arXiv:2601.00646v1 [math.FA] 2 Jan 2026

关于狄利克雷空间上加权复合算子的注记

SUBHADIP HALDER, SWETA MUKHERJEE, RIDDHICK BIRBONSHI

Abstract. 本文给出了狄利克雷空间上加权复合算子具有紧性的一些充分条件。此外，我们刻画了狄利克雷空间上某些类加权复合算子的数值域，并建立了保证零包含于数值域中的判据。最后，我们引入了几类加权复合算子，其数值域包含具有给定中心和半径的圆盘，或具有指定焦点和轴长的椭圆盘。

1. INTRODUCTION

令 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 为开单位圆盘，并令 $H(\mathbb{D})$ 表示所有在 $\mathbb{D}$.上的全纯函数所构成的空间。令 H^∞ 为 $\mathbb{D}$上的有界全纯函数空间。对于函数 $f \in H(\mathbb{D})$，其狄利克雷积分定义为

$$\mathcal{D}(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA(z),$$

其中 dA 表示 $\mathbb{D}$. 上的面积勒贝格测度。狄利克雷空间 $\mathcal{D}$ 是所有使 $\mathcal{D}(f)$ 有限的 $f \in H(\mathbb{D})$ 所构成的集合。显然， $\mathcal{D}$ 包含所有多项式；更一般地，它包含所有在 $\mathbb{D}$ 上全纯且 f' 在 $\mathbb{D}$ 上有界的函数 f 。若 f 属于狄利克雷空间 $\mathcal{D}$，则可立即推出其导数 f' 属于伯格曼空间 A^2。此外，若函数 $f \in \mathcal{D}$，例如 $f(z) = \sum a_k z^k$ ，则量 $_{k\geq 0}$

$$\mathcal{D}(f) = \sum_{k\geq 1} k|a_k|^2 < \infty.$$

因此， $\mathcal{D}$ 中的每个函数也属于哈代空间 $H^2(\mathbb{D})$，同时属于伯格曼空间 A^2。对于 f， $g \in \mathcal{D}$， $\mathcal{D}$ 上的内积定义为

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{D}} = \langle f, g\rangle_{H^2(\mathbb{D})} + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} f'(z)\overline{g'(z)}dA(z),$$

其中 $\langle .,. \rangle_{H^2(\mathbb{D})}$ 是哈代空间 $H^2(\mathbb{D})$ 上的通常内积。因此，相应的范数为

$$\|f\|^2_{\mathcal{D}} = \|f\|^2_{H^2(\mathbb{D})} + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA(z).$$

2020 数学学科分类。47A12,47B32, 47B33。关键词与短语。数值域，紧算子，狄利克雷空间，加权复合算子。

对于 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_n z^n$ 和 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{g}_n z^n$ 以及 $f, g \in \mathcal{D}$，内积也可以表示为

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{D}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \hat{f}_n \overline{\hat{g}}_n.$$

在此内积下，函数族 $e_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{n+1}}, n \geq 0$ 构成空间 $\mathcal{D}$ 的标准~~正交~~基。

对于任意 $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$，定义 $k_w(z) = \frac{1}{\overline{zw}} log\left(\frac{1}{1-\overline{zw}}\right), z \in \mathbb{D}$ 并令 $k_0 \equiv 1$，其中log指对数的主值分支。于是 $k_w, k_0 \in \mathcal{D}$ 这些函数称为 $\mathcal{D}$ 的再生核。此外，对于每个 $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$,

$$\|k_w\|_{\mathcal{D}}^2 = \frac{1}{|w|^2} log\left(\frac{1}{1-|w|^2}\right).$$

狄利克雷空间 $\mathcal{D}$ 中另一种常用范数为

$$\|f\|^2 = |f(0)|^2 + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA(z),$$

它与 $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}.$ 等价。除非另有说明，本文均假设狄利克雷空间配备内积 $\langle ., . \rangle_{\mathcal{D}}$，相应的范数为 $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}.$

称正博雷尔测度 μ on $\mathbb{D}$ 为 $\mathcal{D}$ 的 Carleson 测度，若存在正常数 c 使得

$$\int_{\mathbb{D}} |f|^2 d\mu \leq c\|f\|_{\mathcal{D}}^2,$$

对所有 $f \in \mathcal{D}.$，$\mathcal{D}$ 的乘子是一个函数 $h: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 满足以下性质：$hf \in \mathcal{D}$ 对每个 $f \in \mathcal{D}$。所有此类乘子构成一个代数，称为 $\mathcal{D}$ 的乘子代数，记作 $M(\mathcal{D})$。函数 h属于 $M(\mathcal{D})$ 当且仅当 h 有界且 $|h'|^2 dA$ 是 $\mathcal{D}$的 Carleson 测度。众所周知，乘法算子 M_ψ 对任意 $\psi \in M(\mathcal{D}$都是有界的。关于狄利克雷空间的更多信息，请参阅 [7]。

设 ϕ 是开单位圆盘 $\mathbb{D}$ 到自身的解析映射，ψ 是定义在 $\mathbb{D}$上的另一个解析函数。狄利克雷空间 $\mathcal{D}$上的加权复合算子 $C_{\psi, \phi}$ 定义为 $(C_{\psi, \phi} f)(z) = \psi(z) f(\phi(z))$，其中 $f \in \mathcal{D}$、$z \in \mathbb{D}$。当 $\psi \equiv 1$时，该算子退化为通常的复合算子。狄利克雷空间上复合算子的有界性与紧性已得到广泛研究（见 [21, 17, 23]）。在 [16]，中，Kriete 和 Moorhouse 考察了权函数有界时加权复合算子的紧性。之后，Gunatillake [9]证明，即使 ψ 不有界，$C_{\psi, \phi}$ 在 $H^2(\mathbb{D})$ 上也可以是紧的。有趣的是，[9] 证明了即使 C_ϕ 不是紧算子，$C_{\psi, \phi}$ 仍可以是紧的。在 [19], 中，Lo 和 Loh 还给出了加权 Bergman 空间上复合算子紧性的一些充分条件。本文旨在确定使 $C_{\psi, \phi}$ 在 $\mathcal{D}$.上紧的条件。

设 T 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的有界线性算子。T 的数值域定义为

$$W(T) = \{\langle Tf, f \rangle : f \in \mathcal{H}, \|f\| = 1\}.$$

对于任意集合 $S \subseteq \mathbb{C}$，我们用 S^表示 S 的凸包，并且 $\mathbb{B}(\mathcal{H}$表示 $\mathcal{H}$上所有有界线性算子构成的空间。众所周知，若 $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H},$ 则数值域 $W(T$是凸集，且 $W(T$包含 T的谱。关于数值域的更多信息，请参阅 [8, 11]。文献中已广泛研究了哈代空间上复合算子的数值域（参见 [2, 3, 22]）。在 [10], 中，Gunatillake 考察了哈代空间上加权复合算子数值域的若干性质。随后，[24], 中讨论了加权 Bergman 空间上 Toeplitz 算子和加权复合算子数值域的一些有趣结果。

