arXiv:2601.00660v1 [math.NT] 2 Jan 2026

自守形式的混合四阶矩与 L-函数的移位矩

郭成亮

摘要。本文研究了类型为（2，2）的海克–马斯尖点形式与艾森斯坦级数的混合四阶矩。在广义黎曼猜想（GRH）和广义拉马努金猜想（GRC）的假设下，我们建立了这些矩的渐近公式。我们的结果在整个基本域上给出了一个有趣的非等分布现象。事实上，在紧集上，这种独立等分布应当成立。我们进一步通过考察涉及截断艾森斯坦级数的截断版本来研究这一行为。此外，我们还对艾森斯坦级数的联合值分布提出了一个猜想。证明基于 L-函数移位混合矩的界。

目录

1. 引言 2 1.1. 自守形式的混合四阶矩问题 3 1.2. 关于自守形式联合值分布的猜想 5 1.3. Rankin–Selberg L 函数矩的应用 6 1.4. L 函数分数阶混合矩问题 7 1.5. 证明思路 8 1.6. 本文安排 9 2. 预备知识 9 2.1. 自守形式 9 2.2. 斯特林公式 10 2.3. Rankin–Selberg 理论与 Watson 公式 11 2.4. 正则化内积与正则化普朗歇尔公式 11 3. 定理 1.1 的证明 12 3.1. 主项 12 3.2. 连续谱的贡献 12 3.3. 离散谱的贡献 13 4. 定理 1.6 的证明 14 4.1. 一个光滑版本 14 4.2. 常数项的贡献
$\mathcal{I}$ 16 4.3. 连续谱的贡献
$\mathcal{K}$ 17 4.4. 离散谱的贡献
$\mathcal{J}$ 17 4.5. $\mathcal{J}_1(B)$ 的界 19 4.6. $\mathcal{J}_2(B)$ 的界 22

日期：2026年1月5日。关键词和短语。自守形式、混合四阶矩、联合值分布、 L-函数的移位矩。本项工作得到中国国家重点研发计划（项目编号：2021YFA1000700）的资助。

5. L 函数的混合矩 24 5.1. L 函数的中心值 24 5.2. 化归为密度函数 29 5.3. 狄利克雷多项式的均值界想 1.10 的评注 36 附录 B. 定理 1.1 中主项 (1.6) 的另一种计算方法 39 致谢 42
42

参考文献 42

1. 引言

自守形式的值分布研究是解析数论和算术量子混沌中的核心问题。设 $\mathbb{H} := \{x + iy : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ 为上半平面。设 $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ 和 $\mathbb{X} = \Gamma\backslash\mathbb{H}$。在商空间 $\mathbb{X}$ 上，我们定义彼得松内积为 $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{X}} f(z)g(z)\mathrm{d}\mu z$，其中 $\mathrm{d}\mu z = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}$。

拉普拉斯算子定义为 $\Delta = -y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$，其谱由离散谱和连续谱组成。离散谱由常数函数和 Maass尖点形式空间构成。特别地，我们可以选取海克–马斯尖点形式的标准正交基 $\{\phi_k\}$。本文中，我们假设每个海克–马斯尖点形式 f 均归一化为$\langle f, f\rangle = 1$。艾森斯坦级数在描述连续谱方面发挥着根本作用。但它们并非 L^2-可积。本文中，我们用 $E_T(z) = E(z, \frac{1}{2} + iT)$ 表示临界线上的标准艾森斯坦级数。

对于海克–马斯尖点形式的 L^2-范数，这是 Rudnick和Sarnak 提出的著名量子唯一遍历（QUE）猜想 [RS94]。Lindenstrauss [Lin06] 和 Soundararajan [Sou10] 的突破性论文解决了 QUE。对于 $\psi(z) \in C_c^\infty(\mathbb{X})$，他们证明了

$$\int_{\mathbb{X}} \psi(z)\phi^2(z)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2} \to \int_{\mathbb{X}} \psi(z)\frac{3}{\pi}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2} \tag{1.1}$$

当谱参数 t_ϕ 趋于无穷时。如果将海克–马斯尖点形式换成归一化艾森斯坦级数，Luo和 Sarnak [LS95]给出了类似的渐近公式：

$$\int_{\mathbb{X}} \psi(z)|E_T(z)|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2} \to \int_{\mathbb{X}} \psi(z)\frac{3}{\pi}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2} \times \log(\frac{1}{4} + T^2) \tag{1.2}$$

当 T趋于无穷时。这里，$\sqrt{\log(\frac{1}{4} + T^2)}$ 是$E_T(z)$的质量。

研究自守形式高阶矩的值分布是一个有趣的课题。对于定义域非紧的 L^4-范数，Blomer–Khan–Young [BKY13] 提出了如下猜想：

$$\int_{\mathbb{X}} \phi^4(z)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2} \to \frac{9}{\pi}$$

当 t_ϕ 趋于无穷时。在广义林德勒夫假设下，Buttcane 和 Khan [BK17] 证明了上述猜想。最近，Ki [Ki23] 证明了称为 $\|\phi\|_4 \ll t_\phi^\varepsilon$的尖锐上界。对于二面体 Maass 形式情形，Humphries 和 Khan [HK20] 无条件地证明了该猜想，并且他们还

为更一般的同余子群 Γ建立了一个上界 $\|\phi\|_4 \ll t_\phi^{3/152+\varepsilon}$ [HK25]。如果将海克–马斯尖点形式替换为艾森斯坦级数，Djanković–Khan [DK20], [DK24] 建立了两种不同的无条件渐近公式，分别属于正则化型和截断型，因为艾森斯坦级数并非平方可积。他们推导出

$$\int_{\mathbb{X}}^{reg} |E(z,\frac{1}{2}+iT)|^4 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2} \to \frac{72}{\pi}(\log T)^2,$$

and

$$\int_{\mathbb{X}}^{reg} |E^A(z,\frac{1}{2}+iT)|^4 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2} \to \frac{36}{\pi}(\log T)^2.$$

这里，截断艾森斯坦级数由 (2.1) 定义。

根据不同海克–马斯尖点形式的取值应如同独立随机波般变化这一预测，Hua–Huang–Li 建立了关于海克–马斯形式 [HHL24 高阶矩的猜想 1.3]。他们考察了关于 (2,2) 型混合矩的猜想，并在广义黎曼猜想和广义黎曼猜想成立的条件下证明了该猜想。也就是说，

$$\int_{\mathbb{X}} f^2(z)g^2(z)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2} \to \frac{3}{\pi}$$

当 $\min\{t_f, t_g\}$ 趋于无穷时。

1.1. 自守形式的混合四阶矩问题。 将值分布猜想推广到艾森斯坦级数是很自然的。作为一个特例，我们考虑以下 (2,2) 型混合矩

$$\int_{\mathbb{X}} \phi^2(z)|E_T(z)|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}. \tag{1.3}$$

由于艾森斯坦级数并非平方可积，这一微妙之处导致了与非紧域上海克–马斯尖点形式联合值分布中观察到的现象截然不同的现象。我们的主要结果是

定理 1.1。 假设广义黎曼猜想和广义黎曼猜想成立。设 ϕ 是谱参数为t_ϕ的海克–马斯形式。对于 $T \geq 1$，我们得到

$$\int_{\mathbb{X}} \phi^2(z)|E_T(z)|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{3}{\pi}[\log(\frac{1}{4}+t_\phi^2)+\log(\frac{1}{4}+T^2)] + \mathcal{O}\left((\log(T+t_\phi))^{1/2+\varepsilon}\right) \tag{1.4}$$

当 最小$\{t_\phi, T\} \to \infty$时。

我们发现，当谱参数以彼此的一个较小幂次趋于无穷时，海克–马斯形式和艾森斯坦级数都不会呈现等分布。

备注 1.2。 请注意，这个结果并不与量子唯一遍历性（QUE）相冲突。从海克–马斯形式的量子唯一遍历性角度来看，函数 $|E_T(z)|^2$ 不能作为合适的测试函数，因为它不可积。在艾森斯坦级数的量子唯一遍历性背景下，我们有

$$\int_{\mathbb{X}} \phi^2(z)|E_T(z)|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2} \sim \frac{3}{\pi}\log(\frac{1}{4}+T^2) \tag{1.5}$$

因为我们将 ϕ 固定为一个测试函数。

我们始终假设 $T \le t_\phi$。关键情形是 $t_\phi = T$。在我们先前的工作 [Guo25, 命题 7.1, 方程 (7.1)], 中，根据正则化普朗歇尔公式，我们得到

$$\langle \phi^2, |E_T|^2\rangle = \mathcal{R}(\phi, E_T) + \sum_{j\ge 1}\langle \phi_j, \phi^2\rangle\langle |E_T^2|, \phi_j\rangle + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\langle E_\tau, \phi^2\rangle\langle |E_T|^2, E_\tau\rangle_{reg}\mathrm{d}\tau$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\phi, E_T) =& \frac{1}{\xi(2)}[\frac{\Lambda'(1, \mathrm{Sym}^2\,\phi)}{\Lambda(1, \mathrm{Sym}^2\,\phi)} + 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\xi'(1+2iT)}{\xi(1+2iT)} - \frac{2\xi'(2)}{\xi(2)} + a_0]\\ &+ \frac{\xi(2iT)}{\xi(1+2iT)}\langle \phi^2, E(z, 1+2iT)\rangle + \overline{\frac{\xi(2iT)}{\xi(1+2iT)}}\langle \phi^2, E(z, 1-2iT)\rangle.\end{aligned} \tag{1.6}$$

注记 1.3. 在附录 B 中，我们提供了一种替代计算，表明涉及 ϕ 的复数项源自与 Hecke–Maass 形式相关的某些积分，而包含 ζ 函数的对数导数的余项则源自马斯–塞尔伯格关系。

通过显式计算和斯特林公式，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\phi, E_T) = \frac{3}{\pi}[\log(\frac{1}{4}+t_\phi^2) + \log(\frac{1}{4}+T^2) + 2\frac{L'}{L}(1, \mathrm{Sym}^2\,\phi) + 4\,\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(1+2iT)] + \mathcal{O}(1)\\ + \frac{\xi(2iT)}{\xi(1+2iT)}\langle \phi^2, E(z, 1+2iT)\rangle + \overline{\frac{\xi(2iT)}{\xi(1+2iT)}}\langle \phi^2, E(z, 1-2iT)\rangle.\end{aligned} \tag{1.7}$$

注记 1.4。 通过展开技巧，并在广义黎曼猜想的假设下，我们有

$$\begin{aligned}\langle \phi^2, E(z, 1+2iT)\rangle &\ll \frac{L(1-2iT, \mathrm{Sym}^2\,\phi)\zeta(1-2iT)}{2L(1, \mathrm{Sym}^2\,\phi)\zeta(2-4iT)}\frac{\exp(-\frac{\pi}{2}(|T+t_\phi| + |T-t_\phi| - 2t_\phi))}{(1+|T|)^{1/2}}\\ &\ll \frac{(\log(T+t_\phi))^\varepsilon}{(1+|T|)^{1/2-\varepsilon}}.\end{aligned}$$

当 T 较小时，不能直接将其吸收到误差项中，因为需要对$L(1,\mathrm{Sym}^2\,\phi)$给出精确的界。

注记 1.5. 对于定理 1.1，当 $t_\phi \ll T^{1-\varepsilon}$ 时，我们有无条件结果（这与艾森斯坦级数的量子唯一遍历情形接近）。在这种情况下，对于离散谱，我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_{j\ge 1}\langle \phi_j, \phi^2\rangle\langle |E_T^2|, \phi_j\rangle\\ &\quad\ll \sum_{t_j \ll 2t_\phi + T^\varepsilon}|\langle \phi_j, \phi^2\rangle\langle |E_T^2|, \phi_j\rangle|\\ &\quad\le \left(\sum_{t_j \ll 2t_\phi + T^\varepsilon}|\langle |E_T^2|, \phi_j\rangle|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{t_j \ll 2t_\phi + T^\varepsilon}|\langle \phi^2, \phi_j\rangle|^2\right)^{1/2}\\ &\quad\le \left(\sum_{t_j \ll 2t_\phi + T^\varepsilon}|\langle |E_T^2|, \phi_j\rangle|^2\right)^{1/2}\|\phi\|_4^2\\ &\quad\ll T^{-\varepsilon}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

对于最后一个不等式，我们使用 $\sum_{t_j\ll T^{1-\varepsilon}}|\langle|E_T^2|,\ \phi_j\rangle|^2\ll T^{-\varepsilon}$（参见 [HK20，第 3.6] 节）以及$\|\phi\|_4\ll t_\phi^\varepsilon$。于是，在这种情况下我们得到

$$\langle\phi^2,|E_T|^2\rangle=\mathcal{R}(\phi,E_T)+\mathcal{O}\left(T^{-\varepsilon}\right).$$

当我们将矩限制在一个紧集内时，预期上述独立等分布定理成立。若将艾森斯坦级数替换为 (2.1) 中定义的截断艾森斯坦级数，我们确实可以证实这种独立等分布。

定理 1.6。假设广义黎曼猜想和广义黎曼猜想成立。令 $A>1$ 为固定值且 $T\geq 1$。令 ϕ 为谱参数为 t_ϕ 的海克–马斯形式，并令 $E_T^A(z)$ 为截断艾森斯坦级数。那么我们得到

$$\int_{\mathbb{X}}\phi^2(z)|E_T^A(z)|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{3}{\pi}\log(\frac{1}{4}+T^2)+\mathcal{O}_{A,\varepsilon}((\log T)^{1/2+\varepsilon}) \tag{1.9}$$

当 $\min\{t_\phi,T\}\to\infty$ 时。

注 1.7。对于 T 和 t_ϕ的某些适当范围，或许可以放宽我们的假设，或改进误差项。然而，由于我们的目标是建立一个在所有范围内都成立的渐近公式，我们采用广义黎曼猜想和广义黎曼猜想的完整强度。在本文其余部分，尤其是在定理 (1.1) 和定理 (1.6) 的证明中，我们主要关注关键情形 $T\sim t_\phi$。其他范围的处理并不会带来额外困难。

1.2. **自守形式联合值分布猜想**。本小节总结自守形式值分布的猜想。

海克–马斯形式 f_i 的归一化方式为

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{X})}\int_{\mathbb{X}}|f_i(z)|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}=1$$

以及实艾森斯坦级数

$$\widetilde{E_T}(z):=\sqrt{\frac{\mathrm{vol}(\mathbb{X})}{\log(\frac{1}{4}+T^2)}}\frac{\xi(1+2iT)}{|\xi(1+2iT)|}E_T(z).$$

我们还回顾标准实高斯随机变量的矩

$$C_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^ne^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\begin{cases}(n-1)!!, & 2\mid n,\\ 0, & 2\nmid n.\end{cases} \tag{1.10}$$

Berry [Ber77] 提出，混沌系统的特征函数可用随机波建模。因此，人们相信，当特征值趋于无穷时，紧双曲曲面上的特征函数具有高斯值分布，而一个 L^2-归一化特征函数的矩应由高斯矩给出。更确切地说，我们有如下高斯矩猜想（参见 Humphries [Hum18，猜想 1.1]）。

猜想 1.8。对于任意 $\psi(z)\in C_c^\infty(\mathbb{X})$，我们有

$$\int_{\mathbb{X}}\psi(z)f_i^n(z)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}\sim C_n\int_{\mathbb{X}}\psi(z)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}$$

当 t_{f_i} 趋于无穷时。

我们选取一族正交的海克–马斯尖点形式 $\{f_i\}_{i=1}^I$，其中 $\langle f_i,\ f_{i'}\rangle=0$若$i\neq i'$。近期，Hua–Huang–Li 在 [HHL24 中提出了以下猜想 1.3]。

猜想 1.9。 对于正整数 a_i，则 $\{f_i^{a_i}\}_{i=1}^I$ 在统计上相互独立；也就是说，对于任意 $\psi(z) \in C_c^\infty(\mathbb{X})$，我们有

$$\int_{\mathbb{X}} \psi(z) \prod_{i=1}^{I} f_i^{a_i}(z) \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2} \sim \prod_{i=1}^{I} C_{a_i} \int_{\mathbb{X}} \psi(z) \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}$$

当 $\min\{t_{f_1}, \cdots, t_{f_I}\}$ 趋于无穷时。

定理 1.6 表明，当按质量归一化后，海克–马斯尖点形式和艾森斯坦级数在紧集中表现得如同独立随机波。设 $J \geq 1$。我们选取一个正交族，我们选取一个由艾森斯坦级数构成的正交族 $\{E_{T_j}\}_{j=1}^J$，其中 $|T_j - T_{j'}| \geq 1$，若 $j \neq j'$。

现在我们陈述以下猜想：

猜想 1.10。 对于正整数 a_i，b_j，则 $\{\{f_i^{a_i}\}_{i=1}^I, \{E_{T_j}\}_{j=1}^J\}$ 在统计上相互独立；也就是说，对于任意 $\psi(z) \in C_c^\infty(\mathbb{X})$，我们有

$$\int_{\mathbb{X}} \psi(z) \prod_{i=1}^{I} f_i^{a_i}(z) \prod_{j=1}^{J} \widetilde{E_{T_j}}^{bj}(z) \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2} \sim \prod_{i=1}^{I} C_{a_i} \prod_{j=1}^{J} C_{b_j} \int_{\mathbb{X}} \psi(z) \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}$$

当 $\min\{t_{f_1}, \cdots, t_{f_I}, T_1, \cdots T_J\}$ 趋于无穷时。

注 1.11。 条件 $|T_j - T_{j'}| \geq 1$ 对于确保相应艾森斯坦级数的可区分性是必要的。我们将在附录 A 中从混合矩族的角度进一步讨论细节。作为最简单的情形，我们发现，在没有这一限制的情况下，去相关性（对于情形$I = 0$、 $J = 2$、 $b_1 = b_2 = 1$）会失效。参见命题 A.1。

1.3. Rankin–Selberg L-函数的矩的应用。

根据定理 1.1，我们得到了 Rankin–Selberg L-函数的矩的一个估计。我们考虑混合四阶矩的另一种分解

$$\langle \phi^2, |E_T|^2 \rangle = \langle \phi E_T, \phi E_T \rangle.$$

利用谱分解，我们有

$$\mathcal{R}(\phi, E_T) + \sum_j \langle \phi^2, \phi_j \rangle \langle |E_T|^2, \phi_j \rangle + \mathcal{E}_1 = \sum_j |\langle \phi E_T, \phi_j \rangle|^2 + \mathcal{E}_2$$

其中， $\mathcal{E}_1$， $\mathcal{E}_2$ 是连续谱的贡献。我们可以无条件地将 $\mathcal{E}_1$， $\mathcal{E}_2$ 界定为幂节省误差项，但 $T \ll t_\phi^\varepsilon$除外。如果 $T \ll t_\phi^\varepsilon$，我们需要对 $L(\frac{1}{2}, \mathrm{Sym}^2 \phi)$给出一个次凸界；该函数也出现在量子唯一遍历问题中（见 (3.2)）–。

右侧的离散谱贡献为

$$\frac{\pi^2}{4L(1, \mathrm{Sym}^2 \phi)|\zeta(1+2iT)|^2} \sum_j \frac{|L(\frac{1}{2}+iT, \phi \times \phi_j)|^2}{L(1, \mathrm{Sym}^2 \phi_j)} \frac{|\prod_{\pm_1} \prod_{\pm_2} \Gamma(\frac{1/2+iT\pm_1 it_\phi \pm_2 it_j}{2})|^2}{|\Gamma(\frac{1}{2}+iT)|^2 |\Gamma(\frac{1}{2}+it_\phi)|^2 |\Gamma(\frac{1}{2}+it_j)|^2}.$$

我们定义 i　　最内层伽马因子由 $\gamma(t_j, t_\phi, T)$ 给出，则有以下结果。

推论 1.12. 假设广义黎曼猜想和广义黎曼猜想成立。我们有

$$\frac{\pi^2}{4L(1,\mathrm{Sym}^2\,\phi)|\zeta(1+2iT)|^2}\sum_j \frac{|L(\frac{1}{2}+iT,\phi\times\phi_j)|^2}{L(1,\mathrm{Sym}^2\,\phi_j)}\gamma(t_j,t_\phi,T)$$
$$=\frac{3}{\pi}[\log(\frac{1}{4}+t_\phi^2)+\log(\frac{1}{4}+T^2)]+\mathcal{O}((\log(T+t_\phi))^{1/2+\varepsilon}) \quad (1.11)$$

当最小值$\{t_\phi,T\}$趋于无穷大时。

注 1.13。 自然地，我们使用这一分解，将 (2,2) 阶混合矩化归为 Rankin–Selberg L-函数。应用谱大筛不等式，我们便可得到

$$\frac{\pi^2}{4L(1,\mathrm{Sym}^2\,\phi)|\zeta(1+2iT)|^2}\sum_j \frac{|L(\frac{1}{2}+iT,\phi\times\phi_j)|^2}{L(1,\mathrm{Sym}^2\,\phi_j)}\gamma(t_j,t_\phi,T)\ll(t_\phi T)^\varepsilon.$$

