arXiv:2601.00652v1 [math.AP] 2 Jan 2026

具有奇异或退化矩阵值权的 $p(x)$-Laplacian 变分不等式的整体正则性估计

Minh-Phuong Tran*；Duc-Quang Bui†；Thanh-Nhan Nguyen‡§

2026年1月5日

摘要

我们建立了与涉及退化或奇异矩阵权重的 $p(x)$-Laplacian 型算子相关联的、具有双侧障碍的椭圆变分不等式之弱解的全局梯度界。在关于矩阵值权的最优正则性假设、区域适当的几何平坦性以及给定数据的条件下，我们旨在研究问题结构对解的可积性水平的影响。为此，我们从两方面建立正则性：加权 Calder´on-Zygmund 型估计与一般加权 Orlicz 型估计。我们结果的一个显著特征是，借助构造性的水平集方法，所得估计可使缩放参数对结构常数的依赖达到最小。由此，这些正则性结果在如下意义下是尖锐的：它们能够在容许参数集内构造出具有近乎最优缩放参数的水平集估计。

关键词。Calder´on-Zygmund 估计； $p(x)$-Laplacian；双障碍问题；退化权；Orlicz空间。

2020 年数学主题分类。主要：35J87；35J70；35B65。次要：35J75；35J92；46E30。

1 引言

1.1. 研究动机与相关研究。除关于一致椭圆方程的经典正则性问题外，近年来，由退化矩阵权驱动的问题因其研究价值和应用前景而受到众多学者的关注。据我们所知，文献中关于此类问题及其正则性和存在性理论的研究仍然很少。

关于正则性理论，这方面的研究始于针对一致椭圆／抛物型变分问题（具有或不具有退化结构）的开创性工作。过去几十年来，许多作者通过一系列丰硕成果推动了这项研究的发展

*应用分析研究组，数学与统计学院，TonDuc Thang大学，越南胡志明市；tranminhphuong@tdtu.edu.vn

†勒芒大学，勒芒数学实验室，奥利维耶·梅西安大道，72085 勒芒 Cedex9，法国；Duc Quang.Bui@univ-lemans.fr

‡通讯作者§分析与应用数学组，数学系，胡志明市师范大学，越南胡志明市；nhannt@hcmue.edu.vn

（参见经典教材 $[25, 41, 46, 49, 51]$, 开创性论文 $[1, 2, 15, 16, 19, 40, 50, 52]$, 以及大量相关参考文献）。为简化讨论，我们先考虑线性类型一致椭圆方程的弱解

$$\operatorname{div}[\mathbb{A}(x)\nabla u(x)] = \operatorname{div}[\mathbb{A}(x)\mathbf{F}(x)], \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界开子集（$n \geq 2$），$\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是给定的可测向量场，$\mathbb{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 是一个系数可测的对称正定矩阵，满足一致椭圆性条件:

$$\lambda_1|\xi|^2 \leq \langle \mathbb{A}(x)\xi, \xi\rangle \leq \lambda_2|\xi|^2, \tag{1.2}$$

对几乎处处的 $x \in \Omega$、所有 $\xi \in \mathbb{R}^n$，以及某些正常数 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \infty$均成立。这类方程或方程组的经典例子是拉普拉斯算子，其中$\mathbb{A} = \mathrm{Id}_n$-为单位矩阵；而最早的一系列存在性与正则性结果可追溯至 Calder´on-Zygmund 于 $[11, 12]$发表的开创性著作。借助 Calder´on-Zygmund 奇异积分理论，弱解梯度的正则性估计得以建立。此后，针对涉及矩阵 $\mathbb{A}$的更广泛算子类，相关研究取得了许多重要进展；特别是，我们提请读者参阅 $[5, 9, 27, 52]$，其中研究了在不同情形下、对问题数据满足适当假设时，由线性一致椭圆算子所支配的问题。

不同于 (1.2) 中描述的标准一致椭圆性条件，当 (1.1) 中的矩阵 $\mathbb{A}$ 受到额外矩阵权 μ 的控制，且该矩阵权在区域内可能无穷大或为零时，我们的方程便不再具有一致椭圆性，解的行为也会发生显著变化。这样，我们便可以考虑一类新的退化椭圆方程，其椭圆性性质取决于 μ。粗略地说，在这种情况下，当矩阵 $\mathbb{A}$ 的行列式趋于零，或其逆矩阵在某些点处趋于无穷大时，该矩阵便会变得奇异（或退化）。更准确地说，退化条件通常写作

$$\lambda_1\mu(x)|\xi|^2 \leq \langle \mathbb{A}(x)\xi, \xi\rangle \leq \lambda_2\mu(x)|\xi|^2, \quad x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

其中 $\mu : \Omega \to [0, \infty)$ 是一个标量权函数。在矩阵权 μ 的作用下，当 μ（或 μ^{-1}）无界时，我们所讨论的方程将发生退化（或奇异）。一个典型的例子是 $\mathbb{A}(x) = |x|^{\pm\varepsilon}\mathrm{Id}_n$，其中 $\varepsilon > 0$ 足够小。在这种情况下， $\mathbb{A}$ 的特征值可能趋近于零或发散至无穷大，从而导致椭圆性的丧失。一般而言，主要困难源于我们需要处理权 μ；这使得所考虑方程的椭圆性显得相当敏感，并带来挑战，且大幅限制了解的定性性质。

人们对这类线性退化椭圆方程的研究尤为关注，原因在于它们在多个领域中都有应用，例如多孔介质中的各向异性扩散，其中渗透率/扩散率张量充当权 $[23, 58]$。一个典型例子是，当如上所述 $\mathbb{A}(x) = |x|^{\pm\varepsilon}\mathrm{Id}_n$ 时，它描述了这样一种多孔介质：其渗透率/扩散率在原点附近趋于零（材料几乎不透水，没有流动），或趋于无穷大（材料极易渗透，流动极强）。此外，带有退化—奇异权的方程还出现在数学金融中的随机波动率模型 $[33, 34]$, 数学生物学 $[31]$, 锥空间、共形几何中的 Poincar´e-Einstein 流形、分数阶椭圆方程的研究 $[20, 62]$, 以及许多其他领域。

出于其本身的重要性，带退化系数的线性问题及其解的正则性已在诸多研究中得到系统探讨。例如，当权函数 μ 属于 Muckenhoupt 权重的 $\mathcal{A}_2$ 类，且数据$\mathbf{F}$ 足够良好时，Fabes-Kenig-Serapioni 在 [32] 中证明了方程 (1.1) 弱解的 H¨older 连续性。随后，在 [13], 中，当 $\mu \in \mathcal{A}_2$ 且对 $\mathbb{A}$ 满足加权 BMO 小性条件时，Cao-Mengesha-Phan 在加权情形下研究了 L^p 和 $W^{1,\,p}$ 估计。这些结果后来被推广到 [57] 中的全局结果，以及 [14] 中的方程组情形。此后，多位作者取得了令人瞩目的进展；关于退化椭圆算子的许多关联研究，可见 [21,32,38,39,45],，亦可参阅其中的进一步文献。秉承 Calder´on-Zygmund 估计的思路，我们特别提及 Balci-Diening-Giova-Napoli 在一篇著名论文 [6] 中，以及 Balci-Byun-Diening-Lee 在 [7] 中的研究；这些工作证明了在对边界 $\partial\Omega$ 的假设尽可能少的条件下，局部和全局加权梯度估计成立。值得注意的是，实际上，这两篇最新论文讨论的是 log $\mathbb{A}$ 上的小 BMO 条件，而不是 [13] 中提到的加权 BMO 小性条件（见定义 2.4）。研究表明，这一修改为在多种函数空间中探讨精细梯度正则性带来了诸多优势。

带有矩阵值退化权的非线性方程，涉及 p-拉普拉斯算子（$1 < p < \infty$），可视为椭圆型线性方程（1.1）的自然推广，并可写成散度形式

$$\operatorname{div}[|\mathbb{W}(x)\nabla u|^{p-2}\mathbb{W}^2(x)\nabla u] = \operatorname{div}[|\mathbb{W}(x)\mathbf{F}|^{p-2}\mathbb{W}^2(x)\mathbf{F}], \quad x \in \Omega, \tag{1.4}$$

其中， $\mathbb{W}$ 也是对称正定矩阵，满足 $\mathbb{W} = \mathbb{A}^{\frac{1}{2}}$，且其条件数 $\Lambda > 0$一致有界，即对所有 $x \in \Omega$，均有 $|\mathbb{W}(x)||\mathbb{W}^{-1}(x)| \le \Lambda$（ $|\cdot|$ 表示谱矩阵范数，见第 2 节）。从线性情形推进到非线性情形会带来若干额外挑战。因此，建立解的梯度正则性结构颇具意义。我们还要强调，对于由（1.4）中的退化情形所驱动的非线性椭圆方程，前述文献 [6,7] 实际上给出了对偶结果，因此能够处理一般的线性和非线性退化问题。具体而言，在对 log$\mathbb{A}$ 施加小 BMO 半范数这一最优假设，并要求区域 Ω 具有适当几何结构的条件下，首次建立了（1.4）的弱解在加权勒贝格空间中的梯度正则性，并证明了如下蕴含关系

$$\mathbf{F} \in L^\gamma(\Omega, \omega^\gamma dx) \Longrightarrow \nabla u \in L^\gamma(\Omega, \omega^\gamma dx), \quad \text{for every } \gamma > 1,$$

其中， $\mu = \Lambda^{-1}\omega^2$ 和 Muckenhoupt 权重 ω 以乘法形式作用；严格的细节请参见定义 2.7。鉴于对数-有界平均振荡条件 在非线性退化问题中的矩阵值权重上所发挥的主要作用，上述论文一直启发着我们近期的工作 [55,63] 沿着这一研究方向，我们在变分不等式背景下，为方程和障碍问题中的解提供了广义正则性估计。

正则性理论最初针对线性方程，如今已扩展至更广泛的一类非线性椭圆方程，尤其是算子具有多项式增长时，包括 $p(\cdot)$-拉普拉斯算子。变指数问题自然出现在若干物理问题中，并已得到广泛研究。变指数非线性模型的典型应用包括复合材料几何；以及对以下对象的建模:

电流变流体和非牛顿流体；多孔介质中的气体或流体流动；弹性；图像处理，等等。关于应用的更多背景，读者可参阅 $[1,4,22,59,61]$ 及其中的参考文献。众所周知，在这类问题中，指数会随位置变化；因此，经典框架不足以推导出梯度正则性结果。正是这一局限促使我们开展本研究，以补充并拓展全局最优正则性理论，使其适用于更一般的变增长指数问题；如前所述，这些问题的非线性项涉及退化矩阵权 $\mathbb{W}$。

此外，变分不等式与自由边界问题的正则性理论研究，尤其是障碍问题及其诸多应用（例如弹塑性扭转、赫勒-肖流、拔河博弈、金融领域的美式期权定价等），在过去几十年也引起了学界的广泛关注，例见 [35–37]。粗略地说，对于双障碍问题，给定足够光滑的函数$\phi_1 \le \phi_2$，人们希望构造出介于障碍函数ϕ_1与、ϕ_2 之间的解 u，并得出此类解的正则性结论。我们注意到，障碍问题的正则性结果可以视为对无障碍问题理论结果的推广。然而，当考虑同时涉及变指数增长和奇异退化矩阵权的障碍问题时，这类新型椭圆算子的关键难点在于其非线性，处理起来极具挑战。因此，我们认为，获得此类问题解的梯度正则性估计在数学上颇有意义。就我们所知，文献尚未对这类非线性问题的正则性结果进行全面研究。这促使我们进一步探讨正则性估计，以期更好地理解解的性质。因此，本文的主要结果及其自成体系的证明技巧在某种意义上是新的。

1.2. 问题设定。从变分法的角度来看，障碍问题与变分不等式和自由边界问题密切相关；在这些问题中，解被视为在函数容许集上约束能量泛函的极小化子。受众多模型以及近期关于积分泛函极小化子光滑性性质的研究启发，本文关注的问题与以下情形有关

$$\text{minimize} \int_\Omega \mathcal{P}(x, v(x), \nabla v(x)), \quad \text{among all} \ \ \phi_2 \le v \le \phi_2, \tag{1.5}$$

在某个有界开子集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 中，其边界 $\partial\Omega$ 非光滑，其中 $n \ge 2$； ϕ_1， ϕ_2 是两个给定的函数；而 $\mathcal{P}\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是满足非标准增长条件的 Carathéodory 正则被积函数。关于泛函积分极小化子的正则性问题（包括 (1.5)），或相关变分不等式弱解的研究，已有大量文献（例如参见 $[1,8,30]$ 中的参考文献）。此外，对于涉及矩阵值权重的问题，我们还将考虑矩阵值函数 $\mathbb{W}\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{对称}^+}$，其条件数一致有界 $\Lambda \ge 1$，这等价于：

$$\Lambda^{-1}\omega(x)\mathrm{Id}_n \le \mathbb{W}(x) \le \omega(x)\mathrm{Id}_n, \quad \text{or} \quad \Lambda^{-1}\omega(x)|\xi| \le |\mathbb{W}(x)\xi| \le \omega(x)|\xi|, \tag{1.6}$$

对于几乎处处的 $x \in \Omega$ 和所有 $\xi \in \mathbb{R}^n$，若定义一个新的标量权 $\omega := |\mathbb{W}|$。在此，我们提出对变指数的研究。为建立增长条件，考虑

满足以下条件的连续函数 $p:\Omega \to (1,\infty)$

$$1 < p_{\min} \le p(\cdot) \le p_{\max} < \infty. \tag{1.7}$$

由于存在具有变指数的 p-Laplacian 型算子，因此需要在特殊的函数空间类中进行研究。假设 $\omega^{p(\cdot)}$ 属于 $\mathcal{A}_{p(\cdot)}$- Muckenhoupt 权重类（见定义 2.10），那么 Lebesgue 和 Sobolev 函数空间上的标准分析便分别在乘法加权框架 $L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega^{p(\cdot)})$ 和 $W^{1,p(\cdot)}(\Omega,\omega^{p(\cdot)})$中进行。有关其定义的更多细节，请参阅第 2 节。

给定向量场 $\mathbf{F}:\Omega \to \mathbb{R}^n$ | $\phi_1,\phi_2 \in W^{1}$，满足 $\mathbf{F}| \in L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega^{p(\cdot)}dx)$，且 $\phi_1 \le \phi_2$ 是两个固定的障碍函数，满足

$$\phi_1 \le \phi_2 \text{ almost everywhere in } \Omega \text{ and } \phi_1 \le 0 \le \phi_2 \text{ on } \partial\Omega, \tag{1.8}$$

我们引入以下凸集

$$\mathbb{K}^{\omega}_{\phi_1,\phi_2} := \left\{ \phi \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega,\omega^{p(\cdot)}) : \ \phi_1 \le \phi \le \phi_2 \ \text{ a.e. in } \Omega \right\}. \tag{1.9}$$

在本文中，我们的主要双障碍问题可通过变指数情形下关于 (1.4) 的变分不等式很好地刻画。更具体地说，我们主要讨论以下类型的退化椭圆变分不等式

$$\int_\Omega |\mathbb{W}(x)\nabla u|^{p(x)-2}\mathbb{W}^2(x)\nabla u\cdot\nabla(u-\phi)dx \le \int_\Omega |\mathbb{W}(x)\mathbf{F}|^{p(x)-2}\mathbb{W}^2(x)\mathbf{F}\cdot\nabla(u-\phi)dx, \tag{1.10}$$

该不等式对所有满足 $\phi \in \mathbb{K}^{\omega}_{\phi_1,\phi_2}$ 且 $\phi-u \in W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega,\omega^{p(\cdot)})$ 的测试函数均成立。我们称一个与退化-奇异 $p(\cdot)$-拉普拉斯型双障碍问题相关的弱解为映射 $u \in \mathbb{K}^{\omega}_{\phi_1,\phi_2}$，其满足变分不等式 (1.10)。尽管本文重点不在于存在性，但对于 $\omega^{p(\cdot)} \in \mathcal{A}_{p(\cdot)}$-穆肯霍普特类，基于极大单调算子理论和变分法中的变分论证，我们指出了 (1.10) 的弱解的存在性。

没有障碍函数时，数学描述便回到了带有退化权重的非线性方程正则性理论。关于上文讨论的 Calder´on-Zygmund 估计的精确陈述，可参见文献 [6,7,13,14,57]。另一方面，当 指数为常数 p 时，值得注意的是，问题 (1.10) 化为由带有退化权重的 p-Laplacian 驱动的双障碍问题。关于弱解（带单侧障碍）的 Calder´on-Zygmund 估计，请参见文献 [7]；而在对非线性项和区域边界分别施加假设的条件下，广义梯度界已在我们先前的工作 [63]（带双侧障碍）中得到研究。最后一种情形下，若不存在退化权重，我们的障碍问题便与 $p(\cdot)$-Laplacian 密切相关，已有大量研究对此进行了探讨。

1.3. 假设。在介绍并讨论本文的主要成果之前，我们先明确本文所研究的原问题所满足的假设。

假设 ($\mathbf{H_1}$)：关于变指数，该假设允许函数 p 依赖于空间变量 x，并满足（1.7）以及在Ω中的对数-H¨older连续性，其中某个

$\kappa \in \left(0, -\frac{1}{8}\right)$。该假设意味着存在常数 $\kappa \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$、$r_0 > 0$ 以及一个非递减连续函数 α：$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\alpha(0) = 0$，使得

$$\begin{cases} |p(x) - p(y)| \le \alpha(|x-y|), \quad \text{for all } x, y \in \Omega, \\ \sup\limits_{0<r\le r_0} \alpha(r) \log\left(\frac{1}{r}\right) \le \kappa, \quad \text{or equivalently,} \quad \sup\limits_{0<r\le r_0} \left(\frac{1}{r}\right)^{\alpha(r)} \le e^{\kappa}. \end{cases} \tag{1.11}$$

我们简要讨论变指数 $p : \Omega \to (1, \infty)$ 上的假设 $(\mathbf{H_1})$。据我们所知，(1.7) 和对数 H¨older 条件 (1.11) 是重要的正则性假设，可确保函数 $p(\cdot)$ 的振荡受到良好控制，因此，在变指数情形下，极大算子（作用于相应的变指数 $L^{p(\cdot)}$-空间）有界性及调和分析中的其他结论仍然成立（见 [26]）。

假设 $(\mathbf{H_2})$： 如上所述，椭圆退化矩阵值权定义为映射 $\mathbb{W} : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}{}_{\mathrm{sym}^+}$，其条件数一致有界（等价地，可由 (1.6) 描述），并满足所谓的小对数 BMO 半范数条件。此条件允许存在一个小常数 $\kappa > 0$，使得

$$|\log \mathbb{W}|_{\mathrm{BMO}} \le \kappa. \tag{1.12}$$

这里需要指出，在我们的证明策略中，这样一个小常数的取值可能因具体论证而逐行变化。关于矩阵权 $\mathbb{W}$的对数 BMO 半范数 $|\log \mathbb{W}|_{\mathrm{BMO}}$ 的严格定义和解释，另请参见定义 2.4 和注 2.5。