本文考察狄利克雷空间 $\mathcal{D}$ 上加权复合算子的紧性与数值域。第 2 节给出加权复合算子在 $\mathcal{D}$ 上为紧算子的若干充分条件。第 3 节确定某些加权复合算子的数值域，并建立确保零位于数值域内的判据。最后，在第 4 节中，我们介绍几类加权复合算子，其数值域包含一个中心和半径已指定的圆盘，或一个焦点及轴长已给定的椭圆盘。

2. Compact weighted Composition operators

在 [9, 19, 20], 中，给出了加权复合算子在 Hardy 空间和 Bergman 空间上具有紧性的若干充分条件。这里，我们转而关注如何确定这些算子何时在狄利克雷空间上为紧算子。

我们先介绍 [4, 定理 2.3] 中的一个有用结果。

引理 2.1。设 $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 为解析映射，且 $M(\phi) = \{\psi \in \mathcal{D} : C_{\psi,\phi}$ 在 $\mathcal{D}\}$ 上有界。那么 $M(\phi) = \mathcal{D}$ 当且仅当

$$(i)\, \|\phi\|_\infty < 1 \quad and \quad (ii)\, \phi \in M(\mathcal{D}).$$

在定理 [9, 中， 2], Gunatillake 给出了 $C_{\psi,\phi}$ on $H^2(\mathbb{D})$ 的紧性的一个充分条件。这里，我们的目标是考察狄利克雷空间中是否也有类似的结果。为此，我们先给出以下引理。

引理 2.2。设 $\phi \in M(\mathcal{D})$ 和 $\phi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. 那么，对任意 $\psi \in \mathcal{D}, C_{\psi,\phi}$ 在 $\mathcal{D}$. 中有界

证明。由于我们有 $\phi \in M(\mathcal{D})$ 和 $\phi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, 因此由引理 2.1, $M(\phi) = \mathcal{D}$.于是，对任意 $\psi \in \mathcal{D}, C_{\psi,\phi}$ 在 $\mathcal{D}$. 上有界 □

引理2.3。[18] 设 $C_{\psi,\phi}$ 是 $\mathcal{D}$ 上的有界算子。那么，$C_{\psi,\phi}$ 是紧算子，当且仅当对于 $\mathcal{D}$ 中的任意有界序列 $\{f_n\}$，若 $\{f_n\}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛于 *0*，则 $\{C_{\psi,\phi}(f_n)\}$ 在 $\mathcal{D}$ 中收敛于 *0*。

引理 2.4。[25] 设一列全纯函数 $\{f_n\}$在 $\mathbb{D}$ 上收敛，并且在 $\mathbb{D}$. 的所有紧子集上一致收敛到 *0*。那么 $\{f_n'\}$ 在 $\mathbb{D}$ 的所有紧子集上一致收敛到 *0*。

定理 2.5。假设 $\phi(\mathbb{D})$ 包含于开单位圆盘 $\mathbb{D}$，且 $|\phi'|^2 dA$ 是 $\mathcal{D}$中的 *Carleson* 测度。那么对于任意 ψ 属于 $\mathcal{D}$，加权复合算子$C_{\psi,\ \phi}$ 在 $\mathcal{D}$上是紧的。

证明。由于 $\phi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$，存在 M 满足 $0 < M < 1$，使得 $|\phi(z)| \leq M$，$\forall z \in \mathbb{D}$。显然，$\|\phi\|_\infty < 1$ 并且由于 $|\phi'|^2 dA$ 是 Carleson 测度，根据 [7,定理 5.1。7]，$\phi \in M(\mathcal{D})$。然后由引理 2.1, $C_{\psi,\,\phi}$ 在 $\mathcal{D}$.上有界

设 $\{f_n\}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的有界序列，且 $f_n \to 0$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛。因此，$f_n \to 0$ 在 $S(0, M)$ 上一致收敛，其中 $S(0, M)$ 表示以 0 为中心、半径为 M 的开球。由此，根据引理 2.4，对于每个 $z \in \mathbb{D}$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n > N |f_n(\phi(z))| < \epsilon$ 和 $|f_n'(\phi(z))| < \epsilon$ 均成立。因此，对所有 $n > N$，

$$\begin{aligned}
\|C_{\psi,\phi}(f_n)\|_{\mathcal{D}}^2 &= \|C_{\psi,\phi}(f_n)\|_{H^2(\mathbb{D})}^2 + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |(C_{\psi,\phi}(f_n))'(z)|^2 dA(z) \\
&= \|C_{\psi,\phi}(f_n)\|_{H^2(\mathbb{D})}^2 + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |(\psi(f_n \circ \phi))'(z)|^2 dA(z) \\
&= \|C_{\psi,\phi}(f_n)\|_{H^2(\mathbb{D})}^2 + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |\psi'(z)(f_n \circ \phi)(z) + \psi(z) f_n'(\phi(z))\phi'(z)|^2 dA(z) \\
&\leq \|C_{\psi,\phi}(f_n)\|_{H^2(\mathbb{D})}^2 + \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \left(|\psi'(z)(f_n \circ \phi)(z)|^2 + |\psi(z) f_n'(\phi(z))\phi'(z)|^2\right) dA(z).
\end{aligned}$$

由于 $\psi \in \mathcal{D} \subseteq H^2(\mathbb{D})$ $\{f_n\}$ 在 $H^2(\mathbb{D})$ 上有界，因此由 [9, 引理1、定理 2], $C_{\psi,\,\phi}(f_n)$ 在 $H^2(\mathcal{D})$ 上 $\to 0$。再次，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |\psi'(z)(f_n \circ \phi)(z)|^2 dA(z) &\leq \epsilon^2 \int_{\mathbb{D}} |\psi'(z)|^2 dA(z) \\
&= \epsilon^2 \|\psi'\|_{A^2}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |\psi(z) f_n'(\phi(z))\phi'(z)|^2 dA(z) &\leq \epsilon^2 \int_{\mathbb{D}} |\psi(z)\phi'(z)|^2 dA(z) \\
&= \epsilon^2 \int_{\mathbb{D}} |\psi(z)|^2 |\phi'(z)|^2 dA(z).
\end{aligned}$$

由于 $|\phi'|^2 dA$ 是 $\mathcal{D}$ 中的 Carleson 测度，因此我们得到

$$\int_{\mathbb{D}} |\psi(z) f_n'(\phi)(z)\phi'(z)|^2 dA(z) \leq \epsilon^2 c \|\psi\|_{\mathcal{D}},$$

对某个 $c > 0$。因此，$\|C_{\psi,\,\phi}(f_n)\|_{\mathcal{D}}$ 趋于 0。因此，根据引理 2.3, $C_{\psi,\,\phi}$在 $\mathcal{D}$ 中是紧算子。□

现在我们给出一个例子，说明定理2.5在 ψ 在 $\mathbb{D}$.上无界时的情形

例*2.6.* 设 $\phi(z) = \frac{z^2}{2}$ 且 $\psi(z) = \sum_{k\geq 2} k^{z^k} \log k$, $z \in \mathbb{D}$. 那么根据 [7, *Page*4], $\psi \in \mathcal{D}$，ψ 在 $\mathbb{D}$ 上无界。由于 $M(\mathcal{D})$ 包含所有多项式，由 [7, 定理 *5.1.*7] 可知，测度 $|\phi'|^2 dA$ 是 *Carleson* 测度。因此，函数 ψ 和 ϕ 满足定理 *2.5* 的条件，由此可知算子 $C_{\psi,\phi}$ 在 $\mathcal{D}$. 上是紧的

