappa-1)n+\nu$，其中 $\kappa \in \{1,\dots,k\}$, $\nu \in \{1,\dots,n\}$。利用 $v_\mu(\phi) = \phi_\nu(d_\kappa(\phi)) = ev(\Omega P_\nu\phi,\ d_\kappa(\phi))$，以及投影 $P_\nu: C^1_n \ni \phi \mapsto \phi_\nu \in C^1$，我们推得 v_μ 连续可微，且

$$\begin{aligned}
Dv_\mu(\phi)\hat{\phi} &= D_1 ev(\Omega P_\nu\phi, d_\kappa(\phi))D(\Omega P_\nu)(\phi)\hat{\phi} + D_2 ev(\Omega P_\nu\phi, d_\kappa(\phi))Dd_\kappa(\phi)\hat{\phi} \\
&= D_1 ev(\Omega P_\nu\phi, d_\kappa(\phi))\Omega P_\nu\hat{\phi} + (\Omega P_\nu\phi)'(d_\kappa(\phi))Dd_\kappa(\phi)\hat{\phi} \\
&= (\Omega P_\nu\hat{\phi})(d_\kappa(\phi)) + (\Omega P_\nu\phi)'(d_\kappa(\phi))Dd_\kappa(\phi)\hat{\phi} \\
&= \hat{\phi}_\nu(d_\kappa(\phi)) + \phi'_\nu(d_\kappa(\phi))Dd_\kappa(\phi)\hat{\phi},
\end{aligned}$$

这就是方程 (3)。为验证 v_μ 的条件（e），利用微分的连续性 $\partial: C^1 \to C$、求值映射 $ev_C: C \times [-h,0] \ni (\phi,\ t) \mapsto \phi(t) \in \mathbb{R}$，以及延迟泛函 d_κ 的性质（e）。 □

命题 2.2 泛函 f 连续可微且具有性质（e）。若 $X_f \neq \emptyset$，则 X_f 是 C^1_n 中余维为 n 的连续可微子流形。

证明。根据链式法则，$f = g \circ (v|U)$连续可微，并且对每个 $\nu \in \{1,\dots,n\}$, $\phi \in U$，$\hat{}\phi \in C^1_n$,

$$Df_\nu(\phi)\hat{\phi} = Dg_\nu(v(\phi))Dv(\phi)\hat{\phi} = \sum_{\mu=1}^{kn} D_\mu g_\nu(v(\phi))Dv_\mu(\phi)\hat{\phi} \tag{4}$$

在式 (4) 中用扩展导数$D_e v_\mu(\phi)$ 替换导数 $Dv_\mu(\phi)$：根据命题 2.1 的 $C_n \to \mathbb{R}$，我们得到性质（e）；在 $X_f \neq \emptyset$ 的情况下，这便得出剩余的断言 $[7, 3]$。 □

下面定理 3.5 和 4.2 的证明依赖于以下引理，该引理建立了连续可微映射 $\tau : \mathcal{V} \to C^1, \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ 开，满足$\tau(y)'(0) = 1$，且所有 $\tau(y)$ 和 $D_\mu \tau(y)1$ 在 C 上的范数$|\cdot|$ 中都可以任意小。

引理 2.3 对于每个连续函数 $H : \mathcal{V} \to (0, \infty) \subset \mathbb{R}$，都存在连续可微映射 $\tau : \mathcal{V} \to C^1$，使得对于每个 $y \in \mathcal{V}$,

$$\tau(y)'(0) = 1,\ |I\tau(y)| \leq H(y),\ and\ |ID_\mu \tau(y)1| \leq H(y)\ for\ \mu = 1, \ldots, m.$$

注意，$\tau(y)$ 与 X_0 横截（若 $n = 1$）。
我们略去引理 2.3 的证明，因为它是命题 2.2], 证明的简化版本；后者构造了一个具有额外性质（位于某个线性映射的核中）的横截曲线族。引理 2.3 中的函数 H 对应于命题 2.2], 中的 h，而引理 2.3 中的 τ 对应于命题 2.2] 中的 H_ν。引理 2.1] 中的指标 ν 和 $[5,$，以及此前的命题 2.2]，与引理 2.3 及其证明无关。

3 正则化、凸域

将子集 $U \to C_n^1$ 映射到 $X \subset U$ 中的映射 X_0 可以写成恒等映射的扰动

$$A : U \ni \phi \mapsto \phi - R(\phi) \in C_n^1 \quad \text{with} \quad R(\phi)'(0) = \phi'(0) \quad \text{for} \quad \phi \in X.$$

选择 $R_\nu(\phi) = f_\nu(\phi)\tau_\phi$，其中 $\tau_\phi \in C^1$ 且 $(\tau_\phi)'(0) = 1$，例如

$$\tau_\phi(t) = t,$$

得到 $A(X_f) \subset X_0$，因为对于每个 $\phi \in X_f$ 以及所有 $\nu \in \{1, \ldots, n\}$，我们都有

$$A_\nu(\phi)'(0) = \phi'_\nu(0) - f_\nu(\phi)\tau'_\phi(0) = \phi'(0) - f(\phi) = 0.$$

此外，$A(\phi) = \phi$ 在 $X_f \cap X_0$上。映射 A 的所有后续性质都取决于横截曲线 $\tau_\phi \in C^1 \setminus X_0, \quad \phi \in U$的选择。

鉴于 $f(\phi) = g(v(\phi))$，并受早期工作 [9, 5] 的启发，我们考虑余项 R，其分量具有以下形式

$$R_\nu(\phi) = f_\nu(\phi)\tau_\phi = g_\nu(v(\phi))\tau(v(\phi)) \quad \text{for} \quad \phi \in U, \nu = 1, \dots, n$$