这无条件地意味着

$$\int_{\mathbb{X}}\phi^2(z)|E_T(z)|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}\ll(t_\phi T)^\varepsilon.$$

然而，无条件地得到一个精确的对数渐近公式似乎存在相当大的困难。

1.4. 函数的分数阶混合矩问题。 L-函数。 L 函数的矩是解析数论中的核心课题，而估计某些族的 L 函数的混合矩尤为重要，因为它们在算术量子混沌中有应用。例如，这类估计在二面体 Maass 形式 [HL23]的量子方差问题以及半整数权自守形式[LR20]的量子唯一遍历问题中发挥着关键作用。

为了得到定理 1.1 和定理 1.6，我们证明以下定理。

定理 1.14. 假设广义黎曼猜想和广义黎曼猜想成立。设 ϕ 为谱参数为 t_ϕ 的海克–马斯形式，并假设对于某个 $\delta>0$，有 $1\leq t_\phi^\delta\leq T\leq t_\phi$ 。设 $\varepsilon>0$ 充分小，且 $T^{1-\varepsilon}\leq X\leq 3t_\phi$和 $X^\varepsilon\leq Y\leq X$。假设移位参数满足$0\leq\mathrm{Re}(z_1)$，$\mathrm{Re}(z_2)\leq {}^1/_{\log X}$，且 $|z_1|$、$|z_2|\leq 4X$。那么对于任意正实数 ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3，有

$$\sum_{X\leq t_j\leq X+Y}L(\frac{1}{2},\phi_j)^{\ell_1}L(\frac{1}{2},\mathrm{Sym}^2\,\phi\times\phi_j)^{\ell_2}|L(\frac{1}{2}+z_1,\phi_j)L(\frac{1}{2}+z_2,\phi_j)|^{\ell_3}$$
$$\ll_\varepsilon XY(\log X)^{\frac{\ell_1(\ell_1-1)}{2}+\frac{\ell_2(\ell_2-1)}{2}+\varepsilon}\exp(\ell_3(\ell_1-\frac{1}{2})\mathcal{M}(z_1,z_2,X)+\frac{\ell_3^2}{8}\mathcal{V}(z_1,z_2,X)). \quad (1.12)$$

这里， $\mathcal{M}(z_1,z_2,x)$ 和 $\mathcal{V}(z_1,z_2,x)$ 分别在 *(5.2)*、*(5.29)* 中定义。

取 $z_1=0$和 $z_2=2iT$，得到 $\mathcal{M}(z_1,\ z_2,\ X)$ =对数 对数 X，以及 $\mathcal{V}(z_1,\ z_2,\ X)$ = 6 对数 对数 X。指数变为

$$\frac{\ell_1(\ell_1-1)}{2}+\frac{\ell_2(\ell_2-1)}{2}-\ell_3(\ell_1-\frac{1}{2})+\frac{3}{4}\ell_3^2.$$

将 ℓ_1 代入 $\ell_1-\ell_3$，我们得到以下推论。

推论 1.15。 假设广义黎曼猜想和广义黎曼猜想成立。设 ϕ 是一个谱参数为 t_ϕ 的海克–马斯形式，并假设对于某个 $\delta>0$， $1\le t_\phi^\delta\le T\le t_\phi$ 。设 $\varepsilon>0$ 充分小，$T^{1-\varepsilon}\le X\le 3t_\phi$，且 $X^\varepsilon\le Y\le X$。那么对于任意正实数 ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3，我们有

$$\sum_{X\le t_j\le X+Y} L(\frac12,\phi_j)^{\ell_1}L(\frac12,\mathrm{Sym}^2\,\phi\times\phi_j)^{\ell_2}|L(\frac12+2iT,\phi_j)|^{\ell_3}\ll_\varepsilon XY(\log X)^{\frac{\ell_1(\ell_1-1)}{2}+\frac{\ell_2(\ell_2-1)}{2}+\frac{\ell_3^2}{4}+\varepsilon}.$$

备注 1.16. 我们需要证明情形 $(\ell_1,\ell_2,\ell_3)=(3,1,1)$。一个关键观察是，在这种情形下，$\log X$ 的指数小于 1。

为了证明定理 1.6，需要对参数作一个小幅平移。我们选择 $|\mathrm{Im}(z_1)|\asymp t$ 和 $|\mathrm{Im}(z_1)|\asymp T\pm t$，并令平移满足 $|t|\ll t_\phi^\varepsilon$。此外，在这种情形下，我们在定理 1.14 中取 $(\ell_1,\ell_2,\ell_3)=(1,\bar1,\bar1)$ 和 $(0,0,2)$，从而得到证明所需的估计。

命题 1.17. 假设广义黎曼猜想和广义黎曼猜想成立。设 ϕ 是一个谱参数为 t_ϕ 的海克–马斯形式，并假设对于某个 $\delta>0$，有 $1\le t_\phi^\delta\le T\le t_\phi$ 。设 $\varepsilon>0$ 充分小，$T^{1-\varepsilon}\le X\le 3t_\phi$，且 $X^\varepsilon\le Y\le X$。设 $|t|\ll t_\phi^\varepsilon$。我们有

$$\sum_{X\le t_j\le X+Y} L(\frac12,\phi_j)^{1/2}L(\frac12,\mathrm{Sym}^2\,\phi\times\phi_j)^{1/2}|L(\frac12+\frac{1}{\log t_\phi}\pm it,\phi_j)L(\frac12+\frac{1}{\log t_\phi}\pm it+2iT,\phi_j)|$$
$$\ll_\varepsilon XY(\log(X+t_\phi))^{1/2+\varepsilon}\quad(1.13)$$

and

$$\sum_{X\le t_j\le X+Y} |L(\frac12+\frac{1}{\log t_\phi}\pm it,\phi_j)L(\frac12+\frac{1}{\log t_\phi}\pm it+2iT,\phi_j)|^2$$
$$\ll_\varepsilon XY(\log(X+t_\phi))^{2+\varepsilon}\quad(1.14)$$

我们在广义黎曼猜想和广义黎曼猜想成立的假设下，运用 [Sou09] 中的 Soundararajan 方法来研究这些矩。为得到二次扭曲模 L-函数二阶矩的尖锐上界， [SY10] 中也研究了某些移位矩的估计。

1.5. 证明思路。 要证明定理 1.1，只需估计离散谱上的和，因为主项已经得到。像 [HHL24], 中的做法一样，在和式中插入绝对值并应用 Watson 公式 [Wat08] （假设 $T\le t_\phi$），我们得到

$$\sum_{j\ge1}\langle\phi_j,\phi^2\rangle\langle|E_T^2|,\phi_j\rangle\ll\sum_{j\ge1}\frac{\Lambda(\frac12,\phi\times\phi\times\phi_j)^{1/2}\Lambda(\frac12,E_T\times E_T\times\phi_j)^{1/2}}{\Lambda(1,\mathrm{Sym}^2\,\phi_j)\Lambda(1,\mathrm{Sym}^2\,\phi)|\xi(1+2iT)|^2}$$
$$\ll\frac{(\log(t_\phi+T))^\varepsilon}{t_\phi^{1/4}T^{1/4}}\sum_{t_j\le 2T+t_\phi^\varepsilon}\frac{L(\frac12,\phi_j)^{3/2}L(\frac12,\mathrm{Sym}^2\,\phi\times\phi_j)^{1/2}|L(\frac12+2iT,\phi_j)|}{|t_j|(1+|t_j-2T|)^{1/4}(1+|t_j-2t_\phi|)^{1/4}}.\quad(1.15)$$

于是，定理 1.1 的证明可直接由 L-函数的混合矩得到。

对于定理 1.6 的截断版本，我们还需要进一步处理，以便对截断项中的离散谱进行界定（见（4.10））。通过展开技巧和梅林反演，这个问题又可归结为估计 L-函数的矩。经过一个技术上复杂但无关紧要的

平均（见命题 4.1）后，我们得到一个更具挑战性的平移矩估计，其形式大致如下

$$\sum_{j\geq 1}\frac{\Lambda(\frac{1}{2},\phi\times\phi\times\phi_j)^{1/2}\Lambda(\frac{1}{2}+z,E_T\times E_T\times\phi_j)^{1/2}}{\Lambda(1,\mathrm{Sym}^2\phi_j)\Lambda(1,\mathrm{Sym}^2\phi)|\zeta(1+2iT)|^2}$$
$$\ll\frac{(\log(t_\phi+T))^\varepsilon}{t_\phi^{1/4}T^{1/4}}\sum_{t_j\leq 2T+t_\phi^\varepsilon}\frac{L(\frac{1}{2},\phi_j)^{1/2}L(\frac{1}{2},\mathrm{Sym}^2\phi\times\phi_j)^{1/2}|L(\frac{1}{2}+z,\phi_j)L(\frac{1}{2}+z+2iT,\phi_j)|}{|t_j|(1+|t_j-2T-t|)^{1/4}(1+|t_j-2t_\phi|)^{1/4}} \tag{1.16}$$

其中 $z=$ ——1对数t_ϕ $+it$ 满足 $t\ll t_\phi^\varepsilon$。显然，令 $z=0$，则该和等于 (1.15)。

因此，两个定理的证明都归结为研究 L-函数的矩，这将在定理 1.14 中完成。

1.6. 本文安排。 本文其余部分安排如下。第 2 节回顾自守形式、三重积公式和正则化公式所需的背景知识。第 3 节在假设定理 1.14 的条件下证明定理 1.1。第 4 节利用额外的平均，并在假设定理 1.14 的条件下证明定理 1.6。第 5 节在广义黎曼猜想和广义黎曼猜想的条件下推出定理 1.14。附录 A 对猜想 1.10 作出一些评论，尤其是关于两个艾森斯坦级数的评论。附录 B 分析两个混合四阶矩之差，并以另一种方式计算主项 (1.6)。

记号。 在全文中，ε 表示任意小的正数；每次出现时，它们的取值都可以不同。与通常一样，$e(x)=e^{2\pi ix}$。我们使用标准的朗道记号和维诺格拉多夫记号 $O(\cdot)$、$o(\cdot)$、$\ll$、$\gg$、$\asymp$ 和 $\sim$。具体而言，若存在常数 C 使得 $|X|\leq C|Y|$，我们就写作 $X\ll Y$、$X=O(Y)$或 $Y\gg X$。若常数 $C=C_s$ 依赖于某个对象 s，则记作 $X=O_s(Y)$。按照惯例，$N\to\infty$、$X=o(Y)$表示对于某个趋于零的函数 $c(N)$，有 $|X|\leq c(N)Y$。我们用 $X\asymp Y$表示存在某个正数常数 c_1使得$c_1Y\leq X\leq c_2Y$，c_2。

2. 预备知识

2.1. 自守形式。 设 $\{\phi_k\}_{k\geq 1}$ 是SL(2，$\mathbb{Z}$)上海克–马斯尖点形式的一组标准正交基。我们总是假设所有 ϕ_k 均为实数，且归一化为 $\int_{\mathbb{X}}\phi_k^2\mathrm{d}\mu z=1$。记 ϕ_k 的谱参数为 t_k，其傅里叶系数（海克特征值）为 $\lambda_k(n)$。此外，有时我们将海克–马斯形式 f 的谱参数记为 t_f。对于海克–马斯形式 ϕ_k，其傅里叶展开为

$$\phi_k(z)=2\sqrt{y}\rho_k(1)\sum_{n\neq 0}\lambda_k(n)K_{it_k}(2\pi|n|y)e(nx),$$

其中

$$|\rho_k(1)|^2=\frac{\cosh\pi t_k}{2L(1,\mathrm{sym}^2\phi_k)}.$$

对于艾森斯坦级数 $E(z,\ s)$，我们也有傅里叶展开

$$E(z,s)=y^s+\frac{\xi(2s-1)}{\xi(2s)}y^{1-s}+\frac{2\sqrt{y}}{\xi(2s)}\sum_{n\neq 0}|n|^{s-\frac{1}{2}}\sigma_{1-2s}(|n|)K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y)e^{2\pi inx}$$

其中 $\sigma_s(n) := \sum b^s$。我们通常写作 $E(z,\ 1/2+it) = E_t(z)$，并且有$_{ab=n}$

$$E(z,1/2+it) = y^{1/2+it} + \frac{\xi(2it)}{\xi(1+2it)}y^{1/2-it} + \frac{2\sqrt{y}}{\xi(1+2it)}\sum_{n\neq 0}\eta_t(|n|)K_{it}(2\pi|n|y)e^{2\pi inx}$$

其中 $\eta_t(n) = \sum(\frac{a}{b})^{it}$。记 $\rho_t(1) := 1/\xi(1+2it)$，$\rho_t(n) = \rho_t(1)\eta_t(n)$。

$_{ab=n}$

$$|\rho_t(1)|^2 = \frac{\cosh \pi t}{|\zeta(1+2it)|^2}.$$

根据 [HL94] [Iwa90] 以及黎曼ζ函数的标准估计，我们有

$$(\log t_k)^{-1} \ll L(1,\mathrm{Sym}^2\,\phi_k) \ll t_k^{\varepsilon}, \quad (\log(1+|t|))^{-1} \ll \zeta(1+2it) \ll \log(1+|t|).$$

在广义黎曼猜想和广义黎曼猜想成立的条件下，我们有

$$\frac{1}{\log\log t_k} \ll L(1,\mathrm{Sym}^2\,\phi_k) \ll (\log\log t_k)^3, \quad \frac{1}{\log\log(1+|t|)} \ll \zeta(1+2it) \ll \log\log(1+|t|).$$

我们引入截断艾森斯坦级数。设

$$e(y,\frac{1}{2}+iT) = y^{\frac{1}{2}+iT} + \frac{\xi(1-2iT)}{\xi(1+2iT)}y^{\frac{1}{2}-iT}.$$

We 取 $A \geq 1$ 为定值，并令 $\mathcal{F}$ 为 $\mathbb{X}$ 的标准基本域，其中 i s

$$\mathcal{F} = \{x+iy \in \mathbb{H} : -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, x^2+y^2 \geq 1\}.$$

现在我们分别定义 $\mathcal{F}_A, \mathcal{C}_A$：

$$\mathcal{F}_A = \{x+iy \in \mathcal{F} : y \leq A\}, \quad \mathcal{C}_A = \{x+iy \in \mathcal{F} : y > A\}.$$

在 $\mathcal{F}$ 上，截断艾森斯坦级数定义为

$$E_T^A(z) = \begin{cases} E_T(z), & z \in \mathcal{F}_A, \\ E_T(z) - e(y,\frac{1}{2}+iT), & z \in \mathcal{C}_A. \end{cases} \tag{2.1}$$

我们通过 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 平移将定义扩展到 $\mathbb{H}$。注意，$E_T^A(z)$ 是一个自守函数。

2.2. 斯特林公式。 对于固定的 $\sigma \in \mathbb{R}$、实数 $|t| \geq 10$ 以及任意 $J > 0$，我们有斯特林公式

$$\Gamma(\sigma+it) = e^{-\frac{\pi}{2}|t|}|t|^{\sigma-\frac{1}{2}}\exp\left(it\log\frac{|t|}{e}\right)\left(g_{\sigma,J}(t) + O_{\sigma,J}(|t|^{-J})\right), \tag{2.2}$$

其中

$$t^j\frac{\partial^j}{\partial t^j}g_{\sigma,J}(t) \ll_{j,\sigma,J} 1.$$

对于 $s = \sigma+it$，我们还有

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) = \log s + \mathcal{O}(\frac{1}{|s|}).$$

2.3. Rankin–Selberg 理论与 Watson 公式。 令 ϕ，ϕ_k，ϕ_j 为海克–马斯尖点形式，E_t，E_τ 为艾森斯坦级数，其谱参数分别为 t_ϕ，t_k，t_j，t，τ。

根据 Rankin–Selberg 方法（参见 [Gol06, §7.2]），我们有

$$\langle \phi_j E_t, \phi_k \rangle = \frac{\rho_j(1)\rho_k(1)\Lambda(1/2+it, \phi_k \times \phi_j)}{\xi(1+2it)},$$

$$\langle E_\tau E_t, \phi_k \rangle = \frac{\rho_k(1)\rho_t(1)\Lambda(1/2+i\tau+it, \phi_k)\Lambda(1/2+i\tau-it, \phi_k)}{\xi(1+2i\tau)}.$$

根据 Watson 公式 [Wat08], ，我们有

$$|\langle \phi_k \phi, \phi_j \rangle|^2 = \frac{\Lambda(1/2, \phi_k \times \phi \times \phi_j)}{8\Lambda(1, \mathrm{Sym}^2 \phi_k)\Lambda(1, \mathrm{Sym}^2 \phi)\Lambda(1, \mathrm{Sym}^2 \phi_j)}$$

and

$$|\langle \phi_j, \phi^2 \rangle|^2 = \frac{\Lambda(1/2, \phi_j)\Lambda(1/2, \mathrm{Sym}^2 \phi \times \phi_j)}{8\Lambda(1, \mathrm{Sym}^2 \phi)^2\Lambda(1, \mathrm{Sym}^2 \phi_j)}.$$

2.4. 正则化内积与正则化普朗歇尔公式。 为处理艾森斯坦级数的内积，我们将采用 Zagier 在 [Zag81] 中给出的正则化过程。

设 $F(z)$ 是 $\mathbb{H}$ 上连续的 SL(2, $\mathbb{Z}$)-不变函数。若存在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上形如下式的函数 $\Phi(y)$，则称其为可重整化

$$\Phi(y) = \sum_{j=1}^{l} \frac{c_j}{n_j!} y^{\alpha_j} \log^{n_j} y, \tag{2.3}$$

其中 $c_j, \alpha_j \in \mathbb{C}$ 和 $n_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 满足，使得

$$F(z) = \Phi(y) + O(y^{-N})$$

如 $y \to \infty$，且对于任意 $N > 0$。

若 $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(y) e(nx)$ 是 F 在尖点 ∞ 处的傅里叶展开，特别是若 $a_0(y)$ 是其第 0 项，且没有 α_j 等于 0 或 1，则函数

$$R(F, s) := \int_0^\infty (a_0(y) - \Phi(y)) y^{s-2} dy,$$

其中，当 Re(s) 足够大时，定义该函数的积分收敛；它可亚纯延拓至所有 s，并在 $s = 1$ 处有一个简单极点。于是可以如下定义正则化积分：

$$\int_{\mathbb{X}}^{reg} F(z) d\mu(z) := \frac{\pi}{3} \mathrm{Res}_{s=1} R(F, s). \tag{2.4}$$

在没有任何 $\alpha_j = 1$ 的假设下，令 $\mathcal{E}_\Phi(z)$ 表示艾森斯坦级数 $E(z, \alpha_j)$（或其适当的导数）关于式 (2.3) 中所有满足 Re(α_j) $> 1/2$ 的指数的线性组合，即满足 $F(z) - \mathcal{E}_\Phi(z) = O(y^{1/2})$。正则化的一个重要定义如下：

$$\int_{\mathbb{X}}^{reg} F(z) \mathrm{d}\mu z = \int_{\mathbb{X}} (F(z) - \mathcal{E}_\Phi(z)) \mathrm{d}\mu z. \tag{2.5}$$

艾森斯坦级数的三重积公式为

引理 2.1（[Zag81]）。

$$\int_{\mathbb{X}}^{reg} E(z,1/2+s_1)E(z,1/2+s_2)E(z,1/2+s_3)\mathrm{d}\mu z$$
$$= \frac{\xi(1/2+s_1+s_2+s_3)\xi(1/2+s_1-s_2+s_3)\xi(1/2+s_1+s_2-s_3)\xi(1/2+s_1-s_2-s_3)}{\xi(1+2s_1)\xi(1+2s_2)\xi(1+2s_3)}. \tag{2.6}$$

正则化经典语言下的 Plancherel 公式见 [DK2 0].

