arXiv:2601.00643v1 [cond-mat.soft] 2 Jan 2026

周期性剪切弹性细丝中的可逆性、混沌与吸引子

Francesco Bonacci,[1], * Brato Chakrabarti,[2], * Olivia du Roure,[3] Anke Lindner,[3] 和 David Saintillan[4]

[1]*Department of Physics and Geology, University of Perugia, Via A. Pascoli, Perugia, 06123, Italy*

[2]*International Centre for Theoretical Sciences, Tata Institute of Fundamental Research, Bengaluru 560089, India*

[3]*PMMH-ESPCI, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Université Paris Cité, 75005 Paris, France*

[4]*Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of California San Diego, La Jolla, California 92093, USA*

流场中的细丝动力学对于理解广泛的生物系统和软物质系统至关重要，但人们对其在时变驱动下的行为仍知之甚少。在这里，我们将肌动蛋白丝微流控实验与基于黏性流体中涨落欧拉-伯努利弹性杆模型的数值模拟相结合，研究布朗不可伸长弹性细丝在强均匀振荡剪切作用下的长时间动力学。随着振荡周期增大，流动诱导的变形与热噪声相互作用，产生不可逆性。这使系统偏离可逆的确定性刚体动力学：在这一状态下，细丝在整周期时呈现近乎笔直、沿流向排列的构象，在半周期时则呈现屈曲形态。由于系统具有时间滑移对称性，实际上存在两个这样的吸引态，它们之间相差半个周期。系统会自发选择其中一个，但偶尔也会因噪声而在两者之间切换，从而在表观有序与无序之间产生间歇性转变。该系统为在最简非平衡软物质系统中研究随机对称性破缺、吸引子跳跃和间歇性提供了一个可通过实验实现的平台，并对时变流中软物质系统的设计与控制具有新的启示。

I. 引言

受振荡驱动的非线性系统，从剪切软材料 [1–6] 和生物网络 [7, 8] 到量子系统 [9, 10], ，表现出丰富的动力学行为，包括从可逆的周期运动转变为混沌的不可逆态 [11]。在这些所谓的弗洛凯系统中，通常通过频闪式比较系统在每个驱动周期 T开始和结束时的状态，来评估其可逆性。许多相互作用系统中都会发生从可逆到不可逆的转变：在某些参数值或驱动频率下，系统会自组织成可逆态，微观轨迹在每个周期中重复；而在其他参数值下，轨迹则呈现混沌，没有明显的周期性。

周期性剪切的黏性材料一直是研究此类转变的模型系统。在没有布朗运动且雷诺数较低时，斯托克斯方程的线性保证了孤立刚性粒子在流动时间反演下具有运动学可逆性 [12]。然而，多个粒子相互作用时，粒子间碰撞可能导致可逆性被破坏。Pine 等人 [1]曾著名地在胶体悬浮液中展示了临界应变处的急剧转变。低于临界应变时，粒子会在驱动的最初几个周期内因碰撞而重新排列，最终达到一种可逆的“吸收态”，在该状态下所有碰撞都得以避免。高于临界应变时，碰撞会持续发生任意多个周期，导致不可逆的粒子扩散。相关现象还曾在驱动乳液中观察到 [13]。在粒子 [14]和液滴 [15] 系统中，涌现出的可逆态通常表现出空间超均匀性 [16]。布朗涨落可能会模糊这一转变，即使在低应变下也会破坏可逆性。

除了相互作用之外，粒子可变形性也为不可逆性提供了另一种途径，半柔性弹性细丝就是一个例子。在剪切 [17–21] 以及应变主导的 [22–27] 流动中，黏性应力可能克服弹性阻力并诱发屈曲失稳，其起始条件和形态由细丝的弹黏数 [28]决定。这些失稳对初始条件极为敏感，通常需要热噪声才能激活：若没有涨落，孤立的弹性细丝只会松弛至笔直的杆状构型，并遵循可逆动力学 [18]。这表明，振荡剪切下细丝的动力学可能只有两种结果：可逆的直线运动（无噪声时），或完全不可逆的变形（有噪声时）。

在这项工作中，我们揭示了一种更微妙且此前未曾报道的状态。即使存在布朗涨落，我们仍观察到长寿命的准可逆状态：在这些状态下，细丝会在一个周期内发生显著的形状变化，但在流动反转时又会反复恢复为近乎笔直的构型。由于系统的对称性，这样的两个吸引子实际上共存，从而导致表观有序与无序之间出现间歇性转变。

我们结合肌动蛋白细丝的微流控实验、布朗动力学模拟和降阶正规模态模型，研究这一行为在一系列驱动频率下的表现。分析重点关注强流动区域，此时屈曲不稳定性

* 贡献相同

普遍存在；研究揭示了该行为对振荡无量纲周期 $\rho = \dot{\gamma}_m T$ 的强烈依赖，其中 $\dot{\gamma}_m$ 为最大施加剪切速率。在低 ρ 下，振荡过快，无法引起显著变形，因此细丝表现出近乎刚性的可逆动力学。随着 ρ 增大，我们发现系统转变至间歇性混沌状态，其间夹杂着频闪可逆构型。研究结果还表明，形状不稳定性可充当有效的噪声源，即使在涨落较弱的系统中，也会引发复杂行为。

II. 问题定义

我们研究孤立的布朗运动、不可伸长弹性细丝在施加剪切速率$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}_m \sin(2\pi t/T)$的均匀振荡剪切流中所表现出的长时间行为，其中 $\dot{\gamma}_m$为峰值剪切速率， T 为振荡周期 [图1(a,b)]。我们结合了采用稳定化 F-肌动蛋白细丝的微流控实验，以及基于涨落欧拉-伯努利弹性线模型的数值模拟（详见附录 A和B 以及 [29] ）。细丝由其长度 L、长径比 ε、持久长度 ℓ_p和弯曲刚度 $B = k_B T \ell_p$ 表征，其中 $k_B T$ 为热能。

在没有惯性（因此雷诺数趋于零）的情况下，细丝动力学由三个关键无量纲参数决定：**(i)** 弹黏数 $\bar{\mu}_m = 8\pi\mu\dot{\gamma}_m L^4/Bc$ ，用于比较黏性应力与弹性应力 [28], ，其中 μ 为流体黏度，$c = -\log(e\varepsilon^2) > 0$ 为几何细长参数；**(ii)** 无量纲振荡周期 $\rho = \dot{\gamma}_m T$，它也表征一个半周期内的累积应变；**(iii)** 比值 ℓ_p/L，用于表征热形状涨落的强度。上述无量纲数通过以 L为长度尺度、以 $\dot{\gamma}_m$为时间尺度、以 B/L^2为力尺度得到。在稳态剪切下，当 $\bar{\mu}_m \gtrsim 306.4$ [17, 20]时会发生屈曲失稳。

我们研究柔性细丝在剪切流的压缩象限和拉伸象限之间来回旋转时的动力学与形态。本文所呈现的所有实验和模拟均在 $\bar{\mu}_m$ 为远大于屈曲阈值的常数值下进行。因此，细丝可能在流动的压缩部分发生屈曲，而在拉伸象限中被拉伸。我们的分析聚焦于驱动频率（由 ρ 表征）对细丝长时间行为的影响。

在剪切作用下，细丝主要保持在流动平面内，因此可以用二维方式描述其构型 [20]。细丝的瞬时形状由中心线的切线角 $\theta(s,\ t)$表示，其中 $s \in [0, L]$ 为弧长，$\theta \in [0, \pi]$ 从负 x轴起测量，该轴定义为与 $t = 0$ [图1(b)]中流动方向相反的方向。为表征细丝的取向和形状，我们将 $\theta(s,\ t)$ 展开为正则模态：

$$\theta(s,t) = \theta_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t)\xi^k(s), \tag{1}$$

其中，模态形状 $\xi^k(s)$ 是双调和算子 [30] 的归一化特征函数（详见补充材料和图 S1 [31] ）。由此得到模态振幅向量，

$$\theta(s,t) \to [\theta_0(t), \psi_1(t), \psi_2(t), ...\psi_N(t)] = [\theta_0(t), \mathbf{\Psi}(t)], \tag{2}$$

该向量在适当的阶数 N 处截断，并完整定义了细丝在时间 t 的状态。零阶模态 $\theta_0(t) = L^{-1}\int_0^L \theta(s,\ t)\,\mathrm{d}s$ 给出平均取向，而高阶模态 $\mathbf{\Psi}(t) = [\psi_1(t)\ \psi_2(t)\ ...\psi_N(t)]$ 则量化了空间频率不断增加时的形状变形。细丝变形程度的全局度量由范数 $\|\mathbf{\Psi}\|$ 给出。实际上，我们发现少量模态就足以很好地近似细丝形状（见 SM 和图 S1 [31]），因此在以下结果中采用 $N = 5$ 。