假设 $(\mathbf{H_3})$： 为了研究全局梯度正则性，自然需要对基础区域 Ω 作出一些正则性假设，因为 Ω 的几何性质会显著影响边界点附近的正则性。受 Byun 等人在 [8–10], 中的工作启发，在我们的研究中，假设 Ω 满足某个小常数 $\kappa > 0$ 和 $r_0 > 0$对应的 (κ, r_0)-Reifenberg 平坦条件。关于这一最弱正则性假设的详细定义和讨论，请参阅第 2 节。

值得在此指出，假设 $(\mathbf{H}_1)$、$(\mathbf{H}_2)$ 和 $(\mathbf{H}_3)$ 总是与参数对 (κ, r_0) 相关联。此外，缩放参数 $\kappa > 0$ 由我们自行选择，其取值可随证明过程而变化。在论证过程中，通常会用同一个字母 κ 表示不同的参数；最后，$\kappa > 0$ 可能会被选为容许集中此类取值中的最小值。

1.4. 主要结果与本文贡献。我们的目标尤其是强调：在关于数据、非光滑区域以及涉及退化矩阵值权重的微分算子非线性的最小假设下，在一般 Orlicz 空间框架中，方程 (1.10) 的弱解具有全局梯度界。更准确地说，对于满足假设 $(\mathbf{H_1})$-$(\mathbf{H_3})$ 的方程 (1.10) 弱解，我们建立了如下最优的全局 Cader´on-Zygmund 型估计

$$\int_\Omega \omega^{\gamma p(x)} |\nabla u|^{\gamma p(x)} dx \le C \left(1 + \int_\Omega [\mathbb{F}_\omega(x)]^\gamma dx\right), \tag{1.13}$$

对所有 $\gamma > 1$，存在某个与数据 $\mathbf{F}$、障碍函数 ϕ_1, ϕ_2 和 u 无关的正常数 C。这里，为了简化记号，我们采用

$$\mathbb{F}_\omega(x) = \omega^{p(x)} \left(|\mathbf{F}|^{p(x)} + |\nabla \phi_1|^{p(x)} + |\nabla \phi_2|^{p(x)}\right), \quad x \in \Omega. \tag{1.14}$$

我们结果的一个显著特点是，水平集上的估计可能仅需对所提出方法的结构常数具有最小程度的依赖，即可通过所选缩放参数来追踪。因此，从能够在可行的缩放参数集合上构造水平集估计的意义上说，该正则性结果是最优的。特别是，关于缩放系数的最优依赖性，请参阅定理 4.1 的精确表述和论证。

我们还自然地得到了加权 Orlicz 空间中解的一个更一般的梯度估计，该估计由分数阶极大算子控制，并且与 Calder´on 空间意义下的分数阶导数/积分有着深刻而有趣的联系（见 [47]）。特别地，我们证明了在以下类型的结构条件（$\mathbf{H_1}$）-（$\mathbf{H_3}$）下，方程 (1.10) 的弱解满足一个全局估计

$$\int_{\Omega} \Phi\left(\mathbf{M}_{\beta}\left(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\right)\right) dx \leq C\left[1+\int_{\Omega} \Phi\left(\mathbf{M}_{\beta}\mathbb{F}_{\omega}\right) dx\right], \tag{1.15}$$

对任意满足 $\Phi(0) = 0$ 且具有倍增条件的单调递增连续可微函数 $\Phi: [0,\infty) \to [0,\infty)$，见定义 2.17。这里需要指出，$\mathbf{M}^{\beta}$ 是 $\beta \in [0,n)$ 对应的分数阶极大算子，这将在后续证明中起关键作用，见定义 2.13 及第 2 节中的进一步讨论。定理 5.2 对这一加权 Orlicz 空间中的新结果作了详细陈述，将在第 5 节讨论。

1.5. 论文结构。在介绍性章节中概述所研究的问题、已有成果和我们的主要目标之后，本文结构安排如下。下一节首先介绍通用记号，简要回顾本文后续部分所需的一些标准定义和技术性预备引理。第 3 节将讨论比较原理，这是我们论证中的关键工具；由于双侧障碍和算子的结构，处理这些原理也带来了许多新的挑战。随后，第 5 节将通过定理 5.1 和定理 5.2 的正式表述，详细介绍本研究取得的新成果。主要结果的证明也将在本节给出。最后，第 6 节将总结并讨论本文的内容，其中的创新之处体现在退化奇异模型和我们采用的方法上。此外，本节讨论的一些可能课题也可能引起该领域许多作者的兴趣。

2 预备知识

本节介绍本文研究所依赖的一些记号、基本定义以及有关函数空间的必要背景知识。此外，本节还包含关于双障碍问题的预备引理，这些引理在全文中都会用到。

2.1. 基本符号与定义。 我们先记录后续分析所需的最少符号。全文中，设 $n \geq 2$ 和 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为边界 $\partial\Omega$不光滑的有界开子集，其直径通常记作 diam(Ω)。对于任意点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 和 $R > 0$，我们定义 $B_R(x_0)$为以 x_0 为中心、半径为R的欧几里得开球。当中心信息可由上下文确定时，只要不会引起混淆，我们便采用简化记号 B_R和 $\Omega_R := \Omega \cap B_R$。此外，若 $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ 是可测集，我们用 $|\mathcal{V}|$ 表示其勒贝格测度。在本文中，记作 $\mathcal{M}eas(\Omega)$时，隐含表示 Ω 上所有勒贝格可测函数构成的集合。对于 $f \in \mathcal{M}eas(\Omega)$，为简化后续论证中的记号，我们简记为 $\{x \in \Omega: |f(x)| > t\}$，其中 $t \geq 0$

由 $\{|f|>t\}$给出。对于可积映射 $f\colon \mathcal{V}\subset\Omega\to\mathbb{R}$且 $\mathcal{V}$具有有限正测度的情形，ffl $_{\mathcal{V}}f$或 $f_{\mathcal{V}}$表示f的平均值，定义如下：

$$\overline{f}_{\mathcal{V}} := \fint_{\mathcal{V}} f(x)dx = \frac{1}{|\mathcal{V}|}\int_{\mathcal{V}} f(x)dx.$$

这里，如果 $\omega:\Omega\to\mathbb{R}^+$ 在 Ω 中可测且几乎处处为正，我们称 ω 为（标量）权函数。需要注意的是，在问题 (1.10) 的一般情形下，对于权函数 $\omega\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^+)$ 和可测子集 $\mathcal{V}\subset\mathbb{R}^n$，通常写作

$$\omega(\mathcal{V}) := \int_{\mathcal{V}}\omega(x)dx.$$

在我们的估计中，所有确切取值对目的而言并不重要的通用正常数均记作 C （C 在同一串不等式中可能有所不同）。我们通常用带括号的形式 $C(\cdot)$ 表示正常数，其中包含该常数所依赖的参数。此外，问题的初始设定中的问题数据将汇总到一组相关的给定参数中。为简洁起见，我们引入

$$\text{DATASET} := \{\beta, n, p_{\min}, p_{\max}, r_0/\mathrm{diam}(\Omega), \Lambda\}.$$

我们用 $\mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$表示所有 n 阶对称实方阵的集合。为使记号更具自明性，我们进一步将其子集 $\mathbb{R}^{n\times n}{}_{\text{对称+}}$视为包含所有对称正定矩阵的集合。在这个空间中，我们考虑谱范数，其定义如下

$$|\mathsf{M}| = \sup_{|\zeta|\le 1}|\mathsf{M}\zeta|, \quad \text{for} \quad \mathsf{M}\in\mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}.$$

定义 2.1（矩阵权）如果矩阵映射 $\mathbb{W}:\Omega\to\mathbb{R}^{n\times n}{}_{\mathrm{sym}^+}$ 在几乎处处的 $x\in\Omega$上均为正定，则称其为矩阵值权。等价地，$\mathbb{W}(x)$ 在几乎处处的 $x\in\Omega$上是对称正定矩阵。

定义 2.2（权的对数平均）权 ω 在球 $B\subset\mathbb{R}^n$ 上的对数平均定义如下：

$$\langle\omega\rangle_B^{\log} := \exp\left(\fint_B \log(\omega(x))dx\right). \tag{2.1}$$

注 2.3

- 值得注意的是，映射 $\exp:\ \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}\to\mathbb{X}_+$ 及其逆映射 $\log:\ \mathbb{R}^{n\times n}{}_{\mathrm{sym}^+}\to\mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$ 可通过谱分解将矩阵变换为对角形式来定义。更确切地说，对于每个矩阵 $\mathsf{M}\in\mathbb{R}^{n\times n}{}_{\mathrm{sym}^+}$，我们可以通过收敛的泰勒级数定义矩阵指数$\exp(\mathsf{M})$ 及其逆映射 $\log(\mathsf{M})$。

- 根据定义 *2.2*，不难验证

$$\left\langle\frac{1}{\omega}\right\rangle_B^{\log}\cdot\langle\omega\rangle_B^{\log} = \exp\left(-\fint_B\log(\omega(x))dx\right)\exp\left(\fint_B\log(\omega(x))dx\right) = 1. \tag{2.2}$$

此外，另一个有趣的性质是，对于 $q \in (1,\infty)$， $\omega^q \in \mathcal{A}_q$ （穆肯霍普特类）当且仅当以下两个不等式成立：

$$\left(\fint_B \omega(x)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C\langle\omega\rangle_B^{\log}, \quad and \quad \left(\fint_B \omega(x)^{-\frac{q}{q-1}} dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \le C\langle 1/\omega\rangle_B^{\log}.$$

对于任意球 $B \subset \mathbb{R}^n$。

- 如果 $\mathbb{W}$ 是定义 *2.1* 中的矩阵权，且 $B \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开球，那么

$$\langle \mathbb{W}\rangle_B^{\log} := \exp\left(\fint_B \log\mathbb{W}(x)dx\right), \tag{2.3}$$

同样地，按照 (2.2) 的思路，由 (2.3)，我们还能够验证

$$\langle \mathbb{W}^{-1}\rangle_B^{\log}\langle \mathbb{W}\rangle_B^{\log} = \left[\exp\left(-\fint_B \log\mathbb{W}(x)dx\right)\right]\left[\exp\left(\fint_B \log\mathbb{W}(x)dx\right)\right]^{-1} = \mathrm{Id}_n.$$

定义 2.4（log-**BMO 半范数**）设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开球， $\mathbb{W}$ 是一个矩阵权。 $\mathbb{W}$ 在 B 上的 log-BMO 半范数定义为

$$|\log\mathbb{W}|_{\mathrm{BMO}(B)} := \sup_{B_\rho\subset B}\fint_{B_\rho} |\log\mathbb{W} - \langle\mathbb{W}\rangle_{B_\rho}^{\log}|dx, \tag{2.4}$$

其中，上确界取遍所有球 $B_\rho \subset B$。为简便起见，当 $B \supset \Omega$ 时，我们简单记 $|\log\mathbb{W}|_{\mathrm{BMO}}$。

注 2.5 这里简要讨论关于矩阵权 $\mathbb{W}$ 的假设 （$\mathbf{H_2}$），即 (1.12) 中所述的小对数 *BMO* 条件。这里自然会产生一个问题：在这种情况下，对数的作用是什么？为什么在证明正则性时，有界的是 $\log\mathbb{W}$ ，而不是 $\mathbb{W}$ ？- 我们顺便回到问题 (1.10) 的结构，一致椭圆性不成立，因此需要对 $\mathbb{W}$ 施加额外条件（其取值可能在很大范围内变化）来控制其振荡。*Fabes-Kenig-Serapioni* 在 *[32]* 中首先要求 (1.6) 中的标量权 ω 属于 $\mathcal{A}_2$- 类，以控制线性问题中权的可积性；*Cao-Mengesha- Phan* *[13]* 又对 $\mathbb{W}$ 的加权 *BMO* 范数增加了一个小量条件。后来，*Balci-Diening-Giova-DiNapoli* *[6]* 和 *Balci-Byun-Diening-Lee* *[7]* 提出了对 $\log\mathbb{W}$ （或对 $\log\mathbb{A} = \frac{1}{2}\log\mathbb{W}$）的 *BMO* 范数施加小量条件这一重要突破。小对数 BMO 条件被表述为控制矩阵权特征值振荡的最小正则性假设。众所周知，借助标准对数，它可以将乘法结构转化为加法结构，因此矩阵的大小和尺度（由其特征值决定）得到了良好控制。这使得研究振荡程度、可积性和正则性变得十分有趣。综合上述原因，并受到前述论文的启发，我们也采用假设 （$\mathbf{H_2}$）；从某种意义上说，该假设是梯度正则性成立所需的最小条件。

对于满足 (1.7) 和对数-H¨older 条件 (1.11) 的连续函数 $p : \Omega \to (1, \infty)$，定义如下模函数：

$$\mathrm{mod}^{p(\cdot)}(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)}dx, \quad \text{for } f \in \mathcal{M}eas(\Omega).$$

定义 2.6（变指数勒贝格空间）给定满足 (1.7) 和 (1.11) 中条件的变指数函数 $p(\cdot)$，变指数勒贝格空间 $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ 定义为由所有使 $\mathrm{mod}^{p(\cdot)}(f)$ 有限的函数 $f \in \mathcal{M}eas(\Omega)$ 构成的集合。此外，$L^{p(\cdot)}(\Omega)$ 赋予如下 *Luxemburg* 范数：

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} := \inf\left\{s > 0 : \ \mathrm{mod}^{p(\cdot)}\left(\frac{f}{s}\right) \leq 1\right\}.$$

定义 2.7（内禀加权情形下的变指数勒贝格空间与索伯列夫空间）给定满足条件 (1.7)、(1.11) 的连续函数 $p(\cdot)$ 以及权函数 $\omega : \Omega \to \mathbb{R}^+$，假设 $\omega^{p(\cdot)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 和 $\omega^{-p'(\cdot)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。那么，加权情形下的变指数勒贝格空间记为 $L^{p(\cdot)}(\Omega, \omega^{p(\cdot)})$，其定义为所有满足 $\omega f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ 的可测函数 f 组成的集合（见定义 *2.6*）。此外，该空间在下述范数下也是一个巴拿赫空间

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega^{p(\cdot)})} := \|\omega f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

在此情形下，我们进一步定义具有乘性权 $W^{1,p(\cdot)}(\Omega, \omega^{q(\cdot)})$ 的加权变指数索伯列夫空间如下

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega,\omega^{p(\cdot)}) = \left\{f \in L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega^{p(\cdot)}) : \ |\nabla f| \in L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega^{p(\cdot)})\right\},$$

该空间也赋有范数

$$\|f\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega,\omega^{p(\cdot)})} = \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega^{p(\cdot)})} + \|\nabla f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega^{p(\cdot)})}.$$

我们还将写作 $W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega, \omega^{p(\cdot)})$，作为 $W^{1,p(\cdot)}(\Omega, \omega^{p(\cdot)})$ 的子空间，并在边界上取零值 .

定义 2.8（标准加权情形下的变指数勒贝格空间与索伯列夫空间）设 $p(\cdot)$ 是满足条件 (1.7)、(1.11) 的连续函数，且权函数为$\omega : \Omega \to \mathbb{R}^+$。对于固定常数 $q \in [p_{\min}, p_{\max}]$，我们定义加权勒贝格空间，记为 $L^q(\Omega, \omega^q)$，它是由所有满足 $\omega f \in L^q(\Omega)$ 的函数 $f \in \mathcal{M}eas(\Omega)$ 构成的集合。此外，在（标准）加权情形下，我们还考虑为满足本文目的而专门构造的变指数勒贝格空间 $L^{p(\cdot)}(\Omega, \omega^q)$，其模函数如下

$$\mathrm{mod}^{p(\cdot)}_{\omega,q}(f) = \int_\Omega \omega^q |f(x)|^{p(x)} dx, \quad \ for\ f \in \mathcal{M}eas(\Omega).$$

与经典索伯列夫空间类似，这一加权情形下的索伯列夫空间建立在相应的勒贝格空间之上。我们将使用记号 $W^{1,q}(\Omega, \omega^q)$ 和 $W^{1,p(\cdot)}(\Omega, \omega^q)$，分别对应勒贝格空间 $L^q(\Omega, \omega^q)$ 和 $L^{p(\cdot)}(\Omega, \omega^q)$。

定义 2.9（穆肯霍普特类）令 $1 < s < \infty$，穆肯霍普特类 $\mathcal{A}_s$ 由满足以下条件的所有权重 $\omega \in L^1_{\mathrm{loc}}$（$\mathbb{R}^n$）组成：

$$[\omega]_{\mathcal{A}_s} := \sup_{B\subset\mathbb{R}^n} \left(⨍_B \omega dx\right)\left(⨍_B \omega^{-\frac{1}{s-1}} dx\right)^{s-1} < \infty,$$

其中， $[\omega]_{\mathcal{A}_s}$ 称为 ω的 $\mathcal{A}_s$-特征数。那么， ω 称为 $\mathcal{A}_s$-*Muckenhoupt* 权重。此外，穆肯霍普特类 $\mathcal{A}_\infty$ 定义为所有 $s>1$对应的 $\mathcal{A}_s$ 的并集，这意味着

$$\mathcal{A}_\infty=\bigcup_{s>1}\mathcal{A}_s.$$

我们回顾一下，若 $\mu\in\mathcal{A}_\infty$，则存在 $C>0$ 和 $\theta>0$，使得

$$\mu(\mathcal{V})\leq C\left[\frac{|\mathcal{V}|}{|B|}\right]^\theta\mu(B), \tag{2.5}$$

对所有球 $B\supset\mathcal{V}$ 和可测集 $\mathcal{V}$，若 （2.5）成立，则记为 $[\mu]_{\mathcal{A}_\infty}=$ （C,θ）。

定义 2.10（变指数情形下的穆肯霍普特类）设 p（$\cdot$） 是满足条件 （1.7）、（1.11） 的连续函数，且 $\omega:\Omega\to\mathbb{R}^+$ 是一个权函数。那么，权函数 $\omega^{p(\cdot)}$ 属于 $\mathcal{A}_{p(\cdot)}$-穆肯霍普特类，当且仅当

$$\sup_B\max_{q\in\{q_1,q_2\}}\frac{1}{|B|^{p_B}}\left(⨍_B\omega(x)^{p(x)}dx\right)\left(⨍_B\omega(x)^{-p'(x)}dx\right)^q<\infty,$$

其中 t 上确界取遍 $\mathbb{R}^n$ 中的所有球 B，而 q_1、q_2、p_B 分别定义为 y

$$q_1=\min_{x\in B}(p(x)-1),\ q_2=\max_{x\in B}(p(x)-1)\ \ and\ \ p_B=\left(⨍_B p(x)dx\right)^{-1}.$$

定义 2.11（（κ,r_0）-Reifenberg 平坦性）给定 $\kappa>0$ 和 $r_0>0$，若对任意 $x\in\partial\Omega$ 及 $0<r<$ （$1-\kappa$）r_0，均存在一个˜坐标系 $\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n\}$，使得新原点 $\mathbf{0}\in\Omega$， $x=$（0，0，...，0， $-r\kappa/$（$1-\kappa$）$\tilde{x}_n$），并且

$$B(\tilde{\mathbf{0}},r)\cap\{\tilde{x}_n>0\}\subset B(\tilde{\mathbf{0}},r)\cap\Omega\subset B(\tilde{\mathbf{0}},r)\cap\left\{\tilde{x}_n>\frac{-2r\kappa}{1-\kappa}\right\},$$

其中，我们将用 $\{\tilde{x}_n>\tau\}$代替 $\{\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n):\tilde{x}_n>\tau\}$，这是有意滥用记号。