引理 *2.2.* 设 $F(z)$ 和 $G(z)$ 是定义在 $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ 上的可重整函数，使得当 $y\to\infty$ 时，$F-\Phi$ 和 $G-\Psi$ 快速衰减，其中某个 $\Phi(y)=\sum_{j=1}^{l}\frac{c_j}{n_j!}y^{\alpha_j}$ 对数^{n_j} y 以及$\Psi(y)=\sum_{k=1}^{l_1}\frac{d_k}{m_k!}y^{\beta_k}$对数^{m_k} y。此外，设 $\alpha_j\neq 1$、$\beta_k\neq 1$、$Re(\alpha_j)\neq 1/2$、$Re(\beta_k)\neq 1/2$、$\alpha_j+\beta_k\neq 1$ 和 $\alpha_j\neq\beta_k$，对所有 j、k均成立。则有以下公式：

$$\langle F(z),G(z)\rangle_{reg} = \langle F,\sqrt{3/\pi}\rangle_{reg}\langle\sqrt{3/\pi},G\rangle_{reg}+\sum_j\langle F,u_j\rangle\langle u_j,G\rangle$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\langle F,E_t\rangle_{reg}\langle E_t,G\rangle_{reg}\mathrm{d}t+\langle F,\mathcal{E}_\Psi\rangle_{reg}+\langle\mathcal{E}_\Phi,G\rangle_{reg}.$$

3. 定理 1.1 的证明

本节中，我们通过假设推论 1.15 来证明定理 1.1。回顾

$$\langle\phi^2,|E_T|^2\rangle=\mathcal{R}(\phi,E_T)+\sum_{j\geq 1}\langle\phi_j,\phi^2\rangle\langle|E_T^2|,\phi_j\rangle+\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\langle\phi^2,E_\tau\rangle\langle E_\tau,|E_T^2|\rangle_{reg}\mathrm{d}\tau$$

其中

$$\mathcal{R}(\phi,E_T)=\frac{3}{\pi}[\log(\frac{1}{4}+t_\phi^2)+\log(\frac{1}{4}+T^2)+2\frac{L'}{L}(1,\mathrm{Sym}^2\phi)+4\,\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(1+2iT)]+\mathcal{O}(1)$$
$$+\frac{\xi(2iT)}{\xi(1+2iT)}\langle\phi^2,E(z,1+2iT)\rangle+\overline{\frac{\xi(2iT)}{\xi(1+2iT)}\langle\phi^2,E(z,1-2iT)\rangle}. \tag{3.1}$$

3.1. 主项。 在广义黎曼猜想和广义黎曼猜想下，我们得到

$$\mathcal{R}(\phi,E_T)=\frac{3}{\pi}[\log(\frac{1}{4}+t_\phi^2)+\log(\frac{1}{4}+T^2)]+\mathcal{O}((\log(T+t_\phi))^\varepsilon).$$

3.2. 连续谱的贡献。 由 Rankin–Selberg 方法和 Zagier 公式 (2.1)，我们得到连续项为

$$\int_{|\tau|\leq 2T+t_\phi^\varepsilon}\frac{\Lambda(\frac{1}{2}-i\tau,\mathrm{Sym}^2\phi)\xi(\frac{1}{2}-i\tau)}{\Lambda(1,\mathrm{Sym}^2\phi)\xi(1-2i\tau)}\frac{\xi(\frac{1}{2}+i\tau+2iT)\xi(\frac{1}{2}+i\tau-2iT)\xi(\frac{1}{2}+i\tau)^2}{\xi(1+2i\tau)|\xi(1+2iT)|^2}\mathrm{d}\tau.$$

直接计算伽马因子后，我们可以将其界定为

$$\frac{t_\phi^\varepsilon}{T^{1/4}t_\phi^{1/4}}\int_{0<\tau\leq 2T+t_\phi^\varepsilon}\frac{|L(\frac{1}{2}-i\tau,\mathrm{Sym}^2\phi)|\zeta(\frac{1}{2}+i\tau)|^3|\zeta(\frac{1}{2}+i\tau+2iT)\zeta(\frac{1}{2}+i\tau-2iT)|}{(1+|\tau|)(1+|\tau-2T|)^{1/4}(1+|\tau-2t_\phi|)^{1/4}}\mathrm{d}\tau. \tag{3.2}$$

由广义林德勒夫假设（GLH），可得连续谱的贡献为 $\mathcal{O}(t_\phi^{-1/4+\varepsilon})$。

3.3. 离散谱的贡献。根据 Watson 公式，并通过快速计算伽马因子，我们需要处理

$$\frac{(\log(t_\phi+T))^\varepsilon}{t_\phi^{1/4}T^{1/4}}\sum_{t_j\le 2T+t_\phi^\varepsilon}\frac{L(\frac12,\phi_j)^{3/2}L(\frac12,\mathrm{Sym}^2\,\phi\times\phi_j)^{1/2}|L(\frac12+2iT,\phi_j)|}{|t_j|(1+|t_j-2T|)^{1/4}(1+|t_j-2t_\phi|)^{1/4}} \tag{3.3}$$

在广义黎曼猜想和广义黎曼猜想下。我们将求和分为四部分

$$\sum_{t_j\le T^{1-\varepsilon}}+\sum_{T^{1-\varepsilon}\le t_j\le T+T^{1-\varepsilon}}+\sum_{T+T^{1-\varepsilon}\le t_j\le 2T-T^\varepsilon}+\sum_{2T-T^\varepsilon\le t_j\le 2T+t_\phi^\varepsilon}.$$

对于第一项和最后一项，我们使用中心值的尖锐上界，得到 $\mathcal{O}(t_\phi^{-\varepsilon})$。对于第二项，我们有

$$\sum_{1\le k\le T^{1-\varepsilon}}\sum_{T^{1-\varepsilon}+(k-1)T^\varepsilon\le t_j\le T^{1-\varepsilon}+kT^\varepsilon}\frac{L(\frac12,\phi_j)^{3/2}L(\frac12,\mathrm{Sym}^2\,\phi\times\phi_j)^{1/2}|L(\frac12+2iT,\phi_j)|}{|t_j|t_\phi^{1/2}T^{1/2}}$$
$$\ll\frac{T^{1/2}(\log(t_\phi+T))^{1/2+\varepsilon}}{t_\phi^{1/2}} \tag{3.4}$$

由推论 1.15，其中 $(\ell_1,\ \ell_2,\ \ell_3)=(\frac32,-\frac12,1)$，并利用分部求和。对于第三项，我们将其估计为

$$\frac{(\log(t_\phi+T))^\varepsilon}{T^{1/4}t_\phi^{1/4}}\sum_{1\le k\le T^{1-\varepsilon}}\sum_{-(k+1)T^\varepsilon\le t_j-2T\le -kT^\varepsilon}\frac{\mathcal{L}(t_j)}{t_j(1+(k-1)T^\varepsilon)^{1/4}(1+2t_\phi-2T+kT^\varepsilon)^{1/4}}$$
$$\ll\frac{T^\varepsilon\log(T+t_\phi)^{1/2+\varepsilon}}{T^{1/4}t_\phi^{1/4}}\sum_{10\le k\le T^{1-\varepsilon}}\frac{1}{(kT^\varepsilon)^{1/4}\max\{2t_\phi-2T+1,kT^\varepsilon\}^{1/4}}. \tag{3.5}$$

这里我们对 $a,\ b\ge 0$ 使用 $a+b\ge\max\{a,b\}$。

对于 $2t_\phi-2T+1\le T$，我们对其进行估计

$$\ll\frac{T^\varepsilon\log(T+t_\phi)^{1/2+\varepsilon}}{T^{1/4}t_\phi^{1/4}}\sum_{10\le k\le\frac{2t_\phi-2T+1}{T^\varepsilon}}+\sum_{\frac{2t_\phi-2T+1}{T^\varepsilon}\le k\le T^{1-\varepsilon}}\frac{1}{(kT^\varepsilon)^{1/4}\max\{2t_\phi-2T+1,kT^\varepsilon\}^{1/4}}$$
$$\ll\frac{\log(T+t_\phi)^{1/2+\varepsilon}}{T^{1/4}t_\phi^{1/4}}((2t_\phi-2T+1)^{1/2}+T^{1/2})\ll\frac{T^{1/4}\log(T+t_\phi)^{1/2+\varepsilon}}{t_\phi^{1/4}}.$$

类似地，该项的上界为

$$\frac{\log(T+t_\phi)^{1/2+\varepsilon}}{T^{1/4}t_\phi^{1/4}}\frac{T^{3/4}}{(2t_\phi-2T+1)^{1/4}}\ll\frac{T^{1/4}\log(T+t_\phi)^{1/2+\varepsilon}}{t_\phi^{1/4}}$$

$2t_\phi-2T+1\ge T$。

然后我们完成定理 1.1 的证明。

4. 定理 1.6 的证明

I在本节中，我们证明定理 1.6。通过谱分解，我们得到

$$\begin{aligned}\langle\phi^2,|E_T^A|^2\rangle &= \overline{c_T}^2\langle\phi^2,(E_T^A)^2\rangle\\ &= \overline{c_T}^2[\frac{3}{\pi}\langle(E_T^A)^2,1\rangle+\sum_j\langle\phi^2,\phi_j\rangle\langle\phi_j,(E_T^A)^2\rangle+\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\langle\phi^2,E_\tau\rangle\langle E_\tau,(E_T^A)^2\rangle\mathrm{d}\tau]\\ &= \mathcal{I}+\mathcal{J}+\mathcal{K}.\end{aligned} \tag{4.1}$$

主项完全来自 $\mathcal{I}$ （见 (4.8)）。我们的主要工作是对 $\mathcal{J}$ 和 $\mathcal{K}$进行估计。在估计它们之前，我们对 A取一个光滑平均。

4.1. 光滑版本。 事实上，我们证明了定理 1.14 的一个版本，其中额外对 A 取平均，即令 [DK24]。这个平均不会造成影响。

命题 4.1。 设 B 为一个固定的正数， $h(A)$ 为一个光滑、非负且紧支撑于 $B-$(对数 $t_\phi)^{-10}\le A\le B+$(对数 $t_\phi)^{-10}$上的实函数。函数 $h(A)$ 满足

$$(\log t_\phi)^{-10}\ll\widetilde{h}(1)=\int_{-\infty}^{\infty}h(A)\mathrm{d}A\ll(\log t_\phi)^{-10}$$

and

$$h^{(k)}(A)\ll(\log t_\phi)^{10k}$$

$\widetilde{\ }$其中 $h(s):=\int_0^\infty h(A)A^{s-1}\mathrm{d}A$ 是梅林变换，且 k 为任意非负整数。设对于一个较小的 $\delta>0$，有 $1\le t_\phi^\delta\le T\le t_\phi$ 。假设广义黎曼猜想和广义黎曼猜想，我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(A)\langle\phi^2(z),|E_T^A(z)|^2\rangle\mathrm{d}A=\frac{3\widetilde{h}(1)}{\pi}\log(\frac{1}{4}+T^2)+\mathcal{O}_{B,\varepsilon}(\widetilde{h}(1)(\log T)^{1/2+\varepsilon}) \tag{4.2}$$

当$\min\{t_\phi,T\}$趋于无穷时。

引理 4.2. 在广义林德勒夫假设下，*(4.2)* 推出定理 *1.6*。因此，命题 *4.1* 推出定理 *1.6*。

证明。 令 $B>1$ 固定。我们考虑

$$\widetilde{h}(0)\langle\phi^2(z),|E_T^B(z)|^2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}h(A)\langle\phi^2(z),|E_T^B(z)|^2\rangle\mathrm{d}A=I_1+I_2+I_3$$

其中

$$\begin{aligned}I_1&=\int_{-\infty}^{\infty}h(A)\int\limits_{\substack{z\in\mathcal{F}\\ \mathrm{Im}(z)\le B-(\log t_\phi)^{-10}}}\phi^2(z)|E_T^A(z)+(E_T^B(z)-E_T^A(z))|^2\mathrm{d}A,\\ I_2&=\int_{-\infty}^{\infty}h(A)\int\limits_{\substack{z\in\mathcal{F}\\ B-(\log t_\phi)^{-10}\le\mathrm{Im}(z)\le B+(\log t_\phi)^{-10}}}\phi^2(z)|E_T^A(z)+(E_T^B(z)-E_T^A(z))|^2\mathrm{d}A,\\ I_3&=\int_{-\infty}^{\infty}h(A)\int\limits_{\substack{z\in\mathcal{F}\\ \mathrm{Im}(z)\ge B+(\log t_\phi)^{-10}}}\phi^2(z)|E_T^A(z)+(E_T^B(z)-E_T^A(z))|^2\mathrm{d}A.\end{aligned} \tag{4.3}$$

由于 $A\in[B-(\text{对数 }t_\phi)^{-10},\ B+(\text{对数 }t_\phi)^{-10}]$，我们得到

$$E_T^B(z)-E_T^A(z)=0$$

若 $\mathrm{Im}(z)\le B-(\log t_\phi)^{-10}$ 或 $\mathrm{Im}(z)\ge B+(\log t_\phi)^{-10}$。当 $B-(\log t_\phi)^{-10}\le\mathrm{Im}(z)\le B+(\log t_\phi)^{-10}$ 时，我们有

$$|E_T^B(z)-E_T^A(z)|\le|y^{1/2-iT}+\frac{\xi(1+2iT)}{\xi(1-2iT)y^{1/2+iT}}|\le 2y^{1/2}\le 3B.$$

于是得到

$$\begin{aligned}|\widetilde{h}(1)\langle\phi^2(z),|E_T^B(z)|^2\rangle-\int_{-\infty}^{\infty}h(A)\langle\phi^2(z),|E_T^A(z)|^2\rangle\mathrm{d}A|\\ \ll\int_{-\infty}^{\infty}h(A)\int\limits_{\substack{z\in\mathcal{F}\\ B-(\log t_\phi)^{-10}\le\mathrm{Im}(z)\le B+(\log t_\phi)^{-10}}}\phi^2(z)\mathrm{d}\mu z\times 9B^2\mathrm{d}A\\ +\int_{-\infty}^{\infty}h(A)\int\limits_{\substack{z\in\mathcal{F}\\ B-(\log t_\phi)^{-10}\le\mathrm{Im}(z)\le B+(\log t_\phi)^{-10}}}\phi^2(z)|E_T^A(z)|\mathrm{d}\mu z\times 3B\mathrm{d}A.\end{aligned}\tag{4.4}$$

设 $\Omega=\{z\in\mathcal{F}:\ B-(\log t_\phi)^{-10}\le\mathrm{Im}(z)\le B+(\log t_\phi)^{-10}\}$，并注意到 $\mathrm{vol}(\Omega)\ll_B(\log t_\phi)^{-10}$。我们有 $\|\phi\|_4^4\ll 1$，并且

$$\int\limits_{\substack{z\in\mathcal{F}\\ B-(\log t_\phi)^{-10}\le\mathrm{Im}(z)\le B+(\log t_\phi)^{-10}}}|E_T^A(z)|^2\mathrm{d}\mu z\ll_B\mathrm{vol}(\Omega)\log T.\tag{4.5}$$

这是由艾森斯坦级数的量子唯一遍历性推出的。现在我们直接证明 (4.5)。根据定义和傅里叶展开，我们只需证明

$$\int_\Omega\frac{4y}{|\xi(1+2iT)|^2}\Big|\sum_{n\neq0}\eta_t(|n|)K_{iT}(2\pi|n|y)e(nx)\Big|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}\ll_B\mathrm{vol}(\Omega)\log T.$$

展开平方并使用梅林反演后，左边变为

$$\begin{aligned}&\frac{8}{|\xi(1+2iT)|^2}\int_{B-(\log t_\phi)^{-10}}^{B+(\log t_\phi)^{-10}}\sum_{n\ge1}\eta_t(n)^2K_{iT}(2\pi ny)^2\frac{\mathrm{d}y}{y}\\ &=\frac{1}{|\xi(1+2iT)|^2}\int_{B-(\log t_\phi)^{-10}}^{B+(\log t_\phi)^{-10}}\int_{(3)}\frac{\xi(s)^2\xi(s+2iT)\xi(s-2iT)}{\xi(2s)}y^{-s}\mathrm{d}s\frac{\mathrm{d}y}{y}\\ &=\frac{1}{|\xi(1+2iT)|^2}\int_{(3)}\frac{\xi(s)^2\xi(s+2iT)\xi(s-2iT)}{\xi(2s)}\times\\ &\quad\left(-\frac{(B-(\log t_\phi)^{-10})^{-s}}{s}+\frac{(B+(\log t_\phi)^{-10})^{-s}}{s}\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

将积分路径平移至 $\mathrm{Re}(s)=\frac12$，并取 $s=1$ 处的留数 $s=1+2iT,\ s=1-2iT$。注意

$$\left(-\frac{(B-(\log t_\phi)^{-10})^{-s}}{s}+\frac{(B+(\log t_\phi)^{-10})^{-s}}{s}\right)\Big|_{s=1}=\mathrm{vol}(\Omega)$$

而对数 T 来自 $\frac{\xi'}{\xi}(1+2iT)$。直线 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ 上的积分有界于

$$\int_{|t|\ll T}\frac{|\zeta(\frac{1}{2}+it)^2\zeta(\frac{1}{2}+it+2iT)\zeta(\frac{1}{2}+it-2iT)|}{(1+|t|)^{3/2}(1+|t+2T|)^{1/4}(1+|t-2T|)^{1/4}}\mathrm{d}t\ll T^{-1/2+\varepsilon}.$$

由柯西–施瓦茨不等式和 (4.5)，我们可得

$$|\widetilde{h}(1)\langle\phi^2(z),|E_T^B(z)|^2\rangle-\int_{-\infty}^{\infty}h(A)\langle\phi^2(z),|E_T^A(z)|^2\rangle\mathrm{d}A|\ll_B\widetilde{h}(1)(\log t_\phi)^{-1}$$

由 (4.4)。然后根据命题 4.1，我们得到

$$\langle\phi^2(z),|E_T^B(z)|^2\rangle-\frac{3}{\pi}\log(\frac{1}{4}+T^2)\ll_B(\log T)^{1/2+\varepsilon}.$$

□

4.2. 常数项的贡献 $\mathcal{I}$。对于两个截断艾森斯坦级数的内积，我们有

$$\int_{\mathbb{X}}|E_T^A(z)|^2\mathrm{d}\mu z=\lim_{r\to0}\int_{\mathbb{X}}E^A(z,\frac{1}{2}+iT)\overline{E^A(z,\frac{1}{2}+iT+ir)}\mathrm{d}\mu z.$$

令 $\varphi(s)=\frac{\xi}{\xi(2s-1)\xi(2s)}$。我们使用马斯–塞尔伯格关系 [Iwa02，命题 6.8]，得到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{X}}E^A(z,\frac{1}{2}+iT)\overline{E^A(z,\frac{1}{2}+iT+ir)}\mathrm{d}\mu z\\&=\frac{1}{i(2T+r)}\varphi(\frac{1}{2}-iT-ir)A^{i(2T+r)}-\frac{1}{i(2T+r)}\varphi(\frac{1}{2}+iT)A^{-i(2T+r)}\\&\quad-\frac{1}{ir}A^{-ir}+\frac{1}{ir}\varphi(\frac{1}{2}+iT)\varphi(\frac{1}{2}-iT-ir)A^{ir}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

注意，泰勒展开

$$A^{\pm ir}=1\pm ir\log A+\mathcal{O}((r\log A)^2),$$

$$\varphi(\frac{1}{2}-iT-ir)=\varphi(\frac{1}{2}-iT)-ir\varphi'(\frac{1}{2}-iT)+\mathcal{O}(r^2)$$

and

$$|\varphi(\frac{1}{2}+it)|=1$$

对于任意 $t\neq0$。于是，前两项有界于 $\mathcal{O}(\frac{1}{T})$。最后两项为

$$2\log A-\varphi(\frac{1}{2}+iT)\varphi'(\frac{1}{2}-iT)+\mathcal{O}(r).$$

根据定义，我们得到

$$\varphi(\frac{1}{2}+iT)\varphi'(\frac{1}{2}-iT)=-2\frac{\xi'}{\xi}(1+2iT)-2\frac{\xi'}{\xi}(1-2iT)=-4\,\mathrm{Re}\,\frac{\xi'}{\xi}(1+2iT).\tag{4.7}$$

由斯特林公式，并令 $r\to0$，可得

$$\mathcal{I}=\frac{3}{\pi}\Big(2\log A+4\,\mathrm{Re}\,\frac{\xi'}{\xi}(1+2iT)\Big)=\frac{3}{\pi}\log\left((\frac{1}{4}+T^2)A^2\right)+\mathcal{O}((\log T)^\varepsilon)\tag{4.8}$$

在黎曼猜想下。

4.3. **连续谱的贡献** $\mathcal{K}$。根据 Spinu 的研究 [Spi03] 我们有

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}|\langle (E_T^A)^2, E_\tau\rangle|^2\mathrm{d}\tau \leq 108A + \mathcal{O}(T^{-\delta}).$$

由 Watson 公式和广义林德勒夫假设，我们有

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}|\langle \phi^2, E_\tau\rangle|^2\mathrm{d}\tau \ll t_\phi^{-1/2+\varepsilon}.$$

由柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$\mathcal{K} \ll A^{1/2}t_\phi^{-1/4+\varepsilon}. \tag{4.9}$$

4.4. **离散谱的贡献** $\mathcal{J}$。我们记

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &= \sum_j \langle\phi^2,\phi_j\rangle\langle\phi_j,|E_T|^2\rangle - \sum_j \langle\phi^2,\phi_j\rangle\langle\phi_j,|E_T|^2-|E_T^A|^2\rangle\\ &= \sum_j \langle\phi^2,\phi_j\rangle\langle\phi_j,|E_T|^2\rangle - \overline{c_T}^2\sum_j\langle\phi^2,\phi_j\rangle\int_{\mathcal{C}_A}\phi_j(z)\overline{e(y,\frac{1}{2}+iT)(e(y,\frac{1}{2}+it)+2E_T^A(z)}\mathrm{d}\mu z\\ &= \sum_j \langle\phi^2,\phi_j\rangle\langle\phi_j,|E_T|^2\rangle - \sum_j\langle\phi^2,\phi_j\rangle\times 2\int_{\mathcal{C}_A}\phi_j(z)(y^{1/2-iT}+\frac{\xi(1+2iT)}{\xi(1-2iT)}y^{1/2+iT})E_T^A(z)\mathrm{d}\mu z.\end{aligned} \tag{4.10}$$