存在一个连续可微映射 $\tau\colon V \to C^1$，满足对所有 $y \in V$，都有 $(\tau(y))'(0) = 1$，如引理 2.3 所示。接下来的目标是为这类 R 给出性质（e）的类似结论，并估计 $D_eR(\phi)$ 关于 g、d 及其导数的大小。对于 $y \in V$，我们定义

$$\begin{aligned} m_g(y) &= \max_{\nu=1,\dots,n} |g_\nu(y)|, \\ m_{Dg}(y) &= \max_{\nu=1,\dots,n;\mu=1,\dots,kn} |D_\mu g_\nu(y)1|, \end{aligned}$$

对于 $\phi \in U_d$，我们定义

$$m_v(\phi) = \max_{\nu=1,\dots,n;\kappa=1,\dots,k} |\phi'_\nu(d_\kappa(\phi))D_e d_\kappa(\phi)|_{L_c(C_n,\mathbb{R})}).$$

命题 3.1 假设 $\tau: V \to C^1$ 连续可微，且对所有 $y \in V$ 都满足 $(\tau(y))'(0) = 1$，并且给定 $R: U \to C^1_n$，其定义为 $R_\nu(\phi) = g_\nu(v(\phi))\tau(v(\phi))$。

(i) 那么，每个导数 $DR(\phi)$ $\phi \in U$ 都有一个线性延拓 $D_eR(\phi)$: $C_n \to C^1_n$，使得映射

$$U \times C_n \ni (\phi, \chi) \mapsto D_eR(\phi)\chi \in C^1_n$$

是连续的。

(ii) 对所有 $\phi \in U$ 和 $y = v(\phi)$，以及所有 $\chi \in C_n$，都有

$$\begin{aligned} |I_n D_eR(\phi)\chi| \;\le\; & kn^2(1 + m_v(\phi))(m_{Dg}(y)|I\,\tau(y)| \\ & + m_g(y) \max_{\mu=1,\dots,kn} |I\,D_\mu\tau(y)1|) \cdot |\chi|. \end{aligned}$$

证明。1. 关于 (i)。设 $\phi \in U$, $y = v(\phi)$，且 $\hat{}\phi \in C^1_n$, $\nu = 1, \dots, n$。那么，

$$\begin{aligned} DR_\nu(\phi)\hat{\phi} &= Dg_\nu(y)Dv(\phi)\hat{\phi} \cdot \tau(y) + g_\nu(y)D\tau(y)Dv(\phi)\hat{\phi} \\ &= \sum_{\mu=1}^{kn} \Big([Dv_\mu(\phi)\hat{\phi}]D_\mu g_\nu(y)1 \cdot \tau(y) + g_\nu(y)[Dv_\mu(\phi)\hat{\phi}]D_\mu\tau(y)1 \Big). \end{aligned}$$

ˆ 回想命题 2.1。将前述公式中的 $Dv_\mu(\phi)\phi$ 替换为 $D_e v_\mu(\phi)\chi$ ，并令 $\chi \in C_n$ ，即可得到每个 $\phi \in U$ 对应的线性延拓 $D_e R_\nu(\phi) : C_n \to C^1$ 。取映射 $D_e R_\nu(\phi)$ 为其分量，即得 $D_e R(\phi) : C_n \to C_n^1$。对于 $\phi \in U$， $\chi \in C_n$， $\nu = 1, \ldots, n$，我们有

$$\begin{aligned} I\, D_e R_\nu(\phi)\chi &= \sum_{\mu=1}^{kn} ([D_e v_\mu(\phi)\chi] D_\mu g_\nu(y) 1 \cdot I\, \tau(y) + \\ &\quad g_\nu(y)[D_e v_\mu(\phi)\chi]\, I\, D_\mu \tau(y) 1)\,. \end{aligned}$$

根据命题 2.1 中 $D_e v_\mu(\phi)\chi$ 的公式，我们看到，对于所有 $\phi \in U$、 $\chi \in C_n$ 和 $\mu \in \{1, \ldots, kn\}$,

$$|D_e v_\mu(\phi)\chi| \le |\chi| + |\phi'_\nu(d_\kappa(\phi)) D_e d_\kappa(\phi)\chi| \le (1 + m_v(\phi))|\chi|,$$

其中 $\kappa \in \{1, \ldots, k\}$ 和 $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ 由 $\mu = (\kappa - 1)n + \nu$ 给出。由此可知，对于所有 $\phi \in U$ 和 $\chi \in C_n$，以及 $\nu \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned} |I\, D_e R_\nu(\phi)\chi| &\le \sum_{\mu=1}^{kn} ((1 + m_v(\phi))|\chi| m_{Dg}(y) |I\, \tau(y)| + \\ &\quad m_g(y)(1 + m_v(\phi))|\chi| |I\, D_\mu \tau(y) 1|)\,, \end{aligned}$$

这就得到

$$\begin{aligned} |I_n D_e R(\phi)\chi| &\le \sum_{\nu=1}^{n} |I\, D_e R_\nu(\phi)\chi| \\ &\le kn^2 (1 + m_v(\phi))(m_{Dg}(y)|I\, \tau(y)| + \\ &\quad m_g(y) \max_{\mu=1,\ldots,kn} |I\, D_\mu \tau(y) 1|)|\chi|. \quad \square \end{aligned}$$

我们固定某个 $\epsilon \in (0,1)$，并对由下式给出的 $\mathcal{V} = V$ 和 $H = H_c$, $c > 0$ 应用引理 2.3,

$$H_c(y) = \frac{\epsilon}{kn^2(1 + c)(1 + m_g(y) + m_{Dg}(y))}.$$

对于所得的映射 $\tau = \tau_c$，其满足对于所有 $y \in V$，$(\tau_c(y))'(0) = 1$ ，我们通过 $A_c(\phi) = \phi - R_c(\phi)$ 定义 $A_c : U \to C_n^1$，其中

$$R_{c,\nu}(\phi) = f_\nu(\phi)\tau_c(v(\phi)) = g_\nu(v(\phi))\tau(v(\phi))$$

对于 $\nu = 1$，...， n 和 $\phi \in U$。令

$$U_c = \{\phi \in U : m_v(\phi) < c\}.$$

推论 3.2 （余项的小量性）设给定 $c > 0$ 。则

$$|I_n R_c(\phi)| < \epsilon \; for \; all \; \phi \in U$$

and

$$|I_n D_e R_c(\phi)|_{L_c(C_n, C_n)} \leq \epsilon \, for \; all \; \phi \in U_c.$$