在 [19, 定理 2。8], Lo 和 Loh 建立了一个条件，用以确保加权 Bergman 空间上的 $C_{\psi,\,\phi}$ 的紧性。本文考察相同条件是否也能保证

狄利克雷空间中的紧性。结果是否定的。为此，我们构造一个满足 [19, 定理 2。8] 关于$\alpha = 0$的所有假设的加权复合算子例子。因此，该算子在伯格曼空间上是紧的，但在狄利克雷空间中却不紧。为了建立这个例子，我们先证明以下结果。

定理 2.7。 若 $C_{\psi,\phi}$ 在 $\mathcal{D}$上是紧的，则 $\lim_{|z|\to 1^-} f(z) = 0$，其中

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} |\psi(z)|\frac{|z|}{|\phi(z)|}\sqrt{\frac{log\left(\frac{1}{1-|\phi(z)|^2}\right)}{log\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)}}, & \phi(z) \neq 0, z \neq 0 \\ \frac{|\psi(0)|}{|\phi(0)|}\sqrt{log\left(\frac{1}{1-|\phi(0)|^2}\right)}, & \phi(z) \neq 0, z = 0 \\ |\psi(0)|, & \phi(z) = 0, z = 0 \\ \frac{|\psi(z)||z|}{\sqrt{log\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)}}, & \phi(z) = 0, z \neq 0 \end{cases}.$$

证明。 若 a是 $\mathbb{D}$中的任意一点，则对于所有 $\mathcal{D}$中的 f，都有 $\langle f, k_a\rangle = f(a)$，其中 $z = a$ 处的再生核定义为

$$k_a(z) = \frac{1}{\bar{a}z} log\left(\frac{1}{1-\bar{a}z}\right), a \neq 0, \forall z \in \mathbb{D}$$

and

$$k_0 \equiv 1.$$

核的范数为 $\|k_a\|_{\mathcal{D}}^2 = \frac{1}{|a|^2} log\left(\frac{1}{1-|a|^2}\right)$。此外，对于每个 $g \in \mathcal{D}$,$\langle (C_{\psi,\phi})^* k_a, g\rangle = \langle \psi(a) k_{\phi(a)}(a)\ g\rangle$. 这意味着 $(C_{\psi,\phi})^* k_a = \overline{\psi(a)} k_{\phi(a)}$. 因此，

$$\begin{aligned} \|(C_{\psi,\phi})^* K_z\|_{\mathcal{D}} &= \left\| (C_{\psi,\phi})^* \frac{k_z}{\|k_z\|_{\mathcal{D}}} \right\|_{\mathcal{D}} \\ &= \frac{|\psi(z)| \|k_{\phi(z)}\|_{\mathcal{D}}}{\|k_z\|_{\mathcal{D}}} \\ &= |\psi(z)| \frac{|z|}{|\phi(z)|} \sqrt{\frac{log\left(\frac{1}{1-|\phi(z)|^2}\right)}{log\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)}}, \end{aligned}$$

其中 $|\phi(z)| \neq 0, z \neq 0$，而 K_z 表示 z处于 $\mathcal{D}$上的归一化再生核。

当 $|\phi(z)| \neq 0\, z = 0$；我们有 $\|(C_{\psi,\ \phi})^* K_z\|_{\mathcal{D}} = \frac{|\psi(\ \ 0\ |)\ (\ )|}{|\phi\ 0|} \sqrt{log\left(\frac{1}{1-|\phi\ (0)|^2}\right)}$.

对于 $|\phi(z)| = 0$ 和 $z = 0$；我们得到 $\|(C_{\psi,\ \phi})^* K_z\|_{\mathcal{D}} = |\psi(0)|$.

类似地，当 $\phi(z) = 0$和 $z \neq 0$时，我们有 $\|(C_{\psi,\ \phi})^* K_z\|_{\mathcal{D}} = \frac{|\psi(\ \ z\ \|z|\ \ )|}{\sqrt{log\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)}}$.

由于 $C_{\psi,\phi}$ 是紧算子，其伴随算子 $(C_{\psi,\phi})^*$ 也是紧算子。此外，根据 [5, 定理 2. 17]， K_z 在 $\mathcal{D}$ 中弱收敛于 0（当 $|z| \to 1^-$时）。因此，所需条件得证。 □

例 *2.8.* 设 $\psi(z) = (1-\sqrt{1-z})^2$ 且 $\phi(z) = 1-\sqrt{1-z}$. 。容易验证这些函数满足 [19, 定理 2.8]的条件 *(i)*。此外，由于 $\lim_{|z|\to 1^-} \frac{|1-\sqrt{1-z}|(1-|z|^2)}{|\sqrt{1-z}|} = 0$, [19, 定理 2.8]的条件 *(ii)* 也成立。显然， $\psi \in A^2$ 和 ϕ 在单位圆盘边界上没有角导数；根据 [5, 定理 3.22] ， 可知 C_ϕ 在 A^2上是紧算子。由于 ψ在 $\mathbb{D}$上有界, [19, 定理 2.6] 保证$C_{\psi,\phi}$ 在 A^2. 上是紧算子。应用[19, 定理 2.4], ， 我们得出 [19, 定理 2.8] 的条件 *(iii)* 也成立，因此，$C_{\psi,\phi}$ 在伯格曼空间上是紧算子。接下来，我们考虑以下极限

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{|\psi(r)|r}{\phi(r)}\sqrt{\frac{log(\frac{1}{1-(\phi(r))^2})}{log(\frac{1}{1-r^2})}} = \lim_{r\to 1^-}(1-\sqrt{1-r})r\sqrt{\frac{log(\frac{1}{1-(\phi(r))^2})}{log(\frac{1}{1-r^2})}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

因此，根据定理 2.7, $C_{\psi,\phi}$ 在 $\mathcal{D}$ 上不是紧算子。
由此我们可以得出结论：任意在 A^2 上是紧算子的算子 $C_{\psi,\phi}$ ， 在 $\mathcal{D}$ 上未必是紧算子。

从上述例子中，我们观察到 [19, 定理 2.8]，中所述的条件不足以确保 $C_{\psi,\phi}$ 在狄利克雷空间 $\mathcal{D}$. 上的紧性。因此，我们的目标是在 [19, 定理 2.8]，的条件之外，建立一些附加条件，以保证算子$C_{\psi,\phi}$ 在 $\mathcal{D}$. 上的紧性。为此，我们首先回顾 $\alpha = 0$. 情形下 [19]，中的以下引理。

引理 *2.9*。 *</style}*如果 f 属于伯格曼空间 A^2，则

$$\frac{2}{3}\|f\|^2_{A^2} \leq |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2(1-|z|^2)^2 dA(z) \leq 2\|f\|^2_{A^2}.$$

现在，我们得到以下结果。

定理 2.10. 设 $C_{\psi,\phi}$ 是狄利克雷空间 $\mathcal{D}$上的加权复合算子。假设 ϕ', ϕ''和 ψ, ψ' 都是有界函数。若满足以下条件:

(i) ϕ 在 $\mathbb{D}$上单叶 (ii) $\lim_{|z|\to 1^-} \frac{|\psi(z)|(1-|z|^2)(1-|\phi(z)|^2}{} = 0$,(iii) $\lim_{|z|\to 1^-} |\psi''(z)|(1-|z|^2) = 0$,

则算子 $C_{\psi,\phi}$ 在 $\mathcal{D}$上是紧的。

证明。 由于 ψ' 有界,

$$\lim_{|z|\to 1^-} |\psi'(z)|(1-|z|^2) = 0.$$

设 $\epsilon > 0$。利用条件（ii）、（iii），以及 ψ'的有界性，存在常数 r ，使得 $\frac{1}{2} < r < 1$ 对所有满足 z 的 $r < |z| < 1$，以下不等式成立:

$$|\psi'(z)|(1-|z|^2) < \epsilon,$$

$$|\psi(z)|(1-|z|^2)<\epsilon(1-|\phi(z)|^2),$$
$$|\psi''(z)|(1-|z|^2)<\epsilon.$$

此外，存在常数 $M>0$，使得函数 ϕ、ϕ'、ϕ''、ψ和ψ' 均有界于 M. 根据 [20, 定理 4.7], 算子 $C_{\psi,\ \phi}$ 在$H^2(\mathbb{D})$上有界。因此，结合 ψ，ψ' 和 ϕ'的有界性，以及 $C_{\psi,\ \phi}$ 在 $H^2(\mathbb{D})$上有界这一事实，可直接推出$C_{\psi,\ \phi}$ 在 $\mathcal{D}$ 上的有界性。

设 $\{f_n\}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的有界序列，并且在 $\mathbb{D}$ 的每个紧子集上都一致收敛于 0。记 $S(0,r)$ 为以原点为中心、半径为 r 的开圆盘，并令 $S(0,r)=S_1$。于是有，

$$\|C_{\psi,\phi}(f_n)\|_{\mathcal{D}}^2=\|C_{\psi,\phi(f_n)}\|_{H^2(\mathbb{D})}^2+\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}|(C_{\psi,\phi}(f_n))'(z)|^2dA(z).$$

由于 $\{f_n\}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的有界序列，它在 $H^2(\mathbb{D})$ 中也有界。由 [20, 定理 4.7] 可直接推出算子$C_{\psi,\phi}$ 在 $H^2(\mathbb{D})$ 中是紧的。因此，由 [20, 引理 2.1], 可得 $\|C_{\psi,\phi}(f_n)\|_{H^2(\mathbb{D})}\to 0$。现在，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}}|(C_{\psi,\phi}(f_n))'(z)|^2dA(z)&=\int_{\mathbb{D}}|(\psi(f_n\circ\phi))'(z)|^2dA(z)\\&=\int_{\mathbb{D}}|\psi'(z)(f_n\circ\phi)(z)+\psi(z)f_n'(\phi(z))\phi'(z)|^2dA(z).\end{aligned}$$

我们有，$(C_{\psi,\phi}(f_n))'\in A^2$，因此，由引理 2.9 可得

$$\begin{aligned}&\frac{2}{3}\|(\psi(f_n\circ\phi))'\|_{A^2}^2\\\leq\ &|\psi'(0)f_n(\phi(0))+\psi(0)\phi'(0)f_n'(\phi(0))|^2\\&+\int_{\mathbb{D}}|(\psi'(f_n\circ\phi))'(z)+(\psi(f_n'\circ\phi)\phi')'(z)|^2(1-|z|^2)^2dA(z)\qquad(2.1)\\\leq\ &2\|(\psi(f_n\circ\phi))'\|_{A^2}^2.\end{aligned}$$

由于 $\{0\}$ 和 $\{\phi(0)\}$ 都是紧集，并且 $f_n'(\phi(0))\to 0$ 根据引理 2.4，可得 $|\psi'(0)f_n(\phi(0))+\psi(0)\phi'(0)f_n'(\phi(0))|\to 0$.再次，

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{D}}|(\psi'(f_n\circ\phi))'(z)+(\psi(f_n'\circ\phi)\phi')'(z)|^2(1-|z|^2)^2dA(z)\\=\ &\int_{\mathbb{D}\setminus S_1}|(\psi'(f_n\circ\phi))'(z)+(\psi(f_n'\circ\phi)\phi')'(z)|^2(1-|z|^2)^2dA(z)\\&+\int_{S_1}|(\psi'(f_n\circ\phi))'(z)+(\psi(f_n'\circ\phi)\phi')'(z)|^2(1-|z|^2)^2dA(z)\\\leq\ &8\Bigg(\int_{\mathbb{D}\setminus S_1}|\psi'(z)(f_n\circ\phi)(z)|^2(1-|z|^2)^2dA(z)+\\&2\int_{\mathbb{D}\setminus S_1}|\psi'(z)(f_n'\circ\phi)(z)\phi'(z)|^2(1-|z|^2)^2dA(z)+\end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{D}\setminus S_1} |\psi(z)(f_n''\circ\phi)(z)(\phi')^2(z)|^2(1-|z|^2)^2dA(z) +$$
$$\int_{\mathbb{D}\setminus S_1} |\psi(z)\phi''(z)(f_n'\circ\phi)(z)|^2(1-|z|^2)^2dA(z)\Bigg) +$$
$$\int_{S_1} |(\psi'(f_n\circ\phi))' + (\psi(f_n'\circ\phi)\phi')'|^2(1-|z|^2)^2dA(z).$$

由于 S_1是紧的，数列 $\{f_n\}$，$\{f_n'\}$和 $\{f_n''\}$在 S_1 上都由引理2.4一致收敛到 0。

因此，

$$\int_{S_1} |(\psi'(z)(f_n\circ\phi)(z))' + (\psi(z)(f_n'\circ\phi)(z)\phi'(z))'|^2(1-|z|^2)^2dA(z) \to 0.$$

现在，对于区域 $\mathbb{D}\setminus S_1$，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}\setminus S_1} |\psi'(z)|^2|(f_n'\circ\phi)(z)|^2|\phi'(z)|^2(1-|z|^2)^2dA(z) &\le \epsilon^2\int_{\mathbb{D}\setminus S_1}|\phi'(z)|^2|(f_n'\circ\phi)(z)|^2dA(z)\\ &\le M\epsilon^2\int_{\mathbb{D}}|(f_n'\circ\phi)(z)|^2dA(z)\\ &\le M\epsilon^2\|C_\phi\|_{A^2}^2\|f_n'\|_{A^2}^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}\setminus S_1} |\psi''(z)|^2|(f_n\circ\phi)(z)|^2(1-|z|^2)^2dA(z) &\le \epsilon^2\int_{\mathbb{D}\setminus S_1}|(f_n\circ\phi)(z)|^2dA(z)\\ &\le \epsilon^2\int_{\mathbb{D}}|(f_n\circ\phi)(z)|^2dA(z)\\ &\le \epsilon^2\|C_\phi\|_{A^2}^2\|f_n\|_{A^2}^2\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}\setminus S_1} |\psi(z)\phi''(z)(f_n'\circ\phi)(z)|^2(1-|z|^2)^2dA(z) &\le \epsilon^2M\int_{\mathbb{D}}(1-|\phi(z)|^2)^2|(f_n'\circ\phi)(z)|^2dA(z)\\ &\le \epsilon^2M\|C_\phi\|_{A^2}^2\|f_n'\|_{A^2}^2.\end{aligned}$$