注 2.12 满足(κ,r_0)-*Reifenberg* 平坦性的非光滑区域这一概念，最早由 *Reifenberg* 于 *[60]* 在极小曲面理论中提出，并由 *Byun-Wang* 于 *[9]*在正则性理论中加以研究。这类区域的边界可能是分形的（例如血管、肺部内部结构、股票市场模型等），是具有较小 *Lipschitz* 常数 $\kappa>0$的 *Lipschitz* 区域的一种自然推广。在整体正则性理论中，主要障碍在于如何获得边界处的正则性，而区域在边界附近的几何性质至关重要。*Byun-Wang* 的工作之后，采用(κ,r_0)-*Reifenberg* 条件的方法推动了这一研究方向的若干后续进展。按照假设$(\mathbf{H_3})$的思路，值得指出的是，*Reifenberg* 平坦性只在一定范围的 κ内才有意义；在本文中，我们假设 $0<\kappa<\frac{1}{8}$。

定义 2.13（分数阶极大函数）对于给定的 $\beta\in[0,n)$，分数阶极大函数通常记作 $\mathbf{M}^\beta$，是定义在 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 上的可测映射，如下所示

$$\mathbf{M}_\beta f(x)=\sup_{\rho>0}\rho^\beta⨍_{B_\rho(x)}|f(z)|dz, \tag{2.6}$$

对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$均成立。与 $\mathbf{M}^\beta$相对应，我们还进一步定义两个阶为 $R>0$ 的“截断”分数阶极大函数，如下所示

$$\mathbf{M}^R_\beta f(x) = \sup_{0<\rho<R} \rho^\beta \fint_{B_\rho(x)} |f(z)|dz,$$
$$\mathbf{T}^R_\beta f(x) = \sup_{\rho\geq R} \rho^\beta \fint_{B_\rho(x)} |f(z)|dz.$$

命题2.14（勒贝格空间中分数阶极大算子的有界性）对于给定的 $s \geq 1$， $\beta \in \left[0, \frac{n}{s}\right)$ 以及 $f \in L^s$（$\mathbb{R}^n$）。那么，存在一个常数 $C = C(n,\ s,\ \beta) > 0$，使得对于任意 $\lambda > 0$，都有

$$|\{x \in \mathbb{R}^n :\ \mathbf{M}_\beta f(x) > \lambda\}| \leq C\left(\lambda^{-s}\int_{\mathbb{R}^n} |f(z)|^s dz\right)^{\frac{n}{n-\beta s}}.$$

详细证明请参阅 [65]。

注记 2.15

- 值得指出的是，当 $\beta = 0$ 时，$\mathbf{M}^\beta$ 与 $\mathbf{M}$（*Hardy–Littlewood*极大函数）重合。

- 可以注意到，在定义 *2.13* 中，不包含 $\beta = n$ 的情形。事实上，如果 $\beta = n$，由（2.6）可知

$$\mathbf{M}_n f(x) = C(n)\sup_{\rho>0}\int_{B_\rho(x)} |f(z)|dz,$$

而由于无界性（即 $\mathbf{M}_n f$（x）甚至对于 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$（$\mathbb{R}^n$） 也可能发散），该表达式不再有意义。

- 本文致力于研究涉及(1.10)与$\mathbf{M}^\beta$的弱解的全局梯度估计，这或许会带来新的挑战。$\mathbf{M}^\beta$ 的作用最早在 *[48,53, 54]* 中得到阐明，并展现出其在正则性理论中的重要性质。对涉及分数阶极大算子的正则性估计的研究，使我们能够：***(1)*** 控制解的（局部）振荡；***(2)*** 即使经典导数不存在，也能估计解的分数阶导数 ∂^β 的上界；***(3)*** 理解$\mathbf{M}^\beta$ 与通常的分数阶 ***Sobolev*** 空间 $W^{\beta,q}$之间的联系；***(4)*** 阐明分数阶导数（以L^q为意义）与阶数为 β 的分数阶积分（***Riesz***势）之间的桥梁，其中 β 不太大。希望感兴趣的读者关注 *[3, 24, 28, 43, 55, 56, 63–66]*，以了解分数阶极大函数如何控制解的正则性。

定义2.16（Young 函数）令 $\mathcal{H}:\ [0,\infty) \to [0,\infty)$ 为满足 $\mathcal{H}(0) = 0$ 的非递减凸函数。若 $\mathcal{H}$ 是 *Young* 函数，则称

$$\lim_{s\nearrow\infty}\frac{\mathcal{H}(s)}{s} = \infty, \quad and \quad \lim_{s\searrow 0^+}\frac{\mathcal{H}(s)}{s} = 0.$$

若存在两个常数 C_1、$C_2 > 1$ 使得

$$\mathcal{H}(2s) \leq C_1\mathcal{H}(s) \quad and \quad \mathcal{H}(s) \leq \frac{\mathcal{H}(C_2 s)}{2C_2}, \quad for\ all\ \ s \geq 0,$$

那么我们通常记作 $\mathcal{H} \in \Delta_2 \cap \nabla_2$。

定义 2.17（加权 Orlicz 空间）设 $\mathcal{H} \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ 是一个 *Young* 函数，且 $\mu \in \mathcal{A}_\infty$。我们将满足以下条件的 $f \in \mathcal{M}eas(\Omega)$ 的 *Orlicz* 空间记为 $L^{\mathcal{H}}_{\mu}(\Omega)$

$$\mathrm{mod}^{\mathcal{H}}_{\mu}(f) := \int_{\Omega} \mathcal{H}(|f(x)|)d\mu < \infty,$$

并赋予 *Luxemburg* 范数

$$\|f\|_{L^{\mathcal{H}_\mu}(\Omega)} = \inf\left\{s > 0 : \ \mathrm{mod}^{\mathcal{H}}_{\mu}\left(\frac{f}{s}\right) \le 1\right\}.$$

2.2. 一些预备引理。本节接下来的部分将介绍若干对后续研究有用的预备引理。

引理 2.18 设 $1 < q < \infty$ 和 $p(\cdot)$ 是满足假设 $(\mathbf{H_1})$的连续函数。那么，存在一个小常数 $\kappa = \kappa(q, p_{\min}, p_{\max}) > 0$，使得若 $|\log \mathbb{W}|_{\mathrm{BMO}} \le \kappa$，则 $\omega^{p(\cdot)} \in \mathcal{A}_{p(\cdot)}$属于穆肯霍普特类。此外，有

$$\sup_B \left(⨍_{\Omega\cap B} \omega^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(⨍_{\Omega\cap B} \omega^{q'} dx\right)^{\frac{1}{q'}} \le C(n, q, \Lambda), \tag{2.7}$$

其中 $q' = \dfrac{q}{q-1}$，并且

$$\sup_B \left(⨍_{\Omega\cap B} \left|\frac{\mathbb{W}(x) - \langle \mathbb{W}\rangle^{\log}_B}{\langle \mathbb{W}\rangle^{\log}_B}\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C(n, q, \Lambda)|\log \mathbb{W}|_{\mathrm{BMO}}, \tag{2.8}$$

其中上确界取遍所有球 $B \subset \mathbb{R}^n$。

以下覆盖论证（其已在 [2, 17], 中提出）将在后续证明中发挥关键作用。

引理 2.19 设 $\varepsilon \in (0, 1)$，以及某个 $\kappa, r_0 > 0$对应的 (κ, r_0)-*Reifenberg* 域 Ω。设 V_1和 V_2 是 Ω中的两个可测子集。假设对于某个 $0 < R_0 \le r_0$，有 $|V_1| \le \varepsilon R_0^n$。进一步假设以下命题成立

$$\Omega \cap B_\rho(x_0) \not\subset V_2 \Longrightarrow |B_\rho(x_0) \cap V_1| < \varepsilon |B_\rho(x_0)|, \quad \textit{for all } x_0 \in \Omega \textit{ and } 0 < \rho \le R_0.$$

那么，存在 $C > 0$ 使得 $|V_1| \le C\varepsilon |V_2|$。

3 比较映射

本节将建立比较策略，并将其分为若干步骤，以证明主要结果。值得一提的是，比较过程中面临的主要挑战之一，一方面源于问题 (1.10) 的结构，其中包含奇异/退化矩阵权 $\mathbb{W}$（解的行为高度依赖于权的性质）；另一方面源于变指数增长（加权情形下的变函数空间）。

更确切地说，该过程分为四个步骤，每一步都对应不同的比较映射。为方便读者，首先概述这一方法背后的主要思想和关键要点。我们从原问题 (1.10) 的弱解 u与相应齐次方程的解 v 之间的比较开始，这将在引理 3.1 中陈述。随后，在第二步中，我们将在第一步得到的齐次问题的解 v （）与新问题的解 $\tilde{v}$ 之间建立局部比较估计；该新问题通过将变指数固定为 p_2——在小球上 $p(\cdot)$ 的上确界——而得到。沿着这一思路，利用引理 3.2 的结论，可进一步得到：在半径更小的球上， $\tilde{v}$ 的可积性高于 v 。下一步的目标是将球进一步缩小至半径更小的球，并构造新的候选函数 π，其为齐次方程的解，且其矩阵权由其对数平均固定。最后，为完成一系列比较，还需处理 $\tilde{\pi}$ 的存在性；它在 L^∞中有界，并将在引理 3.4 中建立 $\nabla\pi$ 与 $\nabla\tilde{\pi}$ 之间的比较，即使对于近边界球也是如此。

作为预备步骤，下面的引理给出了 (1.10) 的主要解与相应齐次问题的解之间的初步局部比较估计。

引理 *3.1*（ $\mathbf{1^{st}}$ 步）设 $u \in \mathbb{K}^{\omega}_{\phi_1,\phi_2}$ 是满足假设 *(1.6)*、*(1.7)* 和 *(1.8)* 的主要问题 *(1.10)* 的弱解。存在一个常数 $\kappa \in (0,1)$，使得若 *(H1)* 对某个 $r_0 > 0$ 满足以下条件，则有如下结论。设 x_0 是 Ω 中的一个固定点，给定 $R > 0$, $p_2 = \sup_{\Omega_R} p(x)$，其中 $\Omega_R := \Omega_R(x_0)$。则可找到一个函数$v \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega_{2R},\omega^{p(\cdot)}) \cap W^{1,p_2}(\Omega_R,\omega^{p_2})$，使得

$$\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla u - \nabla v|^{p(x)}dx \le \delta \fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx + C_\delta \fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}\big(|\mathbf{F}|^{p(x)} + |\nabla\phi_1|^{p(x)} + |\nabla\phi_2|^{p(x)}\big)dx, \tag{3.1}$$

对每个 $\delta \in (0,1)$ 均成立。具体而言，可得到如下全局估计

$$\int_{\Omega} \omega^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx \le C\int_{\Omega} \omega^{p(x)}\big(|\mathbf{F}|^{p(x)} + |\nabla\phi_1|^{p(x)} + |\nabla\phi_2|^{p(x)}\big)dx. \tag{3.2}$$

证明。 证明分为几个步骤。我们首先考虑具有单侧障碍的模型问题。定义

$$u_1 \in \mathrm{K}_{\phi_1} := \left\{ \mathrm{w} \in u + W_0^{1,p(\cdot)}\big(\Omega_{2R},\omega^{p(\cdot)}\big) : \ \mathrm{w} \ge \phi_1 \ \text{ a.e. in } \Omega_{2R} \right\},$$

以下变分不等式的唯一解

$$\int_{\Omega_{2R}} |\mathbb{W}(x)\nabla u_1|^{p(x)-2}\mathbb{W}(x)\nabla u_1 \cdot \mathbb{W}(x)\nabla(u_1-\phi)dx \le \int_{\Omega_{2R}} |\mathbb{W}(x)\nabla\phi_2|^{p(x)-2}\mathbb{W}(x)\nabla\phi_2 \cdot \mathbb{W}(x)\nabla(u_1-\phi)dx, \tag{3.3}$$

对于任意 $\phi \in \mathrm{K}_{\phi_1}$。用函数 u 对公式 (3.3) 进行测试，可得

$$\int_{\Omega_{2R}} |\mathbb{W}(x)\nabla u_1|^{p(x)-2}\mathbb{W}(x)\nabla u_1 \cdot \mathbb{W}(x)\nabla(u_1-u)dx \le \int_{\Omega_{2R}} |\mathbb{W}(x)\nabla\phi_2|^{p(x)-2}\mathbb{W}(x)\nabla\phi_2 \cdot \mathbb{W}(x)\nabla(u_1-u)dx. \tag{3.4}$$

利用 (1.6) 和 (1.7)，由估计 (3.4) 可轻易得出

$$\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla u_1|^{p(x)}dx \le C\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla u_1|^{p(x)-1}|\nabla u|dx \\ + C\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla \phi_2|^{p(x)-1}|\nabla u_1|dx + C\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla \phi_2|^{p(x)-1}|\nabla u|dx.$$

对该不等式右端应用杨氏不等式，得到

$$\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla u_1|^{p(x)}dx \le C\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx + C\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla \phi_2|^{p(x)}dx. \tag{3.5}$$

另一方面，在 (3.3) 中选择测试函数 ϕ

$$u_1 - (u_1 - \phi_2)^+ = \min\{u_1, \phi_2\} \in \mathrm{K}_{\phi_1},$$

于是得到不等式

$$\int_{\Omega_{2R}\cap\{u_1\ge\phi_2\}} \mathcal{J}_{p(x)}(\mathbb{W}(x)\nabla u_1, \mathbb{W}(x)\nabla\phi_2)dx \le 0, \tag{3.6}$$

其中 $\mathcal{J}_q\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ 是由下式定义的映射

$$\mathcal{J}_q(y,z) = \big(|y|^{q-2}y - |z|^{q-2}z\big)\cdot(y-z), \quad \text{for } y,z\in\mathbb{R}^n. \tag{3.7}$$

对于每个 $x\in\Omega$，关于 $\mathcal{J}_{p(x)}$，我们还有以下经典不等式

$$|y-z|^{p(x)} \le \epsilon|y|^{p(x)} + C_\epsilon \mathcal{J}_{p(x)}(y,z), \quad x\in\Omega, \quad y,z\in\mathbb{R}^n, \tag{3.8}$$

对所有 $\epsilon\in(0,1)$。这里，$C_\epsilon>0$ 是一个依赖于 ϵ、$p_{\min}$ 和 $p_{\max}$ 的正常数。进一步可以直接验证 (3.8)，它与 [66, 中处理双相算子的引理 3.2] 有些相似。因此，得到

$$\int_{\Omega_{2R}\cap\{u_1\ge\phi_2\}} \omega^{p(x)}|\nabla u_1 - \nabla\phi_2|^{p(x)}dx \le \epsilon\int_{\Omega_{2R}\cap\{u_1\ge\phi_2\}} \omega^{p(x)}|\nabla u_1|^{p(x)}dx \\ + C_\epsilon\int_{\Omega_{2R}\cap\{u_1\ge\phi_2\}} \mathcal{J}_{p(x)}(\mathbb{W}(x)\nabla u_1, \mathbb{W}(x)\nabla\phi_2)dx,$$

并结合（3.6），可得

$$\int_{\Omega_{2R}\cap\{u_1\ge\phi_2\}} \omega^{p(x)}|\nabla u_1 - \nabla\phi_2|^{p(x)}dx \le \epsilon\int_{\Omega_{2R}\cap\{u_1\ge\phi_2\}} \omega^{p(x)}|\nabla u_1|^{p(x)}dx. \tag{3.9}$$

只需将 (3.5) 代入 (3.9)，即可得到

$$\int_{\Omega_{2R}\cap\{u_1\ge\phi_2\}} \omega^{p(x)}|\nabla u_1 - \nabla\phi_2|^{p(x)}dx \le \epsilon\int_{\Omega} \omega^{p(x)}\Big(|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla\phi_2|^{p(x)}\Big)dx,$$

当 $\epsilon > 0$ 足够小时。由于 $\epsilon \to 0^+$，我们推得 $u_1 \le \phi_2$ 在 Ω_{2R} 中几乎处处成立。此外，我们将 u_1 在 Ω_{2R} 外定义为 u，因此 u_1 是 (1.10) 的一个可容许测试函数，由此可得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{2R}} &|\mathbb{W}(x)\nabla u|^{p(x)-2}\mathbb{W}(x)\nabla u \cdot \mathbb{W}(x)\nabla(u-u_1)dx \\ &\le \int_{\Omega_{2R}} |\mathbb{W}(x)\mathbf{F}|^{p(x)-2}\mathbb{W}(x)\mathbf{F} \cdot \mathbb{W}(x)\nabla(u-u_1)dx. \end{aligned} \tag{3.10}$$

将 (3.4) 和 (3.10) 相加，得到

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{2R}} \mathcal{J}_{p(x)}(\mathbb{W}(x)\nabla u, \mathbb{W}(x)\nabla u_1)dx &\le \int_{\Omega_{2R}} |\mathbb{W}(x)\mathbf{F}|^{p(x)-2}\mathbb{W}(x)\mathbf{F} \cdot \mathbb{W}(x)\nabla(u-u_1)dx \\ &+ \int_{\Omega_{2R}} |\mathbb{W}(x)\nabla\phi_2|^{p(x)-2}\mathbb{W}(x)\nabla\phi_2 \cdot \mathbb{W}(x)\nabla(u_1-u)dx.\end{aligned}$$

此时注意到，由 (1.6) 和 (1.7) 可推得

$$\begin{aligned}⨍_{\Omega_{2R}} \mathcal{J}_{p(x)}(\mathbb{W}(x)\nabla u, \mathbb{W}(x)\nabla u_1)dx &\le C ⨍_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\mathbf{F}|^{p(x)-1}|\nabla u - \nabla u_1|dx \\ &+ C ⨍_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla\phi_2|^{p(x)-1}|\nabla u - \nabla u_1|dx,\end{aligned}$$

并利用杨氏不等式，可得

$$\begin{aligned}⨍_{\Omega_{2R}} \mathcal{J}_{p(x)}(\mathbb{W}(x)\nabla u, \mathbb{W}(x)\nabla u_1)dx &\le \epsilon ⨍_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla u - \nabla u_1|^{p(x)}dx \\ &+ C_\epsilon ⨍_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\mathbf{F}|^{p(x)} + \omega^{p(x)}|\nabla\phi_2|^{p(x)}dx,\end{aligned}$$

对所有 $\epsilon \in (0, 1)$ 均成立。结合对任意 $\delta \in (0, 1)$ 应用的 (3.8)，可得

$$\begin{aligned}⨍_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla u - \nabla u_1|^{p(x)}dx &\le \frac{\delta}{2} ⨍_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx \\ &+ \tilde{C}_\delta\epsilon ⨍_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla u - \nabla u_1|^{p(x)}dx \\ &+ \tilde{C}_\delta C_\epsilon ⨍_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\mathbf{F}|^{p(x)} + \omega^{p(x)}|\nabla\phi_2|^{p(x)}dx.\end{aligned} \tag{3.11}$$

因此，我们可以选择适当的 $\epsilon > 0$，使得 $\tilde{C}_\delta\epsilon \le \frac{1}{2}$ 出现在 (3.11) 中,- 从而完成这一阶段的第一步：

$$\begin{aligned}⨍_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla u - \nabla u_1|^{p(x)}dx &\le \delta ⨍_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx \\ &+ C_\delta ⨍_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\mathbf{F}|^{p(x)} + \omega^{p(x)}|\nabla\phi_2|^{p(x)}dx.\end{aligned} \tag{3.12}$$