证明。 利用命题 3.1 和引理 2.3，我们推得

$$|I_n R_c(\phi)| \leq n \, m_g(v(\phi)) |I \tau_c(v(\phi))| \leq n \, m_g(v(\phi)) H_c(v(\phi)) < \epsilon$$

对所有 $\phi \in U$，且对每个 $\phi \in U_c$,

$$\begin{aligned} |I_n D_e R_c(\phi)\chi| \;\; \leq \;\; & kn^2(1+c)(m_{Dg}(v(\phi))H_c(v(\phi)) + \\ & m_g(v(\phi))H_c(v(\phi)))|\chi| \leq \epsilon|\chi| \text{ for all } \chi \in C_n. \quad \square \end{aligned}$$

显然，对于 $c > c'$， $U = \cup_{c>0} U_c$ 和 $U_c \supset U_{c'}$。由于 $D_e d_\kappa(\phi)$ 关于 $\phi \in U_d$ 通常不连续，因此集合 U_c 不一定是开集。但我们有

$$U = \cup_{c>0} \, int \, U_c.$$

下面证明 $U \subset \cup_{c>0} \, int \, U_c$。给定 $\phi \in U$。微分 $C^1 \to C$ 的连续性、求值 $C \times [-h, 0] \to \mathbb{R}$ 的连续性以及所有 d_κ 的连续性结合起来，可知每个映射 $U \ni \psi \mapsto \psi'_\nu(d_\kappa(\psi)) \in \mathbb{R}$ 都是连续的，因此局部有界。此外，每个映射 $U \ni \psi \mapsto D_e d_\kappa(\psi) \in L_c(C_n, \mathbb{R})$ 也都是局部有界的。因此，存在一个 ϕ 的邻域 $N \subset U$ 和 $c > 0$，使得 $m_v(\phi) < c$ 在 N 上成立。因此 $N \subset U_c$，这意味着 $\phi \in int \, U_c$。 $\square$

推论 3.3 每个导数 $DA_c(\phi)\colon \; C^1_n \to C^1_n$, $c > 0$ 和 $\phi \in U_c$都是拓扑同构。 A_c 在 $int \, U_c$ 上的限制是一个开映射，它定义了从子流形 $X_f \cap int \, U_c$ 到闭子空间 X_0的一个开映射，其中 $A_c(\phi) = \phi$ 在 $(X_f \cap int \, U_c) \cap X_0$上成立。

证明。 1. 设定 $c > 0$ 和 $\phi \in U_c$。

1.1 关于 $DA_c(\phi)$ 的单射性。对于满足 $DA_c(\phi)\tilde{\phi} = 0$ 的 $\tilde{\phi} \in C^1_n$，有

$$\tilde{\phi} = DR_c(\phi)\tilde{\phi} = D_e R_c(\phi) I_n \tilde{\phi}.$$

由推论 3.2,

$$|I_n \tilde{\phi}| = |I_n D_e R_c(\phi) I_n \tilde{\phi})| \leq \epsilon |I_n \tilde{\phi}|.$$

˜ ˜利用 $0 < \epsilon < 1$ 可得 $I_n\phi = 0$，因此 $\phi = 0$。

1.2 关于 $DA_c(\phi)$的满射性。设给定 $\psi \in C_n^1$，利用推论 3.2 和 $0 < \epsilon < 1$，我们得到映射 $C_n \ni \chi \mapsto I_n\psi + I_nD_eR_c(\phi)\chi \in C_n$ 是压缩映射。其唯一不动点 χ_* 属于 C_n^1，因为 $\chi_* = I_n(\psi + D_eR_c(\phi)\chi_*)$，其中 $\psi \in C_n^1$ 且 $D_eR_c(\phi)\chi_* \in C_n^1$。由此可得

$$C_n^1 \ni \chi_* = \psi + D_eR_c(\phi)\chi_* = \psi + DR_c(\phi)\chi_*,$$

因此

$$DA_c(\phi)\chi_* = \chi_* - DR_c(\phi)\chi_* = \psi.$$

1.3 根据第 1.1 和 1.2 部分，连续线性映射 $DA_c(\phi)$ 是同构$C_n^1 \to C_n^1$。由于开映射定理，其逆映射也是连续的。因此，$DA_c(\phi)$ 是拓扑同构。

2. 第 1 部分的结果使我们能够在每个 $\phi \in int\, U_c$ 处应用局部逆映射定理。容易看出，将 A_c 限制到 $int\, U_c$ 后是一个开映射。

3. 回顾一下，A_c 将 $X_f \cap int\, U_c$ 映射到 X_0，其中 $A_c(\phi) = \phi$ 作用于（$X_f \cap int\, U_c$）$\cap X_0$。我们将 $A = A_c$和 $X = X_f \cap int\, U_c$简记为.....，并考虑诱导映射 α：$X \ni \phi \mapsto A(\phi) \in X_0$。证明导数 $D\alpha(\phi)$,$\phi \in X$是拓扑同构：任取 $\phi \in X$。于是

$$D\alpha(\phi)\psi = DA(\phi)\psi \in T_{A(\phi)}X_0 = X_0 \text{ for all } \psi \in T_\phi X.$$