由于 $f_n\in\mathcal{D}$，可得 $f_n'\in A^2$。
因此，根据引理 2.9，我们有

$$\frac{2}{3}\|f_n'\|_{A^2}^2 \le |f_n'(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}}|f_n''(z)|^2(1-|z|^2)^2dA(z) \le 2\|f_n'\|_{A^2}^2.$$

再次，

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{D}\setminus S_1} |\psi(z)|^2|\phi'(z)|^4|(f_n''\circ\phi)(z)|^2(1-|z|^2)^2dA(z)\\ \le\ & \epsilon^2M^2\int_{\mathbb{D}}(1-|\phi(z)|^2)^2|\phi'(z)|^2|(f_n''\circ\phi)(z)|^2dA(z).\end{aligned}$$

令 $w=\phi(z)$。由于 ϕ 是单叶的，应用[12, 定理C第 163], 页中的变量替换公式，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{D}\setminus S_1}|\psi(z)|^2|\phi'(z)|^4|(f_n''\circ\phi)(z)|^2(1-|z|^2)^2dA(z)\\ \leq\ & \epsilon^2M^2\Big(\int_{\mathbb{D}}(1-|w|^2)^2|f_n''(w)|^2dA(w)+|f_n'(0)|^2-|f_n'(0)|^2\Big)\\ \leq\ & \epsilon^2\left(\|f_n'\|_{A^2}^2-|f_n'(0)|^2\right).\end{aligned}$$

因此，$\|C_{\psi,\ \phi}(f_n)\|_{\mathcal{D}}\to 0$. 由引理2.3，可知 $C_{\psi,\ \phi}$ 在$\mathcal{D}$中是紧的。□

例2.11。设 $\phi(z)=\frac{z}{2-z}$ 且 $\psi(z)=(1-z)^2$。则 ψ 和 ϕ 满足定理*2.10*的条件。因此，$C_{\psi,\ \phi}$ 在 $\mathcal{D}$.中是紧的

3. Numerical range of weighted composition operators

本节从以下定义开始。

定义3.1。对于 $r\in\mathbb{N}$、$r\geq 2$ 和 $r>j\geq 0$，集合 P_j 由 $\mathcal{D}$ 定义为

$$P_j=\left\{f:f(z)=z^jg(z^r),g\in\mathcal{D}\right\}.$$

集合 P_j 显然是 $\mathcal{D}$的一个闭子空间。由于这些子空间对于 $r>j\geq 0$相互正交，且它们的和覆盖 $\mathcal{D}$，我们得到以下引理。

引理3.2。对于每个整数 $r\geq 2$,

$$\mathcal{D}=P_0\oplus P_1\oplus\ldots\oplus P_{r-1}.$$

接下来，我们求某些复合算子的数值域。

定理3.3。设 $r\geq 2$ 为一个整数，$\phi(z)=\mu z$ 满足 $\mu=e^{2\pi i/r}$，且 $\psi(z)=g(z^r)$，其中某个 $g\in M(\mathcal{D})$ 满足$C_{\psi,\phi}\in\mathbb{B}(\mathcal{D})$，则

$$W(C_{\psi,\phi})=\left(\mu^0W(M_\psi|_{P_0})\cup\mu^1W(M_\psi|_{P_1})\cup\ldots\cup\mu^{(r-1)}W(M_\psi|_{P_{(r-1)}})\right)^\wedge.$$

证明。设 $f\in P_j$ 满足 $r>j\geq 0$。则 $f(\phi(z))=f(\mu z)=\mu^jf(z)$，这表明 $C_\phi(P_j)\subseteq P_j$. 此外，对某个 $g\in M(\mathcal{D})$，有 $\psi(z)=g(z^r)$。对于任意 $f\in P_j$，我们可以写成 $f(z)=z^jg_1(z^r)$，其中某个 $g_1\in\mathcal{D}$。由于 $g\in M(\mathcal{D})$，我们有

$$\begin{aligned}M_\psi(f)(z)&=\psi\cdot f\\&=g(z^r)\cdot z^jg_1(z^r)\\&=z^j(gg_1)(z^r),\end{aligned}$$

它又是 P_j 中的一个元素。因此，$M_\psi(P_j)\subseteq P_j$，从而 $C_{\psi,\ \phi}(P_j)\subseteq P_j$. 由引理 3.2可知

$$\mathcal{D}=P_0\oplus P_1\oplus\ldots\oplus P_{r-1}.$$

因此，算子 $C_{\psi,\phi}$ 可分解为

$$C_{\psi,\phi}=C_0\oplus C_1\oplus\ldots\oplus C_{r-1},$$

其中 $C_j = C_{\psi,\phi}|_{P_j}$. 若 $h \in P_j$ 且 $\|h\|_{\mathcal{D}} = 1$, 则有 $\langle C_j h, h\rangle_{\mathcal{D}} = \mu^j \langle \psi h, h\rangle_{\mathcal{D}}$。因此 $W(C_j) = \mu^j W(M_\psi|_{P_j})$. 于是,

$$W(C_{\psi,\phi}) = \left(\mu^0 W(M_\psi|_{P_0}) \cup \mu^1 W(M_\psi|_{P_1}) \cup \ldots \cup \mu^{(r-1)} W(M_\psi|_{P_{(r-1)}})\right)^\wedge.$$

□

首先，我们研究 $C_{\psi,\phi}$ 的数值域，其中 $\phi(z) = w$.

引理 3.4. 设 $\phi(z) = w$ 满足 $|w| < 1$，且设 ψ 是一个非零函数，使得 $C_{\psi,\phi} \in \mathbb{B}(\mathcal{D})$, 则

(i) 若 $k_w \equiv c\psi\, (c \neq 0)$，则 $W(C_{\psi,\phi}) = [0, \overline{c}\|\psi\|^2_{\mathcal{D}}]$。

(ii) 若 k_w 与 ψ 彼此正交，则 $W(C_{\psi,\phi})$ 是以原点为圆心、半径为 $\frac{1}{2}\|\psi\|_{\mathcal{D}}\|k_w\|_{\mathcal{D}}$ 的闭圆盘。

(iii) 在其他所有情形下， $W(C_{\psi,\phi})$ 是一个闭椭圆盘，其焦点为 0 和$\psi(w)$。

证明。 由于 $\phi \equiv w$，因此对于每个 $f \in \mathcal{D}$,

$$C_{\psi,\phi}(f) = \psi f(w) = \langle f, k_w\rangle \psi.$$

因此，$C_{\psi,\ \phi}$ 是一个秩一算子，结论由 [3, 命题 2。5]。 □

下一个引理由 [15, 定理 2.6] 得出。

引理 3.5。 设 $C_{\psi,\ \phi}$ 有界，且非常值 ϕ 并且 ψ 非零。若对于某个 $z_0 \in \mathbb{D}$，有 $\psi(z_0) = 0$，或者 ϕ 不是单射，则 $0 \in int\ W(C_{\psi,\ \phi})$。