我们记

$$\mathcal{J}(A) := \sum_j \langle\phi^2,\phi_j\rangle\times 2\int_{\mathcal{C}_A}\phi_j(z)(y^{1/2-iT}+\frac{\xi(1+2iT)}{\xi(1-2iT)}y^{1/2+iT})E_T^A(z)\mathrm{d}\mu z.$$

本小节的主要目标是

命题 4.3。 在广义黎曼猜想和广义黎曼猜想成立的条件下，我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(A)\mathcal{J}(A)\mathrm{d}A \ll_{B,\varepsilon} \widetilde{h}(1)(\log T)^{1/2+\varepsilon}.$$

我们需要计算以下类型的积分

$$\int_A^\infty\int_{-1/2}^{1/2}\phi_j(z)y^{1/2-iT}E_T^A(z)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}.$$

通过傅里叶展开，我们得到

$$8\rho_j(1)\rho_t(1)\sum_{n\geq 1}\lambda_j(n)\eta_T(n)\int_A^\infty K_{it_j}(2\pi ny)K_{iT}(2\pi ny)y^{1/2+iT}\frac{\mathrm{d}y}{y}. \tag{4.11}$$

关于 K-贝塞尔函数的梅林变换，有一个有用的引理。

引理 4.4. 设$\mathrm{Re}(s)$ 充分大，则有

$$\int_0^\infty K_\mu(x)K_\nu(x)x^s\frac{\mathrm{d}x}{x} = 2^{s-3}\frac{\prod_{\pm_1}\prod_{\pm_2}\Gamma(\frac{s\pm_1\mu\pm_2\nu}{2})}{\Gamma(s)}.$$

由引理 4.4 和梅林反演，式 (4.11) 可化简为

$$\rho_j(1)\rho_t(1)\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}\pi^{-s}\frac{\prod_{\pm_1}\prod_{\pm_2}\Gamma(\frac{s\pm_1 it_j\pm_2 iT}{2})}{\Gamma(s)}\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_j(n)\eta_T(n)}{n^s}\frac{A^{1/2-s-iT}}{s-1/2+iT}\mathrm{d}s.$$

由拉马努金恒等式可得

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_j(n)\eta_T(n)}{n^s}=\frac{L(s-iT,\phi_j)L(s+iT,\phi_j)}{\zeta(2s)}.$$

然后我们将积分改写为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}\frac{\rho_j(1)\rho_T(1)\Lambda(s-iT,\phi_j)\Lambda(s+iT,\phi_j)}{\xi(2s)}\frac{A^{1/2-s-iT}}{s-1/2+iT}\mathrm{d}s\\ =&\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}\frac{\rho_j(1)\rho_T(1)\Lambda(s+\frac{1}{2},\phi_j)\Lambda(s+\frac{1}{2}-2iT,\phi_j)}{\xi(1+2s-2iT)}\frac{A^{-s}}{s}\mathrm{d}s\\ =&\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}\frac{L(s+\frac{1}{2},\phi_j)L(s+\frac{1}{2}-2iT,\phi_j)}{\zeta(1+2iT)\zeta(1+2s-2iT)}\frac{\prod_{\pm}\Gamma(\frac{s+\frac{1}{2}\pm it_j}{2})\Gamma(\frac{s+\frac{1}{2}-2iT\pm it_j}{2})}{|\Gamma(\frac{1}{2}+it_j)|\Gamma(\frac{1}{2}+iT)\Gamma(\frac{1}{2}+s-iT)}\frac{A^{-s}}{s}\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{4.12}$$

另一部分是上述内容的共轭，因此我们只考虑这一项。设 $h(A$ 是一个在 $B-(\log t_\phi)^{10}\leq A\leq B+(\log t_\phi)^{10}$ 上具有紧支撑的光滑函数。我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}h(A)\mathcal{J}(A)\mathrm{d}A=\sum_j\langle\phi^2,\phi_j\rangle\times\\ &\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}\widetilde{h}(1-s)\frac{L(s+\frac{1}{2},\phi_j)L(s+\frac{1}{2}-2iT,\phi_j)}{\zeta(1+2iT)\zeta(1+2s-2iT)}\frac{\prod_{\pm}\Gamma(\frac{s+\frac{1}{2}\pm it_j}{2})\Gamma(\frac{s+\frac{1}{2}-2iT\pm it_j}{2})}{|\Gamma(\frac{1}{2}+it_j)|\Gamma(\frac{1}{2}+iT)\Gamma(\frac{1}{2}+s-iT)}\frac{\mathrm{d}s}{s}\end{aligned}\tag{4.13}$$

其中

$$\widetilde{h}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(A)A^s\frac{\mathrm{d}A}{A}.$$

根据斯特林公式和 $\widetilde{h}(s)\ll\left(\frac{(\log t_\phi)^{10}}{1+|s|}\right)^A$，对于任意 $A>0$，我们将积分路径移至 $\mathrm{Re}(s)=1/\log t_\phi$。我们可以将积分截断至 $|t|\leq t_\phi^\varepsilon$，误差项可忽略且为幂节省误差项。现在，剩余部分分为两部分：$(\log t_\phi)^{20}\leq|t|\leq t_\phi^\varepsilon$ 和 $|t|\leq(\log t_\phi)^{20}$。我们将这两部分分别定义为 $\mathcal{J}_1(B)$ 和 $\mathcal{J}_2(B)$：

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_1(B)=\frac{1}{2\pi i}\sum_j\langle\phi^2,\phi_j\rangle&\int_{(\log t_\phi)^{20}\leq|t|\leq t_\phi^\varepsilon}\widetilde{h}(1-s)\times\\ &\frac{L(s+\frac{1}{2},\phi_j)L(s+\frac{1}{2}-2iT,\phi_j)}{\zeta(1+2iT)\zeta(1+2s-2iT)}\frac{\prod_{\pm}\Gamma(\frac{s+\frac{1}{2}\pm it_j}{2})\Gamma(\frac{s+\frac{1}{2}-2iT\pm it_j}{2})}{|\Gamma(\frac{1}{2}+it_j)|\Gamma(\frac{1}{2}+iT)\Gamma(\frac{1}{2}+s-iT)}\frac{\mathrm{d}s}{s},\end{aligned}\tag{4.14}$$

$$\mathcal{J}_2(B)=\frac{1}{2\pi i}\sum_j\langle\phi^2,\phi_j\rangle\int\limits_{|t|\le(\log t_\phi)^{20}}\widetilde{h}(1-s)\times$$

$$\frac{L(s+\frac12,\phi_j)L(s+\frac12-2iT,\phi_j)}{\zeta(1+2iT)\zeta(1+2s-2iT)}\frac{\prod_\pm\Gamma(\frac{s+\frac12\pm it_j}{2})\Gamma(\frac{s+\frac12-2iT\pm it_j}{2})}{|\Gamma(\frac12+it_j)|\Gamma(\frac12+iT)\Gamma(\frac12+s-iT)}\frac{\mathrm{d}s}{s}.\quad(4.15)$$

因此，我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}h(A)\mathcal{J}(A)\mathrm{d}A=\mathcal{J}_1(B)+\mathcal{J}_2(B)+\mathcal{O}(t_\phi^{-100}).$$

本节余下部分的目标是证明以下界

$$\mathcal{J}_1(B),\quad\mathcal{J}_2(B)\ll_B\widetilde{h}(1)(\log T)^{1/2+\varepsilon},$$

如命题 4.5 和命题 4.6 所述。

4.5. $\mathcal{J}_1(B)$ 的界。对于 $\mathcal{J}_1(B)$，我们有 $(\log t_\phi)^{20}\le|t|\le t_\phi^\varepsilon$，于是

$$\widetilde{h}(1-\frac{1}{\log t_\phi}-it)\ll\left(\frac{(\log t_\phi)^{10}}{1+|s|}\right)^{10}\ll(\log t_\phi)^{-100}.$$

由柯西-施瓦茨不等式，可将 $\mathcal{J}_2(B)$ 上界估计为

$$(\sum_j|\langle\phi^2,\phi_j\rangle|^2)^{1/2}\times(\log t_\phi)^{-100}$$

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{(\log t_\phi)^{20}\le|t|\le t_\phi^\varepsilon}\sum_j\frac{|L(s+\frac12,\phi_j)L(s+\frac12-2iT,\phi_j)|^2}{|\zeta(1+2iT)\zeta(1+2s-2iT)|^2}\mathcal{H}(t_j,t,T)\frac{\mathrm{d}t}{\frac{1}{\log t_\phi}+|t|}\right)^{1/2}\quad(4.16)$$

其中

$$\mathcal{H}(t_j,t,T)=\left|\frac{\prod_\pm\Gamma(\frac{\frac12+\frac{1}{\log t_\phi}+it\pm t_j}{2})\Gamma(\frac{\frac12+\frac{1}{\log t_\phi}+it-2iT\pm t_j}{2})}{|\Gamma(\frac12+it_j)|\Gamma(\frac12+iT)\Gamma(\frac12+\frac{1}{\log t_\phi}+it-iT)}\right|^2.$$

由斯特林公式可得

$$\mathcal{H}(t_j,t,T)\ll\prod_\pm(1+|t\pm t_j|)^{1/2+1/\log t_\phi}(1+|t-2T\pm t_j|)^{1/2+1/\log t_\phi}$$

$$\times(1+|t-T|)^{1/\log t_\phi}\exp(-\frac{\pi}{2}P(t_j,t,T))\quad(4.17)$$

其中

$$P(t_j,t,T)=\sum_\pm(|t\pm t_j|+|t-2T\pm t_j|)-2t_j-2T-2|t-T|$$

$$=|t_j+t|+|t_j-t|+|t_j-2T+t|-t_j+t-2T.$$

当 $t\ge0$ 时，我们有

$$P(t_j,t,T)=\begin{cases}2t_j+2t-4T, & t_j\ge2T-t,\\ 0, & t\le t_j\le2T-t,\\ t-t_j, & 0\le t_j\le t.\end{cases}\quad(4.18)$$

当 $t \le 0$ 时，我们有

$$P(t_j,t,T)=\begin{cases} 2t_j+2t-4T, & t_j \ge 2T-t,\\ 0, & -t \le t_j \le 2T-t,\\ -t-t_j, & 0 \le t_j \le -t. \end{cases} \tag{4.19}$$

对于 来自 $(\log t_\phi)^{20} \le |t| \le t_\phi^{\varepsilon}$ 的贡献，我们有如下命题。

命题 4.5. 在广义黎曼猜想和广义黎曼猜想下，我们有

$$\mathcal{J}_1(B) \ll \widetilde{h}(1)(\log t_\phi)^{-10}.$$

证明。 当 $t \ge 0$ 时，我们将方程 (4.16) 中最内层的 j 和截断为

$$\begin{aligned} &\sum_{t-(\log t_\phi)^2 \le t_j \le 2T-t+(\log t_\phi)^2} \\ &= \sum_{t-(\log t_\phi)^2 \le t_j \le t+T^{1-\varepsilon}} + \sum_{t+T^{1-\varepsilon} \le t_j \le t+T+T^{1-\varepsilon}} + \sum_{t+T+T^{1-\varepsilon} \le t_j \le t+2T-T^{2\varepsilon}} + \sum_{t+2T-T^{2\varepsilon} \le t_j \le 2T-t+(\log t_\phi)^2} \end{aligned} \tag{4.20}$$

误差项可忽略且为幂节省误差项。根据 $\mathcal{H}(t_j,\ t,\ T)$ 的界以及引理 4.19，我们考虑方程 (4.16) 第二行中来自前两部分的贡献，称为$\sum_1+\sum_2+\sum_3+\sum_4$，其中

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_1 &:= \sum_{t-(\log t_\phi)^2 \le t_j \le t+T^{1-\varepsilon}} \frac{|L(\frac12+\frac{1}{\log t_\phi}+it,\phi_j)L(\frac12+\frac{1}{\log t_\phi}+it-2iT,\phi_j)|^2}{(1+|t_j|)^{1/2}T(1+|t_j-t|)^{1/2}},\\ \sum\nolimits_2 &:= \sum_{t+T^{1-\varepsilon} \le t_j \le t+T+T^{1-\varepsilon}} \frac{|L(\frac12+\frac{1}{\log t_\phi}+it,\phi_j)L(\frac12+\frac{1}{\log t_\phi}+it-2iT,\phi_j)|^2}{(1+|t_j|)T},\\ \sum\nolimits_3 &:= \sum_{t+T+T^{1-\varepsilon} \le t_j \le t+2T-T^{2\varepsilon}} \frac{|L(\frac12+\frac{1}{\log t_\phi}+it,\phi_j)L(\frac12+\frac{1}{\log t_\phi}+it-2iT,\phi_j)|^2}{(1+|t_j|)T^{1/2}(1+|t_j-2T+t|)^{1/2}},\\ \sum\nolimits_4 &:= \sum_{t+2T-T^{2\varepsilon} \le t_j \le 2T-t+(\log t_\phi)^2} \frac{|L(\frac12+\frac{1}{\log t_\phi}+it,\phi_j)L(\frac12+\frac{1}{\log t_\phi}+it-2iT,\phi_j)|^2}{(1+|t_j|)T^{1/2}}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

对于 $\sum_1$，我们得到

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_1 &= \sum_{-(\log t_\phi)^2 \le t_j-t \le +T^{1-\varepsilon}} \frac{|L(\frac12+\frac{1}{\log t_\phi}+it,\phi_j)L(\frac12+\frac{1}{\log t_\phi}+it-2iT,\phi_j)|^2}{(1+|t_j|)^{1/2}T(1+|t_j-t|)^{1/2}}\\ &\ll \exp(\frac{C\log T}{\log\log T}) \sum_{0\le k\le T^{1-2\varepsilon}} \sum_{(k-1)T^{\varepsilon} \le t_j-t \le kT^{\varepsilon}} \frac{1}{(1+|t_j|)^{1/2}T(1+(k-1)T^{\varepsilon})^{1/2}}\\ &\ll \exp(\frac{C\log T}{\log\log T})T^{-1+\varepsilon} \sum_{10\le k\le T^{1-2\varepsilon}} \frac{\sqrt{t+kT^{\varepsilon}}}{((k-1)T^{\varepsilon})^{1/2}}\\ &\ll \exp(\frac{C\log T}{\log\log T})T^{-1+\varepsilon} \sum_{10\le k\le T^{1-2\varepsilon}} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \ll T^{-\varepsilon/2}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

对于 $\sum_2$，我们得到

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_2 &\leq \sum_{T^{1-\varepsilon}\leq t_j-t\leq T+T^{1-\varepsilon}} \frac{|L(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log t_\phi}+it,\phi_j)L(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log t_\phi}+it-2iT,\phi_j)|^2}{(1+|t_j|)T}\\ &= \sum_{1\leq k\leq T^{1-\varepsilon}} \sum_{T^{1-\varepsilon}+(k-1)T^{\varepsilon}\leq t_j-t\leq T^{1-\varepsilon}+kT^{\varepsilon}} \frac{|L(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log t_\phi}+it,\phi_j)L(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log t_\phi}+it-2iT,\phi_j)|^2}{(1+|t_j|)T}\\ &\ll \frac{(\log T)^{2+\varepsilon}}{T}T^{\varepsilon}\sum_{1\leq k\leq T^{1-\varepsilon}-1} 1 \ll (\log T)^{2+\varepsilon}. \quad (4.23)\end{aligned}$$

现在我们处理 $\sum_3$，得到

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_3 &= \sum_{2t-T\leq t_j-2T+t\leq 2t-T^{2\varepsilon}} \frac{|L(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log t_\phi}+it,\phi_j)L(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log t_\phi}+it-2iT,\phi_j)|^2}{(1+|t_j|)T^{1/2}(1+|t_j-2T+t|)^{1/2}}\\ &\ll \sum_{-T\leq t_j-2T+t\leq -T^{\varepsilon}} \frac{|L(s+\frac{1}{2},\phi_j)L(s+\frac{1}{2}-2iT,\phi_j)|^2}{(1+|t_j|)T^{1/2}(1+|t_j-2T+t|)^{1/2}}\\ &\ll \sum_{1\leq k\leq T^{1-\varepsilon}} \sum_{-(k+1)T^{\varepsilon}\leq t_j-2T+t\leq -kT^{\varepsilon}} \frac{|L(s+\frac{1}{2},\phi_j)L(s+\frac{1}{2}-2iT,\phi_j)|^2}{(1+|t_j|)T^{1/2}(1+(k+1)T^{\varepsilon})^{1/2}}\\ &\ll T^{-1/2+\varepsilon}(\log T)^{2+\varepsilon}\sum_{1\leq k\leq T^{1-\varepsilon}} \frac{1}{((k+1)T^{\varepsilon})^{1/2}} \ll T^{-1/2+\varepsilon}(\log T)^{2+\varepsilon}\frac{T^{1/2}}{T^{\varepsilon}} \ll (\log T)^{2+\varepsilon}.\end{aligned} \quad (4.24)$$

对于 $\sum_4$，很容易将其界定为 $\mathcal{O}(T^{-1/2+\varepsilon})$。

当 $t\geq 0$ 时，类似地，我们将求和截断为

$$\begin{aligned}&\sum_{-t-(\log t_\phi)^2\leq t_j\leq 2T-t+(\log t_\phi)^2}\\ &\quad= \sum_{-t-(\log t_\phi)^2\leq t_j\leq -t+T^{1-\varepsilon}} + \sum_{-t+T^{1-\varepsilon}\leq t_j\leq -t+T+T^{1-\varepsilon}}\\ &\qquad + \sum_{-t+T+T^{1-\varepsilon}\leq t_j\leq -t+2T-T^{2\varepsilon}} + \sum_{-t+2T-T^{2\varepsilon}\leq t_j\leq 2T-t+(\log t_\phi)^2}. \quad (4.25)\end{aligned}$$

差异只出现在第三个和中，但比上面的情况更简单。其贡献为

$$\sum\nolimits_3^{'} \leq \sum_{-T\leq t_j-2T+t\leq -T^{\varepsilon}} \frac{|L(s+\frac{1}{2},\phi_j)L(s+\frac{1}{2}-2iT,\phi_j)|^2}{(1+|t_j|)T^{1/2}(1+|t_j-2T+t|)^{1/2}} \ll (\log T)^{2+\varepsilon}.$$

总之，我们得到 $\mathcal{J}_1(B)$ 中最内层的 j-求和有界于 $\mathcal{O}((\log(T+t_\phi))^{2+\varepsilon})$。注意，我们得到

$$\sum_j |\langle \phi^2,\phi_j\rangle|^2 \ll 1$$

在广义林德勒夫假设下。于是我们得到

$$\mathcal{J}_1(B) \ll \widetilde{h}(1)(\log t_\phi)^{-10}.$$

现在我们完成证明。 □

4.6. 定理 关于 $\mathcal{J}_2(B)$ 的界。 在本小节中，我们证明以下命题 .