由此可知，$D\alpha(\phi) : T_\phi X \to T_{\alpha(\phi)}X_0$ 是单射且连续。为证明其满射性，利用 $DA(\phi) : C_n^1 \to C_n^1$ 是一个同构，因此$DA(\phi)T_\phi X \subset X_0$ 在 C_n^1 中的余维 n 与 $T_\phi X$相同。结合前述包含关系以及 X_0 在 C_n^1 中也具有余维 n 这一事实，可得$DA(\phi)T_\phi X = X_0$，因此

$$D\alpha(\phi)T_\phi X = T_{\alpha(\phi)}X_0.$$

根据开映射定理（$D\alpha$（ϕ））$^{-1}$ 是连续的。

4. 我们推断，A 定义了一个从子流形 X 到子流形 X_0的开映射。 □

定理 3.4 对于每个 $c > 0$，映射 A_c 在每个凸开ˆ

ˆˆ 子集 $U_c \neq \emptyset$ 上都是单射的，其中 U_c，并定义了一个微分同胚 A_c，将 U_c 映射到 C_n^1 的一个开子集，并将 $X_f \cap \hat{}U_c$ 映射到子空间 X_0的一个开子集，且在 $A_c(\phi) = \phi$ 上为 $X_f \cap U_c(X_f \cap U_c) \cap X_0$。

证明。 1.（U_c上的单射性）设 ϕ, χ 是 U_c 中的给定元素，且 $A_c(\phi) = A_c(\chi)$。我们需要证明 $\phi = \chi$。根据凸性，

$$\phi + [0,1](\chi - \phi) \subset \hat{U}_c.$$

注意到 $\chi - \phi = R_c(\chi) - R_c(\phi)$。由此可得

$$\begin{aligned} I_n(\chi - \phi) &= I_n(R_c(\chi) - R_c(\phi)) = I_n R_c(\chi) - I_n R_c(\phi) \\ &= \int_0^1 D(I_n R_c)(\phi + t(\chi - \phi))(\chi - \phi) dt \\ &= \int_0^1 I_n D R_c(\phi + t(\chi - \phi))(\chi - \phi) dt \\ &= \int_0^1 I_n D_e R_c(\phi + t(\chi - \phi))(I_n(\chi - \phi)) dt. \end{aligned}$$

利用推论 3.2，我们得到 $|I_n(\chi - \phi)| \leq \epsilon |I_n(\chi - \phi)|$，因此 $I_n(\chi - \phi) = 0$，进而得到 $\chi - \phi = 0$。

2。根据推论 3.3，所有导数 $DA_c(\phi)$、$\phi \in U_c \subset int\, U_c$ 都是拓扑同构，这意味着在 U_c 上，映射 A_c 可由连续可微映射局部求逆。结合 A_c 在 U_c 上的单射性，可得在开集 $A_c(U_c)$ 上的逆映射是连续可微的。断言的其余部分由推论 3.3 得出。 □

4 以光滑性取代凸性

本节考虑映射 $g\colon \mathbb{R}^{kn} \supset V \to \mathbb{R}^n$ 和 $\Delta : C_n \supset W_\Delta \to [-h,0]^k \subset \mathbb{R}^k$，其中 V 和 W_Δ 是开集，并假设这两个映射都是连续可微的。

于是，$U_d = I_n^{-1}(W_\Delta) = W_\Delta \cap C_n^1$ 在 C_n^1 中是开集，而由 $d(\phi) = \Delta(I_n \phi)$ 给出的 $d\colon U_d \to [-h,0]^k \subset \mathbb{R}^k$ 连续可微并具有性质（e），其中 $D_e d(\phi) = D\Delta(I_n\phi) \in L_c(C_n, \mathbb{R}^k)$ 对于 $\phi \in U_d$ 成立，参见第 2 节开头备注的第 (i) 部分。因此，第 1 节中的假设 (g,d) 对 g 和 d 成立。

由下式给出的映射 $w : W_\Delta \to \mathbb{R}^{kn}$

$$w_\mu(\chi) = \chi_\nu(\Delta_\kappa(\chi)) \text{ for } \mu \in \{1, \ldots, kn\},$$

其中 $\kappa \in \{1,\dots,k\}$ 和 $\nu \in \{1,\dots,n\}$ 由 $\mu = (\kappa-1)n+\nu$ 确定，该映射是连续的，但通常并非局部利普希茨，更不用说可微性了。
此外，我们假设 C_n 的开子集 $W = W_\Delta \cap w^{-1}(V)$ 非空且 $W \neq C_n$。

对于 $v = w|U_d$，$v(\phi) = \phi(d(\phi))$，因此命题 2.1 适用，并得到 v 是具有性质（e）的连续可微函数。
如第 2 节所述，我们考虑开集

$$U = U_d \cap v^{-1}(V) = (W_\Delta \cap C_n^1) \cap (w^{-1}(V) \cap C_n^1) = W \cap C_n^1 \subset C_n^1.$$

命题 2.2 适用，并得到 f：由 $f(\phi) = g(v(\phi))$ 给出的 $C_n^1 \supset U \to \mathbb{R}^n$ 是具有性质（e）的连续可微函数，并且 X_f 若非空，则是 C_n^1 中余维为 n 的连续可微子流形。
我们转而考虑分别穷尽 W 和 U 的子集，并从 W 开始：对于 $q>0$，令

$$W_q = \{\chi \in W : |D\Delta_\kappa(\chi)|_{L_c(C_n,\mathbb{R})} < q \text{ for } \kappa = 1,\dots,k\}.$$

集合 W_q 是开集，并且 $W = \cup_{q>0} W_q$。其原像

$$\begin{aligned} U_q &= I_n^{-1}(W_q) \\ &= \{\phi \in I_n^{-1}(W) : |D\Delta_\kappa(I_n\phi)|_{L_c(C_n,\mathbb{R})} < q \text{ for } \kappa = 1,\dots,k\} \\ &= \{\phi \in I_n^{-1}(W) : |D_e d_\kappa(\phi)|_{L_c(C_n,\mathbb{R})} < q \text{ for } \kappa = 1,\dots,k\} \end{aligned}$$