为处理关于引理 3.1 中断言的下一步，我们将注意力转向一个涉及给定障碍函数 ϕ_1 的齐次方程。更准确地说，令 $u_2 \in u_1 + W_0^{1,p(\cdot)}\big(\Omega_{2R}, \omega^{p(\cdot)}\big)$ 为以下变分形式的唯一解

$$\int_{\Omega_{2R}} |\mathbb{W}(x)\nabla u_2|^{p(x)-2}\mathbb{W}(x)\nabla u_2 \cdot \mathbb{W}(x)\nabla\phi dx = \int_{\Omega_{2R}} |\mathbb{W}(x)\nabla\phi_1|^{p(x)-2}\mathbb{W}(x)\nabla\phi_1 \cdot \mathbb{W}(x)\nabla\phi dx, \tag{3.13}$$

对任意 $\phi \in W_0^{1,p(\cdot)}\big(\Omega_{2R}, \omega^{p(\cdot)}\big)$。类比前一步的方法，我们可以得出 $u_2 \geq \phi_1$ 在 Ω 中几乎处处成立$_{2R}$。事实上，由于 (3.3) 可取 u_2 作为测试函数，而 (3.13) 可取 $u_2 - u_1$ 作为测试函数，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{2R}} \mathcal{J}_{p(x)}(\mathbb{W}(x)\nabla u_1, \mathbb{W}(x)\nabla u_2)dx \leq \int_{\Omega_{2R}} |\mathbb{W}(x)\nabla\phi_1|^{p(x)-2}\mathbb{W}(x)\nabla\phi_1 \cdot \mathbb{W}(x)\nabla(u_2-u_1)dx \\ + \int_{\Omega_{2R}} |\mathbb{W}(x)\nabla\phi_2|^{p(x)-2}\mathbb{W}(x)\nabla\phi_2 \cdot \mathbb{W}(x)\nabla(u_1-u_2)dx.\end{aligned}$$

证明与 (3.12) 的证明思路相同，利用 (3.5) 可直接验证

$$\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla u_1 - \nabla u_2|^{p(x)}dx \leq \delta \fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx + C_\delta \fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla\phi_1|^{p(x)} + \omega^{p(x)}|\nabla\phi_2|^{p(x)}dx, \tag{3.14}$$

对每个 $\delta \in (0,1)$。

最后一步需要推导 u_2 与 v 之间的比较估计，其中 $v \in u_2 + W_0^{1,p(\cdot)}\big(\Omega_{2R}, \omega^{p(\cdot)}\big)$ 是下列问题的唯一解

$$\int_{\Omega_{2R}} |\mathbb{W}(x)\nabla v|^{p(x)-2}\mathbb{W}(x)\nabla v \cdot \mathbb{W}(x)\nabla\phi dx = 0, \quad \forall\phi \in W_0^{1,p(\cdot)}\big(\Omega_{2R}, \omega^{p(\cdot)}\big). \tag{3.15}$$

采用类似的方法，可得

$$\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla u_2 - \nabla v|^{p(x)}dx \leq \delta \fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla u_2|^{p(x)}dx + C_\delta \fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla\phi_1|^{p(x)}dx. \tag{3.16}$$

此外，通过标准计算，我们推得

$$\begin{aligned}\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla v|^{p(x)}dx &\leq C \fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla u_2|^{p(x)}dx \\ &\leq C \fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}\big(|\nabla u_1|^{p(x)} + |\nabla\phi_1|^{p(x)}\big)dx \\ &\leq C \fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}\big(|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla\phi_1|^{p(x)} + |\nabla\phi_2|^{p(x)}\big)dx.\end{aligned} \tag{3.17}$$

O另一方面，由于 $[10, \text{引理 } 3.5]$, ，存在一个常数 $\kappa > 0$ ，使得 t

$$\fint_{\Omega_R} \left[\omega^{p(x)}|\nabla v|^{p(x)}\right]^{1+\epsilon} dx \le C\left[\left(\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla v|^{p(x)}dx\right)^{1+\epsilon} + 1\right], \tag{3.18}$$

对所有 $\epsilon \in (0, \kappa]$。利用 (1.11) 中函数 $p(\cdot)$ 的对数-Hölder 条件以及 (3.18) 中给出的 ∇v 的高可积性，只需证明 $v \in W^{1,p_2}(\Omega_R, \omega^{p_2})$。事实上，由 (1.11) 可得

$$p_2 \le p(x) + \alpha(4R) \le p(x)(1 + \alpha(4R)) \le p(x)(1 + \kappa),$$

结合 (3.18)，可得

$$\begin{aligned}
\fint_{\Omega_R} \omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2}dx &\le \fint_{\Omega_R} (\omega^{p(x)(1+\alpha(4R))}|\nabla u|^{p(x)(1+\alpha(4R))} + 1)dx \\
&\le C\left[\left(\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla v|^{p(x)}dx\right)^{1+\alpha(4R)} + 1\right] \\
&\le C\left[\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla v|^{p(x)}dx + 1\right]\left[\left(\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla v|^{p(x)}dx\right)^{\alpha(4R)} + 1\right].
\end{aligned} \tag{3.19}$$

借助全局估计 (3.2) 和对数-Hölder 条件 (1.11)，我们断言

$$\begin{aligned}
\left(\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla v|^{p(x)}dx\right)^{\alpha(4R)} &\le \left[\frac{C}{(4R)^n}\int_{\Omega} \omega^{p(x)}\big(|\mathbf{F}|^{p(x)} + |\nabla\phi_1|^{p(x)} + |\nabla\phi_2|^{p(x)}\big)dx\right]^{\alpha(4R)} \\
&\le C\exp\left(\alpha(4R)\log\frac{1}{4R}\right) \\
&\le C.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

值得一提的是，这里的常数 C 仍依赖于数据 $\|\mathbf{F}\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega\,\omega^{p(\cdot)})}$、$\|\nabla\phi_1\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega\,\omega^{p(\cdot)})}$ 以及 $\|\nabla\phi_2\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega\,\omega^{p(\cdot)})}$。接下来，将 (3.17) 和 (3.20) 代入 (3.19)，可得

$$\fint_{\Omega_R} \omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2}dx \le C\left(\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}\big(|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla\phi_1|^{p(x)} + |\nabla\phi_2|^{p(x)}\big)dx + 1\right), \tag{3.21}$$

这使我们能够得出结论 $v \in W^{1,\,p_2}(\Omega_R,\ \omega^{p_2})$。

最后，我们结合 (3.12)、(3.14) 和 (3.16)，得到 (3.1)。因此，只需选取足够大的 $R > 0$ ，使得 $\Omega \subset B_{2R}(x_0)$，即可推出全局估计 (3.2)；这保证了方程 (3.15) 的解 v 在此球外为零。因此，可直接由 (3.1) 得出 (3.2)。

■

比较策略的第二步见下文引理 3.2，旨在建立 ∇v 与 $\nabla\tilde{v}$ 之间的比较估计。在这一步中，我们考虑一个具有常数 p_2-增长的新齐次问题，其中 $p_2 = \sup_{x\in\Omega_R} p(x)$。

引理 3.2（ 2^{nd} 步）在引理 *3.1* 的假设下，且令 $v \in W^{1,\ p(\cdot)}(\Omega_{2R}, \omega^{p(\cdot)}) \cap W^{1,\ p_2}(\Omega_R, \omega^{p_2})$ 为（3.1）的解。则存在 $\tilde{v} \in v + W^{1,\ p_2}_{0}(\Omega_R, \omega^{p_2})$，使得以下估计成立：

$$\fint_{\Omega_R} \omega^{p_2} |\nabla v - \nabla \tilde{v}|^{p_2} dx \le \left(\delta + C_\delta \kappa^{\frac{p_2}{p_2 - 1}}\right) \fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx + C_\delta \left[1 + \kappa^{\frac{p_2}{p_2-1}} \fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)} \left(|\nabla \phi_1|^{p(x)} + |\nabla \phi_2|^{p(x)}\right) dx\right], \tag{3.22}$$

对任意 $\delta \in (0,1)$。

证明。 考虑 $\tilde{v} \in v + W^{1,\ p_2}_{0}(\Omega_R, \omega^{p_2})$，它是变分形式的唯一解

$$\int_{\Omega_R} |\mathbb{W}(x)\nabla \tilde{v}|^{p_2 - 2} \mathbb{W}(x)\nabla \tilde{v} \cdot \mathbb{W}(x)\nabla \phi dx = 0, \quad \text{for any } \phi \in W^{1,p_2}_0(\Omega_R, \omega^{p_2}). \tag{3.23}$$

根据 $L^{p_2}(\Omega_R, \omega^{p_2})$ 中关于 $\tilde{v}$ 的标准估计，很容易证明

$$\fint_{\Omega_R} \omega^{p_2} |\nabla \tilde{v}|^{p_2} dx \le C \fint_{\Omega_R} \omega^{p_2} |\nabla v|^{p_2} dx. \tag{3.24}$$

此外，存在一个常数 $\epsilon_1 \in (0, \kappa]$ 使得

$$\left[\fint_{\Omega_{R/2}} (\omega^{p_2} |\nabla \tilde{v}|^{p_2})^{1+\epsilon} dx\right]^{\frac{1}{1+\epsilon}} \le C \left(\fint_{\Omega_R} \omega^{p_2} |\nabla \tilde{v}|^{p_2} dx + 1\right), \tag{3.25}$$

对所有 $\epsilon \in (0, \epsilon_1]$。用 $v - \tilde{v} \in W^{1,\ p_2}_{0}(\Omega_R, \omega^{p_2})$ 测试 (3.15) 和 (3.23)，得到

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_R} \mathcal{J}_{p_2}(\mathbb{W}(x)\nabla v, \mathbb{W}(x)\nabla \tilde{v}) dx \\ &\quad = \int_{\Omega_R} \left[|\mathbb{W}(x)\nabla v|^{p_2 - 2} \mathbb{W}(x)\nabla v - |\mathbb{W}(x)\nabla v|^{p(x)-2} \mathbb{W}(x)\nabla v\right] \cdot \mathbb{W}(x)\nabla (v - \tilde{v}) dx, \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{J}_{p_2}$ 按 (3.7) 中的定义。为了估计右端项，可以应用以下基本不等式

$$\left||y|^{p_2 - 1} - |y|^{p(x)-1}\right| \le C\alpha(2R) \left[1 + |y|^{p_2 - 1} \log(e + |y|^{p_2})\right], \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

由此，感兴趣的读者可参见 [64,引理 3.14]，其中给出了相当详细的证明。因此可得

$$\begin{aligned} &\fint_{\Omega_R} \mathcal{J}_{p_2}(\mathbb{W}(x)\nabla v, \mathbb{W}(x)\nabla \tilde{v}) dx \\ &\qquad \le C \fint_{\Omega_R} \alpha(2R) \left[1 + \omega^{p_2 - 1} |\nabla v|^{p_2 - 1} \log(e + \omega^{p_2} |\nabla v|^{p_2})\right] \omega \, |\nabla v - \nabla \tilde{v}| \, dx. \end{aligned}$$

与引理 3.1 类似，对于每个 $\delta \in (0,\ 1)$，有

$$\begin{aligned}\fint_{\Omega_R} \omega^{p_2}|\nabla v - \nabla \tilde{v}|^{p_2} dx &\le \delta \fint_{\Omega_R} \omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2} dx + C_\delta \fint_{\Omega_R} \mathcal{J}_{p_2}(\mathbb{W}(x)\nabla v, \mathbb{W}(x)\nabla \tilde{v}) dx \\ &\le \delta \fint_{\Omega_R} \omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2} dx \\ &\quad + C_\delta \fint_{\Omega_R} \alpha(2R)\left[1 + \omega^{p_2-1}|\nabla v|^{p_2-1}\log(e+\omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2})\right]\omega\,|\nabla v - \nabla \tilde{v}|\, dx.\end{aligned}$$

由杨氏不等式可得

$$\begin{aligned}\fint_{\Omega_R} \omega^{p_2}|\nabla v - \nabla v|^{p_2} dx &\le \delta \fint_{\Omega_R} \omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2} dx \\ &\quad + C_\delta \left[1 + [\alpha(2R)]^{\frac{p_2}{p_2-1}} \fint_{\Omega_R} \omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2}\log^{\frac{p_2}{p_2-1}}(e+\omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2}) dx\right]. \qquad (3.26)\end{aligned}$$

由 [64, 引理 3.13]，（若 $0 < \fint_{\Omega_R} \omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2} dx \le 1$）可推得

$$\begin{aligned}&\fint_{\Omega_R} \omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2}\log^{\frac{p_2}{p_2-1}}(e+\omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2})\, dx \\ &\qquad \le \fint_{\Omega_R} \omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2}\log^{\frac{p_2}{p_2-1}}\left(e + \frac{\omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2}}{\fint_{\Omega_R}\omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2} dx}\right) dx \\ &\qquad \le C\left[\fint_{\Omega_R} (\omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2})^{1+\epsilon}\, dx\right]^{\frac{1}{1+\epsilon}},\end{aligned}$$

对每个 $\epsilon > 0$ 均成立。沿用 (3.19) 的证明思路，选取 $\epsilon > 0$ 使得 $(1+\epsilon)(1+\alpha(2R)) \le 1+\kappa$，并应用 (3.18)，可推得

$$\begin{aligned}\left[\fint_{\Omega_R} (\omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2})^{1+\epsilon}\, dx\right]^{\frac{1}{1+\epsilon}} &\le \left[\fint_{\Omega_R} (\omega^{p(x)(1+\epsilon)(1+\alpha(2R))}|\nabla v|^{p(x)(1+\epsilon)(1+\alpha(2R))} + 1) dx\right]^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\ &\le C\left[\left(\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla v|^{p(x)} dx\right)^{1+\alpha(2R)} + 1\right] \\ &\le C\left[\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla v|^{p(x)} dx + 1\right]\left[\left(\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla v|^{p(x)} dx\right)^{\alpha(2R)} + 1\right] \\ &\le C\left[\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla v|^{p(x)} dx + 1\right].\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\fint_{\Omega_R} \omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2}\log^{\frac{p_2}{p_2-1}}(e+\omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2})\, dx \le C\left[\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla v|^{p(x)} dx + 1\right]. \qquad (3.27)$$

此时，我们来考虑剩下的情形，即 $\fint_{\Omega_R} \omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2} dx > 1$。首先，我们应用下面这个初等不等式

$$\log^\beta(e+ab) \le 2^\beta\left[\log^\beta(e+a) + \log^\beta(b)\right],\ \text{ for all }\ \beta > 0,\ a > 0,\ b > 1,$$

再结合 (3.27)，可得

$$\begin{aligned}
&\fint_{\Omega_R} \omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2}\log^{\frac{p_2}{p_2-1}}\left(e+\omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2}\right)dx \\
&\qquad \le C\fint_{\Omega_R} \omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2}\log^{\frac{p_2}{p_2-1}}\left(e+\frac{\omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2}}{\fint_{\Omega_R}\omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2}dx}\right)dx \\
&\qquad\qquad + C\fint_{\Omega_R} \omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2}\log^{\frac{p_2}{p_2-1}}\left(\fint_{\Omega_R}\omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2}dx\right)dx \\
&\qquad \le C\left[\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla v|^{p(x)}dx+1\right] \\
&\qquad\qquad + C\log^{\frac{p_2}{p_2-1}}\left(\fint_{\Omega_R}\omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2}dx\right)\fint_{\Omega_R}\omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2}dx.
\end{aligned}$$

接下来，右端的对数项可通过应用（3.24）和（3.21）估计如下

$$\begin{aligned}
\log\left(\fint_{\Omega_R}\omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2}dx\right) &\le C\left[\log\left(\frac{1}{R^n}\int_{\Omega}\omega^{p(x)}\left(|\mathbf{F}|^{p(x)}+|\nabla\phi_1|^{p(x)}+|\nabla\phi_2|^{p(x)}\right)dx+1\right)\right] \\
&\le C\left[\log\left(\frac{1}{2R}\right)+1\right],
\end{aligned}$$

并注意到，常数 $C>0$ 此处取决于 $\|\mathbf{F}\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega^{p(\cdot)})}$、$\|\nabla\phi_1\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega^{p(\cdot)})}$ 和 $\|\nabla\phi_2\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega,\omega^{p(\cdot)})}$。然后，将该估计和（3.19）重新吸收到右端，可得

$$\begin{aligned}
&\fint_{\Omega_R} \omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2}\log^{\frac{p_2}{p_2-1}}\left(e+\omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2}\right)dx \\
&\qquad \le C\left[\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla v|^{p(x)}dx+1\right] \\
&\qquad\qquad + C\left[\log^{\frac{p_2}{p_2-1}}\left(\frac{1}{2R}\right)\fint_{\Omega_R}\omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2}dx+1\right] \\
&\qquad \le C\left[\log^{\frac{p_2}{p_2-1}}\left(\frac{1}{2R}\right)\fint_{\Omega_{2R}}\omega^{p(x)}|\nabla v|^{p(x)}dx+1\right], \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

结合（3.26）、（3.27）和（3.28），可得

$$\begin{aligned}
\fint_{\Omega_R}\omega^{p_2}|\nabla v-\nabla\tilde{v}|^{p_2}dx &\le \delta\fint_{\Omega_R}\omega^{p_2}|\nabla v|^{p_2}dx \\
&\quad + C_\delta\left[[\alpha(2R)]^{\frac{p_2}{p_2-1}}\log^{\frac{p_2}{p_2-1}}\left(\frac{1}{2R}\right)\fint_{\Omega_{2R}}\omega^{p(x)}|\nabla v|^{p(x)}dx+1\right]. \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

最后，通过应用对数-H¨older条件（1.11）以及估计（3.17）和（3.21），我们可以从（3.29）得出（3.22）的结论。 ■

由引理 3.2 可知，在半径更小的同心球上，解 $\tilde{v}$ 比 v 具有更高的可积性。下一个结果为我们提供了另一个比较层次。在这里，我们的目标是进一步研究与该

矩阵权 $\mathbb{W}_0$（$\mathbb{W}$ 的对数平均）相关联的一个新的齐次方程，该方程存在唯一解，记为 π。随后，引理 3.3 将建立 $\nabla\tilde{v}$（$\tilde{v}$ 在引理 3.2 中给出）与 $\nabla\pi$ 之间的比较。值得注意的是，对于这一证明，需要假设（$\mathbf{H_2}$），以确保权函数 $\omega\omega_0^{-1}$ 的平均积分有限，其中 ω_0 表示 ω 的对数平均。

引理 3.3（ 3rd 步）在引理 *3.2* 的假设下，设 $v \in W^{1,\,p(\cdot)}(\Omega_{2R}, \omega^{p(\cdot)}) \cap W^{1,\,p_2}(\Omega_R, \omega^{p_2})$、$\tilde{v} \in v + W^{1,\,p_2}_{\,0}(\Omega_R, \omega^{p_2})$ 分别为 (3.1) 和 (3.23) 的解。则存在 $\pi \in \tilde{v} + W^{1,\,p_2}_{\,0}(\Omega_{R/2}, \omega_0^{p_2})$，使得

$$\fint_{\Omega_{R/2}} \left|\omega|\nabla\tilde{v}| - \omega_0|\nabla\pi|\right|^{p_2} dx \le (\delta + C_\delta|\log\mathbb{W}|_{\mathrm{BMO}}) \fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)} dx + C_\delta|\log\mathbb{W}|_{\mathrm{BMO}} \left[1 + \fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)}\big(|\nabla\phi_1|^{p(x)} + |\nabla\phi_2|^{p(x)}\big) dx\right], \tag{3.30}$$