命题 4.6. 在 *GRH* 和 *GRC* 成立的条件下，我们得到

$$\mathcal{J}_2(B) \ll \widetilde{h}(1)(\log T)^{1/2+\varepsilon}.$$

根据 Watson 公式，我们处理以下求和

$$\mathcal{J}_2(B) \ll (\log t_\phi)^{\varepsilon} \int_{|t|\leq(\log t_\phi)^{20}} \widetilde{h}(1-\frac{1}{\log t_\phi}-it) \sum_j L(\frac{1}{2},\phi_j)^{1/2} L(\frac{1}{2},\mathrm{Sym}^2\,\phi\times\phi_j)^{1/2}\times$$
$$|L(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log t_\phi}+it,\phi_j)L(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log t_\phi}+it-2iT,\phi_j)||\mathcal{H}_1(t_j,t,T)\mathcal{H}_2(t_j,t_\phi)|\frac{\mathrm{d}t}{\frac{1}{\log t_\phi}+|t|}. \quad (4.26)$$

Here

$$|\mathcal{H}_1(t_j,t,T)| = \left|\frac{\prod_\pm \Gamma(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{\log t_\phi}+it\pm t_j}{2})\Gamma(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{\log t_\phi}+it-2iT\pm t_j}{2})}{|\Gamma(\frac{1}{2}+it_j)|\Gamma(\frac{1}{2}+iT)\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log t_\phi}+it-iT)}\right|$$

and

$$|\mathcal{H}_2(t_j,t_\phi)| = \frac{|\Gamma(\frac{\frac{1}{2}+it_j}{2})|^2\prod_\pm|\Gamma(\frac{\frac{1}{2}+2it_\phi\pm it_j}{2})|}{|\Gamma(\frac{1}{2}+it_j)||\Gamma(\frac{1}{2}+it_\phi)|^2}.$$

注意到

$$\widetilde{h}(1-\frac{1}{\log t_\phi}-it) = \int_{-\infty}^{\infty} h(A)A^{-\frac{1}{\log t_\phi}-it}\mathrm{d}A \leq \widetilde{h}(1).$$

根据斯特林公式，我们有

$$|\mathcal{H}_1(t_j,t,T)\mathcal{H}_2(t_j,t_\phi)| \ll (1+|t_j|)^{-1/2}\prod_\pm(1+|t_j\pm 2t_\phi|)^{-1/4}\prod_\pm(1+|t\pm t_j|)^{-1/4+\frac{1}{\log T}}$$
$$\prod_\pm(1+|t-2T\pm t_j|)^{-1/4+\frac{1}{\log T}}\exp(-\frac{\pi}{2}(Q(t,t_j,T,t_\phi))) \quad (4.27)$$

其中

$$\begin{aligned}Q(t,t_j,T,t_\phi) &= t_j+\frac{t_j+2t_\phi}{2}+\frac{|t_j-2t_\phi|}{2}+\frac{|t_j+t|}{2}+\frac{|t_j-t|}{2}\\ &\quad+\frac{|t-2T+t_j|+|t-2T-t_j|}{2}-2t_j-2t_\phi-T-|t-T|\\ &= \frac{|t_j-2t_\phi|}{2}+\frac{|t_j+t|}{2}+\frac{|t_j-t|}{2}+\frac{|t_j-2T+t|}{2}+\frac{t}{2}-t_\phi-T. \quad (4.28)\end{aligned}$$

由于我们限制 $|t|\leq$(对数 t_ϕ)^{20}。对于三种情况 $-$(对数 t_ϕ)$^{20}\leq t\leq 0$, $0\leq t\leq 2t_\phi-2T$和 $2t_\phi-2T\leq t\leq$(对数$\,t_\phi$)^{20}, , 我们有

引理 4.7。设 $0\leq t\leq$(对数$\,t_\phi$)^{20}, 有

$$Q(t,t_j,T,t_\phi) = \begin{cases} 2t_j-2t_\phi+t-2T, & t_j\geq 2t_\phi,\\ t_j-2T+t, & 2T-t\leq t_j\leq 2t_\phi,\\ 0, & t\leq t_j\leq 2T-t,\\ -t_j+t, & t_j\leq t.\end{cases} \quad (4.29)$$

设 $2T-2t_\phi\le t\le 0$，有

$$Q(t,t_j,T,t_\phi)=\begin{cases}2t_j-2t_\phi+t-2T, & t_j\ge 2t_\phi,\\ t_j-2t_\phi, & 2T-t\le t_j\le 2t_\phi,\\ 0, & -t\le t_j\le 2T-t,\\ -t-t_j, & t_j\le -t.\end{cases}\tag{4.30}$$

令 $-(\text{对数}\, t_\phi)^{20}\le t\le 2T-2t_\phi$，我们有

$$Q(t,t_j,T,t_\phi)=\begin{cases}2t_j-2t_\phi+t-2T, & t_j\ge 2T-t\\ t_j-2T-t, & 2t_\phi\le t_j\le 2T-t,\\ 0, & -t\le t_j\le 2t_\phi,\\ -t-t_j, & t_j\le -t.\end{cases}\tag{4.31}$$

为证明命题 4.6，我们需要以下关于 L-函数的混合矩上界。**命题 4.8**。假设广义黎曼猜想和广义黎曼猜想。对于 $|t|\le(\text{对数}\, t_\phi)^{20}$, 我们有一致上界

$$\begin{aligned}&\sum_j L(\frac{1}{2},\phi_j)^{1/2}L(\frac{1}{2},\mathrm{Sym}^2\,\phi\times\phi_j)^{1/2}\\ &\times|L(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log t_\phi}+it,\phi_j)L(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log t_\phi}+it-2iT,\phi_j)||\mathcal{H}_1(t_j,t,T)\mathcal{H}_2(t_j,t_\phi)|\ll(\log(T+t_\phi))^{1/2+\varepsilon}.\end{aligned}\tag{4.32}$$

证明。对于 $0\le t\le(\text{对数}\ t_\phi)^{20}$ 且 t 满足 $2T-t+(\text{对数}\ t_\phi)^2\le 2t_\phi$的情形，我们将求和截断为

$$\begin{aligned}&\sum_{t-(\log t_\phi)^2\le t_j\le 2T-t+(\log t_\phi)^2}\\ &=\sum_{t-(\log t_\phi)^2\le t_j\le t+T^{1-\varepsilon}}+\sum_{t+T^{1-\varepsilon}\le t_j\le t+T+T^{1-\varepsilon}}+\sum_{t+T+T^{1-\varepsilon}\le t_j\le 2T-t}+\sum_{2T-t\le t_j\le 2T-t+(\log t_\phi)^2}.\end{aligned}\tag{4.33}$$

若 t 满足 $2T-t+(\text{对数}\, t_\phi)^2\ge 2t_\phi$，我们将求和截断为

$$\begin{aligned}&\sum_{t-(\log t_\phi)^2\le t_j\le 2t_\phi+(\log t_\phi)^2}\\ &=\sum_{t-(\log t_\phi)^2\le t_j\le t+T^{1-\varepsilon}}+\sum_{t+T^{1-\varepsilon}\le t_j\le t+T+T^{1-\varepsilon}}+\sum_{t+T+T^{1-\varepsilon}\le t_j\le 2T-t}+\sum_{2T-t\le t_j\le 2t_\phi+(\log t_\phi)^2}.\end{aligned}\tag{4.34}$$

前两部分可以按照命题 4.5 的证明进行类似处理。第三个和式

$\sum_{t+T+T^{1-\varepsilon}\le t_j\le 2T-t}\frac{\mathcal{L}(t_j)\,()(1+2t_\phi-t_j)^{1/4}(1+2T-t-t_j)^{1/4}}{1+|t_j|\ T^{1/4}t_\phi^{1/4}}$的贡献为

$$\begin{aligned}&\le\sum_{0\le k\le T^{1-\varepsilon}}\ \sum_{-(k+1)T^\varepsilon\le t_j-2T+t\le -kT^\varepsilon}\frac{\mathcal{L}(t_j)}{|t_j|T^{1/4}t_\phi^{1/4}(1+2t_\phi-2T+t+kT^\varepsilon)^{1/4}(1+kT^\varepsilon)^{1/4}}\\ &\ll\frac{T^\varepsilon\log(T+t_\phi)^{1/2+\varepsilon}}{T^{1/4}t_\phi^{1/4}}\sum_{10\le k\le T^{1-\varepsilon}}\frac{1}{(kT^\varepsilon)^{1/4}\max\{2t_\phi-2T+1,kT^\varepsilon\}^{1/4}}.\end{aligned}\tag{4.35}$$

该项与（3.5）相同，并且有界于

$$\frac{T^{1/4}\log(T+t_\phi)^{1/2+\varepsilon}}{t_\phi^{1/4}}.$$

显然，由于求和范围很短，最终的和以 $\mathcal{O}(T^{-1/2+\varepsilon})$ 为界。

总之，我们得到 $0\le t\le$ (对数 t_ϕ)^{20} 的贡献为

$$\frac{T^{1/4}\log(T+t_\phi)^{1/2+\varepsilon}}{t_\phi^{1/4}}.$$

(对数 t_ϕ)$^{20}\le t\le 0$ 的情形类似。于是我们完成了证明。

□

将命题 4.8 代入 (4.26)，即可完成命题 4.6 的证明。由命题 4.5 和命题 4.6，我们完成命题 4.3。

命题 *4.1* 的证明。该命题可由 (4.8)、(4.9) 和命题 4.3 合并推出。□

5. Mixed moments of L-functions

我们使用 Soundararajan 方法证明定理 1.14。

5.1. 中心值 L-函数。 令 α_ϕ,β_ϕ 和 α_j,β_j 分别为 ϕ和 ϕ_j的萨塔克参数。于是我们定义

$$\Lambda_{\phi_j}(p^n)=\alpha_j(p)^n+\beta_j(p)^n,$$

$$\Lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi\times\phi_j}(p^n)=(\alpha_\phi(p)^{2n}+1+\beta_\phi(p)^{2n})(\alpha_j(p)^n+\beta_j(p)^n).$$

于是我们有

$$\Lambda_{\phi_j}(p)=\lambda_j(p),\quad \Lambda_{\phi_j}(p^2)=\lambda_j(p)^2-2=\lambda_j(p^2)-1=\lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi_j}(p)-1,$$
$$\Lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi\times\phi_j}(p)=\lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi}(p)\lambda_j(p),$$

and

$$\Lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi\times\phi_j}(p^2)=(\lambda_{\mathrm{Sym}^4\phi}(p)-\lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi}(p)+1)(\lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi_j}(p)+1).$$

引理 5.1。 假设广义黎曼猜想成立。令 $X\le t_j\le 2X$, $T\le t_\phi$ 和 $T^{1-\varepsilon}\le X\le 3t_\phi$。令$0\le\mathrm{Re}(z_1),\mathrm{Re}(z_2)\le\frac{1}{\text{对数 }X}$和 $|z_1|,|z_2|\le 3T$。那么我们有

$$\log L(\frac12,\phi_j)\le\sum_{p^n\le x}\frac{\Lambda_{\phi_j}(p^n)}{np^{n(\frac12+\frac{1}{\log x})}}\frac{\log\frac{x}{p^n}}{\log x}+\mathcal{O}(\frac{\log X}{\log x}+1),$$

$$\log L(\frac12,\mathrm{Sym}^2\phi\times\phi_j)\le\sum_{p^n\le x}\frac{\Lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi\times\phi_j}(p^n)}{np^{n(\frac12+\frac{1}{\log x})}}\frac{\log\frac{x}{p^n}}{\log x}+\mathcal{O}(\frac{\log(X+t_\phi)}{\log x}+1),$$

$$\log|L(\frac12+z_1,\phi_j)|\le\mathrm{Re}\sum_{p^n\le x}\frac{\Lambda_{\phi_j}(p^n)}{np^{n(\frac12+\frac{1}{\log x}+z_1)}}\frac{\log\frac{x}{p^n}}{\log x}+\mathcal{O}(\frac{\log(X+T)}{\log x}+1),$$

and

$$\log|L(\frac12+z_2,\phi_j)|\le\mathrm{Re}\sum_{p^n\le x}\frac{\Lambda_{\phi_j}(p^n)}{np^{n(\frac12+\frac{1}{\log x}+z_2)}}\frac{\log\frac{x}{p^n}}{\log x}+\mathcal{O}(\frac{\log(X+T)}{\log x}+1).$$

证明。 参见 [Cha09] [Sou09]。 □

对于实数 $x \geq 10$ 和复数 z，我们定义

$$\mathcal{N}(z,x) = \begin{cases} \log\log x, & |z| \leq \frac{1}{\log x}, \\ -\log|z|, & \frac{1}{\log x} \leq |z| \leq 1, \\ 0, & |z| \geq 1. \end{cases} \tag{5.1}$$

此外，我们定义

$$\mathcal{M}(z_1,z_2,x) = \mathcal{N}(z_1,x) + \mathcal{N}(z_2,x). \tag{5.2}$$

引理 5.2。 假设广义黎曼猜想和广义黎曼猜想成立。设 ϕ, ϕ_j 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上两个不同的海克–马斯尖点形式。设 $X \leq t_j \leq 2X$, $1 \leq t_\phi^\delta \leq T \leq t_\phi$ 和 $T^{1-\varepsilon} \leq X \leq 3t_\phi$。假设$0 \leq \mathrm{Re}(z_1) \leq {}^{1}\!/_{\log X}$且 $|z_1| \leq 3T$。对于 $x \geq 2$和 $x \leq X^2$，我们有

$$\sum_{p\leq x} \frac{\lambda_{\mathrm{sym}^4\phi}(p)\lambda_{\mathrm{sym}^2\phi_j}(p)}{p} = O(\log\log\log(t_j+t_\phi)), \tag{5.3}$$

$$\sum_{p\leq x} \frac{\lambda_{\mathrm{sym}^2\phi}(p)\lambda_{\mathrm{sym}^2\phi_j}(p)}{p} = O(\log\log\log(t_j+t_\phi)), \tag{5.4}$$

$$\sum_{p\leq x} \frac{\lambda_{\mathrm{sym}^2\phi}(p)}{p} = O(\log\log\log t_\phi), \tag{5.5}$$

$$\sum_{p\leq x} \frac{\lambda_{\mathrm{sym}^2\phi_j}(p)}{p} = O(\log\log\log t_j). \tag{5.6}$$

$$\sum_{p\leq x} \frac{\lambda_{\mathrm{sym}^2\phi_j}(p)}{p^{1+z_1}} = O(\log\log\log(t_j+T)). \tag{5.7}$$

$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p^{1+z_1}} = \mathcal{N}(z_1,x) + \mathcal{O}(\log\log\log T). \tag{5.8}$$

证明. 我们只证明 (5.7) 和 (5.8). (5 的证明见 (5.3)–(5.4)(5.5)–(5.6) 见 [HHL24]。注意，$L(s, \mathrm{Sym}^2\phi_j)$ 可以解析延拓至复平面，并满足一个函数方程。假设 $L(s, \mathrm{Sym}^2\phi_j)$ 满足广义黎曼猜想。因此，$\log L(s, \mathrm{Sym}^2\phi_j)$ 在区域 $\mathrm{Re}(s) \geq \frac{1}{2} + {}^{1}\!/_{\log x}$ 内解析。此外，通过重复利特尔伍德的一个经典论证（参见蒂奇马什[Tit86, (14.2.2)]），在此区域内有

$$|\log L(s, \mathrm{Sym}^2 u_j)| \ll \Big(\mathrm{Re}(s) - \frac{1}{2}\Big)^{-1} \log(t_j + |\mathrm{Im}(s)|). \tag{5.9}$$

由佩龙公式可知，对于 $x \geq 2$，有

$$\sum_{p\leq x} \frac{\lambda_{\mathrm{sym}^2\phi_j}(p)}{p^{1+z_1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{1-ix\log(t_j+T+x)}^{1+ix\log(t_j+T+x)} \log L(s+1+z_1, \mathrm{Sym}^2\phi_j) x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} + \mathcal{O}(1). \tag{5.10}$$

将积分路径移至 $\mathrm{Re}(s)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{\text{对数}\,x}$，并在 $s=0$ 处得到一个简单极点，其留数为对数 $L(1+z_1,\mathrm{Sym}^2\phi_j)$。上方的水平积分路径有如下界

$$\ll \frac{1}{|x(\log(t_j+T+x))|}\int_{-\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x}+ix\log(t_j+T+x)}^{1+ix\log(t_j+T+x)}|\log L(s+1+z_1,\mathrm{Sym}^2\phi_j)||x^s||\mathrm{d}s|$$
$$\ll \frac{\log x\log(t_j+T+x\log(t_j+T+x))}{|x(\log(t_j+T+x))|}\int_{-\frac{1}{2}}^{1}x^u\mathrm{d}u\ll 1, \quad (5.11)$$

下方的水平积分路径也为 $O(1)$。因此，由 (5.9) 可得，对于 $x\geq 2$，有

$$\sum_{p\leq x}\frac{\lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi_j}(p)}{p^{1+z_1}}$$
$$=\log L(1+z_1,\mathrm{Sym}^2\phi_j)+\mathcal{O}\Big(\frac{\log x}{\sqrt{x}}\int_{-x\log(t_j+T+x)}^{x\log(t_j+T+x)}\frac{\log(t_j+T+|u|)}{1+u}\mathrm{d}u\Big)$$
$$=\log L(1+z_1,\mathrm{Sym}^2\phi_j)+\mathcal{O}\Big(\frac{(\log x)^2\log(t_j+T)}{\sqrt{x}}\Big) \quad (5.12)$$

将上述估计应用两次，我们得到，对于 $y\geq(\text{对数}(T+t_j))^{10}$，有

$$|\sum_{(\log(X+t_j))^{10}<p\leq y}\frac{\lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi_j}(p)}{p^{1+z_1}}|\ll 1. \quad (5.13)$$

假设广义黎曼猜想成立，对于 $y\leq(\text{对数}(T+t_j))^{10}$，有

$$|\sum_{p\leq y}\frac{\lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi_j}(p)}{p^{1+z}}|\ll \log\log\log(T+t_j). \quad (5.14)$$

因此得到 (5.7)。

现在证明 (5.8)。由素数定理可得

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p^{1+z_1}}=\int_2^x\frac{1}{t^{1+z_1}\log t}\mathrm{d}t+\mathcal{O}(1).$$

当 $|z_1|\leq(\text{对数}\,x)^{-1}$ 时，我们得到

$$\int_2^x\frac{1}{t^{1+z_1}\log t}\mathrm{d}t=\int_2^x\frac{1}{t\log t}\sum_{n\geq 0}\frac{(-z_1\log t)^n}{n!}\mathrm{d}t$$
$$=\log\log x+\sum_{n\geq 1}\frac{(-z_1\log x)^n}{n!n}=\log\log x+\mathcal{O}(1). \quad (5.15)$$

当 $(\text{对数}\,x)^{-1}\leq|z_1|\leq 1$ 时，我们注意到

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-y)^n}{n!n}=\int_1^y\frac{e^{-s}-1}{s}\mathrm{d}s+\mathcal{O}(1)=-\log y+\int_1^y\frac{e^{-s}}{s}\mathrm{d}s+\mathcal{O}(1).$$

那么，根据柯西积分定理，我们有

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-z_1\log x)^n}{n!n}=-\log(|z_1|\log x)+\mathcal{O}(\int_1^{+\infty}+\int_{i\,\mathrm{Im}(z_1)\log x+\mathrm{Re}(z_1)\log x}^{i\,\mathrm{Im}(z_1)\log x+\infty}\frac{e^{-\sigma}}{|s|}\mathrm{d}s)+\mathcal{O}(1).$$

由于 $1 \leq |z_1|$对数 $x \leq$对数 x，我们得到 $|s| \geq 1$。然后，我们用绝对常数对这两个积分进行估计。现在我们得到

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p^{1+z_1}} = -\log|z_1| + \mathcal{O}(1).$$

当 $|z_1| \geq 1$ 时，我们必须有 $|\mathrm{Re}(z_1)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$，或者 $|\mathrm{Im}(z_1)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$。$|\mathrm{Re}(z_1)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的情形相当简单。假设 $|\mathrm{Im}(z_1)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$。我们采用与 (5.7) 的证明非常相似的过程。在这种情况下，我们得到

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p^{1+z_1}} \ll \log\log\log T.$$

综上，我们有

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p^{1+z_1}} = \mathcal{N}(z_1, x) + \mathcal{O}(\log\log\log T).$$

证明至此完成。 □

由引理 5.1 和引理 5.2 可知，我们可以将短狄利克雷多项式限制为对素数求和。

引理 5.3。假设广义黎曼猜想和广义黎曼猜想成立。设 $X \leq t_j \leq 2X$、$T \leq t_\phi$ 和 $t_\phi^{1-\varepsilon} \leq X \leq 3t_\phi$。设$0 \leq \mathrm{Re}(z_1)$，$\mathrm{Re}(z_2) \leq \frac{1}{\log X}$ 且 $|z_1|$、$|z_2| \leq 3T$，则我们有

$$\log L(\frac{1}{2}, \phi_j) \leq \sum_{p \leq x} \frac{\Lambda_{\phi_j}(p)}{p^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x}}} \frac{\log \frac{x}{p}}{\log x} - \frac{1}{2}\log\log x + \mathcal{O}(\log\log\log X) + \mathcal{O}(\frac{\log X}{\log x} + 1),$$

$$\log L(\frac{1}{2}, \mathrm{Sym}^2 \phi \times \phi_j) \leq \sum_{p \leq x} \frac{\Lambda_{\mathrm{Sym}^2 \phi \times \phi_j}(p)}{p^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x}}} \frac{\log \frac{x}{p}}{\log x} - \frac{1}{2}\log\log x$$
$$+ \mathcal{O}(\log\log\log(X + t_\phi)) + \mathcal{O}(\frac{\log(X + t_\phi)}{\log x} + 1),$$

and

$$\log|L(\frac{1}{2} + z_1, \phi_j)L(\frac{1}{2} + z_2, \phi_j)| \leq \mathrm{Re} \sum_{p \leq x} \frac{\Lambda_{\phi_j}(p)(p^{-z_1} + p^{-z_2})}{p^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x}}} \frac{\log \frac{x}{p}}{\log x} - \frac{1}{2}\mathcal{M}(z_1, z_2, x)$$
$$+ \mathcal{O}(\log\log\log(X + T)) + \mathcal{O}(\frac{\log(X + T)}{\log x} + 1). \quad (5.16)$$

证明。在广义黎曼猜想下，我们可以将求和范围限制为 p^n、$n \leq 2$，即

$$\sum_{\substack{p^n \leq x \\ n \geq 3}} \frac{\Lambda_{\phi_j}(p^n)}{np^{n(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x})}} \frac{\log \frac{x}{p^n}}{\log x} \ll 1.$$

我们还假设 $x \leq X^2$，并得到

$$\log L(\frac{1}{2}, \phi_j) \leq \sum_{p \leq x} \frac{\Lambda_{\phi_j}(p)}{p^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x})}} \frac{\log \frac{x}{p}}{\log x} + \sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{\Lambda_{\phi_j}(p^2)}{2p^{2(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x})}} \frac{\log \frac{x}{p^2}}{\log x} + \mathcal{O}(\frac{\log X}{\log x} + 1).$$

第二个求和为

$$\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{\lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi_j}(p)-1}{2p^{1+\frac{2}{\log x}}}\frac{\log\frac{x}{p^2}}{\log x}=\frac{1}{2}\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{\lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi_j}(p)}{p^{1+\frac{2}{\log x}}}\frac{\log\frac{x}{p^2}}{\log x}-\frac{1}{2}\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p^{1+\frac{2}{\log x}}}\frac{\log\frac{x}{p^2}}{\log x}.$$

我们有

$$\begin{aligned}\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p^{1+\frac{2}{\log x}}}\frac{\log\frac{x}{p^2}}{\log x}&=\int_2^{\sqrt{x}}\frac{1}{t^{1+\frac{2}{\log x}}}(1-\frac{\log t^2}{\log x})\mathrm{d}\pi(t)\\&=\int_2^{\sqrt{x}}\frac{1}{t^{1+\frac{2}{\log x}}\log t}\mathrm{d}t+\mathcal{O}(1)\\&=\sum_{n\ge0}\frac{1}{n!}\int_2^{\sqrt{x}}\frac{(-\frac{2\log t}{\log x})^n}{t\log t}\mathrm{d}t\\&=\log\log x+\sum_{n\ge1}\frac{(-2)^n}{n!}\int_2^{\sqrt{x}}\frac{(\frac{\log t}{\log x})^n}{t\log t}\mathrm{d}t\\&=\log\log x+\sum_{n\ge1}\frac{(-2)^n}{n!}\frac{(\frac{1}{2}\log x)^n}{(\log x)^n}=\log\log x+O(1).\end{aligned}\tag{5.17}$$

And

$$\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{\lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi_j}(p)}{p^{1+\frac{2}{\log x}}}\frac{\log\frac{x}{p^2}}{\log x}=\int_2^{\sqrt{x}}\sum_{p\le t}\frac{\lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi_j}(p)}{p}t^{-\frac{2}{\log x}}(\frac{4}{t\log x}-\frac{4\log t}{t(\log x)^2})\mathrm{d}t+\mathcal{O}(1)$$

$\ll$对数 对数 对数 t_ϕ.