图中所示的施加剪切流（图 1(a)）在每个周期的前半段具有正剪切速率和顺时针涡量，随后在后半段具有负剪切速率和逆时针涡量。因此，处于该流动中的细丝会交替经历顺时针（$\dot{\theta}_0 < 0$）半周期（$\theta_0 > 0$）和逆时针（$\dot{\theta}_0 > 0$）旋转。在没有变形（$\mathbf{\Psi} = \mathbf{0}$）和热噪声的情况下，角动力学是确定且可逆的，并遵循平面剪切中刚性杆（RR）的杰弗里方程 [32],

$$\frac{\mathrm{d}\theta_0^J}{\mathrm{d}t} = \sin^2\left(\theta_0^J\right)\,\sin(2\pi t/\rho), \tag{3}$$

其中，时间已使用典型流动时间 $\dot{\gamma}_m^{-1}$进行无量纲化。式（3）为分析下文观察中变形和波动的影响提供了一个简单的基准。在定常剪切流中，细丝与流动梯度方向（$\theta_0 \approx \pi/2$）对齐时，角速度达到最大值；与流动轴（$\theta_0 \approx 0$ 或 π）对齐时，角速度为零。如式（3）所示，在振荡流中，角速度不仅取决于细丝的瞬时取向，也会随时间调制。每半个周期流动方向反转时（$t = 0$ 和 $t = T/2$），角速度为零；若反转发生在接近流动轴（$\theta_0 \approx 0$ 或 π）的位置，细丝的旋转减慢得更为缓慢。根据细丝在流动中的瞬时取向以及剪切速率的正负，细丝会受到应变流作用而发生压缩或拉伸，如图 1(b)所示，这发生在 $\dot{\gamma} > 0$的前半个周期内。压缩足够大时，可能发生屈曲 [17, 20, 29]。

布朗刚性杆（BRR）的角动力学仍由方程（3）描述，其右端

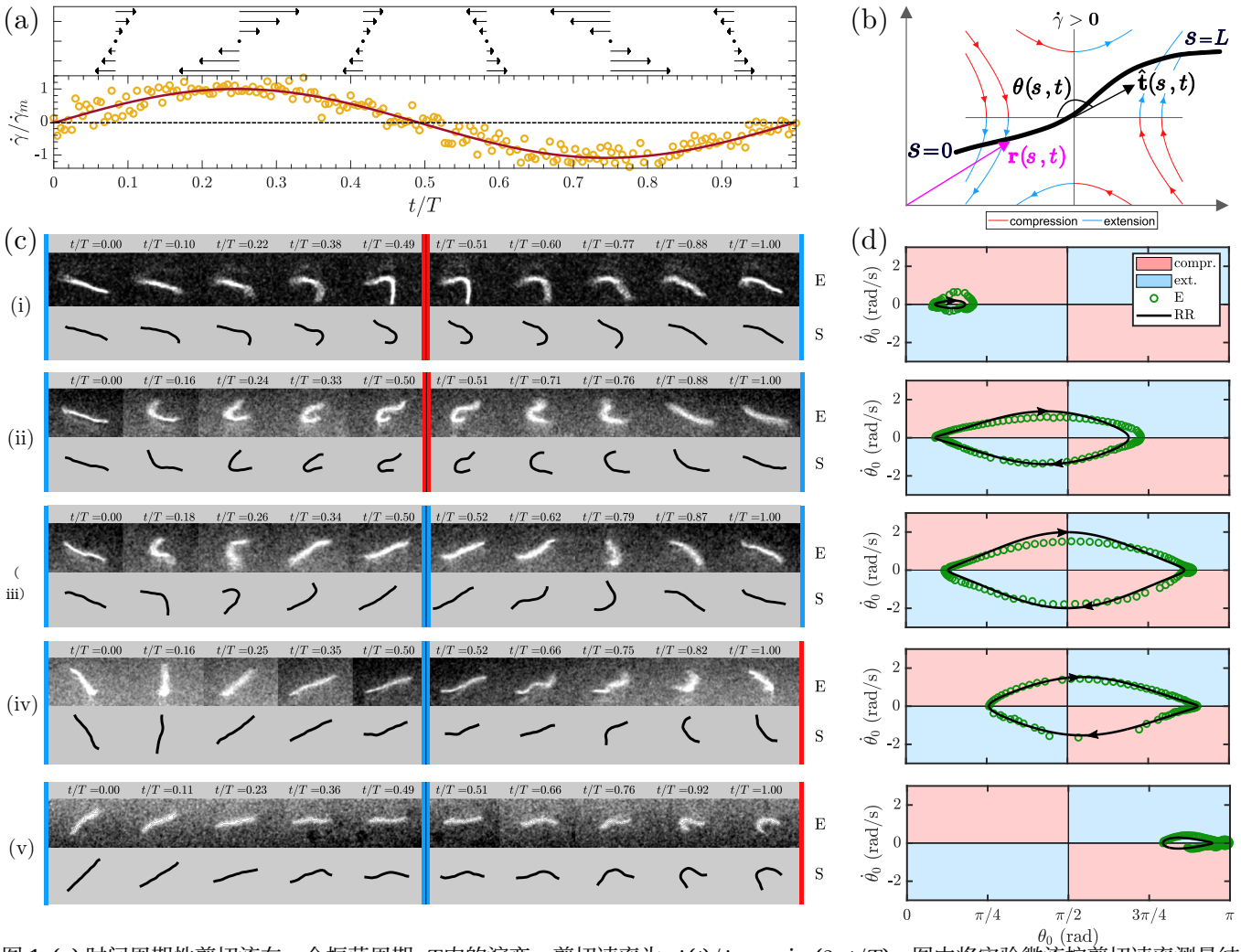

图 1. (a) 时间周期性剪切流在一个振荡周期 T内的演变，剪切速率为 $\dot{\gamma}(t)/\dot{\gamma}_m = \sin(2\pi t/T)$。图中将实验微流控剪切速率测量结果与正弦波进行比较。(b) 弧长为 s的细丝示意图，其形状由切向量 $\hat{\mathbf{t}}(s,t)$ 描述，或等价地由从负 x 方向测量的切线角 $\theta(s,t)$ 描述。正 x 方向定义为 $t = 0$ 时的流动方向。背景流线示意了底层应变流：在第一个半周期 $\dot{\gamma} > 0$ 时，第一和第三象限为伸展流，第二和第四象限为压缩流。(c) 展示一个周期内具有 $\ell_p/L = 1.3$, $\bar{\mu}_m \approx 1 \times 10^4$ 的代表性细丝轨迹快照，包括实验（E）和模拟（S）结果。(i) 中的无量纲周期为 $\rho = 6$，(ii)–(v) 中为 $\rho = 13$。(ii)–(v) 的区别在于细丝的初始取向。蓝色和红色竖线分别标示每个半周期开始和结束时细丝的变形状态：直线状（蓝色）或发生变形（红色）。(d) 与 (c) 中相同的五种情形在 $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ 相平面中的取向动力学。每种情形下，实验轨迹（E）均与由杰弗里方程公式（3）支配的确定性非布朗刚性杆轨迹（RR）进行比较。偏离 Jeffery 轨道的情况与细丝发生强烈变形的时段相吻合。

增加了随机强迫项 $\xi(t)$，其方差为 $\langle \xi(t)\xi(t')\rangle = 4\delta(t-t')/\mathrm{Pe}$，其中佩克莱数 $\mathrm{Pe} = \dot{\gamma}_m/d_r$ 表示剪切速率大小与转动扩散率 d_r之比。对于本文主要关注的布朗柔性丝状体，热涨落由表征热形状涨落强度的比值 ℓ_p/L刻画。需要注意的是，这些涨落不仅会导致形状偏离直线，还会在丝状体的平均取向中引入噪声，其效果等同于转动扩散。总的来说，屈曲造成的形变与热涨落共同作用，会引入偏离确定性杰弗里动力学的因素（见图 1），并可能导致长时间行为出现不可逆性。

这里研究的随机系统有一个关键特征：在变换 $t \to t + T/2, \theta \to \pi - \theta$ 下保持不变，这一性质称为时间滑移对称性 [33]。这一对称性意味着，经过半周期的时间平移并结合角度反射后，系统在完整周期内的统计行为保持不变。正如我们将要展示的，这种对称性在塑造长时间渐近动力学方面发挥着关键作用。

III. 结果与讨论

A. 一个振荡周期内的动力学

我们首先刻画单个振荡周期内可能出现的各种动力学行为，这些行为由热涨落与屈曲诱发的变形相互作用所驱动。我们在先前的工作 [29], 中探讨了初始为笔直的细丝在半周期内的动力学， ρ 并发现振荡周期 $\theta_0^i = \theta_0(0)$和初始取向会显著影响细丝发生屈曲的可能性及随后的构象动力学。当连续经历多个半周期时，每个半周期开始时的细丝取向 θ_0 和变形状态 $\mathbf{\Psi}$ 都反映了先前旋转和屈曲事件所留下的复杂历程。特别是，如果细丝先前发生过屈曲且未能完全松弛，那么它在半周期开始时可能已经处于变形状态。这些观察凸显了系统中动力学记忆的存在：细丝在某一周期中的响应取决于其从先前振荡中继承下来的形状和取向。

