arXiv:2601.00667v1 [math.RT] 2 Jan 2026

伯恩斯坦-泽列文斯基导数的简单商与最高导数多重线段的构造 II：极小序列

KEI YUEN CHAN

摘要。设 F 为一个非阿基米德局部域。对于 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的任意不可约光滑表示 π 以及一个多重线段 $\mathfrak{m}$，我们有一个运算 $D_{\mathfrak{m}}(\pi)$，用于构造 π的伯恩斯坦-泽列文斯基导数的一个简单商 τ。本文延续前一篇文章，研究如下偏序集

$$\mathcal{S}(\pi,\tau) := \{\mathfrak{n} : D_{\mathfrak{n}}(\pi) \cong \tau\},$$

其中，$\mathfrak{n}$ 遍历所有多重线段。这里，$\mathcal{S}(\pi,\tau)$ 上的偏序来自泽列文斯基序。我们证明该偏序集具有唯一的极小多重线段。在此过程中，我们引入了两个新的要素：细链序和局部可极小化性。

1. 引言

伯恩斯坦-泽列文斯基（BZ）导数是研究 p-进一般线性群表示论的经典工具，最初由 [BZ77] 和 [Ze80]引入。在 [Ch25],中，我们将有关简单商的若干问题转化为本质平方可积表示的导数序列问题，旨在获得有关 Jacquet 模的具体信息。在本文中，我们进一步研究这些导数序列的性质。在后续工作 [Ch24+e], 中，我们将探讨极小序列的其他性质。

关于 Jacquet 模及其伴随函子——抛物归纳法——的一种经典观点，是从霍普夫代数理论的角度来理解，如 [HM08] 所述。这种方法已被证明非常成功且实用，但通常是在格罗滕迪克群的层面上进行的。正如 [Ze80] 和 [Ma13, MT15] （针对其他经典群）所指出的，Jacquet 模的半单化有时具有更直接的公式。不过，在某些特殊情形下，这也可能颇具挑战性，如 [De23] 和 [Ja07] 所示。

另一方面，Jacquet 模的不可约商和子模可以作为更简单的研究对象，也对我们的应用很有价值。我们对本质平方可积表示的导数的定义，着重考察由一般线性群的某个极大抛物子群产生的 Jacquet 模的若干特定不可约商。关于导数的详细说明，请见下文第 1.2 节。

本文所要探讨的主要问题如下：给定一组本质平方可积表示的良好导数序列，我们要问，能否在产生相同导数的元素中确定一个规范的选择。这里，“良好”一词指的是源自 Bernstein-Zelevinsky 导数的序列。关于这些简单商的结果，可以视为

日期：2026年1月5日。

对 [LM14]中讨论的较简单的梯级表示情形，以及 [Ch21]中探讨的一般表示情形的推广。

BZ导数的简单商研究也与A型仿射Hecke代数中符号表示的一个分支律问题相关（见 [Ch25，附录]）。其他一些应用，例如对$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$的Harish-Chandra模的应用，将在别处探讨，参见例如 [CW25]。

1.1. 记号。设 $G_n = \mathrm{GL}_n(F)$为非阿基米德局部域 F上的一般线性群。非阿基米德局部域上的 G_n 表示论结构丰富，尤其是关于其不可约表示的表示论。Zelevinsky引入多重线段来参数化 G_n的不可约表示，这一重要进展深化了我们对这些表示的理解。在此背景下，我们固定 ρ的一个不可约尖点表示，其中 G_r （对某个 r）。我们主要考虑与所谓简单类型相关联的Bernstein 分支，如 [BK93], 中所定义；事实上，不同 ρ 的Bernstein分支彼此密切相关。