对每个 $\delta \in (0,\ 1)$，只要 $|\log\mathbb{W}|_{\mathrm{BMO}}$ 足够小（如假设 ($\mathbf{H_2}$) 中所述）。此处，为了方便记号，我们进一步记

$$\mathbb{W}_0 = \langle\mathbb{W}\rangle^{\log}_{B_{R/2}},\ and\ \omega_0 = \langle\omega\rangle^{\log}_{B_{R/2}}.$$

证明。首先证明 $\tilde{v} \in W^{1,\,p_2}_{\,0}(\Omega_{R/2},\ \omega_0^{p_2})$。事实上，读者很容易验证 $\Lambda^{-1}\omega_0 \le |\mathbb{W}_0| \le \omega_0$。此外，对每个 $q \ge 1$，都可以找到足够小的 $\kappa > 0$，使得若$|\log\mathbb{W}|_{\mathrm{BMO}} < \kappa$，则有

$$\fint_{\Omega_{R/2}} \left(\omega^q\omega_0^{-q} + \omega_0^q\omega^{-q}\right) dx \le C. \tag{3.31}$$

值得指出的是，(3.31) 是引理 2.18 中 (2.7) 的推论。对某个 $\epsilon \in (0,\ \epsilon_1]$ 应用 H¨older 不等式，可得

$$\fint_{\Omega_{R/2}} \omega_0^{p_2}|\nabla\tilde{v}|^{p_2} dx \le C \left[\fint_{\Omega_{R/2}} (\omega^{p_2}|\nabla\tilde{v}|^{p_2})^{1+\epsilon}\, dx\right]^{\frac{1}{1+\epsilon}} \left[\fint_{\Omega_{R/2}} \left(\omega^{-p_2}\omega_0^{p_2}\right)^{\frac{\epsilon+1}{\epsilon}} dx\right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon+1}},$$

结合 (3.25) 和 (3.31)，可得

$$\fint_{\Omega_{R/2}} \omega_0^{p_2}|\nabla\tilde{v}|^{p_2} dx \le C \left[\fint_{\Omega_R} \omega^{p_2}|\nabla\tilde{v}|^{p_2} dx + 1\right], \tag{3.32}$$

这保证了 $\tilde{v} \in W^{1,\,p_2}_{\,0}(\Omega_{R/2},\ \omega_0^{p_2})$。此时，考虑 $\pi \in \tilde{v} + W^{1,\,p_2}_{\,0}(\Omega_{R/2},\ \omega_0^{p_2})$，它是下列问题的唯一解

$$\int_{\Omega_{R/2}} |\mathbb{W}_0\nabla\pi|^{p_2-2}\mathbb{W}_0\nabla\pi \cdot \mathbb{W}_0\nabla\phi dx = 0, \quad \text{for any } \phi \in W_0^{1,p_2}(\Omega_{R/2}, \omega_0^{p_2}). \tag{3.33}$$

证明采用了与先前问题类似的论证。因此，我们可以证明存在一个常数 $\epsilon_2 \in (0,\ \epsilon_1]$ 使得

$$\left[\fint_{\Omega_{R/4}} (\omega_0^{p_2}|\nabla\pi|^{p_2})^{1+\epsilon}\, dx\right]^{\frac{1}{1+\epsilon}} \le C \left(\fint_{\Omega_{R/2}} \omega_0^{p_2}|\nabla\pi|^{p_2} dx + 1\right), \tag{3.34}$$

对所有 $\epsilon \in (0,\ \epsilon_2]$，以及

$$\fint_{\Omega_{R/2}} \omega_0^{p_2} |\nabla \pi|^{p_2} dx \le C \fint_{\Omega_{R/2}} \omega_0^{p_2} |\nabla \tilde{v}|^{p_2} dx. \tag{3.35}$$

需要注意的是，不等式 (3.32) 和 (3.35) 保证了 $\pi \in W^{1,\ p_2}(\Omega_{R/2},\ \omega_0^{p_2})$。因此，我们可以在 (3.23) 和 (3.33) 中取 $\pi - \tilde{v} \in W^{1,\ p_2}_{0}(\Omega_{R/2},\ \omega_0^{p_2})$ 作为测试函数，从而得到

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{R/2}} \mathcal{J}_{p_2} \left(\mathbb{W}_0 \nabla \pi, \mathbb{W}_0 \nabla \tilde{v}\right) dx = &\int_{\Omega_{R/2}} |\mathbb{W}(x) \nabla \tilde{v}|^{p_2-2} \mathbb{W}^2(x) \nabla \tilde{v} \cdot (\nabla \pi - \nabla \tilde{v}) dx \\ &- \int_{\Omega_{R/2}} |\mathbb{W}_0 \nabla \tilde{v}|^{p_2-2} \mathbb{W}_0^2 \nabla \tilde{v} \cdot (\nabla \pi - \nabla \tilde{v}) dx,\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{J}_{p_2}$ 的定义同 (3.7)。由 (3.8) 可得

$$\begin{aligned}\fint_{\Omega_{R/2}} \omega_0^{p_2} \left|\nabla \pi - \nabla \tilde{v}\right|^{p_2} dx &\le \delta \fint_{\Omega_{R/2}} \omega_0^{p_2} |\nabla \tilde{v}|^{p_2} dx + C_\delta \fint_{\Omega_{R/2}} \mathcal{J}_{p_2} \left(\mathbb{W}_0 \nabla \pi, \mathbb{W}_0 \nabla \tilde{v}\right) dx \\ &\le \delta \fint_{\Omega_{R/2}} \omega_0^{p_2} |\nabla \tilde{v}|^{p_2} dx + C_\delta \fint_{\Omega_{R/2}} |\mathcal{K}(x)| |\nabla \pi - \nabla \tilde{v}| dx, \end{aligned} \tag{3.36}$$

对于任意 $\delta \in (0,\ 1)$，为便于表述，记

$$\mathcal{K}(x) := |\mathbb{W}(x) \nabla \tilde{v}|^{p_2-2} \mathbb{W}^2(x) \nabla \tilde{v} - |\mathbb{W}_0 \nabla \tilde{v}|^{p_2-2} \mathbb{W}_0^2 \nabla \tilde{v}.$$

此外，为估计 $|\mathcal{K}(x)|$，我们首先进行如下分析

$$\begin{aligned}|\mathcal{K}(x)| \le &\left| |\mathbb{W}(x) \nabla \tilde{v}|^{p_2-2} \mathbb{W}^2(x) \nabla \tilde{v} - |\mathbb{W}(x) \nabla \tilde{v}|^{p_2-2} \mathbb{W}_0 \mathbb{W}(x) \nabla \tilde{v} \right| \\ &+ \left| |\mathbb{W}(x) \nabla \tilde{v}|^{p_2-2} \mathbb{W}_0 \mathbb{W}(x) \nabla \tilde{v} - |\mathbb{W}_0 \nabla \tilde{v}|^{p_2-2} \mathbb{W}_0^2 \nabla \tilde{v} \right| \\ \le &|\mathbb{W}(x) - \mathbb{W}_0| |\mathbb{W}(x) \nabla \tilde{v}|^{p_2-1} \\ &+ |\mathbb{W}_0| \left| |\mathbb{W}(x) \nabla \tilde{v}|^{p_2-2} \mathbb{W}(x) \nabla \tilde{v} - |\mathbb{W}_0 \nabla \tilde{v}|^{p_2-2} \mathbb{W}_0 \nabla \tilde{v} \right| \\ \le &C \left(|\mathbb{W}(x)|^{p_2} + |\mathbb{W}_0|^{p_2}\right) \frac{|\mathbb{W}(x) - \mathbb{W}_0|}{|\mathbb{W}(x)| + |\mathbb{W}_0|} |\nabla \tilde{v}|^{p_2-1} \\ &+ |\mathbb{W}_0| \left| |\mathbb{W}(x) \nabla \tilde{v}|^{p_2-2} \mathbb{W}(x) \nabla \tilde{v} - |\mathbb{W}_0 \nabla \tilde{v}|^{p_2-2} \mathbb{W}_0 \nabla \tilde{v} \right|. \end{aligned}$$

对于前述不等式中的最后一项，我们利用连续映射 $\zeta \in \mathbb{R}^n \mapsto |\zeta|^{p_2-2}\zeta$ 的中值定理，写成如下形式：

$$\begin{aligned}&|\mathbb{W}_0| \left| |\mathbb{W}(x) \nabla \tilde{v}|^{p_2-2} \mathbb{W}(x) \nabla \tilde{v} - |\mathbb{W}_0 \nabla \tilde{v}|^{p_2-2} \mathbb{W}_0 \nabla \tilde{v} \right| \\ &\qquad \le C |\mathbb{W}_0| \left| \tau \mathbb{W}(x) \nabla \tilde{v} + (1-\tau) \mathbb{W}_0 \nabla \tilde{v} \right|^{p_2-2} |\mathbb{W}(x) - \mathbb{W}_0| |\nabla \tilde{v}| \\ &\qquad \le C |\mathbb{W}_0| \frac{\left(|\mathbb{W}(x)| + |\mathbb{W}_0|\right)^{p_2}}{\left|\tau \mathbb{W}(x) + (1-\tau) \mathbb{W}_0\right|^2} |\mathbb{W}(x) - \mathbb{W}_0| |\nabla \tilde{v}|^{p_2-1} \\ &\qquad \le C \left(|\mathbb{W}(x)| + |\mathbb{W}_0|\right)^{p_2} \left(\frac{|\mathbb{W}_0|}{|\mathbb{W}(x)|} + 1 \right) \frac{|\mathbb{W}(x) - \mathbb{W}_0|}{|\mathbb{W}(x)| + |\mathbb{W}_0|} |\nabla \tilde{v}|^{p_2-1}. \end{aligned}$$

于是，我们得到以下估计

$$|\mathcal{K}(x)| \leq C\left(|\mathbb{W}(x)|+|\mathbb{W}_0|\right)^{p_2}\left|\frac{\mathbb{W}(x)-\mathbb{W}_0}{\mathbb{W}_0}\right|\left(\frac{|\mathbb{W}_0|}{|\mathbb{W}(x)|}+1\right)|\nabla\tilde{v}|^{p_2-1}.$$

将此估计代入 (3.36)，再利用杨氏不等式，可得

$$\begin{aligned}\fint_{\Omega_{R/2}}\omega_0^{p_2}\left|\nabla\pi-\nabla\tilde{v}\right|^{p_2}dx &\leq \delta\fint_{\Omega_{R/2}}\omega_0^{p_2}|\nabla\tilde{v}|^{p_2}dx\\ &+C_\delta\fint_{\Omega_{R/2}}\left[\left(\frac{|\mathbb{W}(x)|}{|\mathbb{W}_0|}+1\right)^{p_2}\left(\frac{|\mathbb{W}_0|}{|\mathbb{W}(x)|}+1\right)^{p_2}\left|\frac{\mathbb{W}(x)-\mathbb{W}_0}{\mathbb{W}_0}\right||\mathbb{W}(x)|^{p_2-1}|\nabla\tilde{v}|^{p_2-1}\right]^{\frac{p_2}{p_2-1}}dx.\end{aligned}$$

对于 $\epsilon\in(0,\epsilon_1]$，由霍尔德不等式可得

$$\begin{aligned}\fint_{\Omega_{R/2}}\omega_0^{p_2}\left|\nabla\pi-\nabla\tilde{v}\right|^{p_2}dx &\leq \delta\fint_{\Omega_{R/2}}\omega_0^{p_2}|\nabla\tilde{v}|^{p_2}dx\\ &+C_\delta\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2\left[\fint_{\Omega_{R/2}}\left(\omega^{p_2}|\nabla\tilde{v}|^{p_2}\right)^{1+\epsilon}dx\right]^{\frac{1}{1+\epsilon}}.\end{aligned}\tag{3.37}$$

其中， $\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2$ 分别定义为

$$\mathcal{K}_1=\left[\fint_{\Omega_{R/2}}\left[\left(\frac{|\mathbb{W}(x)|}{|\mathbb{W}_0|}+1\right)^{p_2}\left(\frac{|\mathbb{W}_0|}{|\mathbb{W}(x)|}+1\right)^{p_2}\right]^{\frac{p_2}{p_2-1}\frac{2(\epsilon+1)}{\epsilon}}dx\right]^{\frac{\epsilon}{2(1+\epsilon)}},$$

and

$$\mathcal{K}_2=\left[\fint_{\Omega_{R/2}}\left|\frac{\mathbb{W}(x)-\mathbb{W}_0}{\mathbb{W}_0}\right|^{\frac{p_2}{p_2-1}\frac{2(\epsilon+1)}{\epsilon}}dx\right]^{\frac{\epsilon}{2(1+\epsilon)}}.$$

由 (3.31) 以及 (2.4) 中 $[\log\mathbb{W}]_{\mathrm{BMO}}$ 的定义，引理 2.18 中的不等式 (2.8) 给出

$$\mathcal{K}_1\leq C \text{ and } \mathcal{K}_2\leq C|\log\mathbb{W}|_{\mathrm{BMO}}^{\frac{p_2}{p_2-1}}\leq C|\log\mathbb{W}|_{\mathrm{BMO}},\tag{3.38}$$

这在 $[\log\mathbb{W}]_{\mathrm{BMO}}$ 足够小时成立。此外，由于 (3.25)，并以与前面证明相同的方式，可得

$$\left[\fint_{\Omega_{R/2}}\left(\omega^{p_2}|\nabla\tilde{v}|^{p_2}\right)^{1+\epsilon}dx\right]^{\frac{1}{1+\epsilon}}\leq\left(\fint_{\Omega_R}\omega^{p_2}|\nabla\tilde{v}|^{p_2}dx+1\right).\tag{3.39}$$

将 (3.38) 和 (3.39) 代入 (3.37)，可得

$$\begin{aligned}\fint_{\Omega_{R/2}}\omega_0^{p_2}\left|\nabla\pi-\nabla\tilde{v}\right|^{p_2}dx &\leq \delta\fint_{\Omega_{R/2}}\omega_0^{p_2}|\nabla\tilde{v}|^{p_2}dx\\ &+C_\delta|\log\mathbb{W}|_{\mathrm{BMO}}\left(\fint_{\Omega_R}\omega^{p_2}|\nabla\tilde{v}|^{p_2}dx+1\right).\end{aligned}\tag{3.40}$$

另一方面，利用 Hölder 不等式可得

$$\fint_{\Omega_{R/2}} |\mathbb{W}(x)-\mathbb{W}_0|^{p_2}\,|\nabla\tilde{v}|^{p_2}\,dx \le C\mathcal{K}_3\mathcal{K}_4\left[\fint_{\Omega_{R/2}} (\omega^{p_2}|\nabla\tilde{v}|^{p_2})^{1+\epsilon}\,dx\right]^{\frac{1}{1+\epsilon}},$$

其中，量 $\mathcal{K}_3$，$\mathcal{K}_4$ 可估计如下

$$\mathcal{K}_3=\left[\fint_{\Omega_{R/2}} \left(\omega^{-p_2}\omega_0^{p_2}\right)^{\frac{2(\epsilon+1)}{\epsilon}}\,dx\right]^{\frac{\epsilon}{2(1+\epsilon)}}\le C,$$

and

$$\mathcal{K}_4=\left[\fint_{\Omega_{R/2}} \left|\frac{\mathbb{W}(x)-\mathbb{W}_0}{\mathbb{W}_0}\right|^{p_2\frac{2(\epsilon+1)}{\epsilon}}\,dx\right]^{\frac{\epsilon}{2(1+\epsilon)}}\le C|\log\mathbb{W}|^{p_2}_{\mathrm{BMO}}\le C|\log\mathbb{W}|_{\mathrm{BMO}}.$$

由式 (3.39) 可得

$$\fint_{\Omega_{R/2}} |\mathbb{W}(x)-\mathbb{W}_0|^{p_2}\,|\nabla\tilde{v}|^{p_2}\,dx \le C|\log\mathbb{W}|_{\mathrm{BMO}}\left(\fint_{\Omega_R}\omega^{p_2}|\nabla\tilde{v}|^{p_2}dx+1\right). \tag{3.41}$$

另一方面，我们注意到

$$\begin{aligned}\fint_{\Omega_{R/2}} \big|\omega|\nabla\tilde{v}|-\omega_0|\nabla\pi|\big|^{p_2}dx &\le C\left[\fint_{\Omega_{R/2}}\big|\omega|\nabla\tilde{v}|-\omega_0|\nabla\tilde{v}|\big|^{p_2}dx+\fint_{\Omega_{R/2}}\big|\omega_0|\nabla\pi|-\omega_0|\nabla\tilde{v}|\big|^{p_2}dx\right]\\ &\le C\left[\fint_{\Omega_{R/2}}|\mathbb{W}(x)-\mathbb{W}_0|^{p_2}\,|\nabla\tilde{v}|^{p_2}\,dx+\fint_{\Omega_{R/2}}\omega_0^{p_2}\,|\nabla\pi-\nabla\tilde{v}|^{p_2}\,dx\right].\end{aligned}$$

将式 (3.40) 和 (3.41) 代入上述估计，可得

$$\begin{aligned}\fint_{\Omega_{R/2}} \big|\omega|\nabla\tilde{v}|-\omega_0|\nabla\pi|\big|^{p_2}dx \le{}& \delta\fint_{\Omega_{R/2}}\omega_0^{p_2}|\nabla\tilde{v}|^{p_2}dx\\ &+C_\delta|\log\mathbb{W}|_{\mathrm{BMO}}\left(\fint_{\Omega_R}\omega^{p_2}|\nabla\tilde{v}|^{p_2}dx+1\right).\end{aligned}\tag{3.42}$$

结合式 (3.21)、(3.24)、(3.32) 和 (3.42)，式 (3.30) 的证明便显而易见。至此，引理 3.3 的证明完成。∎

现在我们来完成比较方案的最后一个证明，该证明提出将 π 与具有先验 L^∞-估计的 $\tilde{\pi}$ 进行比较。在这一阶段，最终结果可通过利用假设 **($\mathbf{H_3}$)** 的论证得出。

引理 3.4（ $\mathbf{4^{th}}$ 步）在引理 *3.3* 的假设下，设 $\pi\in\tilde{v}+W^1_{,0}{}^{p_2}(\Omega^{R/2},\omega_0^{p_2})$是 (3.33) 的解。那么，对每个 $\delta\in(0,\,1)$，存在 $\kappa>0$，使得若 Ω 满足 (κ,r_0)-***Reifenberg*** 平坦性条件，则可以找到 $\tilde{\pi}\in W^1_{,0}{}^{p_2}(\Omega^{R/2},\omega_0^{p_2})\cap L^\infty(\Omega^{R/4},\omega_0^{p_2})$，使得