图 1（c）展示了来自实验和模拟的具有代表性的细丝形状，说明了一个完整周期内的常见情形。这些观察结果证实了实验与模拟之间具有良好的一致性；我们此前已证明这种一致性是定量的 [29]。

所示所有示例均对应于以下情况：在 $t = 0$ 时，细丝几乎是直的（$\|\mathbf{\Psi}\| \approx 0$），而初始取向要么位于流动的压缩象限内（情形（i）—（iv）， $\theta_0^i \in [0, \pi/2]$），要么位于拉伸象限内（情形（v）， $\theta_0^i \in [\pi/2, \pi]$）。尽管所有示例在周期内都表现出瞬态变形，但这些变形的发生时机和演化过程存在显著差异。在情形（i）和（ii）中，细丝在第一个半周期内发生屈曲，随后在第二个半周期内被完全拉伸。在情形（iii）中，屈曲和拉伸在两个半周期内均发生，并且呈现出近似对称的方式。在情形（iv）中，细丝在第一个半周期内仅发生翻滚而未屈曲，但在第二个半周期内发生屈曲。在情形（v）中，尽管细丝最初直接取向于拉伸象限内，其动力学仍与情形（iv）相近。

我们将这些行为与图1(d)相图中平均 θ_0 取向角 θ_0 及其角速度的演化联系起来。图中将实验数据与刚性非布朗杆的方程（3）数值解进行了比较。情况 (i) 中，初始取向几乎与流动轴对齐，驱动周 ρ 期较短。因此，在第一个半周期（$\dot{}$）内，细丝始终处于压缩象限$\theta_0 > 0$, $\dot{}$ 而在第二个半周期（$\theta_0 < 0$）内则处于拉伸象限。屈曲开始后，变形因此会持续增大，直到 $t = T/2$；随后流动反向，变形便开始弛豫。情况 (ii) 中， ρ 较高，细丝在 $t = T/2$之前进入拉伸象限，因此在流动反向前发生部分拉伸。

在情况 (iii) 和 (iv) 中，随着 θ_0^i 增大，细丝在第一个半周期内更早进入拉伸象限，因此在 $t = T/2$处弛豫程度更大。情况 (iii) 的相空间轨迹近乎对称，在两个半周期内交替经历压缩和伸展，并呈现出清晰的屈曲–弛豫周期。情况 (iv) 中，初始取向接近 $\pi/2$，因此第一个半周期内受压时间太短，无法使任何显著变形增长到超过热涨落所设定的噪声水平 [29]；因此未观察到屈曲，其动力学类似于刚性布朗杆。然而，在第二个半周期内，细丝经历了较长时间的压缩，因而发生屈曲，并在 $t = T$处呈现变形后的形状。情况 (v) 中，细丝初始处于拉伸象限，并始终局限于接近流动方向的取向，此处角速度较小。因此，在第一个半周期内，细丝缓慢趋近流动方向，但始终未越过该方向；在第二个半周期内则观察到屈曲。

基于这些观察结果，我们识别出动力学中的一些重复模式，这些模式对于理解更长时间尺度上的细丝行为至关重要。为此，我们为每个半周期开始和结束时细丝的变形状态指定一种颜色标签：直细丝用蓝色表示，变形细丝用红色表示（见图 1(c) 中的垂直标记）。这样，我们便可以追踪一个完整周期内变形状态的序列。观察到的最常见序列包括：蓝-红-蓝（情况 (i) 和 (ii)）、红-蓝-红（图 1(c) 中未明确展示，但与时间滑移对称性下所示的情况相符），以及蓝-蓝-蓝（情况 (iii)）。较不常见的序列包括蓝-蓝-红（情况 (iv) 和 (v)）以及红-红-蓝。从这些观察结果中可以明显看出时间滑移对称性：比较情况 (i) 与 (v)，以及情况 (ii) 与 (iv)，即可发现这一点。

这些示例中的另一个显著特征是，取向角 θ_0 在周期结束时通常会回到接近其初始值的位置。这表明，即使存在热涨落和细丝可变形性，平均角动力学仍近似遵循杰弗里方程所描述的确定性演化。仔细观察图1(d)可以发现，偏离杰弗里轨道的情况确实会出现，并且与显著变形的时期相吻合，例如在情形(ii)中接近 $t = T/2$, 以及在情形(iii)中接近 $t = T/4$和 $3T/4$。尽管这些偏离很小，但由于系统对初始条件的敏感性，它们可能在连续多个周期中累积[29], ，从而在更长的时间尺度上产生复杂甚至混沌动力学，正如我们稍后将展示的那样。

为理解这种不可逆性如何产生，我们现在分析一个周期内取向角的变化，并识别导致非互易动力学的物理机制；其特征是细丝的初始取向 $\delta\theta_0 = \theta_0(T) - \theta_0(0)$与最终取向不同。

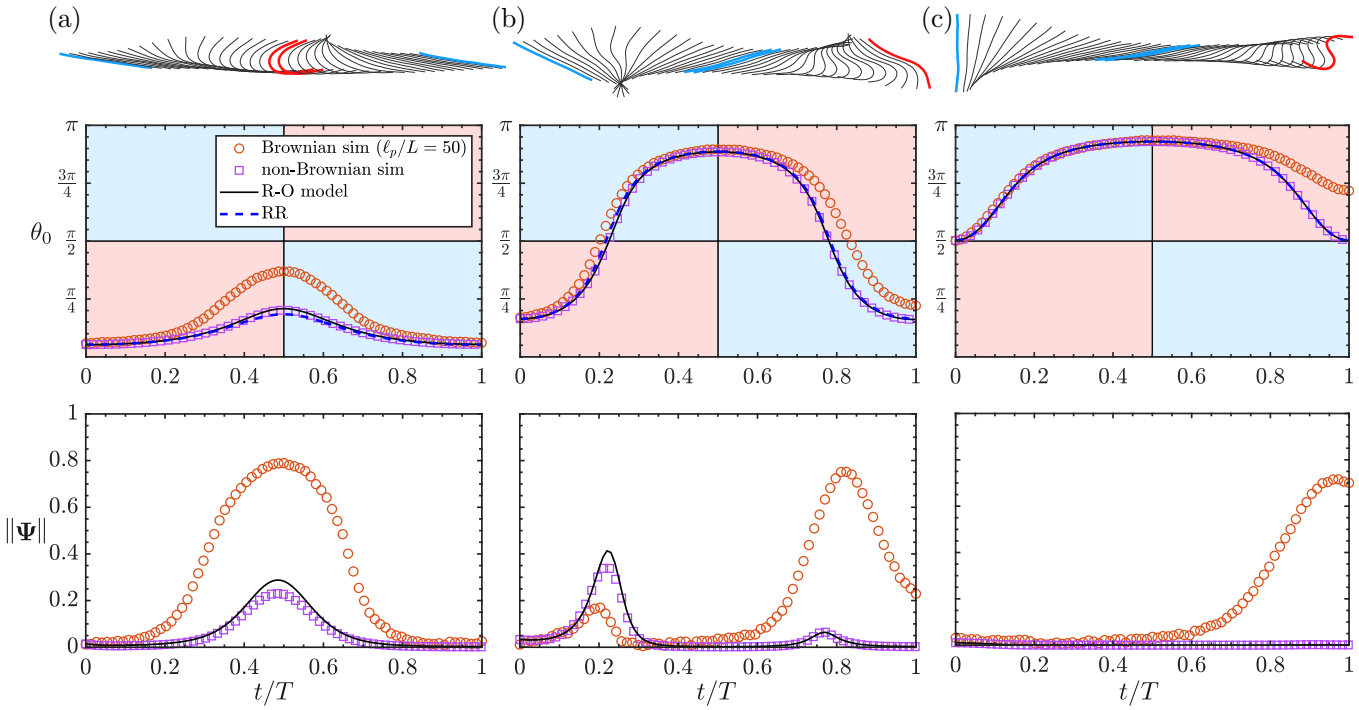

图 2. 三条具有不同初始取向的细丝在单个振荡周期内的模拟与建模模态动力学：(a) $\theta_0^i = 10°$，(b) 30°和 (c) 90°。顶行：布朗柔性细丝模拟得到的细丝构象，其中每个半周期开始和结束时的构象采用与图 1(c) 中相同的颜色编码突出显示。中行：平均细丝取向 $\theta_0(t)$ 的时间演化。将布朗模拟结果（橙色圆圈）与非布朗模拟结果（紫色方块）、半解析降阶模型的预测结果（黑色实线；见 SM 和图 S2 [31]）以及刚性杆的 Jeffery 轨道（RR，蓝色虚线）进行比较。彩色背景突出显示压缩流动和伸展流动区域，所采用的配色方案与图 1(d) 相同。底行：使用前五个正则模态计算得到的细丝变形 $\|\mathbf{\Psi}(t)\|$的时间演化。图例与中行相同。所有情况均采用无量纲周期 $\rho = 14$ 和弹黏数 $\bar{\mu}_m = 10^4$。布朗模拟采用 $\ell_p/L = 50$。