- 令 $\nu\colon\ G_n \to \mathbb{C}^\times$ 为特征 $\nu(g) = |\det(g)|_F$，其中 $|.|_F$是 F上的范数。
- 对于 $a,\ b \in \mathbb{Z}$ 满足 $b-a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$的情形，我们称

$$[a,b]_\rho := \left\{\nu^a\rho, \dots, \nu^b\rho\right\} \tag{1.1}$$

为一个线段。

我们还对 $a \in \mathbb{Z}$定义 $[a, a-1]_\rho = \emptyset$。对于线段 $\Delta = [a,b]_\rho$，记作$a(\Delta) = \nu^a\rho$ 和 $b(\Delta) = \nu^b\rho$。此外，我们记：

$$[a]_\rho := [a,a]_\rho,$$

这称为单点线段。我们也可以将 $[a,b]_\rho$ 记为 $[\nu^a\rho, \nu^b\rho]$，并将 $[a]_\rho$记为 $[\nu^a\rho]$ 。谈到线段长度时，我们通常指线段 $[a,b]_\rho$的量 $b-a+1$ 。

- 令 Seg_ρ 为所有线段组成的集合。我们也认为空集 $\emptyset$ 属于 Seg_ρ。
- 多重线段是非空线段的多重集。令 Mult_ρ 为所有多重线段构成的集合。我们也将空集 $\emptyset$ 视为 Mult_ρ中的元素。

现在我们引入更多概念来描述线段和多重线段的性质。其中较为重要的是交并过程，它描述了所谓的标准表示 [Ze80]中可能出现的组合因子。该序也与 [Ze81], 中几何对象的闭包关系相容，不过本文不要求这种几何解释。

- 若 $\Delta \cup \Delta'$ 仍为线段，且$\Delta \not\subset \Delta'$ 和 $\Delta' \not\subset \Delta$，则称两个线段 Δ 和 Δ' 相连。否则，称它们不相连。
- 对于 $\rho_1, \rho_2 \in \mathrm{Irr}^c$，若存在某个整数 $a > 0$使得$\rho_1 \cong \nu^a\rho_2$ ，则记作 $\rho_2 < \rho_1$ 。对于两个线段 Δ_1, Δ_2，若 Δ_1 和 Δ_2 相连，且 $b(\Delta_1) < b(\Delta_2)$，则记作 $\Delta_1 < \Delta_2$ 。
- 对于两个多重线段 $\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{n}$，我们将 $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$ 记为这两个多重线段的并，并计入重数。对于一个多重线段 $\mathfrak{m}$ 和一条线段 Δ，若 Δ 非空，则 $\mathfrak{m}+\Delta = \mathfrak{m}+\{\Delta\}$；若 Δ 为空，则 $\mathfrak{m}+\Delta = \mathfrak{m}$。概念 $\mathfrak{m}-\mathfrak{n}$ 和 $\mathfrak{m}-\Delta$的定义类似。
- 对于两条线段 Δ 和 Δ'，我们分别用 $\Delta \cup \Delta'$ 和 $\Delta \cap \Delta'$ 表示它们的集合论并集和交集。
- 我们称多重线段 $\mathfrak{n}$ 可由 $\mathfrak{m}$ 经过初等交并过程/运算得到，若

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{m} - \Delta - \Delta' + \Delta \cup \Delta' + \Delta \cap \Delta'$$

对于 $\mathfrak{m}$ 中一对相连线段 Δ 和 Δ' 。

- 对于两个多重线段 $\mathfrak{m}_1$ 和 $\mathfrak{m}_2$，记作 $\mathfrak{m}_2 \leq_Z \mathfrak{m}_1$，如果 $\mathfrak{m}_2$ 可以由 $\mathfrak{m}_1$ 经过一系列初等交并运算得到（按[Ze80]，的意义，参见 [Ch25]），或者 $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$。特别地，如果 $\mathfrak{m}$ 中任意一对线段都不相连，那么 $\mathfrak{m}$ 是 Mult_ρ 在 $\leq_Z$ 下的极小元。我们将通过 $\leq_Z$ 为 Mult_ρ 配备偏序集结构。
- 对于线段 $\Delta = [a,b]_\rho$，定义 $^-\Delta = [a+1,b]_\rho$。对于多重线段 $\mathfrak{m}$，定义 $^-\mathfrak{m} = \left\{ ^-\Delta : \ \Delta \in \mathfrak{m}, \ \Delta \text{ 不是单元素集合} \right\}$（按重数计数）。