对于 $q>0$ 是开集，且 $U = \cup_{q>0} U_q$。对于 $q>0$ 和 $b>0$，我们考虑开集

$$U_{q,b} = \{\phi \in U_q : |\partial\phi| < b\},$$

它们满足 $U = \cup_{q>0,\ b>0} U_{q,\ b}$，并且

$$U_{q,b} \subset U_c$$

对于来自第 3 节的 U_c，且 $c = bq$。
对于 $q>0$，$b>0$，以及 $0<\delta<1$，我们定义映射 $H_{q,\ b,\ \delta}$：$V \to (0,\ \infty) \subset \mathbb{R}$ 如下

$$H_{q,b,\delta}(y) = \frac{\delta}{kn^2(1+bq)(1+m_g(y)+m_{Dg}(y))}$$

并对 $\mathcal{V} = V$ 和 $H = H_{q,\ b,\ \delta}$应用引理 2.3。利用所得映射$\tau = \tau_{q,\ b,\ \delta}$，我们定义

$$A_{q,b,\delta} : U_{q,b} \ni \phi \mapsto \phi - R_{q,b,\delta}(\phi) \in C^1_n$$

by

$$R_{q,b,\delta,\nu}(\phi) = f_\nu(\phi)\tau_{q,b,\delta}(v(\phi)) = g_\nu(v(\phi))\tau_{q,b,\delta}(v(\phi))$$

对于 $\nu = 1$、.....、n 以及 $\phi \in U_{q,\ b}$。命题 3.1、推论 3.2 和推论 3.3 的证明仍然有效，只需分别以 $R_{q,\ b,\ \delta}$ 替代 R，以 $U_{q,\ b}$ 替代 U、U_c 和 $int\, U_c$ 中的每一个，并以 δ 替代 ϵ。特别地，对于所有 $q > 0$、$b > 0$ 和 $\phi \in U_{q,\ b}$,

$$|I_n R_{q,b,\delta}(\phi)| < \delta \quad \text{and} \quad |I_n D_e R(\phi)|_{L_c(C_n, C_n)} \leq \delta.$$

由于推论 3.3，每个导数 $DA_{q,\ b,\ \delta}(\phi)$、$\phi \in U_{q,\ b}$ 都是拓扑同构，并且 $A_{q,\ b,\ \delta}$ 是一个开映射，它将子流形 $X_f \cap U_{q,\ b}$ 映射到子空间 X_0中的一个开映射。

命题 4.1 对于所有 $q > 0$、$b > 0$ 和 $\delta \in (0、1)$，将 $A_{q,\ b,\ \delta,\ *}$限制为 $A_{q,\ b,\ \delta}$ 到

$$U_{q,b,\delta} = \{\phi \in U_{q,b} : dist(I_n\phi, C_n \setminus W_q) > 2\delta\}$$

是单射。

集合 $U_{q,b,\delta}$ 是开集，且 $U = \cup_{q>0,b>0,\delta>0} U_{q,b,\delta}$。对于 $\phi \in U_{q,b,\delta}$，$N_{2\delta}(I_n\phi) \subset W_q$。

证明 命题 4.1。我们将 $A = A_{q,b,\delta}$ 和 $R = R_{q,b,\delta}$ 简记为。假设对于 ϕ 和 ψ，$A(\phi) = A(\psi)$ 成立，其中 ϕ 和 ψ 属于 $U_{q,b,\delta}$。令 $\zeta = A(\phi)$。那么

$$|I_n\phi - I_n\zeta| = |I_n\phi - I_n A(\phi)| = |I_n R(\phi)| < \delta.$$

由此可得

$$I_n\phi \in N_\delta(I_n\zeta) \subset N_{2\delta}(I_n\phi) \subset W_q.$$

类似地，$I_n\psi \subset N_\delta(I_n\zeta) \subset W_q$。由凸性，$I_n\phi + [0,1](I_n\psi - I_n\phi) \subset N_\delta(I_n\zeta) \subset W_q$。由此可得

$$\phi + [0,1](\psi - \phi) \subset I_n^{-1}(N_\delta(I_n\zeta)) \subset I_n^{-1}(W_q) = U_q \subset C^1_n.$$

由 $|\partial\phi| < b$ 和 $|\partial\psi| < b$可知，对于所有$t \in [0,1]$，$|\partial(\phi + t(\chi - \phi))| = |t\partial\chi + (1-t)\partial\phi| < b$，由此我们推得

$$\phi + [0,1](\chi - \phi) \subset U_{q,b}.$$

对 $\phi = \psi$ 的证明与定理 3.4 证明的第 1 部分相同，只需将 U_c 替换为$U_{q,\,b}$，并将 R_c 替换为$R = R_{q,\,b,\,\delta}$。 □

仿照定理 3.4 的证明进行论证，可得以下结果。

定理 4.2 假设 $g:\ \mathbb{R}^{kn} \supset V \to \mathbb{R}^n$ 和 $\Delta:\ C_n \supset W_\Delta \to [-h,0]^k \subset \mathbb{R}^k$、$V$ 和 W_Δ 均为开集，且连续可微，并且对于 $W = W_\Delta \cap w^{-1}(V)$，有 $\emptyset \neq W \neq C_n$，其中 $w:\ W_\Delta \to \mathbb{R}^{kn}$ 定义为

$$w_\mu(\chi) = \chi_\nu(d_\kappa(\chi)) \text{ for } \mu \in \{1,\dots,kn\}$$

其中 $\kappa \in \{1,\dots,k\}$ 和 $\nu \in \{1,\dots,n\}$ 由 $\mu = (\kappa-1)n + \nu$ 确定。则对于所有满足$U_{q、\,b、\,\delta} \neq \emptyset$的 $q > 0$、$b > 0$和 $\delta \in (0,1)$，存在一个微分同胚$A_{q、\,b、\,\delta、\,*}: U_{q、\,b、\,\delta} \to C^1_n$，其映到 C^1_n 的一个开子集，并将$X_f \cap U_{q、\,b、\,\delta}$ 映到空间 X_0 的一个开子集，且在$(X_f \cap U_{q、\,b、\,\delta}) \cap X_0$上满足$A_{q、\,b、\,\delta、\,*}(\phi) = \phi$。