现在，在接下来的两个定理中，我们确定加权复合算子$C_{\psi,\ \phi}$.的数值域中是否包含零。

定理 3.6。 设 $C_{\psi,\ \phi} \in \mathbb{B}(\mathcal{D})$ 满足 $\psi \neq 0$ 且 $\phi(0) = 0$。若 ϕ 不是膨胀映射，则加权复合算子 $C_{\psi,\ \phi}$ 的数值域在其内部包含 0。

证明。 若 $\phi'(0) = 0$ 那么 ϕ 不是单射，而引理 3.5 给出了结论。现在，假设 $\phi'(0) = \mu \neq 0$. 由于 ϕ 不具有 $\phi(z) = tz$ 的形式，其中 t 属于$\mathbb{D}$，因此它可以表示为

$$\phi(z) = \mu z\left(1 + bz^s(1 + g(z))\right),$$

其中 $s \in \mathbb{N}, b \neq 0$ 和 $g \in H(\mathbb{D})$，且 $g(0) = 0$. 因此，对任意 $r \in \mathbb{N}$

$$\phi^r(z) = \mu^r z^r + rb\mu^r z^{r+s} + \text{ terms of } z \text{ with higher powers.} \tag{3.1}$$

设 $\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\psi}_k z^k$。若 $\hat{\psi}_0 = 0$，则由引理 3.5 得到结果。若 $\hat{\psi}_0 \neq 0$, 考虑二维子空间 M_r=span$\{e_r(z) = \frac{z^r}{\sqrt{r+1}}, e_{r+s}(z) = \frac{z^{r+s}}{\sqrt{r+s+1}}\}$。那么，将 $C_{\phi,\phi}$ 压缩到 M_r 所得的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} \hat{\psi}_0\mu^r & 0 \\ \sqrt{\frac{r+s+1}{r+1}}\mu^r(rb\hat{\psi}_0 + \hat{\psi}_s) & \hat{\psi}_0\mu^{r+s} \end{pmatrix} = \mu^r E_r,$$

其中

$$E_r = \begin{pmatrix} \hat{\psi}_0 & 0 \\ \sqrt{\frac{r+s+1}{r+1}}(rb\hat{\psi}_0 + \hat{\psi}_s) & \hat{\psi}_0\mu^s \end{pmatrix}.$$

由于 $W(\mu^r E_r) \subseteq W(C_{\psi,\phi})$ 根据（[8, 命题 1.4]），只需证明对于某个 $W(E_r$, 0 位于 r. 数值域 $W(E_r)$的内部。数值域是一个椭圆，焦点为$\hat{\psi}_0$和$\hat{\psi}_0\mu^s$，其短轴长度等于 $\sqrt{\frac{r+s+1}{r+1}}|rb\hat{\psi}_0+\hat{\psi}_s|$，如 [11, 例 3]所述。此外，

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r+s+1}{r+1} = 1.$$

因此，只要将 r 取足够大，点 0 就位于 $W(E_r)$的内部，证毕。□

注 3.7. 若$C_{\psi,\phi} \in \mathbb{B}(\mathcal{D})$ 且 ϕ 满足定理2.5 和定理3.6的条件，则对于任意非零的 $\psi \in \mathcal{D}$, $C_{\psi,\phi}$ 是紧的，且 $0 \in W(C_{\psi,\phi})$。因此，根据 [6, 定理 1] 数值域 $W(C_{\psi,\phi})$ 是一个闭集。

例 3.8。 当 $\phi(z)=\frac{z^2}{2}$ 且 ψ 是任意非零多项式时，注记 3.7表明，数值域 $W(C_{\psi,\phi})$ 是闭集。

接下来，我们考察当 $\phi(z) = tz, -1 \le t \le 0$ 且 ψ 是非常数函数时，零是否属于数值域。

定理 3.9。 设 $C_{\psi,\phi} \in \mathbb{B}(\mathcal{D})$ 其中 ψ 是非常数解析函数。若$\phi(z) = tz$ 对 $-1 \le t \le 0$ 成立，则 0 属于数值域 $W(C_{\psi,\phi})$。

证明。 当 ψ 非常数且 $t = 0$时，结论可由引理3.4直接得出。对于 $-1 \le t < 0$, 先考虑 $\psi(0) = 0$ 的情形，此时引理 3.5 已给出结论。现在，假设 $-1 \le t < 0$ 且 $\psi(0) \ne 0$。不失一般性，可令 $\psi(0) = 1$，因此 $\psi(z) = 1+\xi(z)$，其中 $\xi \in H(\mathbb{D})$ 且$\xi(0) = 0$. 于是 $C_{\xi,\phi} \in \mathbb{B}(\mathcal{D})$，并且对每个 $f \in \mathcal{D}$

$$\langle C_{\psi,\phi}f, f\rangle_{\mathcal{D}} = \langle C_\phi f, f\rangle_{\mathcal{D}} + \langle C_{\xi,\phi}f, f\rangle_{\mathcal{D}}.$$

对于 $-1 \le t < 0$，且 $\xi(0) = 0$ 引理 3.5 保证零是$W(C_{\xi,\phi})$的内点。因此，存在满足 $\|h\| = 1$ 的 $h \in \mathcal{D}$，使得 $Im\langle C_{\xi,\phi}h, h\rangle_{\mathcal{D}} > 0$。由于 $\langle C_\phi h, h\rangle_{\mathcal{D}}$ 是实数，且 $Im\langle C_{\xi,\phi}h, h\rangle_{\mathcal{D}} > 0$，我们得到上半平面中的一点 $r_1 \in W(C_{\psi,\phi})$。用同样的论证，可得下半平面中的一点 $r_2 \in W(C_{\psi,\phi})$。此外，由于$\langle C_{\psi,\phi}e_1, e_1\rangle_{\mathcal{D}} = t$，且$\langle C_{\psi,\phi}e_0, e_0\rangle_{\mathcal{D}} =1$ 满足 $e_1(z) = \frac{z}{\sqrt{2}}$ 和 $e_0(z) = 1$，我们得出 0 位于$W(C_{\psi,\phi})$的内部。□

注 3.10。 若 $C_{\psi,\phi} \in \mathbb{B}(\mathcal{D})$ 和 ϕ, ψ 满足定理 2.10和定理 3.9的条件，则 $C_{\psi,\phi}$ 是紧的，且 $0 \in W(C_{\psi,\phi})$。因此，根据 [6,定理 1]，数值域 $W(C_{\psi,\phi})$ 是一个闭集。

例 3.11. 当 $\phi(z) = -\frac{z}{2}$ 且 ψ 为任意非恒定多项式时，注3.10 意味着数值域 $W(C_{\psi,\phi})$ 是闭集。