最后，我们解释一些表示论概念。

- 对于每个线段 Δ，我们将相应的本质平方可积表示 [Ze80]记为 $\mathrm{St}(\Delta)$。
- 对于 G_{n_1} 的任意光滑表示 π_1 和 G_{n_2}的任意光滑表示 π_2，定义 $\pi_1 \times \pi_2$ 为归一化抛物诱导。
- 令 $\mathrm{Irr}_\rho(G_n)$ 表示 G_n 的所有不可约表示的集合，这些表示对于某些整数 $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ 是 $\nu^{a_1}\rho \times \ldots \times \nu^{a_k}\rho$ 的不可约商。令 $\mathrm{Irr}_\rho = \sqcup_n \mathrm{Irr}_\rho(G_n)$。如上所述，$\mathrm{Irr}_\rho(G_n)$ 中的表示属于与某个简单类型对应的 Bernstein 分支。关于这一问题的进一步讨论，参见 [Ch25, 第 3 节。8]

1.2. 主要结果。 令 $N_i \subset G_n$（取决于 n）为包含形如 $\begin{pmatrix} I_{n-i} & * \\ & I_i \end{pmatrix}$ 的矩阵的幺正根基。对于 G_n 的光滑表示 π，记其关于 N_i 的归一化 Jacquet 模为 π_{N_i}。

对于 $\pi \in \mathrm{Irr}_\rho(G_n)$ 和一个线段 $\Delta = [a,b]_\rho$，至多存在一个不可约模$\tau \in \mathrm{Irr}_\rho(G_{n-i})$，使得

$$\tau \boxtimes \mathrm{St}(\Delta) \hookrightarrow \pi_{N_{b-a+1}}.$$

如果存在这样的 τ，我们将这样的 τ 记作 $D_\Delta(\pi)$。否则，令 $D_\Delta(\pi) = 0$。我们将D_Δ 称为导数。设 $\varepsilon_\Delta(\pi)$为满足$(D_\Delta)^k(\pi) \neq 0$的最大整数 k。

若线段序列 $[a_1,b_1]_\rho, \ldots, [a_k,b_k]_\rho$（其中 $a_j, b_j \in \mathbb{Z}$）满足：对于任意 $i<j$，要么 $[a_i,b_i]_\rho$ 与 $[a_j,b_j]_\rho$ 不相连，要么 $a_i < a_j$，则称其按升序排列。对于多重线段 $\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho$，我们将其中的线段按升序排列为 $\mathfrak{n}, \ldots, \Delta_k$。定义

$$D_\mathfrak{n}(\pi) := D_{\Delta_k} \circ \ldots \circ D_{\Delta_1}(\pi).$$

导数与递增序列 [Ch25]的序无关。特别地，可以选择序使得 $a_1 \leq \ldots \leq a_k$。若 $\mathfrak{n}$ 满足$D_\mathfrak{n}(\pi) \neq 0$，则称其对 π 可容许。关于导数的更多理论，参见 [Mi09、LM16、Ch25]（及其中的参考文献）。

对于 $\pi \in \mathrm{Irr}_\rho$，记其 i 阶伯恩斯坦-泽列文斯基导数为 $\pi^{(i)}$（精确定义见 [Ze80，第 25] 章；在本文后续内容中我们不需要用到这些定义）。对于 τ of$\pi^{(i)}$ 的一个简单商，定义

$$\mathcal{S}(\pi,\tau) := \{\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho : D_\mathfrak{n}(\pi) \cong \tau\}.$$