B. 屈曲和热涨落作为不可逆性的驱动因素

为了阐明屈曲变形和热涨落在非互易细丝动力学中的各自作用，我们重点考察数值模拟。我们考虑持久长度与轮廓长度之比较小的布朗细丝；该比值远大于实验中的数值，因此纯热变形的幅度相较于屈曲变形可忽略不计。弹黏数固定为远高于屈曲阈值的较大值 $\ell_p/L = 50$，以确保能够发生屈曲。图 2 分析了近乎笔直的细丝的三条代表性轨迹，其初始取向分别为 $\theta_0^i = 10°$、$30°$ 和 $90°$，无量纲周期固定为 $\rho = 14$。图中展示了取向角（θ_0）和细丝变形（$\|\mathbf{\Psi}\|$）如何随时间演变。为厘清热涨落和细丝形变各自的作用，我们将柔性布朗细丝和非布朗细丝的模拟结果，与非布朗刚性杆的情形进行比较；此外，还与一种针对非布朗细丝的半解析降阶模型进行比较，该模型基于形状向量的截断模态展开（详情见补充材料 [31]）。

正如第一行所示的连续细丝形状所反映的，并且与图 1 中的观察结果一致，细丝动力学强烈依赖于初始取向。我们首先关注布朗模拟（橙色符号），并将其与非布朗刚性杆模拟的杰弗里动力学（蓝色虚线）进行比较。数据表明，细丝取向的演化（中间行）与变形（底行）强烈耦合，而显著偏离杰弗里动力学的情况恰好与屈曲事件相对应。然而，屈曲本身并不能保证动力学具有不可逆性：三个示例都发生了屈曲，但只有后两个示例在周期结束时未能恢复到初始取向和形状。在第一个示例中，初始取向角较小、接近流动轴，细丝在后半个周期处于拉伸状态，因此能够完全弛豫并恢复为直线形状。第二个和第三个示例则并非如此：随着初始角度增大，周期的后半段逐渐由压缩主导，导致只能部分拉伸（第二个示例），或完全无法弛豫（第三个示例，最终处于压缩象限）。

对布朗与非布朗柔性细丝模拟的比较，进一步凸显了热

形状涨落在维持屈曲并促成非互易动力学方面的作用。非布朗模拟（紫色方形符号）通过先将细丝置于热浴中进行初始化来完成，使其产生必要的微弱初始形状涨落，从而触发屈曲；随后关闭热噪声并施加流动。半解析降阶模型（黑色曲线）也采用相同的处理过程。尽管非布朗模拟与半解析模型在三个示例中都高度吻合，但它们的动力学与布朗情形存在显著差异。对于非布朗系统，变形通常较弱，并且在振荡周期内往往会逐渐减弱。在某些情况下（第三个示例），即使同一情形的布朗版本会发生屈曲，在没有噪声时也完全不会发生屈曲。当施加多个周期时（未显示），非布朗系统总会弛豫至沿杰弗里动力学运动的笔直构型 [18]。

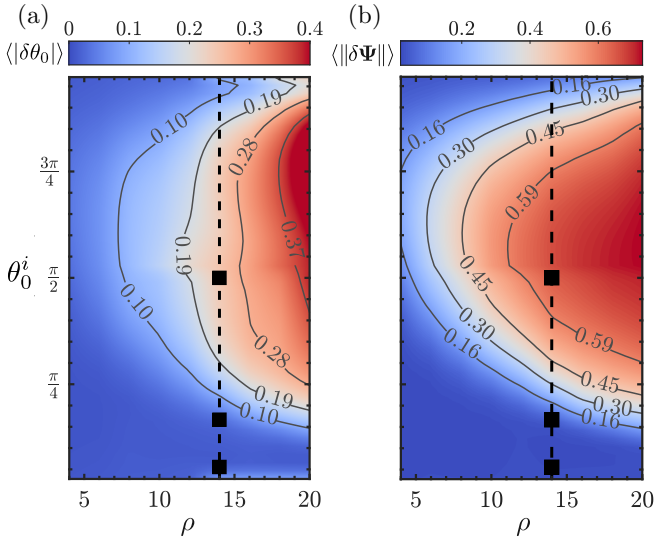

图3.（a）平均丝状物取向和 $\langle|\delta\theta_0|\rangle = \langle|\theta_0(T) - \theta_0(0)|\rangle$，以及（b）细丝变形 $\langle\|\delta\mathbf{\Psi}\|\rangle = \langle\|\mathbf{\Psi}(T) - \mathbf{\Psi}(0)\|\rangle$随无量纲周期 ρ 和初始取向 θ_0^i变化的系综平均频闪变化。每个（ρ，θ_0^i）组合均通过50次模拟计算平均值，每次模拟使用不同的随机种子。模拟采用 $\ell_p/L = 50$ 和$\bar{\mu}_m = 10^4$。黑色方块表示图2中所示的三个示例。

对约化阶数模型进行弱非线性分析，可以为这些观察结果提供解析层面的洞见（详见 SM [31] ）。分析表明，细丝变形源于两种效应的竞争：一是由随时间变化的黏性驱动产生的指数增长项，二是由弯曲弹性产生的阻尼项。增长项取决于累积的时变弹黏数，体现了流动的非定常性与细丝翻滚运动的综合作用。阻尼项则反映了弯曲模态的弛豫，其中波数为 $q_k = (k+1/2)\pi/L$ 的模态的弛豫时间为

$$\tau_k = (\zeta_\perp/B)q_k^{-4}, \tag{4}$$

其中 $\zeta_\perp$ 为横向黏性阻力系数。在我们的参数范围内，最长弛豫时间 τ_1 通常与流动周期 T相当，这意味着任何初始形状扰动都会在不到一个周期的时间内消散。这些涨落消失后，便不再有机制触发线性屈曲不稳定性，而它正是产生大幅变形的驱动因素（见图 2(c) 的底部）。

总之，图 2 表明，在一个周期内，形状涨落即使微乎其微，也对不可逆性至关重要，因为它们不断诱发屈曲不稳定性，从而使弹性驱动的非互易动力学得以发生。取向涨落似乎处于次要地位，因为显著偏离 Jeffery 动力学通常与细丝的剧烈变形有关——
在多个周期内，取向噪声的影响则可能左右细丝的长期动力学，正如我们将在论文最后一节讨论的那样。

我们在图 3中综合展示了这些发现：从一根笔直的细丝出发，我们绘制了经过一个周期后，细丝平均取向 $\langle|\delta\theta_0|\rangle = \langle|\theta_0(T) - \theta_0(0)|\rangle$ 和变形 $\langle\|\delta\mathbf{\Psi}\|\rangle = \langle\|\mathbf{\Psi}(T) - \mathbf{\Psi}(0)\|\rangle$ 随 (ρ,θ_0^i) 变化的系综平均频闪差异；这些结果来自 50 次 Brown-

条件相同但随机种子不同的细丝。相图的结构可以解释如下。对于较小的 ρ，处于压缩状态的时间很短，因此很少发生屈曲，无论初始角度如何，动力学实际上都是可逆的。随着 ρ增大，发生屈曲事件的概率变得显著；这些事件可能导致不同的频闪结果，具体取决于初始细丝取向。如果初始角度非常小，对应的平均取向接近负流动方向（$\theta_0^i \gtrsim 0$），那么对于 $t < T/2$，细丝大部分时间处于流动的压缩象限；而对于 $t > T/2$，则处于伸展象限（见图1（c）中的情形（i）、（ii）和（iii），以及图2（a））。经过较长时间的伸展后，细丝能够在周期结束前伸直，因此，即使在周期中途发生屈曲，频闪动力学仍近似可逆。对于较大的初始角度（$\theta_0^i \gtrsim \pi/2$），细丝在第一个半周期的大部分时间里处于拉伸象限，直至在 $t = T/2$附近与正流动方向对齐；随后在周期的第二个半周期中受到强烈压缩，几乎没有时间弛豫（见图 1（c）中的情形（iv）和（v），以及图2（b、c））。这会导致取向和形状出现显著的频闪差异，表明动力学不可逆。对于更大的初始角度（$\theta_0^i \lesssim \pi$），细丝大多被限制在非常靠近流动方向的位置，周期第二个半周期中的压缩不足以引发显著屈曲。对于这些情形，频闪差异同样很小，而且

动力学可以视为可逆。无论 θ_0如何，由于接近流动轴时角速度显著减慢，细丝极少穿过流动方向。因此，细丝动力学大多局限于一个或至多两个流动象限，正如这里所述的所有示例。随着ρ增大，动力学不可逆区域扩大，因为越来越小（或越来越大）的初始角度都可能对应于在第二个半周期容易发生屈曲的取向。

总之，图3 中频闪不可逆性图的结构反映了时变黏性应力下屈曲与弛豫之间的相互作用，旋转扩散的贡献则较小。与屈曲相关的强烈变形导致其偏离Jeffrey动力学，是不可逆性的主要驱动因素。尽管在当前条件下，单独的布朗形状涨落只会产生微弱的变形，但它们对于触发并维持屈曲至关重要。