5 个示例

关于解流形的图表示和近似图表示的 [4, 9, 5] 主要结果表明，与定理 3.4 和定理 4.2 中一样，在系统 (2) 中对时滞泛函和反馈映射，或更一般地对方程 (1) 中的泛函 f 施加不同假设时，微分同胚会将解流形变换为空间 X_0 的开子集。在本节中，我们给出 g 的示例：$\mathbb{R} \supset V \to \mathbb{R}$ 和 $d:\ C^1 \supset U_d \to [-h,0] \subset \mathbb{R}$，使得定理 3.4 或定理 4.2 适用于与方程 (1) 相关的解流形 $X_f \subset C^1$，其中 $f:\ C^1 \supset U \to \mathbb{R}$ 定义为

$$U = \{\phi \in U_d : \phi(d(\phi)) \in V\} \quad \text{and} \quad f(\phi) = g(\phi(d(\phi))),$$

ˆ 并为开子集 $X_f \cap U_c$（定理 3.4）或 $X_f \cap U_{q,\,b,\,\delta}$（定理 4.2）提供正则化；而对于这些子集，[4, 9, 5] 中所有相应的定理均不成立，因为至少有一项假设不满足。这些假设如下：

（I）延迟泛函 d 可分解

$$d(\phi) = \delta(LI\phi), \quad \phi \in U_d,$$

到连续线性映射 $L : C \to F$ 和连续可微函数 $\delta : F \supset W \to [-h, 0] \subset \mathbb{R}$, 其中 F 是有限维赋范向量空间， $W \subset F$ 是开集，且 $LIU_d \subset W$。

（ [9, 定理 5.1] 和 [5, 定理 3.5]中需要。）

(II)时滞以如下意义远离零：存在 $s \in (-h, 0)$，使得对于所有 ϕ, ψ，只要属于 U且满足 $\phi(t) = \psi(t)$，就有 $f(\phi) = f(\psi)$ $t \in [-h, s] \cup \{0\}$。

（ [9, 定理 2.4]中需要。）

(III)扩展导数集 $D_e f(\phi)$， $\phi \in U$，在 $L_c(C, \mathbb{R})$中有界。

（证明 [4,引理 1]时需要。）

注意，因式分解性质（I）意味着， d在 U_d 与向量空间（LI_n）$^{-1}(0) \subset C^1$的交集上为常数。

为了确定 d，我们选择具有有界导数的连续可微函数 $p: \mathbb{R} \to [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ 和 $\eta : \mathbb{R} \to [-h, 0] \subset \mathbb{R}$，并且

$$p(\xi) = 0 \text{ on } (-\infty, 0], \ p'(\xi) > 0 \text{ on } (0, \infty), \ 0 < \eta'(\xi) \text{ everywhere.}$$

我们定义 $\Delta : W_\Delta \to [-h, 0] \subset \mathbb{R}$ 和 $d : U_d \to [-h, 0] \subset \mathbb{R}$ 为

$$W_\Delta = C \quad \text{and} \quad \Delta(\chi) = \eta\left(\int_{-h}^{0} p \circ \chi\right),$$

$$U_d = I^{-1}(W_\Delta) = C^1, \quad d(\phi) = \Delta(I\phi).$$

推论 5.1 *(i)* Δ 和 d均连续可微，且 d 具有性质（*e*）。

(ii) 存在 $q > 0$，使得 $|D\Delta(\chi)|_{L_c(C,\mathbb{R})} \leq q$ 对所有 $\chi \in W_\Delta = C$ 均成立，并且$|D_e d(\phi)|_{L_c(C,\mathbb{R})} \leq q$ 对所有 $\phi \in U_d = C^1$均成立。

（*iii*）对于每个满足 $0 \in \mathcal{O}$ 的开集 $\mathcal{O} \subset U_d = C^1$，以及每个满足 $Z \neq \{0\}$ 的子空间 $Z \subset C^1$，延迟泛函 d 在 $\mathcal{O} \cap Z$ 上不是常值。

证明 1。 Δ 的连续可微性可由链式法则推出：代入算子 $C \ni \chi \mapsto p \circ \chi \in C$ 的连续可微性（参见 [1, 附录 IV 中的引理 1.5]），再结合线性映射 $C \ni \chi \mapsto \int_{-h}^{0} \chi \in \mathbb{R}$ 的连续性以及 η 的连续可微性。于是我们得到

$$D\Delta(\chi)\hat{\chi} = \eta'\left(\int_{-h}^{0} p \circ \chi\right)) \int_{-h}^{0} p'(\chi(t))\hat{\chi}(t)dt$$

对所有 χ，$\hat{\chi}$ 属于 C。由链式法则，$d = \Delta \circ I$ 也连续可微；并且根据第 2 d 节备注中的断言 (i)，$d = \Delta \circ I$ 具有性质（e），其中$D_e d(\phi) = D\Delta(I\phi)$ 在 $U_d = C^1$上成立。

2. 断言 (ii) 可由 η' 和 p' 的有界性，以及第 1 部分中 $D\Delta$ 和 $D_e d$的公式推出。

3. 关于 (iii)。取 $\phi \in (\mathcal{O} \cap Z) \setminus \{0\}$。由于 $\mathcal{O}$ 是 $0 \in C^1$的一个邻域，乘以一个适当小的数 $\epsilon \neq 0$，可得 $\epsilon\phi \in \mathcal{O} \cap Z$，$2\epsilon\phi \in \mathcal{O} \cap Z$，且 $\epsilon\phi(s) > 0$，其中某个 $s \in (-h, 0)$ 满足条件。由此可推得