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\Omega_{R/4}}\omega_0^{p_2}|\nabla\tilde{\pi}|^{p_2} \le{}& C\fint_{\Omega_{2R}}\omega^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\\ &+C\left(\fint_{\Omega_{2R}}\omega^{p(x)}\big(|\nabla\phi_1|^{p(x)}+|\nabla\phi_2|^{p(x)}\big)dx+1\right),\end{aligned}\tag{3.43}$$

and

$$\fint_{\Omega_{R/2}} \omega_0^{p_2} \left|\nabla\tilde{\pi} - \nabla\pi\right|^{p_2} dx \le \delta \fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx + C\left(\fint_{\Omega_{2R}} \omega^{p(x)} \left(|\nabla\phi_1|^{p(x)} + |\nabla\phi_2|^{p(x)}\right) dx + 1\right). \tag{3.44}$$

证明。 证明方法可追溯至 [10, 推论 3.1], ，作者在其中证明：对每个 $\delta \in (0,1)$，存在 $\kappa > 0$，使得若 Ω 满足 (κ, r_0)-Reifenberg 平坦条件，则存在一个函数 $\tilde{\pi} \in W^{1,}{}_0{}^{p_2}(\Omega^{R/2}, \omega_0^{p_2}) \cap L^{\infty}(\Omega^{R/4}, \omega_0^{p_2})$，使得

$$\sup_{x\in\Omega_{R/4}} \omega_0^{p_2} |\nabla\tilde{\pi}|^{p_2} \le C\left(\fint_{\Omega_{R/2}} \omega_0^{p_2} |\nabla\pi|^{p_2} dx + 1\right),$$

and

$$\fint_{\Omega_{R/2}} \omega_0^{p_2} \left|\nabla\tilde{\pi} - \nabla\pi\right|^{p_2} dx \le \delta\left(\fint_{\Omega_{R/2}} \omega_0^{p_2} |\nabla\pi|^{p_2} dx + 1\right).$$

汇总引理 3.1、3.2 和 3.3 中的所有比较估计，可以很容易地得到 (3.43) 和 (3.44)。至此，证明终于完成。 ■

4 水平集估计

本节我们将着重证明水平集估计，这些估计以比较估计为基础。在所述方法中，构造水平集不等式是处理解的正则性和定性性质时一个基础且重要的步骤。证明的主要思路源自一种基本技巧：对适当的水平集应用 Calder´on-Zygmund 型覆盖引理（见 [2, 9, 18]）。对于含有障碍函数且涉及退化矩阵权的问题 (1.10) 的解，还需要一些精细论证，才能将这一思路应用于我们的情形。下面详细介绍本文中的两项重要改进。第一项改进如第 3 节所示，读者将看到专为比较方案设计的技巧如何发挥作用。更准确地说，由于模型结构复杂，比较策略无法直接从 (1.10) 的原始弱解 u 过渡到 $\tilde{\pi}$，而必须经过若干步骤，这使得处理变得困难。第二项改进体现了我们工作的推进，将在本节重点阐述。在我们的论证中，我们专门建立了一个最优 水平集不等式，降低了辅助参数对可测水平集中运行 ε 的依赖。这项改进确保后续步骤中能够直接导出某些函数空间内的正则性估计；同时，这些空间的缩放参数不再受额外假设的限制。这是我们主要结果的关键工具之一。我们也认为，所谓的大尺度水平集估计可以推广用于处理梯度正则性结果，即使是在大量更一般的函数空间中亦然。

定理 4.1 设 $u \in \mathbb{K}^{\omega}_{\phi_1,\phi_2}$ 是主问题 (1.10) 在假设 (1.6)-(1.8)下的一个弱解，且给定 $\beta \in [0, n)$、 $\varepsilon \in (0、1)$。那么，可以找到一些常数

$\sigma \in (0,\ 3^{-n})$、 $\kappa = \kappa(\varepsilon) \in (0,\ \sigma)$ 和 $\lambda_0 = \lambda_0(\kappa)$，使得如果 $(\mathbf{H_1})$-$(\mathbf{H_3})$ 对某个 $r_0 > 0$ 满足条件，那么以下水平集不等式成立：

$$\left|\left\{\mathbf{M}_\beta\left(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\right) > \lambda,\, \mathbf{M}_\beta \mathbb{F}_\omega \le \kappa\lambda\right\}\right| \le C\varepsilon \left|\left\{\mathbf{M}_\beta\left(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\right) > \sigma\lambda\right\}\right|, \tag{4.1}$$

对于所有 $\lambda \ge \lambda_0$。这里，常数 C 取决于 DATASET。

证明。 首先，令我们固定 $\beta \in [0, n)$ 和 $\varepsilon \in (0,1)$。为便于阅读，我们将式 (4.1) 左侧和右侧的两个 Ω 的可测子集分别记为 $V_{1,\varepsilon}^{\lambda}$ 和 V_2^{λ}。更具体地，对于任意 $\lambda > 0$，通常写作

$$V_{1,\varepsilon}^{\lambda} := \left\{\mathbf{M}_\beta\left(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\right) > \lambda,\, \mathbf{M}_\beta \mathbb{F}_\omega \le \kappa\lambda\right\}, \quad V_2^{\lambda} := \left\{\mathbf{M}_\beta\left(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\right) > \sigma\lambda\right\}.$$

值得注意的是，由于 κ 对 ε 的依赖，第一个水平集也依赖于 ε，而其余的水平集则不依赖于此。

值得注意的是，对于任意空子集 $V_{1,\varepsilon}^{\lambda}$，结论显然成立。因此，我们可以考虑某个 $y \in V_{1,\varepsilon}^{\lambda}$，这意味着 $\mathbf{M}_\beta \mathbb{F}_\omega(y) \le \kappa\lambda$。取 $T_0 := 2\mathrm{diam}(\Omega)$，并结合全局估计 (3.2)，可得

$$\int_\Omega \omega^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx \le C\int_{B_{T_0}(y)} \mathbb{F}_\omega(x)dx \le C|B_{T_0}(y)|T_0^{-\beta}\mathbf{M}_\beta \mathbb{F}_\omega(y) \le CT_0^{n-\beta}\kappa\lambda. \tag{4.2}$$

关于分数阶极大算子 $\mathbf{M}_\beta$，由引理 2.14 可知，它满足有界性。更具体地，存在常数 $C = C(n,\beta) > 0$ 使得

$$\sup_{\lambda>0} \lambda\,|\{x \in \mathbb{R}^n :\ \mathbf{M}_\beta f(x) > \lambda\}|^{1-\frac{\beta}{n}} \le C\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.3}$$

对所有 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\chi_\Omega \omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}$ (4.2) (4.3) $f = 0$。此时，考虑到 (4.2) 并应用 (4.3)，可得

$$\left|V_{1,\varepsilon}^{\lambda}\right| \le \left|\left\{\mathbf{M}_\beta\left(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\right) > \lambda\right\}\right| \le \left(\frac{C}{\lambda}\int_\Omega \omega^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)^{\frac{n}{n-\beta}} \le CT_0^n\kappa^{\frac{n}{n-\beta}} \le \varepsilon R_0^n, \tag{4.4}$$

由此，通过固定一个满足下列条件的 $R_0 \in (0,\ r_0]$ 和 κ

$$0 < \kappa \le (C^{-1}\varepsilon)^{1-\frac{\beta}{n}}\left(R_0T_0^{-1}\right)^{n-\beta}. \tag{4.5}$$

接下来，对于每个 $x_0 \in \Omega$ 和 $0 < \rho \le R_0$，我们证明

$$\Omega_\rho(x_0) \not\subset V_2^{\lambda} \Longrightarrow \left|B_\rho(x_0) \cap V_{1,\varepsilon}^{\lambda}\right| < \varepsilon|B_\rho(x_0)|.$$

完全类似于前述论证，我们可以假设 $B_\rho(x_0) \cap V_{1,\varepsilon}^{\lambda} \neq \emptyset$ 且 $\Omega_\rho(x_0) \not\subset V_2^{\lambda}$，这验证了存在某个 $x_1 \in B_\rho(x_0)$ 和 $x_2 \in \Omega_\rho(x_0)$，使得

$$\sup_{r>0} r^\beta \fint_{B_r(x_1)} \mathbb{F}_\omega(x)dx \le \kappa\lambda, \quad \text{and} \quad \sup_{r>0} r^\beta \fint_{B_r(x_2)} \omega^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx \le \sigma\lambda. \tag{4.6}$$

有了这一点，还需要进一步证明

$$\left|B_\rho(x_0)\cap V_{1,\varepsilon}^\lambda\right|<\varepsilon|B_\rho(x_0)|. \tag{4.7}$$

对于任意 $y\in B_\rho(x_0)\cap V_{1,\varepsilon}^\lambda$，我们可以将其分解为

$$\mathbf{M}_\beta\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big)(y)=\max\left\{\mathbf{M}_\beta^\rho\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big)(y),\mathbf{T}_\beta^\rho\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big)(y)\right\},$$

其中，两个截断极大函数$\mathbf{M}^\rho$ 和$\mathbf{T}^\rho$ 在定义 2.13 中进行了描述。由 (4.6) 和$B_r(y)\subset B_{3r}(x_2)$（对于 $r>\rho$），可知

$$\mathbf{T}_\beta^\rho\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big)(y)\le 3^n\sup_{r>\rho}r^\beta\fint_{B_{3r}(x_2)}\omega^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\le 3^n\sigma\lambda.$$

取 $\sigma\le 3^{-n}$，则对于所有 $y\in B_\rho(x_0)\cap V_{1,\varepsilon}^\lambda$，有$\mathbf{T}_\beta^\rho\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big)(y)\le\lambda$。由此可得

$$B_\rho(x_0)\cap V_{1,\varepsilon}^\lambda\subset B_\rho(x_0)\cap\left\{\mathbf{M}_\beta\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big)>\lambda\right\}=B_\rho(x_0)\cap\left\{\mathbf{M}_\beta^\rho\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big)>\lambda\right\}.$$

容易验证

$$\mathbf{M}_\beta^\rho\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big)=\mathbf{M}_\beta^\rho\big(\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big)$$

在球 $B_\rho(x_0)$ 中。因此，我们可以得出

$$B_\rho(x_0)\cap V_{1,\varepsilon}^\lambda\subset B_\rho(x_0)\cap\left\{\mathbf{M}_\beta^\rho\big(\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big)>\lambda\right\}. \tag{4.8}$$

在这一步中，我们将使用上一节给出的比较估计。由引理 3.1，可找到 $v\in W^{1,\,p(\cdot)}\big(\Omega_{16\rho}(x_0),\,\omega^{p(\cdot)}\big)\cap W^{1,\,p_2}(\Omega_{8\rho}(x_0),\,\omega^{p_2})$，使得

$$\begin{aligned}\fint_{\Omega_{16\rho}(x_0)}\omega^{p(x)}|\nabla u-\nabla v|^{p(x)}dx&\le\delta\fint_{\Omega_{16\rho}(x_0)}\omega^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\\&\quad+C_\delta\fint_{\Omega_{16\rho}(x_0)}\omega^{p(x)}\big(|\mathbf{F}|^{p(x)}+|\nabla\phi_1|^{p(x)}+|\nabla\phi_2|^{p(x)}\big)dx,\end{aligned} \tag{4.9}$$

对每个 $\delta\in(0,\,1)$，引理 3.2 保证存在 $\tilde v\in v+W^{1,\,p_2}_{\,0}(\Omega_{8\rho}(x_0),\,\omega^{p_2})$，使得

$$\begin{aligned}\fint_{\Omega_{8\rho}(x_0)}\omega^{p_2}|\nabla v-\nabla\tilde v|^{p_2}dx&\le\left(\delta+C_\delta\kappa^{\frac{p_2}{p_2-1}}\right)\fint_{\Omega_{16\rho}(x_0)}\omega^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\\&\quad+C_\delta\left[1+\kappa^{\frac{p_2}{p_2-1}}\fint_{\Omega_{16\rho}(x_0)}\omega^{p(x)}\big(|\nabla\phi_1|^{p(x)}+|\nabla\phi_2|^{p(x)}\big)dx\right],\end{aligned} \tag{4.10}$$

其中 $p_2=\sup p(x)$。接下来，引理 3.3 给出了一个函数 $\pi\in\tilde v+W^{1,\,p_2}_{\,0}(\Omega_{4\rho}(x_0),\,\omega_0^{p_2})_{x\in\Omega_{8\rho}(x_0)}$，使得

$$\begin{aligned}\fint_{\Omega_{4\rho}(x_0)}\big|\omega|\nabla\tilde v|-\omega_0|\nabla\pi|\big|^{p_2}dx&\le(\delta+C_\delta|\log\mathbb{W}|_{\mathrm{BMO}})\fint_{\Omega_{16\rho}(x_0)}\omega^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\\&\quad+C_\delta|\log\mathbb{W}|_{\mathrm{BMO}}\left[1+\fint_{\Omega_{16\rho}(x_0)}\omega^{p(x)}\big(|\nabla\phi_1|^{p(x)}+|\nabla\phi_2|^{p(x)}\big)dx\right],\end{aligned} \tag{4.11}$$

在 $[\![\log\mathbb{W}]\!]_{\mathrm{BMO}}$ 足够小的条件下，其中

$$\mathbb{W}_0 = \langle\mathbb{W}\rangle^{\log}_{B_{4\rho}(x_0)}, \text{ and } \omega_0 = \langle\omega\rangle^{\log}_{B_{4\rho}(x_0)}.$$

根据引理 3.4，若给定的 Ω 满足 $(\kappa,\ r_0)$-Reifenberg 平坦条件，则存在 $\tilde{\pi} \in W^{1,\ 0}{}^{p_2}(\Omega_{4\rho}(x_0)\ \omega_0^{p_2}) \cap L^{\infty}(\Omega_{2\rho}(x_0)\ \omega_0^{p_2})$，使得

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\Omega_{2\rho}(x_0)} \omega_0^{p_2}|\nabla\tilde{\pi}|^{p_2} \le C \fint_{\Omega_{16\rho}(x_0)} \omega^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx \\ + C\left(\fint_{\Omega_{16\rho}(x_0)} \omega^{p(x)}\big(|\nabla\phi_1|^{p(x)} + |\nabla\phi_2|^{p(x)}\big)dx + 1\right),\end{aligned} \tag{4.12}$$

and

$$\begin{aligned}\fint_{\Omega_{4\rho}(x_0)} \omega_0^{p_2}\big|\nabla\tilde{\pi} - \nabla\pi\big|^{p_2}dx \le \delta \fint_{\Omega_{16\rho}(x_0)} \omega^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx \\ + C\left(\fint_{\Omega_{16\rho}(x_0)} \omega^{p(x)}\big(|\nabla\phi_1|^{p(x)} + |\nabla\phi_2|^{p(x)}\big)dx + 1\right).\end{aligned} \tag{4.13}$$

另一方面，对于每个 $x \in B_\rho(x_0)$，显然有

$$|\zeta|^{p(x)} \le 2^{p_{\max}-1}\left(|\zeta-\eta|^{p(x)} + |\eta|^{p(x)}\right) \text{ and } |\eta|^{p(x)} \le 2^{p_{\max}-1}\left(|\eta|^{p_2}+1\right),$$

对所有 $\zeta,\ \eta \in \mathbb{R}^n$ 均成立。利用这些估计，我们推得

$$\omega^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)} \le C\left(\omega^{p(x)}\,|\nabla u - \nabla v|^{p(x)} + \omega^{p_2}\,|\nabla v|^{p_2} + 1\right),$$

and

$$\omega^{p_2}\,|\nabla v|^{p_2} \le C\Big(\omega^{p_2}\,|\nabla v - \nabla\tilde{v}|^{p_2} + \big|\omega|\nabla\tilde{v}| - \omega_0|\nabla\pi|\big|^{p_2} + \omega_0^{p_2}\big|\nabla\pi - \nabla\tilde{\pi}\big|^{p_2} + \omega_0^{p_2}\big|\nabla\tilde{\pi}\big|^{p_2}\Big).$$

因此，我们可以得出结论：

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^{\rho}_{\beta}\big(\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big) \le\ & \mathbf{M}^{\rho}_{\beta}\big(C_1\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\omega^{p(\cdot)}|\nabla u - \nabla v|^{p(\cdot)}\big) \\ & + \mathbf{M}^{\rho}_{\beta}\big(C_1\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\omega^{p_2}\,|\nabla v - \nabla\tilde{v}|^{p_2}\,\big) \\ & + \mathbf{M}^{\rho}_{\beta}\big(C_1\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\big|\omega|\nabla\tilde{v}| - \omega_0|\nabla\pi|\big|^{p_2}\big) \\ & + \mathbf{M}^{\rho}_{\beta}\big(C_1\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\omega_0^{p_2}|\nabla\pi - \nabla\tilde{\pi}|^{p_2}\big) \\ & + \mathbf{M}^{\rho}_{\beta}\big(C_1\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\big(\omega_0^{p_2}|\nabla\tilde{\pi}|^{p_2}+1\big)\big),\ \text{ in } B_\rho(x_0).\end{aligned}$$

结合（4.8），可得

$$
\begin{aligned}
|B_\rho(x_0)\cap V^\lambda_{1,\varepsilon}| &\le \left|B_\rho(x_0)\cap\left\{\mathbf{M}^\rho_\beta\big(\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big)>\lambda\right\}\right| \\
&\le \left|B_\rho(x_0)\cap\left\{\mathbf{M}^\rho_\beta\big(C_1\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\omega^{p(\cdot)}|\nabla u-\nabla v|^{p(\cdot)}\big)>\frac{\lambda}{5}\right\}\right| \\
&\quad+\left|B_\rho(x_0)\cap\left\{\mathbf{M}^\rho_\beta\big(C_1\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\omega^{p_2}\,|\nabla v-\nabla\tilde v|^{p_2}\,\big)>\frac{\lambda}{5}\right\}\right| \\
&\quad+\left|B_\rho(x_0)\cap\left\{\mathbf{M}^\rho_\beta\big(C_1\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\big|\omega|\nabla\tilde v|-\omega_0|\nabla\pi|\big|^{p_2}\big)>\frac{\lambda}{5}\right\}\right| \\
&\quad+\left|B_\rho(x_0)\cap\left\{\mathbf{M}^\rho_\beta\big(C_1\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\omega_0^{p_2}|\nabla\pi-\nabla\tilde\pi|^{p_2}\big)>\frac{\lambda}{5}\right\}\right| \\
&\quad+\left|B_\rho(x_0)\cap\left\{\mathbf{M}^\rho_\beta\big(C_1\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\big(\omega_0^{p_2}|\nabla\tilde\pi|^{p_2}+1\big)\big)>\frac{\lambda}{5}\right\}\right| \\
&\le \mathcal{N}_1+\mathcal{N}_2+\mathcal{N}_3+\mathcal{N}_4+\mathcal{N}_5, \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

其中我们定义

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}_1 &:= \left|B_\rho(x_0)\cap\left\{\mathbf{M}^\rho_\beta\big(C_1\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\omega^{p(\cdot)}|\nabla u-\nabla v|^{p(\cdot)}\big)>\frac{\lambda}{5}\right\}\right|;\\
\mathcal{N}_2 &:= \left|B_\rho(x_0)\cap\left\{\mathbf{M}^\rho_\beta\big(C_1\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\omega^{p_2}\,|\nabla v-\nabla\tilde v|^{p_2}\,\big)>\frac{\lambda}{5}\right\}\right|;\\
\mathcal{N}_3 &:= \left|B_\rho(x_0)\cap\left\{\mathbf{M}^\rho_\beta\big(C_1\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\big|\omega|\nabla\tilde v|-\omega_0|\nabla\pi|\big|^{p_2}\big)>\frac{\lambda}{5}\right\}\right|;\\
\mathcal{N}_4 &:= \left|B_\rho(x_0)\cap\left\{\mathbf{M}^\rho_\beta\big(C_1\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\omega_0^{p_2}|\nabla\pi-\nabla\tilde\pi|^{p_2}\big)>\frac{\lambda}{5}\right\}\right|;\\
\mathcal{N}_5 &:= \left|B_\rho(x_0)\cap\left\{\mathbf{M}^\rho_\beta\big(C_1\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\big(\omega_0^{p_2}|\nabla\tilde\pi|^{p_2}+1\big)\big)>\frac{\lambda}{5}\right\}\right|.
\end{aligned}
$$

为估计前四项 $\mathcal{N}_i$ 当 $i=1$，2，3，4 时，我们首先使用（4.3）中极大算子 $\mathbf{M}^\beta$ 的有界性，可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^4\mathcal{N}_j &\le C\left(\lambda^{-1}\int_{\Omega_{2\rho}(x_0)}\omega^{p(x)}|\nabla u-\nabla v|^{p(x)}dx\right)^{\frac{n}{n-\beta}}\\
&\quad+C\left(\lambda^{-1}\int_{\Omega_{2\rho}(x_0)}\omega^{p_2}\,|\nabla v-\nabla\tilde v|^{p_2}\,dx\right)^{\frac{n}{n-\beta}}\\
&\quad+C\left(\lambda^{-1}\int_{\Omega_{2\rho}(x_0)}\big|\omega|\nabla\tilde v|-\omega_0|\nabla\pi|\big|^{p_2}dx\right)^{\frac{n}{n-\beta}}\\
&\quad+C\left(\lambda^{-1}\int_{\Omega_{2\rho}(x_0)}\omega_0^{p_2}|\nabla\pi-\nabla\tilde\pi|^{p_2}dx\right)^{\frac{n}{n-\beta}}. \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

这里注意 （4.15）中的第一项积分可通过结合（4.9）和（4.6）来计算).