C. 长时间动力学：共存的准可逆吸引子与间歇性转变

在考察了单个周期内的屈曲和不可逆性之后，我们现在转向研究单根细丝的长时间统计行为。在实验中，对细丝进行数百个周期的跟踪较为困难，因为布朗运动常常会导致它们漂移出焦平面。因此，我们继续重点进行数值模拟，并采用与上一节相同的持久长度比 $\ell_p/L = 50$ 和弹黏数 $\bar{\mu}_{\mathrm{m}} = 10^4$。如前所示，这些数值能够在使热形状涨落最小的同时，仍允许其诱发屈曲。

为了研究取向动力学随时间的变化，我们监测细丝在每个周期开始时的取向角 θ_0 。由此得到离散时间的频闪序列，记为 $\mathcal{P}_0(n) = \theta_0(nT)$，其中 n 为非负整数。该时间序列等价于在 $\theta_0 = 0$处对（θ_0, θ_0）相空间取一个“庞加莱截面”。由于系统具有时间滑移对称性，我们还定义了一个互补的半周期频闪序列，记为 $\mathcal{P}_{T/2}(n) = \pi - \theta_0(nT + T/2)$。这两个序列在统计上相同，但彼此相关，因为它们都取决于细丝在此前周期中的构象历史。

图 4（a）展示了 $\mathcal{P}_0$ 和 $\mathcal{P}_{T/2}$ （分别为黑色和红色曲线）在一项模拟中跨越 1500 个周期的变化，其中 $\rho = 20$。两条序列均呈现间歇性动力学，其特征是长时间（数百个周期）保持稳定的准可逆行为，此时频闪取向角徘徊在较低的恒定值附近；随后交替出现同样持久的混沌不可逆活动，此时角度剧烈波动。

正如预期，这些动力学与先前对一个周期内行为的描述相关：当细丝取向接近流动轴时，会出现准可逆区间，而混沌涨落则涉及更大的取向角。将图 $\langle|\delta\theta_0|\rangle$中的相图叠加到图3（a）的右侧4（a）上可以证实这一点：稳定动力学出现在蓝色可逆范围内的角度，而混沌动力学则出现在红色不可逆范围内。系统的间歇性表现为每个频闪序列偶尔在混沌动力学与稳定动力学之间切换。

值得注意的是，这两个频闪序列 $\mathcal{P}_0$ 和 $\mathcal{P}_{T/2}$呈现交替行为：一个稳定时，另一个则处于混沌状态。它们偶尔会交叉，如图4(a) 中的紫色竖箭头所示，这标志着一种转变：一个时间序列变得不可逆，而另一个则变得可逆。为展示这种交替，图4(b) 放大显示了最初的 100 个振荡周期，揭示出这种交叉是逐渐发生的，而非突然发生的；它持续数个周期，并伴有短暂的交点。图中还标出了三个观测窗口，其细丝构象见图4(c)（动态过程的影片另见补充视频 1 至 3 [31]）。在早期的蓝色窗口（$n \lesssim 9$）中， $\mathcal{P}_{T/2}$ 在取向和形状上都呈现稳定的可逆动力学。相比之下，在橙色区间（$54 \lesssim n \lesssim 63$）中，$\mathcal{P}_0$ 稳定且可逆。绿色窗口（$27 \lesssim n \lesssim 36$）捕捉到了一个交叉过程，此时两个序列看起来都具有可逆性。图4(c) 所示近乎对称且可逆的构象印证了这一点。综合来看，这些观察结果表明存在吸引态：在每个周期中，细丝都会进入一种吸收性的伸直构象，并与负流动方向紧密对齐；而在半周期时则交替进入变形状态。由于系统具有时间滑移对称性，两个这样的状态以半周期相移共存。细丝会自发选择其中一种状态，但由于涨落而间歇性地在两者之间切换，从而产生交替出现的频闪准可逆阶段和表观混沌阶段。

现在，我们系统地考察频闪序列的时间演化与细丝构象动力学之间的关系。为量化细丝的变形状态，我们定义一个二元序参量：若细丝在半周期开始时发生变形，则赋值为 $S = 1$ ；若细丝为直线状，则赋值为 $S = 0$ 。由此得到一个每隔半周期采样一次的时间序列。我们采用阈值 $\|\mathbf{\Psi}\| = 0.05$ 来区分直线状（$\|\mathbf{\Psi}\| < 0.05$）和发生变形（$\|\mathbf{\Psi}\| > 0.05$）的细丝 [29]。根据 S 时间序列，我们进一步计算一个覆盖完整周期的移动平均值，并将其定义为 S，该值有三种离散取值：

- $S = 0$：细丝在两个半周期结束时均未发生变形（按图1(a) 中的命名方式，变形序列为蓝–蓝）；
- $S = 0.5$：细丝在一个半周期内发生变形，在另一个半周期内恢复未变形状态（蓝–红和红–蓝序列）；

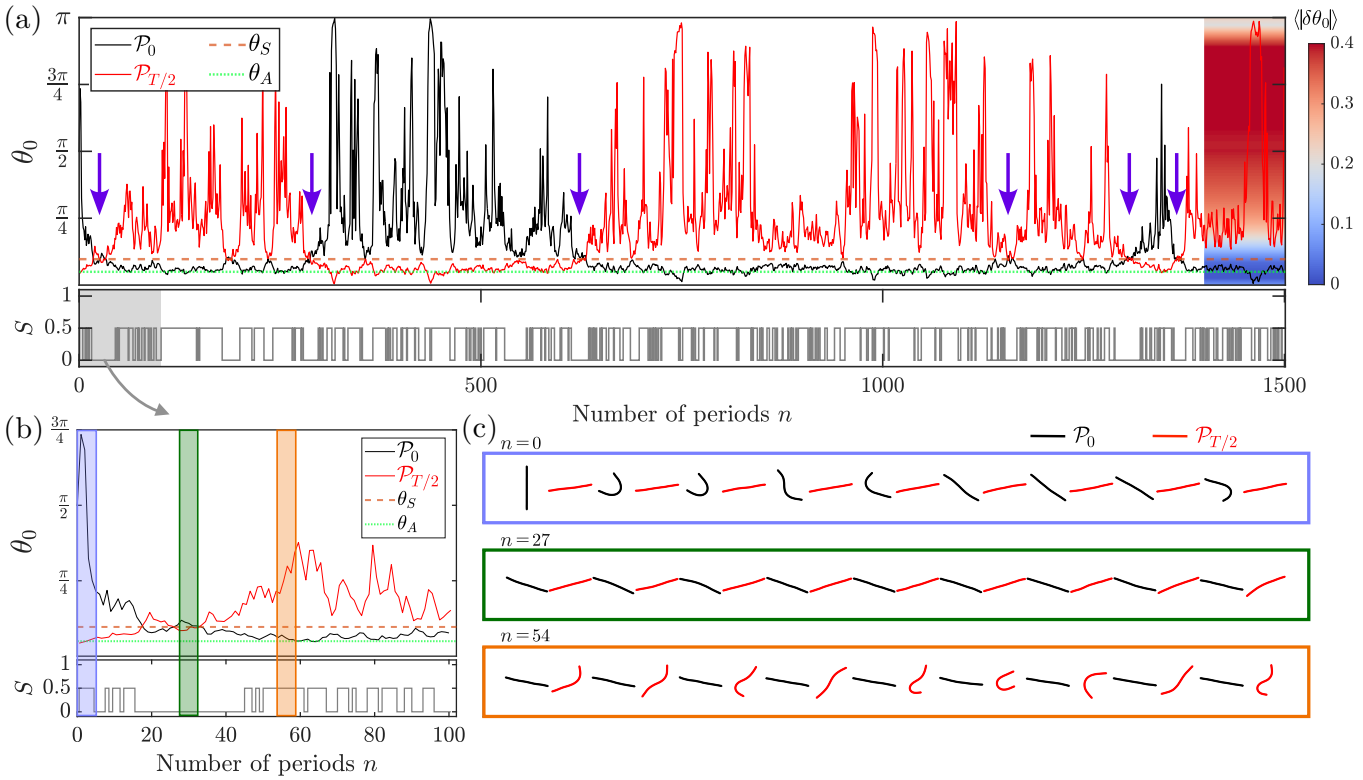

图 4. (a) 上图：在 $\mathcal{P}_0(n)$（黑色）和 $\mathcal{P}_{T/2}(n)$（红色）的布朗模拟中，两个频闪序列在 1500 个周期内的演化，其中 $\rho = 20$ 且 $\bar{\mu}_m = 1 \times 10^4$。橙色虚线表示两个时间序列之间的切换角 θ_S，绿色点线标记稳定动力学下的平均吸引角 θ_A。右侧叠加了图 3(a) 中的相图，该图展示了系综平均频闪变化 $\langle|\delta\theta_0|\rangle$。紫色箭头标出两个序列之间的交叉。下图：表征细丝变形状态的序参量 S 随时间的演化（定义见正文）。(b) 放大显示 (a) 中最初 100 个周期，使用蓝色、绿色和橙色观察窗口标出三个不同的动力学状态。(c) 与 (b) 中三个窗口对应的细丝形态。上排和下排展示了两个吸引态，其中一个序列准可逆，另一个序列混沌，因此产生 $S = 0.5$。中排展示一个切换事件，此时两个序列均可逆，细丝呈现对称伸直构象，从而产生 $S = 0$。另请参阅补充视频 1 至 3 [31]，了解展示这些动力学过程的影片。