序 $\leq_Z$ 在 $\mathcal{S}(\pi,\tau)$ 上诱导出一个偏序，而我们将 $\mathcal{S}(\pi,\tau)$ 视为一个偏序集。

在 [第 25], 章中，我们引入了一个组合过程，称为移除过程（见第 2.3 节），用于研究 D_Δ 的作用。下面给出移除过程的两种应用：

定理1.1。 ***(=定理 4.4)*** 设 $\pi \in \mathrm{Irr}_\rho$。设 τ 是某个i的 $\pi^{(i)}$ 的简单商。如果 $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2 \in \mathcal{S}(\pi,\tau)$ 且 $\mathfrak{n}_1 \leq_Z \mathfrak{n}_2$，那么任何满足 $\mathfrak{n}_1 \leq_Z \mathfrak{n}_3 \leq_Z \mathfrak{n}_2$ 的 $\mathfrak{n}_3 \in \mathrm{Mult}_\rho$ 也属于 $\mathcal{S}(\pi,\tau)$。

换言之， $\mathcal{S}(\pi, \tau)$ 按照 [St12，第 3.1] 节的意义是凸的 。

定理 1.2. *(=定理 6.4)* 设 $\pi \in \mathrm{Irr}\rho$。设 τ 是某个i的简单商 $\pi^{(i)}$ 。若 $\mathcal{S}(\pi, \tau) \neq \emptyset$，则 $\mathcal{S}(\pi, \tau)$ 相对于 $\leq_Z$有唯一极小元。

在 [Ch22+b] 中，条件 $\mathcal{S}(\pi, \tau) \neq \emptyset$ 被去掉了。如 [Ch21, Ch25], 所示， $\pi^{(i)}$ 的底是无重数的，剩下的问题是描述哪些表示出现在 $\pi^{(i)}$的底中。极小序列为这些表示提供了一种规范的参数化方式；换言之， π 的可容许极小序列集合与 π的 Bernstein-Zelevinsky 导数的简单商集合之间存在一一对应关系。

对于双线段情形，极小序列还有其他判据，例如不重叠性质，以及第 9 节中以 η_Δ 表述的一个条件。当需要“拆分”某些线段以进行归纳论证时，这种情形尤其有用。我们指出，一般而言，极大元并不唯一。我们在第 8 节给出一个例子。

1.3. **方法与证明概要**。如上所述，主要工具是移除过程，而 [Ch25, 定理 10.2] （见定理 2.4）归结为分析移除过程中的组合学。我们进一步说明这如何帮助证明定理1.1和定理 1.2。

对于定理1.1，我们通过归纳方式分析移除过程中线段的选择。为编码这类信息，我们将使用细链的概念（第 3 节），而细链与移除过程之间的联系见引理 3.9。引理 4.2 证明，这种细链具有一种与泽列文斯基序相容的良好序，而这又使我们能够推导出定理1.1。

对于定理 1.2，我们在定义 5.2 中提出一种称为局部可极小化性的组合判据，以便以某种归纳方式进行研究。引理 5.6 和 6.2 表明，在局部可极小化性条件下，可以找到一条线段来进行交并过程，且不改变结果多重线段（即通过移除过程得到的多重线段）。引理 6.1 指出，若能通过对多重线段 $\mathfrak{n}$ 进行交并过程得到多重线段 $\mathfrak{n}'$ ，且不改变移除过程中的结果多重线段（即 $\mathfrak{r}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{n}', \mathfrak{h})$ 对某个 $\mathfrak{h}$ 成立；符号 $\mathfrak{r}(.,.)$ 的含义见下文第 2.3 节），那么在细链中的某些项上便能得到局部可极小化性条件。