于是我们得到

$$\log L(\frac{1}{2},\phi_j)\le\sum_{p\le x}\frac{\Lambda_{\phi_j}(p)}{p^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x})}}\frac{\log\frac{x}{p}}{\log x}-\frac{1}{2}\log\log x+\mathcal{O}(\log\log\log t_\phi).$$

同理，由

$$\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{\Lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi\times\phi_j}(p^2)}{2p^{2(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x})}}\frac{\log\frac{x}{p^2}}{\log x}=\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{(\lambda_{\mathrm{Sym}^4\phi}(p)-\lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi}(p)+1)(\lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi_j}(p)+1)}{2p^{2(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x})}}\frac{\log\frac{x}{p^2}}{\log x}$$

以及引理 5.2，我们得到

$$\log L(\frac{1}{2},\mathrm{Sym}^2\phi\times\phi_j)\le\sum_{p\le x}\frac{\Lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi\times\phi_j}(p)}{p^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x})}}\frac{\log\frac{x}{p}}{\log x}-\frac{1}{2}\log\log x+\mathcal{O}(\log\log\log(X+t_\phi)).$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}&\log|L(\frac{1}{2}+z_1,\phi_j)L(\frac{1}{2}+z_2,\phi_j)|\le\\&\qquad\mathrm{Re}\sum_{p\le x}\frac{\Lambda_{\phi_j}(p)(p^{-z_1}+p^{-z_2})}{p^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x}}}\frac{\log\frac{x}{p}}{\log x}-\frac{1}{2}\mathcal{M}(z_1,z_2,x)+\mathcal{O}(\log\log\log(t_\phi+T))\end{aligned}\tag{5.18}$$

from

$$\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{\lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi_j}(p)(p^{-2z_1}+p^{-2z_2})}{p^{1+\frac{2}{\log x}}}\frac{\log\frac{x}{p^2}}{\log x}$$
$$=\int_2^{\sqrt{x}}\sum_{p\le t}\frac{\lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi_j}(p)(p^{-2z_1}+p^{-2z_2})}{p}t^{-\frac{2}{\log x}}(\frac{4}{t\log x}-\frac{4\log t}{t(\log x)^2})\mathrm{d}t+\mathcal{O}(1)$$
$$\ll \text{对数 对数 对数}(X+T) \quad (5.19)$$

and

$$\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{p^{-2z_1}+p^{-2z_2}}{p^{1+\frac{2}{\log x}}}\frac{\log\frac{x}{p^2}}{\log x}=\int_2^{\sqrt{x}}\sum_{p\le t}\frac{p^{-2z_1}+p^{-2z_2}}{p}t^{-\frac{2}{\log x}}(\frac{4}{t\log x}-\frac{4\log t}{t(\log x)^2})\mathrm{d}t+\mathcal{O}(1)$$
$$=\mathcal{M}(z_1,z_2,x)+\mathcal{O}(\log\log\log(X+T)) \quad (5.20)$$

其中

$$\mathcal{M}(z_1,z_2,x)=\mathcal{N}(z_1,x)+\mathcal{N}(z_2,x).$$

现在我们讨论（5.20）。我们只需考虑包含 z_1 的和。当 $|z_1|\ge 1$ 时，上界直接由（5.8）得到。当 $\frac{1}{\text{对数}\,x}\le|z_1|\le 1$ 时，我们回到分部求和过程，得到

$$-\int_2^{e^{\frac{1}{2|z_1|}}}(\log\log t)\mathrm{d}(\frac{\log\frac{x}{t^2}}{\log x}t^{-\frac{2}{\log x}})-\int_{e^{\frac{1}{2|z_1|}}}^{\sqrt{x}}(-\log|2z_1|)\mathrm{d}(\frac{\log\frac{x}{t^2}}{\log x}t^{-\frac{2}{\log x}})$$
$$=\int_2^{e^{\frac{1}{2|z_1|}}}\frac{1}{t\log t}(1-\frac{2\log t}{\log x})t^{-\frac{2}{\log x}}\mathrm{d}t=\int_2^{e^{\frac{1}{2|z_1|}}}\frac{1}{t\log t}(1-\frac{2\log t}{\log x})\sum_{n\ge0}\frac{(\frac{-2\log t}{\log x})^n}{n!}\mathrm{d}t$$
$$=-\log|z_1|+\mathcal{O}(\log\log\log(X+T)). \quad (5.21)$$

当 $|z_1|\le\ \frac{1}{\text{对数}\,x}$ 时，同前可得

$$-\int_2^{\sqrt{x}}(\log\log t)\mathrm{d}(\frac{\log\frac{x}{t^2}}{\log x}t^{-\frac{2}{\log x}})=\log\log x+\mathcal{O}(\log\log\log(X+T)).$$

现在我们完成证明。

□

5.2. **约化为密度函数**。我们定义

$$\mathcal{L}(t_j)=L(\frac{1}{2},\phi_j)^{\ell_1}L(\frac{1}{2},\mathrm{Sym}^2\phi\times\phi_j)^{\ell_2}|L(\frac{1}{2}+z_1,\phi_j)L(\frac{1}{2}+z_2,\phi_j)|^{\ell_3}$$

以及密度函数

$$\mathcal{B}_{X,Y}(V)=\#\{X\le t_j\le X+Y:\log\mathcal{L}(t_j)>V,\phi_j\ne\phi\}.$$

我们有如下恒等式

$$\sum_{X\le t_j\le X+Y}\mathcal{L}(t_j)=\int_{\mathbb{R}}e^V\mathcal{B}_{X,Y}(V)\mathrm{d}V+\delta_{X\le t_\phi\le X+Y}D_\phi\mathcal{L}(t_\phi)$$

其中， D_ϕ 是谱参数为 t_ϕ 的特征函数个数。根据[Cha09] 和 [CS11], 中的方法，我们有

$$L(\frac{1}{2},\pi) \ll \exp(\frac{c\log C(\pi)}{\log\log C(\pi)}).$$

其中 $C(\pi)$ 是 π 的解析导子。因此由魏尔定律可得

$$\delta_{X\le t_\phi\le X+Y} D_\phi \mathcal{L}(t_\phi) \ll Y e^{\frac{C\log(X+t_\phi)}{\log\log(X+t_\phi)}}.$$

现在我们只考虑

$$\sqrt{\log\log(X+t_\phi)} \le V \le C\frac{\log(X+t_\phi)}{\log\log(X+t_\phi)}$$

并且我们需要估计在此范围内 $B_{X,\ Y}(V)$ 的大小。我们定义

$$\mu(X) = (-\frac{1}{2}+\varepsilon)(\ell_1+\ell_2)\log\log(X+t_\phi) - \frac{\ell_3}{2}\mathcal{M}(z_1,z_2,X+t_\phi).$$

由引理 5.3 可得

$$\begin{aligned}\log\mathcal{L}(t_j) &= \ell_1\log L(\frac{1}{2},\phi_j) + \ell_2\log L(\frac{1}{2},\mathrm{Sym}^2\phi\times\phi_j) + \ell_3\log|L(\frac{1}{2}+z_1,\phi_j)L(\frac{1}{2}+z_2,\phi_j)| \\ &\le \sum_{p\le x}\frac{(\ell_1+\ell_2\lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi}(p))\lambda_j(p)}{p^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x})}}\frac{\log\frac{x}{p}}{\log x} + \mathrm{Re}\sum_{p\le x}\frac{\ell_3(p^{-z_1}+p^{-z_2})\lambda_j(p)}{p^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x})}}\frac{\log\frac{x}{p}}{\log x} \\ &\quad - \frac{1}{2}(\ell_1+\ell_2)\log\log x - \frac{1}{2}\ell_3\mathcal{M}(z_1,z_2,x) + \mathcal{O}(\log\log\log(X+t_\phi)). \quad (5.22)\end{aligned}$$

我们定义

$$\mathcal{P}(t_j;x,y) = \sum_{p\le y}\frac{(\ell_1+\ell_2\lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi}(p)+\ell_3(\frac{p^{-z_1}+p^{-\overline{z_1}}+p^{-z_2}+p^{-\overline{z_2}}}{2}))\lambda_j(p)}{p^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x})}}\frac{\log\frac{x}{p}}{\log x}$$

and

$$\mathcal{A}_{X,Y}(V,x) = \#\{X < t_j \le X+Y : \mathcal{P}(t_j;x,x) > V\}.$$

现在令 $x = X^{\frac{1}{\varepsilon V}}$ 当 $\sqrt{\log\log X} \le V \le (\log\log(X+t_\phi))^4$, 时，我们得到

$$-\frac{1}{2}(\ell_1+\ell_2)\log\log(X+t_\phi) - \frac{\ell_3}{2}\mathcal{M}(z_1,z_2,X+t_\phi) + \log\log\log(X+t_\phi) \ll \mu(X).$$

Then

$$\mathcal{B}_{X,Y}(V+\mu(X)) \le \mathcal{A}_{X,Y}(V(1-2\varepsilon),x). \quad (5.23)$$

对于 $V \ge (\log\log(X+t_\phi))^4$, , 我们使用 $V+\mu(X) = V(1+o(1))$, 于是上面的不等式也成立。

5.3. 狄利克雷多项式的均值界。在估计密度函数 $\mathcal{A}_{X,Y}(V(1-2\varepsilon)\ x)$ 之前，我们需要一个关于狄利克雷多项式矩的均值定理。

我们引入调和权重

$$\omega_j = \frac{4\pi|\rho_j(1)|^2}{\cosh(\pi t_j)} = \frac{2\pi}{L(1,\mathrm{Sym}^2\phi_j)} \quad \text{and} \quad \omega(t) = \frac{4\pi|\rho_t(1)|^2}{\cosh(\pi t)} = \frac{4\pi}{|\zeta(1+2it)|^2}.$$

Fo对于任意满足以下条件的偶测试函数 $h(t)$ s:

(i) $h(t)$ 在 $|\mathrm{Im}(t)| \leq 1/2+\varepsilon$ 内全纯,

(ii) $h(t) \ll (1+|t|)^{-2-\varepsilon}$ 在上述带状区域内,

我们有如下 Kuznetsov 公式（例如参见 [CI00, Eq. (3.17)] ）。

引理 5.4。 对于 $m, n \geq 1$，有

$$\sum_j h(t_j)\omega_j\lambda_j(m)\lambda_j(n) + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\omega(t)\eta_t(m)\eta_t(n)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{\delta_{m,n}H^0}{\pi} + \sum_{c\geq 1}\frac{1}{c}S(n,m;c)H^+\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right),$$

其中$\delta_{m,\ n}$ 是克罗内克符号,

$$\begin{aligned} H^0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\tanh(\pi t)t\mathrm{d}t, \\ H^+(x) &= 2i\int_{-\infty}^{\infty} J_{2it}(x)\frac{h(t)t}{\cosh(\pi t)}\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{5.24}$$

且 $J_\nu(x)$是标准的 J-贝塞尔函数。

设 X 是一个较大的实数，满足 $t_\phi^\delta \leq X \leq 3t_\phi$ 和 $X^\varepsilon \leq Y \leq X$。我们定义权函数

$$h(t;X,Y) := e^{-\left(\frac{t-X}{Y}\right)^2} + e^{-\left(\frac{t+X}{Y}\right)^2},$$

于是我们得到以下辅助引理。

引理 5.5. 对于任意正整数 $n \ll X^{2-\varepsilon}$，我们有

$$\sum_{j\geq 1} w_j\lambda_j(n)h(t_j;X,Y) = \delta_{n,1}(\frac{2}{\sqrt{\pi}}XY + \mathcal{O}(Y^2)) + O(X^\varepsilon Y), \tag{5.25}$$

其中 $w_j = \frac{2\pi}{L(1,\text{对称}^2\phi_j)}$。

证明。 由 Kuznestov 迹公式引理 5.4，我们得到左侧为

$$\frac{\delta_{n,1}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t;X,Y)(\tanh\pi t)t\mathrm{d}t + \sum_{c\geq 1}\frac{1}{c}S(n,1;c)H^+\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{c}\right)$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(t;X,Y)\omega(t)\eta_t(n)\mathrm{d}t. \tag{5.26}$$

Eisenstein 部分有如下界

$$X^\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} h(t;X,Y)\mathrm{d}t \ll X^\varepsilon Y$$

根据 $h(t;\ X,Y)$ 的定义。回忆

$$H^+(x) = 2i\int_{-\infty}^{\infty} J_{2it}(x)\frac{h(t)t}{\cosh(\pi t)}\mathrm{d}t.$$

根据 [You17，引理 7.1], ，当 $\frac{\sqrt{n}}{c} \leq X$ 时，我们有界 $H^+(\frac{4\pi\sqrt{n}}{c}) \ll Y\frac{\sqrt{n}}{c}$。当 $\frac{\sqrt{n}}{c} \ll YX^{1-\varepsilon}$ 时，我们还有 $H^+(\frac{4\pi\sqrt{n}}{c}) \ll X^{-10}$。注意 $\sqrt{n} \ll X^{1-\varepsilon}$。我们对 Kloosterman 和使用 Weil 界。于是得到 J-贝塞尔函数的贡献为

$$\sum_{c\leq X^{10}} \frac{\tau(c)}{\sqrt{c}} X^{-10} + \sum_{c\geq X^{10}} \frac{\tau(c)}{\sqrt{c}} Y\frac{\sqrt{n}}{c} \ll X^{-1}.$$

直接计算可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t;X,Y)(\tanh \pi t)t\mathrm{d}t = 2\sqrt{\pi}XY + \mathcal{O}(Y^2).$$

□

引理 5.6. 设 $r \in \mathbb{N}$。那么对于 $x \leq X^{\frac{1}{10r}}$ 和实数 $a_p \ll p^{\frac{1}{2}}$，有

$$\sum_j \frac{h(t_j;X,Y)}{L(1,\mathrm{sym}^2\phi_j)}\Big(\sum_{p\leq x}\frac{a_p\lambda_j(p)}{p^{\frac{1}{2}}}\Big)^{2r} \ll G(X,Y)\frac{(2r)!}{r!2^r}\Big(\sum_{p\leq x}\frac{a_p^2}{p}\Big)^r + X^{1/2+\varepsilon}Y.$$

其中 $G(X,Y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}XY + \mathcal{O}(Y^2)$。

证明。 首先我们有

$$\Big(\sum_{p\leq x}\frac{a_p\lambda_j(p)}{p^{\frac{1}{2}}}\Big)^{2r} = \sum_{n\leq x^{2r}}\frac{a_{2r,x}(n)}{n^{1/2}}\prod_{n=\prod_i p_i^{\alpha_i}}\lambda_j(p_i)^{\alpha_i}$$

其中

$$a_{2r,x}(n) = \begin{cases} \binom{2r}{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}\prod_{i=1}^s a(p_i)^{\alpha_i}, & \text{if } n=\prod_i p_i^{\alpha_i}, p_i\leq x \text{ and } \sum_i\alpha_i = 2r, \\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{5.27}$$

根据 Hecke 关系及一些计算，我们知道（例如参见 [LL11，引理 7.1]）

$$\lambda_j(p)^\alpha = \sum_{l=0}^{\alpha/2}\frac{\alpha!(2l+1)}{(\alpha/2-l)!(\alpha/2+l+1)!}\lambda_j(p^{2l}),$$

若 $2\mid\alpha$；且

$$\lambda_j(p)^\alpha = \sum_{l=0}^{(\alpha-1)/2}\frac{\alpha!(2l+2)}{((\alpha-1)/2-l)!((\alpha+3)/2+l)!}\lambda_j(p^{2l+1}),$$

若 $2\nmid\alpha$。因此我们可以写成 $\lambda_j(p)^\alpha = \sum_{\beta=0}^{\alpha} b_{\alpha,\beta}\lambda_j(p^\beta)$，其中

$$b_{\alpha,\beta} = \begin{cases} \frac{\alpha!(\beta+1)}{(\frac{\alpha-\beta}{2})!(\frac{\alpha+\beta}{2}+1)!}, & \text{if } \alpha\equiv\beta \mod 2,\ 0\leq\beta\leq\alpha, \\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

因此我们得到

$$\left(\sum_{p\leq x}\frac{a_p\lambda_j(p)}{p^{1/2}}\right)^{2r} = \sum_{n\leq x^{2r}}\frac{a_{2r,x}(n)}{n^{1/2}}\sum_{m\mid n}b(m,n)\lambda_j(m),$$

其中 $b(m,n)=\prod_{i=1}^{s} b_{\alpha,\beta}$ 当 $m=\prod_{i=1}^{s} p_i^{\beta_i}$ 时。特别地，除非对所有 i 都有 $2\mid\alpha_i$，否则 $b(1,n)=0$；若是如此，则有 $b(1,n)=\prod_{i=1}^{s}\frac{\alpha_i!}{(\alpha_i/2)!(\alpha_i/2+1)!}$。注意，我们有

$$0\le b_{\alpha,\beta}\le\binom{\alpha}{(\alpha-\beta)/2}\le 2^{\alpha},\quad 0\le b(m,n)\le\prod_{i=1}^{s}2^{\alpha_i}\le n. \tag{5.28}$$

现在我们定义

$$\begin{aligned}\sum_j\frac{h(t_j;X,Y)}{L(1,\operatorname{sym}^2\phi_j)}\Big(\sum_{p\le x}\frac{a_p\lambda_j(p)}{p^{\frac12}}\Big)^{2r}&=\sum_j\frac{h(t_j;X,Y)}{L(1,\operatorname{sym}^2\phi_j)}\sum_{n\le x^{2r}}\frac{a_{2r,x}(n)}{n^{1/2}}\sum_{m\mid n}b(m,n)\lambda_j(m)\\&=\sum_{n\le x^{2r}}\frac{a_{2r,x}(n)}{n^{1/2}}\sum_{m\mid n}b(m,n)\sum_j\frac{h(t_j;X,Y)}{L(1,\operatorname{sym}^2\phi_j)}\lambda_j(m).\end{aligned}$$