- $S = 1$：细丝在两个半周期结束时均发生变形（红–红序列）。

图4(a,b) 的底部面板显示了S的演化，揭示了频闪序列与构象状态之间的强相关性。具体而言，$S = 0$始终与两个序列的交叉相吻合（图4(b,c) 中的绿色区域），表明构象动力学具有对称性。这可能对应于没有变形的纯翻滚，也可能对应于一次屈曲事件，随后在两个半周期中都发生对称拉伸，如图1(c) 的情形 (iii) 所示。对于此处考虑的较大的 $\bar{\mu}_m$ 和 ρ 值，可以观察到屈曲。因此，在实际中，$S = 0$ 通常反映了一个周期的两个半周期中交替发生屈曲和拉伸。$S = 0.5$ 是最常见的情况 [图 4(a)]，中，一个频闪序列稳定，另一个则呈混沌状态。$S = 1$ 这对应于这样一种情形：细丝在第一个半周期内受压的时间足够长，因而发生变形，但在第二个半周期内又没有足够的时间恢复半周期。由于细丝动力学所依据的杰弗里动力学具有对称性，这种情况很少出现。

.....的交点 $\mathcal{P}_0$ 和 $\mathcal{P}_{T/2}$ 标示出对称点，在这些点上，两种状态会暂时汇聚为可逆行为；这些点对应的细丝取向将动力学划分为不同的吸引子盆地。在取向空间中，这类事件关于 $\theta = \pi/2$近乎对称，这意味着 $\theta(0) = \pi - \theta(T/2)$。对于给定的 ρ，这一条件确定了一个唯一取向 θ_S，在该取向下，频闪序列相交，且相空间中的动力学变为可逆。根据式（3）中的杰弗里动力学，可得这一特殊角度为 $\theta_S = \cot^{-1}(\rho/2\pi)$。请注意，图1中的情形 (iii) 就对应这种情况。图4(a,b) 中以橙色虚线表示的这一预测，与观测到的频闪序列交点吻合良好，证实 θ_S 是系统中两个等概率吸引子之间的边界。为进一步检验这一预测，我们针对一系列 ρ值进行了模拟，采用了一个系综

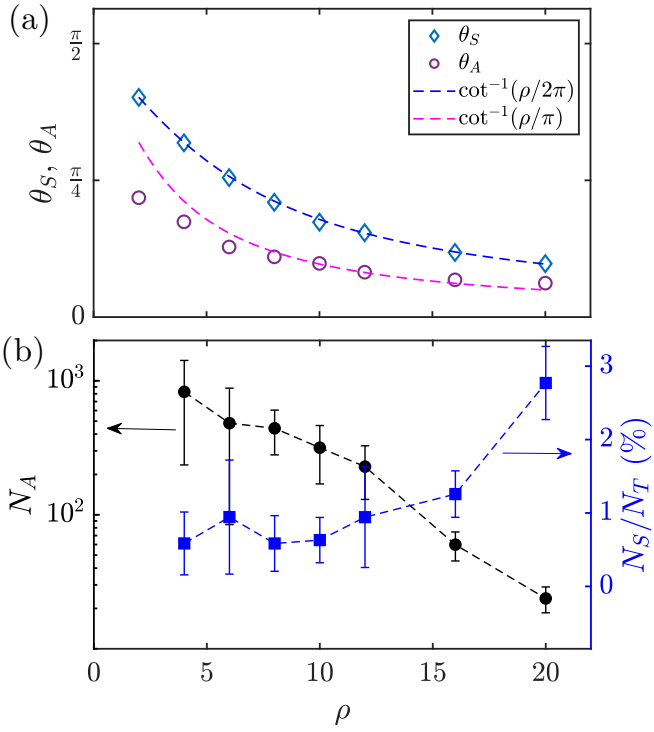

图 5。（a）标记稳定动力学与混沌动力学之间转变的切换角 θ_S，以及稳定动力学期间的吸引角 θ_A，随无量纲周期 ρ变化的关系。符号表示模拟结果；虚线表示理论预测。（b）在稳定吸引态中的平均驻留时间N_A，以及归一化切换频率 N_S/N_T，其中 N_S 为稳定动力学与混沌动力学之间的转变次数，$N_T = 2500$ 为周期总数。误差棒表示标准差。平均值根据 12 次长时间布朗模拟计算得出，$\bar{\mu}_m = 1\times10^4$ 且初始取向各不相同。所有结果均对应于 $\ell_p/L = 50$的布朗细丝。

初始细丝构型，以数值确定频闪序列相交时的角度 θ_S。图5(a) 所示结果与理论预测高度吻合。

在准可逆动力学的阶段，稳定的频闪序列围绕某一偏好的细丝取向波动，仅表现出极小的涨落。我们将该取向记为 θ_A；其数值上通过频闪角度分布中的峰值确定，并在图 4(a,b) 中以绿色点线表示。随着周期 ρ 增加，细丝在伸展过程中花费更多时间与流动对齐，从而导致 θ_A逐渐减小。这一趋势如图 5(a) 所示，其中 θ_A 绘制为 ρ的函数。对于足够大的 ρ，我们根据经验发现 $\theta_A \approx \cot^{-1}(\rho/\pi)$，如粉色虚线所示。对于较短的周期，可逆行为与不可逆行为之间的区别不太明确，且 θ_A 不再有明确定义。通过杰弗里动力学可以对这一经验关系作出物理解释：具有初始取向的刚性杆 $\theta_0^i = \cot^{-1}(\rho/\pi)$ 在（θ_0，$\dot{\theta}_0$）相空间中沿一条轨迹运动，该轨迹在 $\theta_0 = \pi/2$ 处与 $T/2$相切。这对应于介于图 1所示情形（i）和（ii）之间的初始取向。这意味着细丝在前半个周期经历纯压缩，在后半个周期经历纯伸展。因此，θ_A 对应于最有可能诱发屈曲并随后完全弛豫的取向，预期的形变参数值为 $S = 0.5$ （见图 4(b)）。

如图 4(a) 的时间序列所示，两种吸引态之间会在较长时间尺度上随机切换，通常跨越数百个振荡周期。为量化这种间歇性，我们定义两个指标：（i）平均驻留时间 N_A，即在某一吸引态中度过的平均周期数；（ii）平均切换频率 N_S/N_T，其中 N_S 为切换事件数，N_T 为时间序列中的周期总数。对于泊松过程，这两个量呈反比关系。图 5(b) 展示了 N_A 和 N_S/N_T 随 ρ变化的情况。在较低的 ρ下，细丝变形可以忽略不计（见图3），系统在频闪式观察下被限制在初始取向附近，仅因转动扩散而出现微弱涨落。因此，初始位置接近 θ_A 的细丝可能长时间保持在同一吸引态，导致 N_A 较大且切换不频繁。随着 ρ 增大，屈曲事件愈发频繁，增强了构象动力学中的随机性 [图 5(b)]。与此同时，吸引角 θ_A 与切换角 θ_S 之间的角间隔减小 [图 5(a)]，从而降低了发生转变的阈值。这些因素共同提高了噪声诱导切换的概率，这反映在图 5(b) 中，随着 ρ 增大，N_A 呈下降趋势，而 N_S/N_T 呈上升趋势。

综合来看，这些结果表明，细丝取向动力学中的有效涨落会随着振荡周期的增加而增大。这些涨落有两个来源：热取向噪声，以及偏离确定性杰弗里轨道的屈曲诱导偏差，而形状涨落的幅度仅限于较小范围。为区分不同贡献，我们分析了$\sqrt{\langle\delta\theta_0^2\rangle}$ 频闪角位移的标准差，并将其作为一个振荡周期内累积取向噪声的度量。图6 展示了该标准差随 ρ的变化，比较对象为布朗刚性杆和两种具有不同 ℓ_p/L 比值的布朗柔性细丝。在所有情况下，由 $\sqrt{\langle\delta\theta_0^2\rangle}$量化的有效噪声都会随$\rho$单调增加。对于刚性杆而言，这种增长完全源于作用时间更长的热旋转扩散；随着ρ增加，取向能够进一步偏离其初始值。当引入细丝柔性后，相较于刚性杆情形，噪声显著增强。这种增强源于与屈曲相关的额外随机性，而屈曲本身由热形状涨落触发，并且随着 ℓ_p/L 减小而变得更加重要。对于更小的