1.4. **本文结构**。 第 2 节回顾了 [Ch25] 中关于最高导数多重线段和移除过程的结果。第 3 节定义了细链和细链序的概念，以便与泽列文斯基序进行比较。第 4 节证明了 $\mathcal{S}(\pi, \tau)$ 的凸性。在第 5 节中，我们将引入局部可极小化性的概念，并在第 6 节中用它证明极小元的唯一性。第 7 节给出唯一极小元的两个例子。第 8 节给出一个 $\leq_Z$-极大性唯一性不成立的例子。第 9 节研究双线段情形下极小性的等价条件。

1.5. **致谢**。 作者感谢审稿人提出的意见，这些意见大大提升了本文的可读性。本项目由中国香港特别行政区研究资助局（项目编号：17305223、17308324）以及国家自然科学基金委员会优秀青年学者（港澳）项目（项目编号：12322120）资助。本文无相关数据。

2. 最高导数多重线段与移除过程

本节将回顾 [Ch25] 中的一些结果。

2.1. **关于多重线段的更多记号**。对于整数 c，令 $\mathrm{Mult}^a_{\rho,c}$ 为 Mult_ρ 的子集，其中包含所有满足以下条件的多重线段 $\mathfrak{m}$：其中任意线段 Δ 均满足 $a(\Delta) \cong \nu^c\rho$。$\mathrm{Mult}^a_{\rho,c}$ 中的上标 a表示 $a(\Delta)$。

对于多重线段 $\min \mathrm{Mult}_\rho$ 和整数 c，令 $\mathfrak{m}[c]$ 为 $\mathfrak{m}$ 的子多重线段，其中包含所有满足 $a(\Delta) \cong \nu^c\rho$ 的线段 Δ。

固定一个整数 c。令 $\Delta_1 = [c, b_1]_\rho, \Delta_2 = [c, b_2]_\rho$ 为两个非空线段。若 $b_1 \le b_2$，则记作 $\Delta_1 \le^a_c \Delta_2$；若 $b_1 < b_2$，则记作 $\Delta_1 <^a_c \Delta_2$。

对于非空的 $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$，在 $\mathrm{Mult}^a_{\rho,c}$ 中，将 $\mathfrak{m}_1$ 中的线段标记为：$\Delta_{1,k} \le^a_c \ldots \le^a_c \Delta_{1,2} \le^a_c \Delta_{1,1}$，将 $\mathfrak{m}_2$ 中的线段标记为：$\Delta_{2,r} \le^a_c \ldots \le^a_c \Delta_{2,2} \le_c \Delta_{2,1}$。我们定义字典序：若 $k \le r$，且对任意 $i \le k$，$\Delta_{1,i} \le^a_c \Delta_{2,i}$，则 $\mathfrak{m}_1 \le^a_c \mathfrak{m}_2$。若 $\mathfrak{m}_1 \le^a_c \mathfrak{m}_2$ 且 $\mathfrak{m}_1 \neq \mathfrak{m}_2$，则记作 $\mathfrak{m}_1 <^a_c \mathfrak{m}_2$。

2.2. **最高导数多重线段**。若多重线段 $\mathfrak{m}$ 中的任一线段 Δ 都具有如下形式 $[c, b]_\rho$（其中 $b \ge c$），则称 $\mathfrak{m}$ 位于点 $\nu^c\rho$。对于 $\pi \in \mathrm{Irr}_\rho$，定义 $\mathfrak{mxpt}^a(\pi, c)$ 为 $\mathrm{Mult}^a_{\rho,c}$ 中满足 $D_{\mathfrak{mxpt}^a(\pi,c)}(\pi) \neq 0$ 的极大多重线段。极大性由上文定义的序 $\le^a_c$ 确定。将 $\pi \in \mathrm{Irr}_\rho$ 的最高导数多重线段 定义为

$$\mathfrak{hd}(\pi) := \sum_{c \in \mathbb{Z}} \mathfrak{mxpt}^a(\pi, c).$$

I在 [Ch25] 中证明了，$D_{\mathfrak{hd}(\pi)}(\pi)$ 是 π 的导数，意义如 [Ze80 所述].