根据引理 5.6，我们得到两部分。记作 $G(X,Y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}XY+O(Y^2)$。对角项为

$$\sum_{n\le x^{2r}}\frac{a_{2r,x}(n)}{n^{1/2}}b(1,n)G(X,Y)=G(X,Y)\sum_{\substack{n=\prod_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i}\\2\mid\alpha_i,p_i\le x}}\frac{a_{2r,x}(n)}{n^{1/2}}\prod_{i=1}^{s}\frac{\alpha_i!}{(\alpha_i/2)!(\alpha_i/2+1)!}.$$

令 $\alpha_i=2\beta_i$ 和 $n=m^2=(\prod_{i=1}^{s}p_i^{\beta_i})^2$，，则该和化简为

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{m=\prod_{i=1}^{s}p_i^{\beta_i}\\p_i\le x}}\frac{a_{2r,x}(m^2)}{m}\prod_{i=1}^{s}\frac{(2\beta_i)!}{(\beta)!(\beta+1)!}&=\sum_{\substack{m=\prod_{i=1}^{s}p_i^{\beta_i}\\p_i\le x}}\frac{\binom{2r}{2\beta_1,\dots,2\beta_s}\prod_{i=1}^{s}a(p_i)^{2\beta_i}}{m}\prod_{i=1}^{s}\frac{(2\beta_i)!}{(\beta)!(\beta+1)!}\\&\le\sum_{\substack{m=\prod_{i=1}^{s}p_i^{\beta_i}\\p_i\le x}}\frac{\prod_{i=1}^{s}a(p_i)^{2\beta_i}}{m}\frac{(2r!)}{2^r r!}\binom{r}{\beta_1,\dots,\beta_s}\\&\le\frac{(2r)!}{2^r r!}(\sum_{p\le x}\frac{a(p)^2}{p})^r.\end{aligned}$$

非对角项的上界为

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\le x^{2r}}\frac{a_{2r,x}(n)}{n^{1/2}}\sum_{m|n}b(m,n)X^{\varepsilon}Y\\
&\quad\le X^{\varepsilon}Y\sum_{n\le x^{2r}}\frac{a_{2r,x}(n)}{n^{1/2}}\tau(n)n\\
&\quad\le X^{\varepsilon}Y\sum_{\substack{n=\prod_i^s p_i^{\alpha_i}\\ \sum_i^s\alpha_i=2r,p_i\le x}}\frac{\binom{2r}{\alpha_1,\dots,\alpha_s}\prod_{i=1}^s|a(p_i)|^{\alpha_i}}{n^{1/2}}\tau(n)n\\
&\quad\le X^{\varepsilon}Yx^{r+\varepsilon}(\sum_{p\le x}|a(p)|)^{2r}\ll X^{\varepsilon}Yx^{5r}\ll X^{1/2+\varepsilon}Y.
\end{aligned}$$

于是我们完成了证明。

□

5.4. **密度函数的估计**。回顾

$$\lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi}(p)^2=\lambda_\phi(p^4)-\lambda_\phi(p^2)+1.$$

我们定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(z_1,z_2,x):=\ &2\mathcal{N}(2z_1,x)+2\mathcal{N}(2z_2,x)\\
&+2\mathcal{N}(2\,\mathrm{Re}(z_1),x)+2\mathcal{N}(2\,\mathrm{Re}(z_2),x)+4\mathcal{N}(z_1+z_2,x)+4\mathcal{N}(z_1+\bar{z}_2,x).
\end{aligned}\tag{5.29}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{p\le x}\frac{|(\ell_1+\ell_2\lambda_{\mathrm{Sym}^2\phi}(p)+\ell_3(\frac{p^{-z_1}+p^{-\overline{z_1}}+p^{-z_2}+p^{-\overline{z_2}}}{2}))|^2}{p}&=(\ell_1^2+\ell_2^2)\log\log x\\
&+\frac{\ell_3^2}{4}\mathcal{V}(z_1,z_2,x)+2\ell_1\ell_3\mathcal{M}(z_1,z_2,x)+\mathcal{O}(\log\log\log(X+t_\phi)).
\end{aligned}\tag{5.30}$$

我们记

$$\sigma(X)^2=(\ell_1^2+\ell_2^2)\log\log(X+t_\phi)+\frac{\ell_3^2}{4}\mathcal{V}(z_1,z_2,X+t_\phi)+2\ell_1\ell_3\mathcal{M}(z_1,z_2,X+t_\phi).$$

现在我们得到了证明中的以下关键不等式。

命题 5.7. 假设广义黎曼猜想和广义黎曼猜想成立。令 $C\ge 1$ 为固定值，且令 $\varepsilon>0$ 充分小。采用上述记号，对于 ~~√对数~~ 对数 $X\le V\le C$ ~~对数$(X+t_\phi)$~~ 对数~~对数$(X+t_\phi)$~~，有

$$\mathcal{A}_{X,Y}(V;X^{\frac{1}{\varepsilon V}})\ll G(X,Y)\Big(e^{-\frac{(1-2\varepsilon)V^2}{2\sigma(X)^2}}\log\log(X+t_\phi)+e^{-\frac{\varepsilon}{11}V\log V}\Big).\tag{5.31}$$

证明。我们在下文中始终假设 ~~√对数~~ ~~对数~~ $X\le V\le C$ ~~对数$(X+t_\phi)$~~ 对数 对数$(X+t_\phi)$。令 $x=X^{\frac{1}{\varepsilon V}}$ ~~并设~~ $z=x^{\log$ 对数$(X+t_\phi)}$。记 $\mathcal{P}(t_j;x,x)=\mathcal{P}_1(t_j)+\mathcal{P}_2(t_j)$，其中 $\mathcal{P}_1(t_j)=\mathcal{P}(t_j;x,z)$。此外，令$V_1=(1-\varepsilon)V$且 $V_2=\varepsilon V$。若 $\mathcal{P}(t_j;x,x)>V$，则

$$\text{i) }\mathcal{P}_1(t_j)>V_1,\tag{5.32}$$

or

$$\text{ii) } \mathcal{P}_2(t_j) > V_2. \tag{5.33}$$

我们先考虑情形 i)。利用引理 5.6，并注意到条件 $z^{\frac{1}{\varepsilon V}} \le X^{\frac{1}{10r}}$ 限制了 $r \le \frac{\varepsilon V}{10}$ 对数-对数 $(X+t_\phi)$。满足 (5.32) 的 $X < t_j \le X+Y$ 的数量有如下上界：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V_1^{2r}} \sum_{X<t_j\le X+Y} \mathcal{P}_1(t_j)^{2r} &\ll \frac{(\log\log X)^3}{V_1^{2r}} \sum_{t_j} \frac{h(t_j;X,Y)}{L(1,\operatorname{sym}^2\phi_j)} \mathcal{P}_1(t_j)^{2r} \\
&\ll G(X,Y)(\log\log X)^3 \frac{(2r)!}{V_1^{2r} r! 2^r} \Big(\sum_{p\le z} \frac{|(\ell_1 + \ell_2\lambda_{\operatorname{Sym}^2\phi}(p) + \ell_3(\frac{p^{-z_1}+p^{-\overline{z_1}}+p^{-z_2}+p^{-\overline{z_2}}}{2}))|^2}{p}\Big)^r \\
&\quad + \frac{X^{1/2+\varepsilon}Y}{V_1^{2r}} \\
&\ll G(X,Y)(\log\log X)^3 \frac{(2r)!}{V_1^{2r} r! 2^r} (\sigma(X)(1+o(1)))^{2r} + \frac{X^{1/2+\varepsilon}Y}{V_1^{2r}} \\
&\ll G(X,Y)(\log\log X)^3 \Big(\frac{2r\sigma(X)^2(1+o(1))}{V_1^2 e}\Big)^r + \frac{X^{1/2+\varepsilon}Y}{V_1^{2r}} \\
&\ll G(X,Y)(\log\log X)^3 \Big(\frac{2r\sigma(X)^2(1+o(1))}{V_1^2 e}\Big)^r
\end{aligned} \tag{5.34}$$

其中，在第一步中，我们在广义黎曼猜想和广义黎曼猜想下应用了 $L(1, \operatorname{sym}^2\phi_j) \ll$ (对数对数 $X)^3$，在第三步中应用了斯特林公式。取

$$r = \begin{cases} \lfloor \frac{V_1^2}{2\sigma(X)^2} \rfloor, & \text{if } \sqrt{\log\log X} \le V \le \frac{\epsilon}{10}\sigma(X)^2 \log\log(X+t_\phi), \\ \lfloor \frac{\epsilon V}{10} \rfloor, & \text{if } \frac{\epsilon}{10}\sigma(X)^2 \log\log(X+t_\phi) < V \le C\frac{\log(X+t_\phi)}{\log\log(X+t_\phi)}. \end{cases}$$

因此，由切比雪夫不等式可得

$$\begin{aligned}
\#\{X < t_j \le X+Y : \mathcal{P}_1(t_j) > V_1\} &\le \frac{1}{V_1^{2r}} \sum_{X<t_j\le X+Y} \mathcal{P}_1(t_j)^{2r} \\
&\ll G(X,Y)\Big(e^{-(1-2\varepsilon)\frac{V^2}{2\sigma(X)^2}} \log\log(X+t_\phi) + e^{-\frac{\varepsilon}{11}V\log V}\Big).
\end{aligned} \tag{5.35}$$

现在我们考虑情形 ii)。剩下的工作是估计满足 (5.33) 的 $X < t_j \le X+Y$ 的数量。取 $r = \lfloor \frac{\varepsilon V}{10} \rfloor$。与之前一样，我们使用引理 5.6 和 (5.30) 将该数量估计为

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V_2^{2r}} \sum_{X<t_j\le X+Y} \mathcal{P}_2(t_j)^{2r} &\ll \frac{(\log\log X)^3}{V_2^{2r}} \sum_{t_j} \frac{h(t_j;X,Y)}{L(1,\operatorname{sym}^2 u_j)} \mathcal{P}_2(t_j)^{2r} \\
&\ll G(X,Y)(\log\log X)^3 \frac{(2r)!}{r!} \Big(\frac{C}{V_2^2}\log\log\log(X+t_\phi)\Big)^r \\
&\ll G(X,Y) e^{-\frac{\varepsilon}{11}V\log V}.
\end{aligned} \tag{5.36}$$

至此，我们完成证明。 □

5.5. 定理 1.14 的证明。 回顾第 5.2 小节中的记号。注意到 $X^{\varepsilon} \leq Y \leq X$ 并使用命题 5.7。于是得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{X\leq t_j\leq X+Y}\mathcal{L}(t_j)=\int_{\mathbb{R}}e^V\mathcal{B}_{X,Y}(V)\mathrm{d}V+\delta_{X\leq t_j\leq X+Y}D_\phi\mathcal{L}(t_\phi)\\
&\ll e^{\mu(X)}\int_{\mathbb{R}}e^V\mathcal{B}_{X,Y}(V+\mu(X))\mathrm{d}V+Ye^{\frac{c\log(X+t_\phi)}{\log\log(X+t_\phi)}}\\
&\ll e^{\mu(X)}\int_{\sqrt{\log\log(X+t_\phi)}}^{\frac{c\log(X+t_\phi)}{\log\log(X+t_\phi)}}e^VG(X,Y)\Big(e^{-\frac{(1-2\varepsilon)V^2}{2\sigma(X)^2}}\log\log(X+t_\phi)+e^{-\frac{\varepsilon}{11}V\log V}\Big)\mathrm{d}V\\
&\quad+Ye^{\frac{c\log(X+t_\phi)}{\log\log(X+t_\phi)}}.
\end{aligned}\tag{5.37}$$

上面的第一部分有如下上界

$$\begin{aligned}
&G(X,Y)e^{\mu(X)+\frac{\sigma(X)^2}{2(1-2\varepsilon)}}(\log(X+t_\phi))^{\varepsilon}\\
&\ll XY(\log(X+t_\phi))^{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{2}(\ell_1+\ell_2)\log\log(X+t_\phi)-\frac{\ell_3}{2}\mathcal{M}(z_1,z_2,X+t_\phi))\\
&\quad\times\exp\left(\frac{(\ell_1^2+\ell_2^2)}{2}\log\log(X+t_\phi)+\frac{\ell_3^2}{8}\mathcal{V}(z_1,z_2,X+t_\phi)+\ell_1\ell_3\mathcal{M}(z_1,z_2,X+t_\phi)\right)\\
&\ll XY(\log X)^{\frac{\ell_1(\ell_1-1)}{2}+\frac{\ell_2(\ell_2-1)}{2}+\varepsilon}\exp(\ell_3(\ell_1-\frac{1}{2})\mathcal{M}(z_1,z_2,X)+\frac{\ell_3^2}{8}\mathcal{V}(z_1,z_2,X)).
\end{aligned}\tag{5.38}$$

第二部分有如下上界

$$\mathcal{O}(YX^{\varepsilon}).$$

于是，我们完成了定理 1.14 的证明。

附录 A. 关于猜想 1.10 的说明

本节对我们的猜想 1.10 作一些说明。

首先，我们讨论纯四阶矩问题（见 [BK17]和 [DK20]）与自守形式的混合四阶矩问题（例如，[HHL24] 以及我们的工作）之间的区别。尽管这两类问题采用了相似的策略，即利用 Plancherel 公式和三重积公式来求得 L-函数的某些矩。对于f, g 两个不同的 Hecke–Maass 形式，一个自然的问题是，为什么它们的渐近公式

$$\langle f^2,f^2\rangle,\qquad\langle f^2,g^2\rangle$$

不同。更确切地说，我们可以问，为什么 L-函数的两个矩

$$\sum_{t_j\leq X}L(\frac{1}{2},\phi_j)L(\frac{1}{2},\mathrm{Sym}^2f\times\phi_j)$$

and

$$\sum_{t_j\leq X}L(\frac{1}{2},\phi_j)L(\frac{1}{2},\mathrm{Sym}^2f\times\phi_j)^{1/2}L(\frac{1}{2},\mathrm{Sym}^2g\times\phi_j)^{1/2}$$

不同。

第一个和在用适当的测试函数加权后，可通过谱方法和广义林德勒夫假设得到渐近公式。对于第二个和，Hua–Huang–Li

在广义黎曼猜想和广义黎曼猜想下，运用 Soundararajan 方法得到了对数节省上界。显然，第一个和不可能满足这样的对数节省上界，因为它已经存在精确渐近公式。

关键在于应用 Soundararajan 方法时，如何区分两个 $f \neq g$ in L-函数。本质上，他们使用了 Selberg正交关系。粗略地说，该关系为

$$\sum_{p\leq X}\frac{a_f(p)b_g(p)}{p}=\mathcal{O}(\log\log\log(t_f+t_g)) \tag{A.1}$$

其中 $a_f(p)\in\{\lambda_f(p)\ \lambda_{\mathrm{Sym}^2 f}(p)\ \lambda_{\mathrm{Sym}^4 f}(p)\}$ 且 $b_g(p)\in\{\lambda_g(p)\ \lambda_{\mathrm{Sym}^2 g}(p)\}$。

作为一种自然推广，在定理 1.1 和定理 1.6 的证明中，我们需要区分 f 和 E_T。我们需要一个形如

$$\sum_{p\leq X}\frac{a_f(p)p^{-iT}}{p}=\mathcal{O}(\log\log\log(T+t_f)). \tag{A.2}$$

即使谱参数几乎等价，区分两个艾森斯坦级数时仍会出现一个更微妙的问题。值得注意的是，关系

$$\sum_{p\leq X}\frac{p^{iT_1}p^{-iT_2}}{p}=\mathcal{O}(\log\log\log(T_1+T_2)) \tag{A.3}$$

对于某些依赖于 X 的较小 $|T_1-T_2|$，该关系并不成立！事实上，我们只有

$$\sum_{p\leq X}\frac{1}{p^{1+iT}}=\mathcal{O}(\log\log\log T)+\begin{cases}\log\log X, & |T|\leq\frac{1}{\log X},\\ -\log|T|, & \frac{1}{\log X}\leq|T|\leq 1,\\ 0, & |T|\geq 1.\end{cases} \tag{A.4}$$

看来，我们无法直接利用 L-函数混合矩的界来检测四阶矩（适当的正则化型）

$$\langle|E_t|^2,|E_t|^2\rangle,\qquad\langle|E_t|^2,|E_\tau|^2\rangle.$$

在这种情况下，我们或许只能得到与纯四阶矩同阶的上界。

因此，在这种微妙的情况下，独立值分布是否会失效（例如，当 $|t-\tau|$ 非常小时）？为支持我们的猜想，我们考察了最简单的情形，即艾森斯坦级数的去相关，并建立了一个渐近公式。事实上，我们的分析表明，从值分布的角度来看，谱参数非常接近的两个艾森斯坦级数无法区分。

Pr命题 A.1. 设 $\psi(z)\in C_c^\infty(\mathbb{X})$ 为定值。假设 $1<\tau<t$。则我们得到 t

$$\int_{\mathbb{X}}\psi(z)\widetilde{E_t(z)}\widetilde{E_{-\tau}(z)}\mathrm{d}\mu z=\left(\sqrt{\frac{\mathrm{vol}(\mathbb{X})}{\log(\frac{1}{4}+t^2)}}\sqrt{\frac{\mathrm{vol}(\mathbb{X})}{\log(\frac{1}{4}+\tau^2)}}\right)\times$$
$$\begin{cases}\mathcal{O}_\psi((\log t)^{-100}), & |t-\tau|\geq(\log t)^\varepsilon,\\ \mathcal{O}_\psi((\log t)^{2/3+\varepsilon}), & (\log t)^{-2/3-\varepsilon}\leq|t-\tau|\leq(\log t)^\varepsilon,\\ \frac{6}{\pi}\frac{\sin((t-\tau)\log\tau)}{t-\tau}\int_{\mathbb{X}}\psi(z)\mathrm{d}\mu z+\mathcal{O}_\psi((\log t)^{2/3+\varepsilon}), & |t-\tau|\leq(\log t)^{-2/3-\varepsilon}.\end{cases} \tag{A.5}$$

当 τ 趋于无穷时。

证明。 应用正则化普朗歇尔公式引理 2.2，我们将 $\psi(z)$ 分解为离散谱、连续谱和正则化项。前两部分由 L-函数的某个次凸界控制，并带有幂节省误差项。因此，我们只需估计正则化部分

$$\left(\sqrt{\frac{\mathrm{vol}(\mathbb{X})}{\log(\frac{1}{4}+t^2)}}\sqrt{\frac{\mathrm{vol}(\mathbb{X})}{\log(\frac{1}{4}+\tau^2)}}\right)\int_{\mathbb{X}}\psi(z)\Phi_{t,\tau}(z)\mathrm{d}\mu z \tag{A.6}$$

其中

$$\begin{aligned}\Phi_{t,\tau}(z)=2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\xi(1+2it)\xi(1-2i\tau)}{|\xi(1+2it)\xi(1-2i\tau)|}E(z,1+i(t-\tau))\right)\\ +2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\xi(1+2it)\xi(1+2i\tau)}{|\xi(1+2it)\xi(1+2i\tau)|}E(z,1+i(t+\tau))\right).\end{aligned} \tag{A.7}$$

对于任意 $T\geq 0$ 和 $z\in\mathcal{F}$，根据 Young 的工作 [You18，方程 3.9]，我们有

$$E(z,1+iT)-\left(y^{1+2iT}+\frac{\xi(1+2iT)}{\xi(2+2iT)}y^{iT}\right)\ll(1+T)^{1+\varepsilon}y^{-1}. \tag{A.8}$$

注意，对于任意 $j>0$ 和 $T\geq 1$，我们有

$$(1+T^2)^j\langle\psi,E(\cdot,1+iT)\rangle=\langle\psi,\Delta^jE(\cdot,1+iT)\rangle=\langle\Delta^j\psi,E(\cdot,1+iT)\rangle\ll_\psi T^{1+\varepsilon}.$$

于是得到

$$\langle\psi,E_T\rangle\ll_\psi(1+T)^{-2j+1+\varepsilon} \tag{A.9}$$

对于任意 $j>0$。利用 (A.9)，取 j 充分大，可得 $|t-\tau|\geq$(对数 t)$^\varepsilon$ 的贡献为 $\mathcal{O}_\psi$((对数 t)$^{-100}$)。因此我们需要处理 $|t-\tau|\ll$(对数 t)$^\varepsilon$。我们使用 $E(z,s)$ 的展开式 $s\to 1$，使得

$$E(z,1+iT)=\frac{3}{\pi iT}+\mathcal{O}(1). \tag{A.10}$$

如 $T\to 0$。

当 (对数 t)$^{-2/3-\varepsilon}\leq|t-\tau|\leq$(对数 t)$^\varepsilon$ 时，我们得到

$$2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\xi(1+2it)\xi(1-2i\tau)}{|\xi(1+2it)\xi(1-2i\tau)|}E(z,1+i(t-\tau))\right)\ll_\psi(\log t)^{2/3+\varepsilon}$$

显然 由 (A.8)、(A.10) 可得。该常数取决于 $\psi(z)$ 的紧支撑 .