事实上，由于 $\Omega^{16\rho}(x_0) \subset \Omega^{17\rho}(x_2)$，由（4.6）可得

$$\fint_{\Omega_{16\rho}(x_0)} \omega^{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq C \fint_{\Omega_{17\rho}(x_2)} \omega^{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq C\rho^{-\beta}\sigma\lambda.$$

类似的论证可得

$$\fint_{\Omega_{16\rho}(x_0)} \omega^{p(x)} \big(|\mathbf{F}|^{p(x)} + |\nabla \phi_1|^{p(x)} + |\nabla \phi_2|^{p(x)}\big) dx \leq C\rho^{-\beta}\kappa\lambda.$$

结合上述估计与 (4.9)，可得

$$\int_{\Omega_{2\rho}(x_0)} \omega^{p(x)} |\nabla u - \nabla v|^{p(x)} dx \leq C \int_{\Omega_{16\rho}(x_0)} \omega^{p(x)} |\nabla u - \nabla v|^{p(x)} dx \leq C\rho^{n-\beta}\lambda \left(\delta\sigma + C_\delta \kappa\right),$$

这直接意味着

$$\left(\lambda^{-1} \int_{\Omega_{2\rho}(x_0)} \omega^{p(x)} |\nabla u - \nabla v|^{p(x)} dx\right)^{\frac{n}{n-\beta}} \leq C\rho^n \big(\delta\sigma + C_\delta\kappa\big)^{\frac{n}{n-\beta}}, \tag{4.16}$$

同样，类似的论证使我们能够从 (4.10) 推得

$$\int_{\Omega_{2\rho}(x_0)} \omega^{p_2} |\nabla v - \nabla \tilde{v}|^{p_2} \, dx \leq C\rho^n \left[\left(\delta + C_\delta \kappa^{\frac{p_2}{p_2-1}}\right) \rho^{-\beta}\sigma\lambda + C_\delta \left(1 + \kappa^{\frac{p_2}{p_2-1}} \rho^{-\beta}\kappa\lambda\right)\right].$$

Fo对于该估计右端出现的项，我们限制 λ使得 t

$$\lambda \geq \lambda_0 := \kappa^{-1} r_0^\beta \geq \kappa^{-1}\rho^\beta, \tag{4.17}$$

这保证了 $1 \leq \rho^{-\beta}\kappa\lambda$。因此，我们可以得到

$$\left(\lambda^{-1} \int_{\Omega_{2\rho}(x_0)} \omega^{p_2} |\nabla v - \nabla \tilde{v}|^{p_2} \, dx\right)^{\frac{n}{n-\beta}} \leq C\rho^n \left[\left(\delta + C_\delta \kappa^{\frac{p_2}{p_2-1}}\right) \sigma + C_\delta \left(\kappa + \kappa^{\frac{p_2}{p_2-1}} \kappa\right)\right]^{\frac{n}{n-\beta}}. \tag{4.18}$$

接下来，利用（4.11）和（4.13）中给出的比较估计处理（4.14）右端的另外两项。这样，利用条件（4.17）和$\log \mathbb{W}|_{\mathrm{BMO}} \leq \kappa$，可得

$$\begin{aligned}\left(\lambda^{-1} \int_{\Omega_{2\rho}(x_0)} \big|\omega|\nabla \tilde{v}| - \omega_0 |\nabla \pi|\big|^{p_2} dx\right)^{\frac{n}{n-\beta}} &\leq C\rho^n \big[\left(\delta + C_\delta |\log \mathbb{W}|_{\mathrm{BMO}}\right)\sigma + C_\delta\kappa |\log \mathbb{W}|_{\mathrm{BMO}}\big]^{\frac{n}{n-\beta}} \\ &\leq C\rho^n \big[\left(\delta + C_\delta\kappa\right)\sigma + C_\delta\kappa^2\big]^{\frac{n}{n-\beta}}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

and

$$\left(\lambda^{-1} \int_{\Omega_{2\rho}(x_0)} \omega_0^{p_2} |\nabla \pi - \nabla \tilde{\pi}|^{p_2} dx\right)^{\frac{n}{n-\beta}} \leq C\rho^n \left(\delta\sigma + \kappa\right)^{\frac{n}{n-\beta}}. \tag{4.20}$$

汇总估计（4.16）、（4.18）、（4.19）和（4.20），并将它们重新吸收到（4.15）中，可得

$$\sum_{j=1}^{4}\mathcal{N}_j \le C\rho^n\left[\delta\sigma + C_\delta\kappa + \left(\delta + C_\delta\kappa^{\frac{p_2}{p_2-1}}\right)\sigma + C_\delta\kappa\left(1+\kappa^{\frac{p_2}{p_2-1}}\right) + \left(\delta + C_\delta\kappa\right)\sigma + C_\delta\kappa^2 + \delta\sigma + \kappa\right]^{\frac{n}{n-\beta}}.$$

请注意， σ， $\kappa \in (0,\ 1)$，这使我们能够得出结论

$$\sum_{j=1}^{4}\mathcal{N}_j \le C\rho^n\left(\delta + C_\delta\kappa\right)^{\frac{n}{n-\beta}} \le C_2\left(\delta + C_\delta\kappa\right)^{\frac{n}{n-\beta}}|B_\rho(x_0)|. \tag{4.21}$$

此时，我们转而估计最后一项 $\mathcal{N}_5$。值得注意的是，当 $\sigma > 0$ 足够小且 $\lambda > 0$ 足够大时，该项将消失。事实上，对于每个 $y \in B_\rho(x_0)$，由 (4.12) 可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_\beta^\rho\left(C\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\left(\omega_0^{p_2}|\nabla\tilde{\pi}|^{p_2}+1\right)\right)(y) &= C\sup_{r\le\rho} r^\beta \fint_{B_{2\rho}(x_0)}\left(\omega_0^{p_2}|\nabla\tilde{\pi}|^{p_2}+1\right)dx \\
&\le C\rho^\beta \fint_{\Omega_{16\rho}(x_0)} \omega^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx \\
&\quad + C\rho^\beta\left(\fint_{\Omega_{16\rho}(x_0)} \omega^{p(x)}\left(|\nabla\phi_1|^{p(x)} + |\nabla\phi_2|^{p(x)}\right)dx + 1\right) \\
&\le C_3\left(\kappa\lambda + \sigma\lambda + \rho^\beta\right).
\end{aligned} \tag{4.22}$$

因此，对于 (4.17) 中给出的所有 $\lambda \ge \lambda_0$，我们可以选取合适的 κ 和 σ，使其满足

$$\kappa \le \sigma \le \min\left\{\frac{1}{3^n}, \frac{1}{15C_3}\right\}.$$

因此，利用 (4.22)，我们得到

$$\mathbf{M}_\beta^\rho\left(C\chi_{B_{2\rho}(x_0)}\left(\omega_0^{p_2}|\nabla\tilde{\pi}|^{p_2}+1\right)\right)(y) \le \frac{\lambda}{5}.$$

换言之，当 $\lambda \ge \lambda_0$ 和 σ 足够小时，对所有情形均可得出结论 $\mathcal{N}_5 = 0$。接下来，将此估计代入 (4.14) 和 (4.21)，得到

$$|B_\rho(x_0)\cap V_{1,\varepsilon}^\lambda| \le C_2\left(\delta + C_\delta\kappa\right)^{\frac{n}{n-\beta}}|B_\rho(x_0)|. \tag{4.23}$$

此时，可以在 (4.23) 中选取足够小的 δ 和 κ，使得

$$C_2\left(\delta + C_\delta\kappa\right)^{\frac{n}{n-\beta}} < \varepsilon, \tag{4.24}$$

这使我们能够由 (4.23) 得到 (4.7)。在满足 κ 满足 (4.5) 和 (4.24)、$\lambda \ge \lambda_0$，且已知 σ 是一个给定的小常数的约束下，我们将证明以下两个结论

(i) $\left|V_{1,\varepsilon}^\lambda\right| \le \varepsilon R_0^n$; and

(ii) 对每个 $x_0 \in \Omega$ 和 $\rho \in (0,\ R_0]$，我们断言 $\Omega_\rho(x_0) \not\subset V_2^\lambda \Longrightarrow \left|B_\rho(x_0)\cap V_{1,\ \varepsilon}^\lambda\right| < \varepsilon|B_\rho(x_0)|$。

根据上述推理并利用引理 2.19，我们得出（4.1），至此终于完成了定理 4.1 的证明。

■

5 主要结果的陈述与证明

本节通过定理 5.1 和 5.2，以最一般的形式正式陈述主要结果。借助前文的所有结果，主要定理的证明也分两部分完成。这里，我们运用定理 4.1 中证明的水平集估计，将梯度正则性结论推广到更广泛的函数空间环境中的双障碍问题 1.10 的解。为便于阐述，首先我们将仅分析勒贝格空间中的结果，因为勒贝格空间是函数空间中最基本的例子。

现在陈述以下两个主要定理所依据的基本假设。假设 $\mathbb{W}\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}{}_{\mathrm{sym}^+}$ 是一个满足 (1.6) 的矩阵权，且 $p(\cdot)$ 是一个满足 (1.7) 的连续函数。设 $\mathbf{F} \in L^{p(\cdot)}\big(\Omega\ \omega^{p(\cdot)}\big)$ 是给定的数据，$\phi_1, \phi_2 \in W^{1,p(\cdot)}\big(\Omega\ \omega^{p(\cdot)}\big)$ 是如 (1.8) 所示的两个给定障碍函数。进一步假设 $u \in \mathbb{K}^{\omega}_{\phi_1,\phi_2}$ 是 (1.10) 的一个解，且 $\mathbb{F}_\omega$ 按照 (1.14) 定义。

定理 5.1 对于每个 $\beta \in [0, n)$ 和 $\gamma > 1$，存在一个常数 $\kappa \in (0,1)$，使得若假设 $(\mathbf{H_1})$-$(\mathbf{H_3})$ 对某个 $r_0 > 0$ 成立，则以下分数阶梯度估计成立

$$\left\|\mathbf{M}_\beta\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big)\right\|_{L^\gamma(\Omega)} \leq C\left[1 + \|\mathbf{M}_\beta \mathbb{F}_\omega\|_{L^\gamma(\Omega)}\right]. \tag{5.1}$$

这里，常数 C 取决于 DATASET 和 γ。

证明。该定理的证明与定理 4.1 的结论密切相关，后者为论证提供了关键要素。特别是，对于每个 $\varepsilon \in (0,1)$，它断言存在 $\sigma \in (0, 3^{-n})$ 和 $\kappa_\varepsilon \in (0, \sigma)$，使得若 $(\mathbf{H_1})$-$(\mathbf{H_3})$ 对 κ_ε 及某个 $r_0 > 0$成立，则以下水平集不等式成立

$$\left|\left\{\mathbf{M}_\beta\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big) > \lambda,\, \kappa_\varepsilon^{-1}\mathbf{M}_\beta \mathbb{F}_\omega \leq \lambda\right\}\right| \leq C\varepsilon\left|\left\{\sigma^{-1}\mathbf{M}_\beta\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big) > \lambda\right\}\right|, \tag{5.2}$$

对所有 $\lambda \geq \lambda_0 := \kappa_\varepsilon^{-1} r_0^\beta$ 均成立，其中正常数 C 取决于 DATASET。此外，它还使我们能够分解

$$\begin{aligned}\left\{\mathbf{M}_\beta\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big) > \lambda\right\} = &\left\{\mathbf{M}_\beta\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big) > \lambda;\, \kappa_\varepsilon^{-1}\mathbf{M}_\beta \mathbb{F}_\omega \leq \lambda\right\} \\ &\cup \left\{\mathbf{M}_\beta\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big) > \lambda,\, \kappa_\varepsilon^{-1}\mathbf{M}_\beta \mathbb{F}_\omega > \lambda\right\},\end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned}\left|\left\{\mathbf{M}_\beta\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big) > \lambda\right\}\right| \leq &\left|\left\{\mathbf{M}_\beta\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big) > \lambda,\, \kappa_\varepsilon^{-1}\mathbf{M}_\beta \mathbb{F}_\omega \leq \lambda\right\}\right| \\ &+ \left|\left\{\mathbf{M}_\beta\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big) > \lambda,\, \kappa_\varepsilon^{-1}\mathbf{M}_\beta \mathbb{F}_\omega > \lambda\right\}\right|.\end{aligned}$$

将这一不等式代入 (5.2)，即可得出

$$\left|\left\{\mathbf{M}_\beta\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big) > \lambda\right\}\right| \leq C\varepsilon\left|\left\{\sigma^{-1}\mathbf{M}_\beta\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big) > \lambda\right\}\right| + \left|\left\{\kappa_\varepsilon^{-1}\mathbf{M}_\beta \mathbb{F}_\omega > \lambda\right\}\right|, \tag{5.3}$$

对每个 $\lambda \geq \lambda_0$ 均成立。给定 $\gamma > 1$ 后，由 (5.3) 可得

$$\begin{aligned}\left(\int_{\lambda_0}^{\infty} \gamma\lambda^{\gamma-1} \left|\left\{\mathbf{M}_\beta\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big) > \lambda\right\}\right| d\lambda\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ \leq C\varepsilon^{\frac{1}{\gamma}} \left(\int_{\lambda_0}^{\infty} \gamma\lambda^{\gamma-1} \left|\left\{\sigma^{-1}\mathbf{M}_\beta\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big) > \lambda\right\}\right| d\lambda\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ + C\left(\int_{\lambda_0}^{\infty} \gamma\lambda^{\gamma-1} \left|\left\{\kappa_\varepsilon^{-1}\mathbf{M}_\beta\mathbb{F}_\omega > \lambda\right\}\right| d\lambda\right)^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (5.4)\end{aligned}$$

另一方面，对于 $f \in L^\gamma(\Omega)$，已知勒贝格范数也可以表示为

$$\|f\|_{L^\gamma(\Omega)} = \left(\int_0^{\infty} \gamma\lambda^{\gamma-1}|\{|f| > \lambda\}|d\lambda\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

因此，由 (5.4) 可得

$$\begin{aligned}\left(\int_{\lambda_0}^{\infty} \gamma\lambda^{\gamma-1} \left|\left\{\mathbf{M}_\beta\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big) > \lambda\right\}\right| d\lambda\right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq C\sigma^{-1}\varepsilon^{\frac{1}{\gamma}} \left\|\mathbf{M}_\beta\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big)\right\|_{L^\gamma(\Omega)} \\ + C\kappa_\varepsilon^{-1} \left\|\mathbf{M}_\beta\mathbb{F}_\omega\right\|_{L^\gamma(\Omega)}. \quad (5.5)\end{aligned}$$

此时，我们应用以下估计

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^\gamma(\Omega)} &\leq C\left(\int_{\lambda_0}^{\infty} \gamma\lambda^{\gamma-1}|\{|f| > \lambda\}|d\lambda\right)^{\frac{1}{\gamma}} + C\left(\int_0^{\lambda_0} \gamma\lambda^{\gamma-1}|\{|f| > \lambda\}|d\lambda\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ &\leq C\left(\int_{\lambda_0}^{\infty} \gamma\lambda^{\gamma-1}|\{|f| > \lambda\}|d\lambda\right)^{\frac{1}{\gamma}} + C|\Omega|^{\frac{1}{\gamma}}\lambda_0^\gamma,\end{aligned}$$

与 (5.5) 结合，可得

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{M}_\beta\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big)\right\|_{L^\gamma(\Omega)} \leq C\sigma^{-1}\varepsilon^{\frac{1}{\gamma}} \left\|\mathbf{M}_\beta\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big)\right\|_{L^\gamma(\Omega)} \\ + C\kappa_\varepsilon^{-1} \left\|\mathbf{M}_\beta\mathbb{F}_\omega\right\|_{L^\gamma(\Omega)} + C|\Omega|^{\frac{1}{\gamma}}\lambda_0^\gamma. \quad (5.6)\end{aligned}$$

通过令 ε 足够小，可以将 (5.6) 右端的第二项吸收到左端，而第一项则化为一个常数。于是我们得到 (5.1)，证明完成。

■

读者将会看到，定理 5.1 的证明思路可以很容易地推广到更广泛的一类函数空间。在下一个结果中，我们将在与 Muckenhoupt 权重相关的 Orlicz 空间中建立梯度估计。此外，值得强调的是，我们的主要结果补充并拓展了若干类函数空间（例如广义洛伦兹空间、奥利奇-洛伦兹空间，甚至广义莫雷空间）中的整体正则性理论。感兴趣的读者可以在我们近期的著作中找到对一些较简单问题的更详细论述。

现在我们可以陈述并证明本文的第二个主要结果。 er.