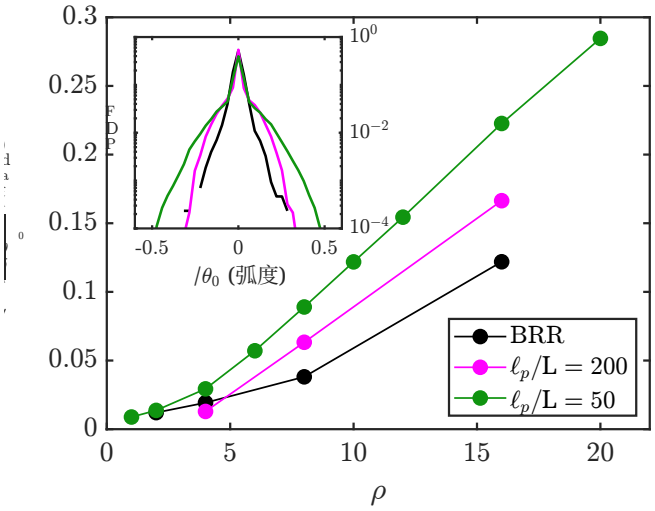

图6。标准差$\sqrt{\langle \delta\theta_0^2 \rangle}$ 表示一个振荡周期内平均取向角的频闪变化，绘制为无量纲频率 ρ 的函数，比较了布朗刚性杆（BRR）和取 ℓ_p/L的两个数值时的布朗细丝。插图：在相同的 $\delta\theta_0$ 下，三种情况下 $\rho = 8$的概率密度函数。对于BRR模型，我们采用了佩克莱数 $\mathrm{Pe} = \dot{\gamma}_m/d_r = \bar{\mu}_m c\ell_p/L/$（24 log（$2/\varepsilon$））， 其中 d_r 是刚性杆的转动扩散率。该选择确保柔性细丝与BRR具有相同的流动条件，以便进行比较 [34]。

ℓ_p/L 相比于本文研究的情况，更接近实验条件，但随着细丝更有可能在一个半周期内探索两个以上的象限，动力学可能变得更加复杂，因为形状涨落会促进细丝横跨流动方向发生翻转。

在低 ρ下，所有情况下的涨落幅度几乎相同，因为屈曲仍可忽略，而热取向扩散占主导。通过插图中相应的 $\delta\theta_0$ 概率密度函数，可以进一步了解热噪声与屈曲的相对贡献，见图6 中的 $\rho = 8$情况。三个分布（刚性和柔性）在较小的角位移处重合，此时取向扩散发挥着重要作用：这对应于准可逆状态，在该状态下，频闪取向徘徊于 θ_A附近。然而，在柔性细丝情况下，较大的角位移出现的概率要高得多，并且主要对应于混沌状态中的屈曲事件；随着 ℓ_p/L降低，这一效应会增强。总之，这些结果突出了热涨落与屈曲的耦合如何有效放大取向噪声，从而促进系统两个吸引域之间的随机跃迁。

IV. 结论

我们分析了振荡剪切流中半柔性细丝的动力学，这是一种典型的非线性随机 Floquet 系统，在弱热涨落下呈现时间滑移对称性。尽管热噪声较弱，却发挥着至关重要的作用：它会触发弹性黏性屈曲，这是导致系统偏离确定性刚性杆行为的主要随机机制。我们重点研究了随着振荡周期 ρ 增大，不可逆性的出现过程，并识别出两种截然不同的状态。在快速振荡流中，屈曲没有足够时间发展，细丝会发生准可逆振荡，同时近乎保持笔直，而不受其取向影响。当 ρ较高、振荡周期较长时，屈曲更容易发生，并导致不可逆性。

尽管出现了屈曲，我们仍发现了吸引态：在每个周期开始时，细丝保持近乎笔直并与流动方向对齐，而在周期中段则交替呈现变形构象。由于系统具有时间滑移对称性，这两种状态共存，彼此相差半个周期。细丝会自发地选择其中一种状态，但也会因噪声而间歇性地在两者之间切换。这形成了一种频闪式动力学，其特征是准可逆阶段与混沌行为阶段交替出现；随着 ρ 增大，每个阶段的典型持续时间都会缩短。

这些单根细丝的动力学是否会在悬浮液尺度上留下可观测的大尺度特征，仍是一个悬而未决的问题。在稳态剪切下，屈曲不稳定性会增强剪切变稀，并产生法向应力差 [17, 34]。振荡流下也可能出现类似效应。一个尤为引人入胜的可能性是，流体动力学相互作用能够使邻近细丝的可逆阶段与混沌阶段同步；在其他受驱动或主动的流体动力学耦合弹性结构系统中，同步也很容易发生 [35–37]。如果确实如此，这可能导致宏观流变行为出现间歇性，为设计和调控具有非常规流动特性的响应型复杂流体开辟新途径。

致谢

作者感谢 Muhittin Mungan 仔细审阅稿件并提出富有见地的意见，也感谢 Rama Govindarajan 参与讨论。B.C. 感谢印度政府原子能部通过项目编号 RTI4001 提供的支持。F.B. 感谢欧盟下一代欧盟计划通过意大利大学与研究部（MUR）国家创新生态系统资助项目 ECS00000041——VITALITY——CUP J97G22000170005 提供的支持。F.B.、A.L. 和 O.d.R. 感谢欧洲研究委员会（ERC）整合者资助项目 PaDyFlow（协议编号 682367）提供的资助，并感谢 Pierre-Gilles de Gennes 研究所的支持（卓越设备，“未来投资计划”项目 ANR-10-EQPX-34）。O.d.R. 感谢法国国家研究署（ANR-21-CE13-0048

和 ANR-22-CE30-0024）提供的资助，并且是 GDR 2108“生命定量方法”成员。D.S. 感谢美国国家科学基金会第 2153520 号和第 2327243 号资助。

作者贡献

所有作者共同设计了这项研究。F.B. 完成了实验并开发了降阶模型。B.C. 开发了数值模型和模拟软件。F.B. 和 B.C. 进行了模拟、分析数据并制作图表。所有作者均解读了数据并撰写了论文。

附录A：实验方法

我们使用 F-肌动蛋白丝作为布朗半柔性聚合物的模型系统。细丝经鬼笔环肽稳定并进行荧光标记。其轮廓长度 L 为 5 至 25 μm，直径约为 8 nm，持久长度为 $\ell_p \approx 17\mu\text{m}$。这对应的弯曲模量为 $B = k_B T\,\ell_p \approx 7\times10^{-26}\text{N}\cdot\text{m}^2$。有关细丝合成和力学表征的更多详情见我们先前的研究 [20, 29]。振荡流装置示意图见补充材料（SM）的图 S3 [31]。我们使用垂直 Hele–Shaw通道产生时间周期性的二维线性剪切流；该通道具有矩形横截面，高宽比设计为约 3.33。这种几何结构在垂直方向形成近乎塞状的流速剖面，在观测平面内则形成类泊肃叶剖面；细丝在距离底部盖玻片约 100 μm 处成像。实验聚焦于位于侧壁与通道中心之间中点的细丝，以确保沿细丝长度方向的流动梯度近似均匀 [20, 29]。振荡流由一对压力控制器（Fluigent Lineup Flow EZ™）驱动，施加正弦压力降 $\delta p\sin(2\pi t/T)$，周期 T 为 1 至 10s。在所有实验中，丝状物雷诺数都非常低，介于 10^{-5} 和 10^{-4}之间；可实现的最大剪切速率范围为 $\dot\gamma_m = 0.4$ 至 3.7 s^{-1}。通过精细调节通道入口处的压力振幅 δp可达到这些条件，压力振幅始终低于几毫巴。通过在入口与丝状物悬浮液之间接入高阻可变长度管路 [29]，可实现较低的压力降。鉴于振荡频率相对较低，黏性阻力占主导地位，惯性瞬态效应较弱，确保流动在每个振荡周期内始终保持层流和类泊肃叶状态 [29]。这保证了细丝所受的瞬时剪切速率与施加的压力同相，因此$\dot\gamma(t) = \dot\gamma_m\sin(2\pi t/T)$。不同时间的代表性剪切速率数据和流速剖面示意图见图 1(a)。有关实验装置、图像采集和分析的更多详情，见我们先前的研究 [29]。

附录 B：模型控制方程与计算方法

我们将细长丝建模为一维不可伸长空间曲线，以其中心线位置 $\boldsymbol{r}(s,\ t)$ 表示，并以弧长 $s\in[0,L]$ 为参数。流体动力学通过适用于斯托克斯流的局部细长体理论描述，其中黏性各向异性阻力与弯曲弹性、内张力和布朗力相平衡。所有变量均经无量纲化处理：长度以细丝轮廓长度 L 为尺度，时间以特征弯曲弛豫时间 $\tau_r = 8\pi\mu L^4/B$ 为尺度，布朗力以 $\sqrt{L/\ell_p}\,B/L^2$ 为尺度，弹性力以 B/L^2 为尺度。细丝动力学由以下运动方程控制：

$$\partial_t\boldsymbol{r}(s,t) = \bar\mu_m\boldsymbol{u}^\infty(s,t) + \boldsymbol{\mathcal{M}}\cdot\left[-\boldsymbol{r}_{ssss} + (\Lambda\boldsymbol{r}_s)_s + \sqrt{L/\ell_p}\,\boldsymbol{\zeta}\right], \tag{B1}$$