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{0} p \circ (\epsilon\phi) &= \int_{\{t \in [-h,0] : \phi(t) > 0\}} p \circ (\epsilon\phi) \\ &< \int_{\{t \in [-h,0] : \phi(t) > 0\}} p(2\epsilon\phi(t))dt = \int_{-h}^{0} p(2\epsilon\phi(t))dt, \end{aligned}$$

由 η 的单射性可得

$$d(\epsilon\phi) = \eta\left(\int_{-h}^{0} p \circ (\epsilon\phi)\right) \neq \eta\left(\int_{-h}^{0} p(2\epsilon\phi(t))dt\right) = d(2\epsilon\phi). \quad \square$$

设 $g : V \to \mathbb{R}$ 是定义在 $V = (-\infty, \gamma)$ 上的连续可微函数，且 $\gamma > 0$ 具有单射性并满足 $|g'(-n)| \to \infty$ 当 $n \to \infty$时成立。考虑$w : U_\Delta \to \mathbb{R}$ 和 $v : U_d \to \mathbb{R}$，其选取方式与推论 5.1 前相同。则 $W = W_\Delta \cap w^{-1}(V)$ 等于 $\{\chi \in C : \chi(\Delta(\chi)) < \gamma\}$，并满足第 4 节所要求的 $\emptyset \neq W \neq C$；而 $U = U_d \cap v^{-1}(V)$ 等于 $\{\phi \in C^1 : \phi(d(\phi)) < \gamma\}$。回想一下，与第 4 f 节中一样，$U \to \mathbb{R}$ 由 $f(\phi) = g(v(\phi))$ 给出，且连续可微并具有性质（e）。对于 $n \in \mathbb{N}$，令$\mathbf{n}$ 表示取值为 n 的常值函数 $[-h, 0] \to \mathbb{R}$。

推论 5.2 *(i)* 对于 C^1 中 *0* 的任意邻域 $N \subset U$，以及任意$s \in (-h,0)$，存在 ϕ 和 ψ，属于 N，使得 $\phi(t) = \psi(t)$ 在 $[-h, s] \cup \{0\}$ 上成立，并且 $f(\phi) \neq f(\psi)$,

(ii) $|D_e f\ (-\mathbf{n})\ |_{L_c\ (C,\ \mathbb{R})}| \to \infty$ 如 $n \to \infty$.

证明 1. 关于 (i)。显然，$0 \in U$。设 C^1 中 0 的一个邻域为 $N \subset U$，并给定 $s \in (-h,0)$。取严格递增的 ϕ, ψ，使得在 $[-h, s] \cup \{0\}$ 上有$\phi(t) = \psi(t)$, 且 $\phi(s) = 0 = \psi(s)$；并且在 $(s,0)$ 上有 $\phi(t) < \psi(t)$。根据 p 的性质,

$$\int_{-h}^{0} p \circ \phi = \int_{s}^{0} p \circ \phi < \int_{s}^{0} p \circ \psi = \int_{-h}^{0} p \circ \psi.$$

处处使用 $\eta'(\xi) > 0$，得到

$$d(\phi) = \eta\left(\int_{-h}^{0} p \circ \phi\right) < \eta\left(\int_{-h}^{0} p \circ \psi\right) = d(\psi).$$

由于 ϕ 严格递增，且 $\phi \leq \psi$，我们得到

$$\phi(d(\phi)) < \phi(d(\psi)) \leq \psi(d(\psi)),$$

并且由 g 的单射性可得

$$f(\phi) = g(\phi(d(\phi))) \neq g(\psi(d(\psi))) = f(\psi)).$$

2. 关于 (ii)。对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $-\mathbf{n} \in U$，且

$$\begin{aligned} |D_e f(-\mathbf{n})|_{L_c(C,\mathbb{R})} &\geq |D_e f(-\mathbf{n})\mathbf{1}| = |Df(-\mathbf{n})\mathbf{1}| = |Dg(v(-\mathbf{n}))Dv(-\mathbf{n})\mathbf{1}| \\ &= |g'(-n)(\mathbf{1}(d(-\mathbf{n})) + (-\mathbf{n})'(d(-\mathbf{n}))Dd(-\mathbf{n})\mathbf{1})| \\ &= |g'(-n)(1+0)| = |g'(-n)|, \end{aligned}$$

因此 $|D_e f(-\mathbf{n})|_{L_c(C,\mathbb{R})} \to \infty$ 作为 $n \to \infty$. □

为了验证定理 3.4 的假设，我们根据推论 5.1（ii）选择 $b > 0$ 和 $c > bq$，使得 q。于是，对于所有 $\psi \in U = \{\phi \in C^1$，都有 $m_v(\psi) < c$： $\phi(d(\phi)) < \gamma\}$，其中 $|\partial\psi| < b$，且开凸邻域

$$\hat{U}_c = \{\phi \in C^1 : \phi(t) < \gamma \text{ on } [-h, 0],\ |\partial\phi| < b\}$$

$0 \in C^1$ 包含于 $U_c = \{\phi \in U$ 中: $m_v(\phi) < c\}$。因此，定理 3.4 ˆ ˆ 适用于 U_c，并对 $X_f \cap U_c$进行正则化。
推论 5.1（iii）结合条件（III）之后的注释表明，将 f 限制在 $U_d = C^1$ 的开子集 ˆ $U_c \ni 0$ 上会违反条件（I）。由于 ˆ $U_c \subset U$ 是 C^1 中 0 的开邻域，推论 ˆ 5.2（i）表明条件（II）被违反。由于对于所有 $n \in \mathbb{N}$， $-\mathbf{n} \in U_c$，条件（III）也被违反，