定理 5.2 设 $\mu \in \mathcal{A}_\infty$ 为给定的 *Muckenhoupt* 权重，且映射 $\Phi:\ [0,\infty) \to [0,\infty)$ 为单调递增连续可微函数，满足 $\Phi(0) = 0$

$$\Phi(2\lambda) \le c_0 \Phi(\lambda), \quad \lambda \ge 0, \tag{5.7}$$

对于某个常数 $c_0 > 0$。那么，在满足定理 *5.1* 的结构假设时，存在 $\kappa \in (0,1)$ 和 $C = C(c_0, [\mu]_{\mathcal{A}_\infty}, \mathrm{DATASET}) > 0$，使得以下分数阶梯度估计成立：

$$\int_\Omega \Phi\left(\mathbf{M}_\beta\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big)\right) d\mu \le C\left[1 + \int_\Omega \Phi\left(\mathbf{M}_\beta \mathbb{F}_\omega\right) d\mu\right], \tag{5.8}$$

如果假设 $(\mathbf{H_1})$-$(\mathbf{H_3})$ 对某个 $r_0 > 0$成立。

证明。 在此证明中，为了简化与 Muckenhoupt 权重相关的水平集不等式，我们将采用加权分布函数的概念。该概念最初由 Grafakos [42], 提出，并在我们先前的工作 [56]中得到进一步发展。若有需要，任意 $f \in \mathcal{M}eas(\Omega)$ 的加权分布函数定义如下：

$$d_f(\lambda) = \mu(\{x \in \Omega :\ |f(x)| > \lambda\}), \quad \text{for any } \lambda \ge 0. \tag{5.9}$$

由 (5.9) 和 Fubini 定理可知，不难验证

$$\int_\Omega \Phi(|f|) d\mu = \int_0^\infty \Phi'(\lambda) d_f(\lambda) d\lambda. \tag{5.10}$$

现在，我们对以下量使用 (5.9) 中分布函数的定义

$$\mathbb{U} := \mathbf{M}_\beta\big(\omega^{p(\cdot)}|\nabla u|^{p(\cdot)}\big), \quad \text{and} \quad \mathbb{G} := \mathbf{M}_\beta \mathbb{F}_\omega.$$

考虑到 (5.10)，我们可以写成

$$\int_\Omega \Phi(\mathbb{U}) d\mu = \int_0^\infty \Phi'(\lambda) d_{\mathbb{U}}(\lambda) d\lambda. \tag{5.11}$$

此时，为了控制 (5.11) 右端的积分，有必要建立 $d_{\mathbb{U}}$ 与 $d_{\mathbb{G}}$之间的关系。应用定理 4.1，对于每个 $\varepsilon \in (0,\ 1)$，都存在正常数 σ、 κ_ε和 C，使得若对 κ_ε 以及某个 $r_0 > 0$，$(\mathbf{H_1})$-$(\mathbf{H_3})$ 成立，则以下水平集不等式成立：

$$\left|\left\{\mathbb{U} > \lambda,\, \kappa_\varepsilon^{-1}\mathbb{G} \le \lambda\right\}\right| \le C\varepsilon \left|\left\{\sigma^{-1}\mathbb{U} > \lambda\right\}\right|,$$

对所有 $\lambda \ge \lambda_0 := \kappa_\varepsilon^{-1} r_0^\beta$ 均成立。由于 $\mu \in \mathcal{A}_\infty$，存在 $\theta > 0$ 使得

$$\mu\left(\left\{\mathbb{U} > \lambda,\, \kappa_\varepsilon^{-1}\mathbb{G} \le \lambda\right\}\right) \le C\varepsilon^\theta \mu\left(\left\{\sigma^{-1}\mathbb{U} > \lambda\right\}\right). \tag{5.12}$$

按照定理 5.1 中 (5.3) 的证明方法，由 (5.12) 可得 t

$$d_{\mathbb{U}}(\lambda) \le C\varepsilon^\theta d_{\sigma^{-1}\mathbb{U}}(\lambda) + d_{\kappa_\varepsilon^{-1}\mathbb{G}}(\lambda), \quad \text{for all } \lambda \ge \lambda_0. \tag{5.13}$$

将 (5.13) 代入 (5.11) 中关于 (λ_0,∞) 的积分，可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(\mathbb{U})d\mu &= \int_0^{\lambda_0}\Phi'(\lambda)d_{\mathbb{U}}(\lambda)d\lambda+\int_{\lambda_0}^{\infty}\Phi'(\lambda)d_{\mathbb{U}}(\lambda)d\lambda\\ &\le \mu(\Omega)\int_0^{\lambda_0}\Phi'(\lambda)d\lambda+\int_{\lambda_0}^{\infty}\Phi'(\lambda)C\varepsilon^{\theta}d_{\sigma^{-1}\mathbb{U}}(\lambda)d\lambda+\int_{\lambda_0}^{\infty}\Phi'(\lambda)d_{\kappa_\varepsilon^{-1}\mathbb{G}}(\lambda)d\lambda\\ &\le \mu(\Omega)\Phi(\lambda_0)+C\varepsilon^{\theta}\int_\Omega\Phi(\sigma^{-1}\mathbb{U})d\mu+\int_\Omega\Phi(\kappa_\varepsilon^{-1}\mathbb{G})d\mu. \end{aligned}\tag{5.14}$$

根据 Φ 在 (5.7) 中的倍增假设，可以证明 $\Phi(\sigma^{-1}\mathbb{U})\le C\Phi(\mathbb{U})$。事实上，可以选取一个整数 m 使得 $\sigma^{-1}\le 2^m$。由 Φ 的单调性以及 (5.7)，我们得到

$$\Phi(\sigma^{-1}\mathbb{U})\le\Phi(2^m\mathbb{U})\le c_0^m\Phi(\mathbb{U}).$$

完全类似的论证表明，存在一个取决于 ε 的正常数 C_ε，使得 $\Phi(\kappa_\varepsilon^{-1}\mathbb{G})\le C_\varepsilon\Phi(\mathbb{G})$。于是，由 (5.14) 可推出

$$\int_\Omega\Phi(\mathbb{U})d\mu\le\mu(\Omega)\Phi(\lambda_0)+C\varepsilon^{\theta}\int_\Omega\Phi(\mathbb{U})d\mu+C_\varepsilon\int_\Omega\Phi(\mathbb{G})d\mu.$$

取 $\varepsilon>0$ 充分小，即可完成 (5.8) 的证明。 ■

由定理 5.2 以及 [44,定理1.2.1], 中极大算子的有界性，我们可直接得到以下推论。

推论 5.3 设 $\Phi:\ [0,\infty)\ \to[0,\infty)$ 是一个 *Young* 函数，且 $\Phi\in\Delta_2\cap\nabla_2$。那么，在定理 *5.1* 的结构假设下，存在 $\kappa\in$（0、1）以及 $C=C(\text{DATASET})>0$，使得以下分数阶梯度估计成立：

$$\int_\Omega\Phi\left(\omega^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\right)dx\le C\left[1+\int_\Omega\Phi\left(\mathbb{F}_\omega\right)dx\right],\tag{5.15}$$

如果假设($\mathbf{H_1}$)-($\mathbf{H_3}$) 对某个 $r_0>0$ 成立。

6 进一步讨论

总而言之，本文的工作聚焦于双障碍型椭圆变分不等式 (1.10) 的弱解的高可积性。据我们所知，主系数中奇异退化矩阵权的存在，以及变指数增长，会带来相当显著的技术难题。此外，双障碍问题的解被限制在两个给定的障碍函数之间，它本身就是一种自然源自许多物理现象数学模型的自由边界问题。近年来，人们对此尤为关注，因此，获得此类问题的正则性估计既有趣又意义重大。

受此前关于带奇异权重或退化权重的 $[6,7,10,13,14,29,32,57]$,线性问题和非线性问题研究成果的启发，在本研究中，我们改进并设计了一些方法，通过涉及分数阶极大函数的估计，求得从 Lebesgue 空间到 Orlicz 空间的弱解的最优梯度正则性。我们也自然地期待

本研究仍有相当大的改进和推广空间。例如，在更为复杂的情形下，可以将奇异或退化的矩阵权纳入非一致椭圆结构、具有非标准增长的且带测度数据或低阶项的问题、带分数阶算子的非局部问题，以及变分不等式理论中；还可以研究其退化性或奇异性由矩阵值权重控制的自由边界问题，等等。就我们所知，这类模型自然出现在数学物理的各个分支中，而对其进行分析极具挑战性，值得文献进一步关注。

致谢

本研究由越南国家科学技术发展基金会（NAFOSTED）资助，项目编号：101.02-2025.03。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

声明

由于本研究未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

参考文献

[1] E. Acerbi, G. Mingione, *Gradient estimates for the $p(x)$-Laplacean system*, 《纯粹与应用数学杂志》584 (2005), 117–148.[2] E. Acerbi, G. Mingione, *Gradient estimates for a class of parabolic systems*, 《杜克数学杂志》, **136**(2007), 285–320.[3] D. R. Adams, *A note on Riesz potentials*, 《杜克数学杂志》**42**(1975) 765–778.[4] S. N. Antontsev, S.I. Shmarev, *A model porous medium equation with variable exponent of nonlinearity: existence* **60** 2005 515545 ,

uniqueness and localization properties of solutions, 《非线性分析》( ), .[5] P. Auscher, M. Qafsaoui,
Observations on $W^{1\,p}$ estimates for divergence elliptic equations with VMO coef- ., *ficients* 8 **5 2** 2002 487 509

Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. ( ) .( ), – .[6] A. Kh. Balci, L. Diening, R. Giova, A. Passarelli di Napoli, *Elliptic equations with degenerate weights*, 《工业与应用数学学会数学分析杂志》**54** (2) (2022), 2373–2412.[7] A. Kh. Balci, S.-S. Byun, L. Diening, H.-S. Lee, *Global maximal regularity for equations with degenerate weights* **177** 2023 484 530 ,

《纯粹与应用数学杂志》( ), – .[8] S.-S. Byun, K.-A. Lee, J. Oh, J. Park,
Regularity results of the thin obstacle problem for the $p(x)$-Laplacian, 《泛函分析杂志》**276** (2019), 496–519.[9] S.-S. Byun, L. Wang, *Elliptic equations with BMO coefficients in Reifenberg domains*, 《纯粹与应用数学通讯》**57**(2004), 1283–1310.

[10] S.-S. Byun, R. Yang,
Global regularity for p x -Laplace equations with log-BMO matrix weights in Reifenberg ( ) , *domains* **204** 2025 1229 1267
Annali di Matematica Pura ed Applicata ( ), – .[11] A. P. Calder´on, A. Zygmund,
On the existence of certain singular integrals, 《数学学报》88 (1952), 85–139.[12] A. P. Calder´on, A. Zygmund, *On singular integrals*, Amer. J. Math. 78 (1956), 289–309.[13] D. Cao, T. Mengesha, T. Phan,
Weighted-$W^{1\,p}$ estimates for weak solutions of degenerate and singular , , *elliptic equations* **67** 6 2018 2225 2277
Indiana Univ. Math. J. ( ) ( ), – .[14] D. Cao, T. Mengesha, T. Phan,
Gradient estimates for weak solutions of linear elliptic systems with singular-degenerate coefficients **725** ,

Nonlinear dispersive waves and fluids. Vol. . Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2019, 13–33.[15] L. A. Caffarelli, *Interior a priori estimates for solutions of fully non-linear equations*, Ann. of Math. (2) 130 (1989), 180–213.[16] L. A. Caffarelli, *The obstacle problem revisited*, J. Fourier Anal. Appl. 4 (1998), 383–402.[17] L. A. Caffarelli, X. Cabr´e, *Fully nonlinear elliptic equations*, American Mathematical Society Colloquium Publications, American Mathematical Society, Providence 43 (1) (1995), 1–21.[18] L. A. Caffarelli, I. Peral, *On $W^{1,p}$ estimates for elliptic equations in divergence form*, Commun. Pure Appl. Math. 51 (1) (1998), 1–21.[19] A. Cianchi, V. G. Maz'ya, *Global Lipschitz regularity for a class of quasilinear equations*, Comm. PDE 36 (2011), 100–133.[20] S.-Y. A. Chang, M. d. M. Gonz´alez,
Fractional Laplacian in conformal geometry. Adv. Math. 226(2) (2011), 1410–1432.[21] S. Chanillo, R. L. Wheeden,
Harnack's inequality and mean-value inequalities for solutions of degenerate elliptic equations **11** 1986 1111 1134 ,

Comm. Partial Differential Equations ( ), – .[22] Y. M. Chen, S. Levine, M. Rao, *Variable exponent, linear growth functionals in image restoration*, SIAM J. Appl. Math. 66 (2006), 1383–1406.[23] P. Daskalopoulos, R. Hamilton, *C^∞-regularity of the free boundary for the porous medium equation*, J. Amer. Math. Soc. 11 (1998), 899–965.[24] R. A. DeVore, R. C. Sharpley, *Maximal functions measuring smoothness*, Mem. Amer. Math. Soc. 47 (1984), no. 293.[25] E. DiBenedetto, *Degenerate Parabolic Equations*, Universitext. Springer-Verlag, New York, 1993.[26] L. Diening, P. Harjulehto, P. H¨ast¨o, M. Ruzicka,
Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Vol. 2017. 《数学讲义》.[27] G. Di Fazio,
L^p estimates for divergence form elliptic equations with discontinuous coefficients, Boll. Un. Mat. Ital. A(7) 10.2 (1996), 409–420.[28] E. Di Nezza, G. Palatucci, E. Valdinoci,
Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces, Bull. Sci. Math. 136 (2011), 521–573.[29] H. Dong, T. Phan,
Parabolic and elliptic equations with singular or degenerate coefficients: the Dirichlet problem **374** 9 2021 66116647 ,

Trans. Amer. Math. Soc. ( ) ( ), .[30] M. Eleuteri, J. Habermann,
Calderón-Zygmund type estimates for a class of obstacle problems with $p(x)$ growth, J. Math. Anal. Appl. 372 (2010), 140–161.[31] C. L. Epstein, R. Mazzeo, *Degenerate Diffusion Operators Arising in Population Biology*, Ann. of Math. Stud., Princeton University Press, Princeton, NJ, 2013.

[32] E. B. Fabes, C. E. Kenig, R. P. Serapioni, *The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations*, 《偏微分方程通讯》7 (1) (1982), 77–116.[33] P. M. N. Feehan, C. A. Pop, *Schauder a priori estimates and regularity of solutions to boundary-degenerate elliptic linear second-order partial differential equations* **256** 3 2014 895 956 ,

《微分方程杂志》 ( ) ( ), – .[34] P. M. N. Feehan, C. A. Pop, *Degenerate elliptic operators in mathematical finance and higher-order regularity for solutions to variational equations* **20** 3 4 2015 361 432 ,

《微分方程进展》 (-) ( ), – .[35] A. Figalli, *Free boundary regularity in obstacle problems*, 偏微分方程日´ees ´, aux d´eriv´ees（2018）, 第 2 期, 24 页。[36] A. Figalli, A. Guerra, S. Kim, H. Shahgholian, *Constraint maps and free boundaries*, 《美国数学会通报》72 (5) (2025), 494–503.[37] A. Figalli, X. Ros-Oton, J. Serra, *Generic regularity of free boundaries for the obstacle problem*, 《IH ´ES 数学出版物》132 (2020), 181–292.[38] B. Franchi, C. E. Guti

´ *Two-weight Sobolev-Poincaré inequalities and Harnack inequality for a class of degenerate elliptic operators*

érrez, R. L. Wheeden, , 《林琴国家科学院物理、数学与自然科学部学报：林琴数学与应用》5 (2) (1994), 167–175.[39] B. Franchi, E. Lanconelli, *De Giorgi's theorem for a class of strongly degenerate elliptic equations*, 《林琴国家科学院学报》VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 72 (1982), 273–277.[40] J. Frehse, *An irregular complex valued solution to a scalar uniformly elliptic equation*, 《变分法与偏微分方程》33 (2008), 263–266.[41] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic partial di erential equations of second order*, 第二版。Springer- Verlang, 柏林 海德堡, 1983.[42] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis (3rd ed)*, Springer, 2014.[43] P. Hajlasz, *Boundary behavior of Sobolev mappings*, 《美国数学会会刊》123 (4) (1995), 1145–1148.[44] V. Kokilashvili, M. Krbec, *Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces*, World Scientific, River Edge, 1991.[45] L. Korobenko, C. Rios, E. T. Sawyer, R. Shen, *Sharp local boundedness and maximum principle in the infinitely degenerate regime via De Giorgi iteration* **269** 2021 1311 ,

《美国数学会回忆录》 ( ), .[46] N. V. Krylov, *Lectures on elliptic and parabolic equations in Sobolev spaces*, 数学研究生教程第 96 卷。美国数学会, 普罗维登斯, RI, 2008.[47] T. Kuusi, G. Mingione, *Universal potential estimates*, 《泛函分析杂志》262 (10) (2012), 4205–4638.[48] T. Kuusi, G. Mingione, *Guide to nonlinear potential estimates*, 《数学科学通报》4 (1) (2014), 1–82.[49] O. A. Ladyzenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, 数学专著译丛, 第 23 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, R.I., 1967.[50] O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, *Local estimates for gradients of solutions of nonuniformly elliptic and parabolic equations* **23** 1970 677 703 ,

《纯粹与应用数学通讯》 ( ), – .[51] G. M. Lieberman, *Second order parabolic differential equations*, World Scientific, 1996.[52] N. G. Meyers, *An L^p-estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations*, 《比萨高等师范学校学报：科学类》（第 3 辑）17 (1963), 189–206.[53] G. Mingione, *Gradient estimates below the duality exponent*, 《数学年鉴》346 (2010), 571–627.

[54] **13**, 459–486.[53] T.-N. Nguyen, M.-P. Tran, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) ( ) ( ), 2011, *A large scaling property of level sets for degenerate p-Laplacian equations with logarithmic BMO matrix weights* **298** 10 2025 3287 3306 ,《数学新闻》 ( ) ( ), – .[56] T.-N. Nguyen, M.-P. Tran, *Level-set inequalities on fractional maximal distribution functions and applications to regularity theory* **280** 1 2021 108797 ,《泛函分析杂志》 ( ) ( ),[57] T. Phan, *Weighted Calderón-Zygmund estimates for weak solutions of quasi-linear degenerate elliptic equations* **52** 3 2020 393 425 ,《势分析》 ( ) ( ), – .[58] I. S. Pop, B. Schweizer, *Regularization schemes for degenerate Richards equations and outflow conditions*, Math. Models Methods Appl. Sci. **21**(2009), 1685–1712.[59] K. R. Rajagopal, M. Ruˇziˇcka, *Mathematical modeling of electrorheological materials*, Contin. Mech. Ther- modyn. **13** (2001), 59–78.[60] E. Reifenberg, *Solutions of the plateau problem for m-dimensional surfaces of varying topological type*, 《数学学报》 **104** (1960), 1–92.[61] M. Ruˇziˇcka, *Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory*, 《数学讲义》, Springer, 柏林 (2000).[62] Y. Sire, S. Terracini, G. Tortone, *On the local set of solutions to degenerate or singular elliptic equations with an application to s-harmonic functions* 9 **143** 2020 376 441 ,《纯粹与应用数学杂志》 ( ) ( ), – .[63] M.-P. Tran, T.-N. Nguyen, *Gradient integrability estimates for elliptic double-obstacle problems with degenerate matrix weights* **259** 2025 113833 ,《非线性分析》 ( ), .[64] M.-P. Tran, T.-N. Nguyen, *Gradient regularity for the solutions to p · -Laplacian equations with logarithmic perturbation* **35** 3 2025 76, 36 ( ) ,《几何分析杂志》 ( ) ( ), pp.[65] M.-P. Tran, T.-N. Nguyen, *New gradient estimates for solutions to quasilinear divergence form elliptic equations with general Dirichlet boundary data* **268** 4 2020 1427 1462 ,《微分方程杂志》 ( ) ( ), - .[66] M.-P. Tran, T.-N. Nguyen, L.-T.-N. Pham, T.-T.-T. Dang, *Weighted Lorentz estimates for non-uniformly elliptic problems with variable exponents* **172** 2023 1227 1244 ,《数学手稿》 ( ), – .