其中，$\boldsymbol{u}^\infty(s,\ t)$ 是施加的背景振荡剪切流，$\boldsymbol{\mathcal{M}} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{r}_s\boldsymbol{r}_s$ 是局部各向异性迁移率矩阵，$\Lambda(s)$ 是线张力，它作为拉格朗日乘子用于施加不可伸长约束 $\boldsymbol{r}_s\cdot\boldsymbol{r}_s = 1$；$\boldsymbol{\zeta}(s,\ t)$ 是均值为零、方差为单位值的高斯白噪声向量。细丝动力学取决于三个关键无量纲参数。第一个是最大弹黏数，用于量化流体动力学驱动力的强度，其定义为：$\bar\mu_m = 8\pi\mu\dot\gamma_m L^4/Bc$，其中，$c = -\log(e\varepsilon^2)$ 是细长参数，$\varepsilon = a/L \ll 1$ 表示细丝的长径比。第二个数是无量纲周期 $\rho = \dot\gamma_m T$，它控制振荡的时间尺度。该参数出现在时间周期性外部流中，定义为 $\boldsymbol{u}^\infty(s,\ t) = [\sin(2\pi\bar\mu_{\text{m}}ct/\rho)\ y,\ 0,\ 0]$。第三个无量纲数是 L/ℓ_p，用于表征热形状涨落的幅度。有关求解这些方程所采用数值方法的更多细节，见 [18, 20, 34]。

[1] D. J. Pine、J. P. Gollub、J. F. Brady 和 A. M. Leshansky，《剪切悬浮液中的混沌与不可逆性阈值》，《自然》**438**，997（2005）。[2] K. L. Galloway、D. J. Jerolmack 和 P. E. Arratia，《通过屈服点上下的颗粒动力学量化塑性》，发表于屈服点以下的**216**，4373（2020）D 受阻悬浮液，《软物质》（）。[3] N. C. Keim 和 J. D. Paulsen，《循环剪切非晶固体中相互作用软点产生的多周期轨道》，《科学进展》**7**，eabg7685（2021）。

[4] Y. Yuan、Z. Zeng、Y. Xing、H. Yuan、S. Zhang、W. Kob 和 Y. Wang，《从蠕变到流动：循环剪切下的颗粒材料》，《自然·通讯》15，3866（2024）。[5] J. O. Cochran、G. L. Callaghan、M. J. G. Caven 和 S. M. Fielding，《振荡剪切中的剪切带形成导致缓慢疲劳和高度延迟屈服》，《物理评论快报》132，168202（2024）。[6] K. L. Galloway、E. G. Teich、X. G. Ma、C. Kammer、I. R. Graham、N. C. Keim、C. Reina、D. J. Jerolmack、A. G. Yodh 和 P. E. Arratia，《受剪切的无序材料中的结构、记忆与流动之间的关系》，《自然·物理》18，565（2022）。[7] D. B. Forger 和 C. S. Peskin，《哺乳动物昼夜节律钟的详细预测模型》，美国国家科学院院刊100，14806（2003）。[8] C. Feillet、P. Krusche、F. Tamanini、R. C. Janssens、M. J. Downey、P. Martin、M. Teboul、S. Saito、F. A. L´evi、T. Bretschneider、G. T. J. van der Horst、F. Delaunay 和 D. A. Rand，《哺乳动物昼夜节律钟与细胞周期耦合的相位锁定和多个振荡吸引子》，美国国家科学院院刊111，9828（2014）。[9] T. Gorin、T. Prosen、T. H. Seligman 和 M. Zˇnidariˇc，《洛施密特回波的动力学与保真度衰减》，《物理报告》435，33（2006）。[10] N. Goldman 和 J. Dalibard，《周期驱动的量子系统：有效哈密顿量与人工设计的规范场》，《物理评论X》4，031027（2014）。[11] C. Reichhardt、I. Regev、K. Dahmen、S. Okuma 和 C. J. O. Reichhardt，《周期驱动多体系统中的可逆—不可逆转变及经典与量子系统的未来方向》，《物理评论研究》5，021001（2023）。[12] E. Guazzelli 和 J. F. Morris，*A Physical Introduction to Suspension Dynamics*（剑桥大学出版社，2011）。[13] R. Jeanneret 和 D. Bartolo，《流体动力学洛施密特回波实验中的几何保护可逆性》，《自然·通讯》5，3474（2014）。[14] S. Wilken、R. E. Guerra、D. J. Pine 和 P. M. Chaikin，《剪切胶体悬浮液形成的超均匀结构》，《物理评论快报》125，148001（2020）。[15] J. H. Weijs、R. Jeanneret、R. Dreyfus 和 D. Bartolo，《周期驱动乳液中涌现的超均匀性》，《物理评论快报》115，108301（2015）。[16] S. Torquato，《物质的超均匀态》，《物理报告》745，1（2018）。[17] L. E. Becker 和 M. J. Shelley，《剪切流中的弹性细丝失稳导致第一法向应力差》，《物理评论快报》87，198301（2001）。[18] A. K. Tornberg 和 M. J. Shelley，《模拟斯托克斯流中柔性纤维的动力学与相互作用》，《计算物理学杂志》196，8（2004）。[19] M. Harasim、B. Wunderlich、M. Kr¨oger 和 A. R. Bausch，《直接观测剪切流中半柔性聚合物的动力学》，《物理评论快报》110，108302（2013）。[20] Y. Liu、B. Chakrabarti、D. Saintillan 和 A. Lindner，《剪切中弹性细丝的形态转变流动，《美国国家科学院院刊》115, 9438 (2018). [21] A. M. S-lowicka, N. Xue, P. Sznajder, J. K. Nunes, H. A. Sto ne, and M. L. Ekiel-Jezewska，剪切流中弹性纤维的屈曲，New. J. Phys. 24, 013013 (2022). [22] Y. N. Young and M. J. Shelley，胞状流中纤维的拉伸-卷曲转变与输运，Phys. Rev. Lett. 99, 058303 (2007). [23] V. Kanstler and R. E. Goldstein，拉伸流中单根肌动蛋白丝的涨落、动力学与拉伸-卷曲转变，Phys. Rev. Lett. 108, 038103 (2012). [24] L. Guglielmini, A. Kushwaha, E. S. G. Shaqfeh, and H. A. Stone，黏性停滞点流中弹性细丝的屈曲转变，Phys. Fluids 24, 123601 (2012). [25] H. Manikantan and D. Saintillan，拉伸流中半柔性细丝的屈曲转变，Phys. Rev. E 92, 041002 (2015). [26] N. Quennouz, M. Shelley, O. du Roure, and A. Lindner，黏性胞状流中弹性纤维的输运与屈曲动力学，J. Fluid Mech. 769, 387 (2015). [27] B. Chakrabarti, Y. Liu, J. LaGrone, R. Cortez, L. Fauci, O. du Roure, D. Saintillan, and A. Lindner，柔性细丝在强压缩流中屈曲成螺旋形状，《自然·物理》16, 689 (2020). [28] O. du Roure, A. Lindner, E. N. Nazockdast, and M. J. Shelley，黏性流与流体中的柔性纤维动力学，Annu. Rev. Fluid Mech. 51, 539 (2019). [29] F. Bonacci, B. Chakrabarti, D. Saintillan, O. Du Roure, and A. Lindner，振荡剪切流中柔性细丝的动力学，流体力学杂志 955, A35 (2023). [30] T. Munk, O. Hallatschek, C. H. Wiggins, and E. Frey，流场中半柔性聚合物的动力学，Phys. Rev. E 74, 1 (2006).[31]参见《补充材料》（链接将由出版商插入），其中包含降阶正规模态模型的推导、补充图，以及与图 4(c) 对应的模拟视频。[32] G. B. Jeffery，浸没于黏性流体中的椭球颗粒的运动，Proc. R. Soc. London A 102, 161 1922( ). [33] T. Morimoto, H.-C. Po, and A. Vishwanath，受时间滑移对称性保护的 Floquet拓扑相，Phys. Rev. B 95, 195155 (2017). [34] B. Chakrabarti, Y. Liu, O. Du Roure, A. Lindner, and D. Saintillan，刚性聚合物稀溶液流变学中的弹黏性屈曲特征，流体力学杂志 919, A12 (2021). [35] B. Chakrabarti and D. Saintillan，自发搏动细丝的流体动力学同步，Phys. Rev. Lett. 123, 208101 (2019). [36] M. Tˇatulean-Codrean and E. Lauga，旋转细菌鞭毛的弹流体动力学同步，Phys. Rev. Lett. 128, 208101 (2022). [37] B. Chakrabarti, S. F¨urthauer, and M. J. Shelley，多尺度生物物理模型在搏动纤毛晶格中产生量子化后生波，《美国国家科学院院刊》119, e2113539119 (2022).