定理 4.2 的应用：设 $w : W_\Delta \to \mathbb{R}$ 由 $w(\chi) = \chi(\Delta(\chi))$ 给出。对于 $W = W_\Delta \cap w^{-1}(V) = \{\chi \in C :\ \chi(\Delta(\chi)) < \gamma\}$，第 4 节中的假设 $\emptyset \neq W \neq C$成立。根据推论 5.1（ii），存在 $q > 0$，使得对于所有 $\chi \in W_\Delta$， $|D\Delta(\chi)|_{L_c(C,\mathbb{R})} < q$。因此，集合 $W_q = \{\chi \in W : |D\Delta(\chi)|_{L_c(C,\mathbb{R})} < q\}$等于 W，于是得到 $U = I^{-1}(W) = I^{-1}(W_q) = U_q$。由于 $0 \in W$且 W是开集，存在 $\delta \in (0, 1/2)$，使得 $2\delta < dist(0, C \setminus W) = dist(0, C \setminus W_q)$。我们选取某个 $b > 0$ 并考虑这些开集

$$U_{q,b} = \{\phi \in U_q : |\partial\phi| < b\} = \{\phi \in U : |\partial\phi| < b\}$$

and

$$\begin{aligned} U_{q,b,\delta} &= \{\phi \in U_{q,b} : dist(I\phi, C \setminus W_q) > 2\delta\} \\ &= \{\phi \in U : |\partial\phi| < b,\ dist(I\phi, C \setminus W) > 2\delta\} \\ &= \{\phi \in C^1 : \phi(d(\phi)) < \gamma,\ |\partial\phi| < b,\ dist(I\phi, C \setminus W) > 2\delta\}. \end{aligned}$$

显然，$0 \in U_{q,\ b,\ \delta}$，因此$U_{q,\ b,\ \delta}$ 非空。定理 4.2 适用于$U_{q,\ b,\ \delta}$，并对 $X_f \cap U_{q,\ b,\ \delta}$进行正则化。
推论 5.1 (iii) 与条件（III）之后的注释相结合，表明将 f 限制在 $U_d = C^1$ 的开子集$U_{q,\ b,\ \delta} \ni 0$ 上会违反条件（I）。由于$U_{q,\ b,\ \delta} \subset U$ 是 C^1中 0 的一个开邻域，推论 5.2 (i) 表明 $f|U_{q,\ b,\ \delta}$违反条件（II）。为说明 $f|U_{q,\ b,\ \delta}$ 违反条件（III），注意，对于每个 $n \in \mathbb{N}$以及每个

$$\chi \in C \setminus W = \{\chi \in C : \chi(\Delta(\chi)) \geq \gamma\}$$

我们有 $|-\mathbf{n} - \chi| \geq 1$，从而 $dist(-\mathbf{n}\ C \setminus W) \geq 1 > 2\delta$。由此可得，对于所有 $n \in \mathbb{N}$， $-\mathbf{n} \in U_{q,b,\delta}$，而推论 5.2 (ii) 表明，对于 $f|U_{q,b,\delta}$，条件（III）不成立。

参考文献

[1] Diekmann, O., van Gils, S.A., Verduyn Lunel, S.M., Walther, H.O.：《时滞方程：泛函、复分析与非线性分析》。Springer，纽约（1995），doi:10.1007/978-1-4612-4206-2[2]Gedeon, T., Humphries, A.R., Mackey, M.C., Walther, H.O., Wang, Z. (W.)：具有状态依赖型转录和/或翻译时滞的操纵子动力学。J. Math. Biol. **84**, 文章编号 2。（2022），doi:10.1007/s00825-021-01963-0[3] Hartung, F., Krisztin, T., Walther, H.O., Wu, J.：具有状态依赖时滞的泛函微分方程：理论与应用。载于：Ca˜nada, A., Dr´abek, P., Fonda, A.（编），《微分方程手册：常微分方程》，第 3 卷，第 435–545 页，Elsevier，阿姆斯特丹（2006），doi:10.1016/S1874-5725(06)80009-X[4]Krisztin, T., Rezounenko, A.：具有离散状态依赖型时滞的抛物型偏微分方程：经典解与解流形。J. Differential Equations**260**，4454–4472（2016），doi:10.1016/j.jde.2015.11.018[5] Krisztin, T., Walther, H.O.：具有离散状态依赖时滞的微分系统的解流形几乎是图。Discrete Con- tin. Dyn. Syst.**43**，2973–2984（2023），doi:10.3934/dcds.20233036[6] Mallet-Paret, J., Nussbaum, R.D., Paraskevopoulos, P.：具有多个状态依赖时间滞后的泛函微分方程的周期解。Topol. Methods Nonlinear Anal. **3**，101–162（1994），doi:10.12775/TMNA.1994.006[7] Walther, H.O.：《具有状态依赖时滞的微分方程的解流形与 C^1-光滑性》。J. Differential Equations**195**，46–65（2003），doi:10.1016/j/jde.2003.07.001[8] Walther, H.O.：代数时滞微分系统、状态依赖时滞与反应的时间顺序。J. Dynam. Differential Equa- tions**21**，195–232（2009），doi:10.1007/s10884-009-9129-6[9] Walther, H.O.：几乎是图的解流形。J. Differ- ential Equations **293**，226–248（2021），doi:10.1016/j.jde.2021.05.024

[10]Walther, H.O.：关于代数时滞系统的解流形。《乌克兰数学杂志》**75**，1591–1607（2023），doi:10.3842/umzh.v75i12.7663[11] Walther, H.O.：关于具有更一般状态依赖时滞的一些微分方程的解流形。载于：Wood, D.R.、Etheridge; A.M.、de Gier, J.、Joshi, N.（编）。*2023 MATRIX* 年鉴，457–472。MATRIX 图书系列，第 6 卷。Springer，Cham，2025，doi:10.007/978-3-031-76738-8 28