对于 $|t-\tau|\ll$(对数 t)$^{-2/3-\varepsilon}$。接下来我们需要研究其中的旋转

$$2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\xi(1+2it)\xi(1-2i\tau)}{|\xi(1+2it)\xi(1-2i\tau)|}\frac{3}{\pi i(t-\tau)}\right). \tag{A.11}$$

旋转为

$$e^{i\arg(\xi(1+2it))+i\arg(\xi(1-2i\tau))}.$$

令 $f(x)=\arg\xi(1+2ix)$。由于对任意 $x\in\mathbb{R}$，$\xi(1+2ix)$ 都没有零点，因此 $\arg\xi(1+2ix)$ 是调和函数，因为它是 $\log\xi(1+2ix)$ 的虚部。于是我们得到

$$f(t)=f(\tau)+f'(\tau)(t-\tau)+\frac{f''(\theta)}{2}(t-\tau)^2$$

其中 $\tau\leq\theta\leq t$。现在，旋转问题可化为

$$\exp\left(i(t-\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arg\xi(1+2ix)\Big|_{x=\tau}+i\frac{(t-\tau)^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\arg\xi(1+2ix)\Big|_{x=\theta}\right).$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arg\xi(1+2ix) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arg\pi^{-\frac{1+2ix}{2}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arg\Gamma(\frac{1}{2}+ix) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arg\zeta(1+2ix)\\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{\log\pi^{-i}\cdot\pi^{-ix}}{\pi^{-ix}}\right) + \mathrm{Im}\left(i\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\frac{1}{2}+ix)\right) + \mathrm{Im}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(1+2ix)\right) \quad (A.12)\\ &= \log(\frac{1}{2}+ix) + \mathcal{O}((\log x)^{2/3}(\log\log x)^{1/3})\end{aligned}$$

由斯特林公式 $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\frac{1}{2}+ix) = \text{对数}(\frac{1}{2}+ix) + \mathcal{O}(\frac{1}{|x|})$ 和维诺格拉多夫–科罗博夫界 $\frac{\zeta'}{\zeta}(1+2ix) \ll (\text{对数 } x)^{2/3}(\text{对数对数 } x)^{1/3}$。我们还得到

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\arg\xi(1+ix) \ll (\log t)^{4/3+\varepsilon}$$

由 $(\frac{\Gamma'}{\Gamma})'(\frac{1}{2}+ix)) = \mathcal{O}(1)$ 和 $(\frac{\zeta'}{\zeta})'(1+2ix) \ll (\text{对数 } x)^{4/3+\varepsilon}$。于是我们得到

$$\begin{aligned}&\exp\left(i(t-\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arg\xi(1+2ix)\Big|_{x=\tau} + i(t-\tau)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\arg\xi(1+2ix)\Big|_{x=\theta}\right)\\ &\qquad = \exp(i(t-\tau)\log\tau)\Big(1+\mathcal{O}(|t-\tau|(\log t)^{2/3+\varepsilon})\Big). \quad (A.13)\end{aligned}$$

(A.11) 中误差项的贡献为

$$\mathcal{O}_\psi((\log t)^{2/3+\varepsilon}).$$

主项的贡献为

$$2\,\mathrm{Re}\left(\exp(i(t-\tau)\log\tau)\frac{3}{\pi i(t-\tau)}\right) = \frac{6}{\pi}\frac{\sin\left((t-\tau)\log\tau\right)}{t-\tau}.$$

因此，我们得到

$$\int_{\mathbb{X}}\psi(z)\Phi_{t,\tau}(z)\mathrm{d}\mu z = \frac{6}{\pi}\frac{\sin\left((t-\tau)\log\tau\right)}{t-\tau}\int_{\mathbb{X}}\psi(z)\mathrm{d}\mu z + \mathcal{O}_\psi((\log t)^{2/3+\varepsilon})$$

在这种情况下。

由（A.6）即可完成证明。 □

附录 B. 定理 1.1 中主项（1.6）的另一种计算方法

我们不通过正则化内积，而是从另一个角度来看定理 1.1 中的复主项。可以看出，这一项完全来自尖点。

注意， L^4-范数之差为

$$\begin{aligned}\langle\phi^2, |E_T|^2 - |E_T^A|^2\rangle &= \overline{c_T^2}\int_{\mathcal{C}_A}\phi^2(z)\overline{e(y,\frac{1}{2}+iT)(2E_T(z)-e(y,\frac{1}{2}+iT))}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}\\ &= \overline{c_T^2}\int_{\mathcal{C}_A}\phi^2(z)\overline{e(y,\frac{1}{2}+iT)(e(y,\frac{1}{2}+iT)+2E_T^A(z))}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}\end{aligned} \quad (B.1)$$

其中 $c_T = \frac{\xi}{|\xi(1+2iT)|}$。我们有三个关键项。对角项为

$$\mathcal{I}' := 2\int_{\mathcal{C}_A}\phi^2(z)y\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}. \quad (B.2)$$

来自 $e(y,\frac{1}{2}+iT)$ 的另外两项具有如下形式

$$\mathcal{J}' := \frac{\xi(1-2iT)}{\xi(1+2iT)}\int_{\mathcal{C}_A}\phi^2(z)y^{1-2iT}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}+\frac{\xi(1+2iT)}{\xi(1-2iT)}\int_{\mathcal{C}_A}\phi^2(z)y^{1+2iT}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}.$$

截断部分为

$$\begin{aligned}\mathcal{K}' &:= 2\overline{c_T^2}\int_{\mathcal{C}_A}\phi^2(z)\overline{e(y,\frac{1}{2}+iT)E_T^A(z)}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}\\ &= 2\int_{\mathcal{C}_A}\phi^2(z)(y^{1/2-iT}+\frac{\xi(1+2iT)}{\xi(1-2iT)}y^{1/2+iT})E_T^A(z)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}\\ &= 2\sum_j\langle\phi^2,\phi_j\rangle\int_{\mathcal{C}_A}\phi_j(z)(y^{1/2-iT}+\frac{\xi(1+2iT)}{\xi(1-2iT)}y^{1/2+iT})E_T^A(z)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}+continuous.\end{aligned} \tag{B.3}$$

备注 B.1. 事实上，我们使用谱分解来 ϕ^2，然后 $\mathcal{K}'$ 几乎是 $\mathcal{J}$（A）。在广义黎曼猜想和广义黎曼猜想成立的条件下，它不会对主项产生贡献。

我们发现 $\mathcal{I}'$和 $\mathcal{J}'$构成了包含主项 $\mathcal{R}$中 t_ϕ的部分（ϕ， E_T） .

命题 B.2. 假设广义林德勒夫假设成立。我们有

$$\begin{aligned}\langle\phi^2,|E_T|^2-|E_T^A|^2\rangle &= \mathcal{K}'+\mathcal{O}_A(1)+\frac{\Lambda'(1,\mathrm{Sym}^2\phi)}{\xi(2)\Lambda(1,\mathrm{Sym}^2\phi)}\\ &\quad+\frac{\xi(2iT)}{\xi(1+2iT)}\langle\phi^2,E(z,1+2iT)\rangle+\overline{\frac{\xi(2iT)}{\xi(1+2iT)}}\langle\phi^2,E(z,1-2iT)\rangle\end{aligned} \tag{B.4}$$

该命题由以下两个引理得出。

引理 B.3. 假设广义林德勒夫假设成立。我们有

$$\mathcal{I}'=\frac{\Lambda'(1,\mathrm{Sym}^2\phi)}{\xi(2)\Lambda(1,\mathrm{Sym}^2\phi)}+\mathcal{O}(\log A+A^{1/2}t_\phi^{-1/2+\varepsilon}). \tag{B.5}$$

引理 B.4. 假设广义林德勒夫假设成立。我们有

$$\mathcal{J}'=\frac{\xi(2iT)}{\xi(1+2iT)}\langle\phi^2,E(z,1+2iT)\rangle+\overline{\frac{\xi(2iT)}{\xi(1+2iT)}}\langle\phi^2,E(z,1-2iT)\rangle+\mathcal{O}(A^{1/2}t_\phi^{-1/2+\varepsilon}). \tag{B.6}$$

Fr由命题 B.2 和 (4.8)，我们可得定理 1 中的所有主项。 1.

引理 *B.3* 的证明。注意到

$$\int_{\mathcal{C}_A}\phi^2(z)y\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}=\int_A^\infty\int_{-1/2}^{1/2}\phi^2(z)y\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}.$$

将马斯形式按傅里叶展开展开，并对 x积分，我们得到 t

$$8|\rho_\phi(1)|^2\sum_{n\geq1}\lambda_\phi(n)^2\int_A^\infty K_{it_\phi}(2\pi ny)^2y\frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

通过梅林反演，我们得到

$$K_{i\phi}(2\pi ny)^2=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}2^{s-3}\frac{\Gamma(\frac{s}{2})^2\Gamma(\frac{s+2it_\phi}{2})\Gamma(\frac{s-2it_\phi}{2})}{\Gamma(s)}(2\pi ny)^{-s}\mathrm{d}s$$

其中 $\sigma=3$。于是主项为

$$|\rho_\phi(1)|^2\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}\pi^{-s}\frac{\Gamma(\frac{s}{2})^2\Gamma(\frac{s+2it_\phi}{2})\Gamma(\frac{s-2it_\phi}{2})}{\Gamma(s)}\frac{L(s,\mathrm{Sym}^2\,\phi)\zeta(s)}{\zeta(2s)}\frac{A^{1-s}}{s-1}\mathrm{d}s.$$

由斯特林公式可知，我们可以将积分截断到 $|\mathrm{Im}\ s|\leq 2t_\phi+t_\phi^\varepsilon$。将积分路径移至直线 $\mathrm{Re}(s)=1/2$，我们需要取出 $s=1$ 处的二阶极点。令

$$f(s)=\pi^{-s/2}\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s+2it_\phi}{2})\Gamma(\frac{s-2it_\phi}{2})}{\Gamma(s)}\frac{L(s,\mathrm{Sym}^2\,\phi)A^{1-s}}{\zeta(2s)}=\frac{A^{1-s}\Lambda(s,\mathrm{Sym}^2\,\phi)}{\xi(2s)}.$$

注意经典展开式

$$\frac{1}{s-1}\xi(s)=\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{c_0}{s-1}+\mathcal{O}(1)$$

当 $s\to 1^+$ 时。我们需要将 $f(s)$ 在 $s=1$ 处作泰勒展开，即

$$f(s)=f(1)+f'(1)(s-1)+\mathcal{O}(1)$$

其中 $f(1)=\frac{\Lambda}{(1,\ \text{对称}^2\,\phi)\,\xi(2)}$
且

$$f'(1)=\lim_{s\to 1}\frac{[(\log A)A^{1-s}\Lambda(s,\mathrm{Sym}^2\,\phi)+A^{1-s}\Lambda'(s,\mathrm{Sym}^2\,\phi)]\xi(2s)-A^{1-s}\Lambda(s,\mathrm{Sym}^2\,\phi)2\xi'(2s)}{(\xi(2s))^2}.\tag{B.7}$$

我们得到

$$f'(1)=\frac{\Lambda'(1,\mathrm{Sym}^2\,\phi)}{\xi(2)}+C\log A\Lambda(1,\mathrm{Sym}^2\,\phi)$$

其中 C 是一个绝对常数。回顾一下，$|\rho_\phi(1)|^2=\frac{1}{2\Lambda\ \ (1,\ \mathrm{Sym}^2\,\phi)}$，我们得到留数的贡献为

$$\frac{1}{2\Lambda(1,\mathrm{Sym}^2\,\phi)}[f'(1)+f(1)a_0]=\frac{\Lambda'(1,\mathrm{Sym}^2\,\phi)}{2\xi(2)\Lambda(1,\mathrm{Sym}^2\,\phi)}+\log A\times\mathcal{O}(1).\tag{B.8}$$

而在直线 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 上的积分有界于

$$A^{1/2}\frac{1}{t_\phi^{1/4}}\int_{0<t\leq 2t_\phi+t_\phi^\varepsilon}\frac{|L(\frac{1}{2}+it,\mathrm{Sym}^2\,\phi)||\zeta(\frac{1}{2}+it)|}{(1+|t-2t_\phi|)^{1/4}(1+|t|)}\mathrm{d}t.\tag{B.9}$$

由广义林德勒夫假设，我们得到贡献为 $\mathcal{O}(A^{1/2}t_\phi^{-1/2+\varepsilon})$。综上，由 (B.8) 和 (B.9) 可得

$$\int_{\mathcal{C}_A}\phi^2(z)y\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{\Lambda'(1,\mathrm{Sym}^2\,\phi)}{2\xi(2)\Lambda(1,\mathrm{Sym}^2\,\phi)}+\mathcal{O}(\log A)+\mathcal{O}(A^{1/2}t_\phi^{-1/2+\varepsilon}).$$

Then

$$\mathcal{I}'=\frac{\Lambda'(1,\mathrm{Sym}^2\,\phi)}{\xi(2)\Lambda(1,\mathrm{Sym}^2\,\phi)}+\mathcal{O}(\log A+A^{1/2}t_\phi^{-1/2+\varepsilon}).\tag{B.10}$$

□

引理 *B.4* 的证明。我们考虑第一个，另一个则是共轭。类似地，我们直接使用傅里叶展开并推出

$$|\rho_\phi(1)|^2\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}\pi^{-s}\frac{\Gamma(\frac{s}{2})^2\Gamma(\frac{s+2it_\phi}{2})\Gamma(\frac{s-2it_\phi}{2})}{\Gamma(s)}\frac{L(s,\mathrm{Sym}^2\,\phi)\zeta(s)}{\zeta(2s)}\frac{A^{1-s-2iT}}{s-1+2iT}\mathrm{d}s.$$

在这种情况下， $s=1$ 和 $s=1+iT$ 是仅有的两个简单极点，因此我们将积分移至直线 Re(s) $=1/2$。与第一个情形一样，积分有界于 $\mathcal{O}(t_\phi^{-1/2+\varepsilon})$。 $s=1$ 处的留数为 $\frac{A^{\mp iT}}{2\xi\ 2\ ()}$ $_T \ll 1$。而 $\overline{s=1}-2iT$ 处的留数为

$$\frac{\Lambda(1-2iT,\mathrm{Sym}^2\phi)\xi(1-2iT)}{2\Lambda(1,\mathrm{Sym}^2\phi)\xi(2-4iT)}=\langle\phi^2,E(\cdot,1+2iT)\rangle.$$

类似地，我们得到另一个。于是我们得到

$$\mathcal{J}'=\frac{\xi(2iT)}{\xi(1+2iT)}\langle\phi^2,E(z,1+2iT)\rangle+\overline{\frac{\xi(2iT)}{\xi(1+2iT)}}\langle\phi^2,E(z,1-2iT)\rangle+\mathcal{O}(A^{1/2}t_\phi^{-1/2+\varepsilon}). \quad \text{(B.11)}$$

□

致谢

作者谨向黄炳荣教授致谢，感谢他的鼓励和富有帮助的讨论。

参考文献

[Ber77] M. V. Berry. 规则与不规则半经典波函数. J. Phys. A, 10(12):2083–2091, 1977. 5[BK17] Jack Buttcane 和 Rizwanur Khan. 关于 Hecke-Maass 形式的四阶矩与随机波猜想. Compos. Math., 153(7):1479–1511, 2017. 2, 36[BKY13] Valentin Blomer、Rizwanur Khan 和 Matthew Young. 全纯尖点形式的质量分布. Duke Math. J., 162(14):2609–2644, 2013. 2[Cha09] Vorrapan Chandee. 临界线上的 L 函数的显式上界 . Proc. Amer. Math. Soc., 137(12):4049–4063, 2009. 25, 30[CI00] J. B. Conrey 和 H. Iwaniec. 自守 L 函数中心值的三阶矩. Ann. of Math. (2), 151(3):1175–1216, 2000. 31[CS11] Vorrapan Chandee 和 K. Soundararajan. 黎曼猜想下 $|\zeta(\frac{1}{2}+it)|$ 的界. Bull. Lond. Math. Soc., 43(2):243–250, 2011. 30[DK20] Goran Djanković 和 Rizwanur Khan. 关于艾森斯坦级数的随机波猜想. Int. Math. Res. Not. IMRN, (23):9694–9716, 2020. 3, 12, 36[DK24] Goran Djankǒvić 和 Rizwanur Khan. 截断艾森斯坦级数的四阶矩. ArXiv 预印本 arXiv 2408.14815, 2024. 3, 14[Gol06] Dorian Goldfeld. 群 GL(n, R) 的自守形式与 L 函数，《剑桥高等数学研究》丛书第 99 卷。Cambridge University Press，剑桥，2006。附录由 Kevin A. Broughan 撰写。11[Guo25] 郭成亮. 艾森斯坦级数与 Hecke-Maass 尖点形式的联合三阶矩. J. Number Theory, 276:162–197, 2025. 4[HHL24] 华胜浩、黄炳荣和李良勋. Hecke–Maass 形式的联合值分布. arXiv 预印本 arXiv 2405.00996, 2024. 3, 5, 8, 25, 36[HK20] Peter Humphries 和 Rizwanur Khan. 关于二面体 Maaß 形式的随机波猜想. Geom. Funct. Anal., 30(1):34–125, 2020. 2, 5[HK25] Peter Humphries 和 Rizwanur Khan. 通过谱互反性得到自守形式的 L^p 范数界. Proc. Lond. Math. Soc. (3), 130(6):论文编号 e70061, 80, 2025. 3[HL94] Jeffrey Hoffstein 和 Paul Lockhart. 马斯形式的系数与 Siegel 零点. Ann. of Math. (2), 140(1):161–181, 1994。附录由 Dorian Goldfeld、Hoffstein 和 Daniel Lieman 撰写。10[HL23] 黄炳荣和 Stephen Lester. 二面体 Maass 形式的量子方差. Trans. Amer. Math. Soc., 376(1):643–695, 2023. 7[Hum18] Peter Humphries. 收缩集上的等分布与自守形式的 L^4 范数界. Math. Ann., 371(3-4):1497–1543, 2018. 5[Iwa90] Henryk Iwaniec. $\Gamma_0(N)$ 的拉普拉斯算子小特征值. Acta Arith., 56(1):65–82, 1990. 10

[Iwa02] Henryk Iwaniec.《自守形式的谱方法》，《数学研究生丛书》第 53 卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯；Revista Matemática Iberoamericana，马德里，第二版，2002年。16[Ki23] Haseo Ki. L^4 范数与 Maass 形式的符号变化. arXiv 预印本 arXiv 2302.02625, 2023年. 2[Lin06] Elon Lindenstrauss. 不变测度与算术量子唯一遍历性. Ann. of Math. (2), 163(1):165–219, 2006. 2[LL11] Yuk-Kam Lau 和 Guangshi Lü. 尖点形式傅里叶系数的和. 《季刊数学》, 62(3):687–716, 2011. 32[LR20] Stephen Lester 和 Maksym Radziwiłł. 半整数权自守形式的量子唯一遍历性 . Duke Math. J., 169(2):279–351, 2020. 7[LS95] Wen Zhi Luo 和 Peter Sarnak. $PSL_2(Z)\backslash H^2$ 上特征函数的量子遍历性. 《高等科学研究所数学出版物》, (81):207–237, 1995. 2[RS94] Zeév Rudnick 和 Peter Sarnak. 算术双曲流形中特征态的行为. 《数学物理通讯》, 161(1):195–213, 1994. 2[Sou09] Kannan Soundararajan. 黎曼ζ函数的矩. Ann. of Math. (2), 170(2):981–993, 2009. 8, 25[Sou10] Kannan Soundararajan. $SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ 的量子唯一遍历性. Ann. of Math. (2), 172(2):1529–1538, 2010. 2[Spi03] Florin Spinu. 艾森斯坦级数的 L(4) 范数. ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，2003。博士论文——普林斯顿大学。17[SY10] K. Soundararajan 和 Matthew P. Young. 模 L 函数二次扭曲的二阶矩. 《欧洲数学会杂志》 (JEMS), 12(5):1097–1116, 2010. 8[Tit86] E. C. Titchmarsh.《黎曼ζ函数理论》。克拉伦登出版社，牛津大学出版社，纽约，第二版，1986。D. R. Heath-Brown 编辑并撰写序言。25[Wat08] Thomas C. Watson. Rankin 三重积与量子混沌. arXiv 预印本 arXiv:0810.0425, 2008. 8, 11[You17] Matthew P. Young. 扭曲 L 函数的 Weyl 型混合次凸界，以及收缩集上的 Heegner 点. 《欧洲数学会杂志》 (JEMS), 19(5):1545–1576, 2017. 32[You18] Matthew P Young. 艾森斯坦级数上确界范数札记. 《季刊数学》，2018年4月。38[Zag81] Don Zagier. 非快速衰减自守函数的 Rankin-Selberg 方法 . 《东京大学理学部纪要 IA 数学》 , 28(3):415–437 (1982), 1981. 11, 12

山东大学数学研究中心，中国山东省济南市，邮编 250100电子邮箱地址：
chengliang.guo@mail.sdu.edu.cn