4. Numerical Ranges Containing Circular or Elliptical Disks

本节重点讨论数值域包含圆盘或椭圆盘的加权复合算子。对于这类算子，我们还将确定圆盘的半径以及椭圆盘各轴的长度。

定理 4.1. 设 $C_{\psi,\phi} \in \mathbb{B}(\mathcal{D})$，其中 $\phi(z) = e^{2\pi i/r} z$ $(r \in \mathbb{N})$ 且 $\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\psi}_k z^k$. 。假设存在正整数 $s_2 > s_1$，使得 $\hat{\psi}_{rs_1} \hat{\psi}_{rs_2} \hat{\psi}_{r(s_2-s_1)} \neq 0$，但这三个系数中至少有一个非零。则 $W(C_{\psi,\phi})$ 包含一个以 ψ_0 为圆心、半径为

$$\frac{1}{2}\sqrt{(rs_1+1)|\hat{\psi}_{rs_1}|^2 + (rs_2+1)|\hat{\psi}_{rs_2}|^2 + \frac{(rs_2+1)}{(rs_1+1)}|\hat{\psi}_{r(s_2-s_1)}|^2}.$$

证明。设 M_1=张成$\{e_0, e_{rs_1}, e_{rs_2}\}$，其中 $e_0 = 1$, $e_{rs_1}(z) = \frac{z^{rs_1}}{\sqrt{rs_1+1}}$ 且 $e_{rs_2}(z) = \frac{z^{rs_2}}{\sqrt{rs_2+1}}$。对于这些基向量，算子 $C_{\psi,\ \phi}$ 的作用为

$$C_{\psi,\phi} e_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\psi}_k z^k,$$

$$C_{\psi,\phi} e_{rs_1}(z) = \frac{1}{\sqrt{rs_1+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\psi}_k z^{rs_1+k}$$

and

$$C_{\psi,\phi} e_{rs_2}(z) = \frac{1}{\sqrt{rs_2+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\psi}_k z^{rs_2+k}.$$

因此，将$C_{\psi,\ \phi}$ 压缩到子空间 M_1 上，可由矩阵表示

$$\begin{pmatrix} \hat{\psi}_0 & 0 & 0 \\ \sqrt{rs_1+1}\hat{\psi}_{rs_1} & \hat{\psi}_0 & 0 \\ \sqrt{rs_2+1}\hat{\psi}_{rs_2} & \frac{\sqrt{rs_2+1}}{\sqrt{rs_1+1}}\hat{\psi}_{r(s_2-s_1)} & \hat{\psi}_0 \end{pmatrix}.$$

根据 [14, 定理 4.1] 将$C_{\psi,\ \phi}$压缩到子空间 M_1 上，其数值域是一个圆盘，圆心为 ψ_0，半径为

$$\frac{1}{2}\sqrt{(rs_1+1)|\hat{\psi}_{rs_1}|^2 + (rs_2+1)|\hat{\psi}_{rs_2}|^2 + \frac{(rs_2+1)}{(rs_1+1)}|\hat{\psi}_{r(s_2-s_1)}|^2}.$$

由于压缩算子的数值域包含于 $W(C_{\psi,\ \phi})$中，所需结果便得证。□

定理 4.2。设 $C_{\psi,\ \phi} \in \mathbb{B}(\mathcal{D})$ 其中 $\phi(0) = 0$，且权函数 ψ 在原点处有一个重数为 $r > 0$ 的零点。若 ψ_r 表示 ψ的泰勒展开中 z^r 的系数，则 $W(C_{\psi,\ \phi})$ 包含以原点为中心、半径为 $\frac{r+1}{r+2}|\hat{\psi}_r|$的圆盘。

证明。设 $f(z)=\frac{1}{\sqrt{r+2}}(\mu+z^r)$，其中 $|\mu|=1$，则 $f\in\mathcal{D}$且 $\|f\|_{\mathcal{D}}=1$.假设$\phi(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\hat{}\,\phi_k z^k$ 且 $\psi(z)=\sum_{k=r}^{\infty}\hat{}\,\psi_k z^k$，则

$$\begin{aligned} f(\phi(z)) &= \frac{1}{\sqrt{r+2}}\left(\mu+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\hat{\phi}_k z^k\right)^r\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{r+2}}\left(\mu+\hat{\phi}_1^r z^r+\text{ terms of } z \text{ with higher powers}\right). \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} &\langle C_{\psi,\phi}f,f\rangle_{\mathcal{D}} \\ &=\langle\psi(z)f(\phi(z)),f(z)\rangle_{\mathcal{D}} \\ &=\frac{1}{r+2}\left\langle\left(\sum_{k=r}^{\infty}\hat{\psi}_k z^k\right)\left(\mu+\hat{\phi}_1^r z^r+\text{terms of } z \text{ with higher powers}\right),\mu+z^r\right\rangle_{\mathcal{D}} \\ &=\frac{r+1}{r+2}\mu\hat{\psi}_r. \end{aligned}$$

由于 μ 可以是任意模为 1 的数，数值域 $W(C_{\psi,\phi})$ 包含一个以原点为圆心、半径为 $\frac{r+1}{r+2}|\hat{}\,\psi_r|$ 的圆盘。□

定理 4.3。设 $C_{\psi,\phi}\in\mathbb{B}(\mathcal{D})$ 其中 $\phi(z)=\mu z$，且 $\mu\neq 0$ 和 $\psi(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\hat{}\,\psi_k z^k$. 。那么对于每个整数 $r\geq 2$，数值域 $W(C_{\psi,\phi})$ 都包含一个圆盘，其圆心为原点，半径为 $\frac{\sqrt{r+1}}{2\sqrt{2}}|\hat{}\,\psi_{r-1}\mu|$。

证明。对于 $r\geq 2$，令 M_2 为由 e_1 和 e_r 张成的 $\mathcal{D}$ 子空间，其中 $e_1(z)=\frac{z}{\sqrt{2}}$ 且 $e_r(z)=\frac{z^r}{\sqrt{r+1}}$。于是我们得到

$$C_{\psi,\phi}e_1(z)=\frac{\mu}{\sqrt{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\hat{\psi}_k z^{k+1}\right)$$

and

$$C_{\psi,\phi}e_r(z)=\frac{\mu^r}{\sqrt{r+1}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\hat{\psi}_k z^{k+r}\right).$$

因此，将$C_{\psi,\phi}$ 压缩到 M_2 所得到的压缩算子由矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu\frac{\sqrt{r+1}}{\sqrt{2}}\hat{\psi}_{r-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，将 $C_{\psi,\phi}$ 压缩到 M_2 所得到的压缩算子的数值域是一个以原点为中心、半径为 $\frac{\sqrt{r+1}}{2\sqrt{2}}|\hat{}\,\psi_{r-1}\mu|$ 的闭圆盘（见 [11, 例 3]）。因此，$W(C_{\psi,\phi})$ 包含这个圆盘。□

定理 4.4. 令 $C_{\psi,\phi}\in\mathbb{B}(\mathcal{D})$ 满足 $\phi(z)=e^{2\pi i\theta}z$ 且 $\psi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{}\,\psi_k z^k$ 其中θ 是无理数。那么 $W(C_{\psi,\phi})$ 包含一个椭圆盘，其焦点为$\hat{}\,\psi_0$和$\hat{}\,\psi_0 e^{2\pi i(r+s)\theta}$. 长轴和短轴的长度分别为

$$\sqrt{|\hat{\psi}_0|^2|e^{2\pi ir\theta}-e^{2\pi i(r+s)\theta}|^2+\frac{r+s+1}{r+1}|\hat{\psi}_s|^2}\ \text{ and }\ \sqrt{\frac{r+s+1}{r+1}}|\hat{\psi}_s|$$

，其中 $r \geq 0$ 和 $s > 0$ 均为整数。

证明。设 M_s 为由 e_r 和 e_{r+s}张成的 $\mathcal{D}$，其中 $e_r(z) = \frac{z^r}{\sqrt{r+1}}$且 $e_{r+s}(z) = \frac{z^{r+s}}{\sqrt{r+s+1}}$。于是有

$$C_{\psi,\phi}e_r(z) = e^{2\pi ir\theta}\frac{1}{\sqrt{r+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\hat{\psi}_k z^{k+r}$$

and

$$C_{\psi,\phi}e_{r+s}(z) = e^{2\pi i(r+s)\theta}\frac{1}{\sqrt{r+s+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\hat{\psi}_k z^{k+r+s}.$$

因此，将 $C_{\psi,\phi}$ 压缩到 M_s 所得的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} \hat{\psi}_0 e^{2\pi ir\theta} & 0 \\ e^{2\pi ir\theta}\sqrt{\frac{r+s+1}{r+1}}\hat{\psi}_s & \hat{\psi}_0 e^{2\pi i(r+s)\theta} \end{pmatrix}.$$

$C_{\psi,\phi}$ 压缩到 M_s 所得算子的数值域构成一个椭圆，其焦点为 $\hat{\psi}_0 e^{2\pi ir\theta}$ 和 $\hat{\psi}_0 e^{2\pi i(r+s)\theta}$,长轴长度为

$$\sqrt{|\hat{\psi}_0|^2|e^{2\pi ir\theta} - e^{2\pi i(r+s)\theta}|^2 + \frac{r+s+1}{r+1}|\hat{\psi}_s|^2}$$

且短轴为 $\sqrt{\frac{r+s+1}{r+1}}|\hat{\psi}_s|$(参见 [11, 引理1.1-1])。由于压缩算子的数值域始终包含于该算子的数值域中，所需结论得证。□

致谢。Subhadip Halder 先生谨向印度政府大学拨款委员会（UGC）致谢，感谢其以奖学金形式提供的经济支持。Sweta Mukherjee 女士获得了西孟加拉邦政府的邦政府部门奖学金资助。

利益冲突。作者声明不存在利益冲突。

数据可用性。不适用。

References

1. Ahern, P., Flores, M. 和 Rudin, W.：《不变体积平均值性质》，J. Funct. Anal.，111(2)，380-397，(1993)。 2. Bourdon, P.S. 和 Shapiro, J.H.：《自守复合算子的数值域》，J. Math. Anal. Appl.，251(2)，839-854，(2000)。 3. Bourdon, P.S. 和 Shapiro, J.H.：《何时零属于复合算子的数值域？》，Integr. Equat. Oper. Th.，44(4)，410-441，(2002)。 4. Chalendar, I., Gallardo-Guti´errez, E.A. 和 Partington, J.R.：《狄利克雷空间上的加权复合算子：有界性与谱性质》，Math. Annal. 363(3)，1265-1279，(2015)。 5. Cowen, C.C. 和 MacCluer, B.D.：《解析函数空间上的复合算子》，CRC 出版社，博卡拉顿，20，(1995)。 6. De Barra, G., Giles, J.R. 和 Sims, B.：《希尔伯特空间上紧算子的数值域》，J. London Math. Soc.，2(4)，704-706，(1972)。 7. El-Fallah, O., Kellay, K., Mashreghi, J. 和 Ransford, T.：《Dirichlet空间入门》，剑桥大学出版社，203，(2014)。

8. Gau, H.L. 和 Wu, P.Y.：《希尔伯特空间算子的数值域》，剑桥大学出版社，179，(2021)。 9. Gunatillake, G.：《哈代空间上的紧加权复合算子》，Amer. Math. Soc.，136(8)，2895-2899，(2008)。 10. Gunatillake, G., Jovovic, M. 和 Smith, W.：《加权复合算子的数值域》，J. Math. Anal. Appl.，413(1)，458–475，(2014)。 11. Gustafson, K.E. 和 Rao, D.K.：《数值域》，施普林格，(1997)。 12. Halmos, P.R.：《测度论》，第 18 卷，施普林格，(2013)。 13. Halmos, P.R.：《希尔伯特空间问题集》，Vam Nostrand，普林斯顿，新泽西州，(1967)。 14. Keeler, D.S., Rodman, L. 和 Spitkovsky, I.M.：《 3×3 矩阵的数值域》，Linear Algebra Appl.，252(1-3)，115–139，(1997)。 15. Khorami, M.M., Ershad, F. 和 Yousefi, B.：《关于某些有界算子的数值域》，J. Math. Ext.，15，(2021)。 16. Kriete, T. 和 Moorhouse, J.：《Calkin 代数中关于复合算子的线性关系》，Trans. Amer. Math. Soc.，359(6)，2915-2944，(2007)。 17. Lef`evre, P., Li, D., Queff´elec, H. 和 Rodr´ıguez-Piazza, L.：《狄利克雷空间上的紧复合算子与接触点集的容量》，J. Funct. Anal.，264(4)，895-919，(2013)。 18. Liu, X. 和 Lou, Z.：《加权狄利克雷空间上的加权复合算子》，Acta Math. Sci.，33，1119-1126，(2013)。 19. Lo, C.O. 和 Loh, A.W.K.：《加权 Bergman 空间上的紧加权复合算子与 Hilbert-Schmidt 加权复合算子》，J. Aust. Math. Soc.，113(2)，208-225，(2022)。 20. Lo, C.O. 和 Loh, A.W.K.：《-空间上的紧加权复合算子》，Bull. Aust. Math. Soc.，99(3)，473-484，(2019)。 21. Luecking, D.：《狄利克雷空间上具有闭值域的有界复合算子》，Proc. Amer. Math. Soc.，128(4)，1109-1116，(2000)。 22. Matache, V.：《复合算子的数值域》，Linear Algebra Appl.，331(1-3)，61-74，(2001)。 23. Mirzakarimi, G. 和 Seddighi, K.：《Bergman 空间与狄利克雷空间上的加权复合算子》，Georgian Math. J.，4(4)，373-383，(1997)。 24. Sen, A., Halder, S., Birbonshi, R. 和 Paul, K.：《加权 Bergman 空间上 Toeplitz 算子与加权复合算子的数值域》，Can. Math. Bull.，1-19，(2025)。 25. Stein, E.M. 和 Shakarchi, R.：《复分析》，普林斯顿大学出版社，2，(2010)。 26. Zhu, K.：《函数空间中的算子理论》，Math. Surveys Monogr.，138，Amer. Math. Soc.，普罗维登斯，罗得岛州，(2007)。(Halder)

Department of Mathematics, Jadavpur University, Kolkata 700032, West Bengal, India电子邮箱：subhadiphalderju@gmail.com (Mukherjee) Department of Mathematics, Jadavpur University, Kolkata 700032,West Bengal, India电子邮箱：sweta.bankati@gmail.com (Birbonshi) Department of Mathematics, Jadavpur University, Kolkata 700032,West Bengal, India电子邮箱：riddhick.math@gmail.com