2.3. **移除过程**。若 $a < a'$，或 $a = a'$ 且 $b < b'$，则记作 $[a, b]_\rho \prec^L [a', b']_\rho$。这里，$L$ 表示比较“左侧”的值 a，为了避免与前面的记号混淆，我们不再使用 a。若非空线段 $\Delta = [a, b]_\rho$ 满足：对于某个 $c \ge b$，$\mathfrak{h}$ 中存在形如 $[a, c]_\rho$ 的线段，则称 $\Delta = [a, b]_\rho$ 对多重线段 $\mathfrak{h}$ 是可容许 的。现在回顾移除过程。

一个无穷多重线段，记作 ∞，只是一个符号，用来表示不可容许的情形。

定义 2.1. [Ch25, 第 8 节.2] 设 $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mult}_\rho$，且 $\Delta = [a, b]_\rho$ 对 $\mathfrak{h}$ 可容许。对 $\mathfrak{h}$施行 Δ 的移除过程 是一种算法，用来执行以下步骤：

(1) 在 $\mathfrak{h}[a]$ 中选取满足 $b \le c$ 的最短线段 $[a, c]_\rho$。令 $\Delta_1 = [a, c]_\rho$。令 $a_1 = a$ 和 $b_1 = c$。 (2) 递归地在 $\mathfrak{h}$ 中寻找满足 $a_{i-1} < a_i$ 和 $b \le b_i < b_{i-1}$ 的 $\prec^L$-极小线段 $\Delta_i = [a_i, b_i]_\rho$。若无法再找到这样的线段，则停止该过程。(3) 设 $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ 为所有这些线段。对于 $1 \le i < r$，定义 $\Delta^{tr}_i = [a_{i+1}, b_i]_\rho$ 和$\Delta^{tr}_r = [b + 1, b_r]_\rho$（可能为空）。 (4) 定义

$$\mathfrak{r}(\Delta, \mathfrak{h}) := \mathfrak{h} - \sum_{i=1}^{r} \Delta_i + \sum_{i=1}^{r} \Delta^{tr}_i.$$

我们称 Δ_1、……、Δ_r 为 $(\Delta$、$\mathfrak{h})$ 的移除序列。我们还定义 $\Upsilon(\Delta$、$\mathfrak{h}) = \Delta_1$，即移除序列中的第一条线段。稍后在某些归纳证明中会多次用到移除序列中的第一条线段。

移除序列的一个有用性质是 $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_r$，我们将其称为移除序列的嵌套性质。

如果 Δ 对 $\mathfrak{h}$ 不可容许，则令 $\mathfrak{r}(\Delta$、$\mathfrak{h}) = \infty$，即无穷多重线段。我们还令 $\mathfrak{r}(\Delta$、$\infty) = \infty$。

移除过程的一些示例见 [Ch25 第 8] 节。

注 2.2。 若多重线段 $\mathfrak{h}$ 中的任意两条线段都不相连，则称该多重线段为一般的。此时的特殊之处在于，$\mathrm{St}(\mathfrak{h})$ 是一般的，且 $\mathfrak{h}\partial(\mathrm{St}(\mathfrak{h}))=\mathfrak{h}$。在这种情况下，对于$\Delta\in\mathrm{Seg}_\rho$，文献 [Ch21] 中证明了 $D_\Delta(\pi)$ 是一般的。另一方面， $\mathfrak{r}(\Delta,\mathfrak{h})$ 与尖点支撑和 $D_\Delta(\pi)$ 相同的一般多重线段相同。

2.4. **关于移除过程的计算**。 我们回顾计算的以下性质：

引理 2.3。 [Ch25] 设 $\mathfrak{h}\in$ 多重集$_\rho$，并设 $\Delta,\Delta'\in$ 线段$_\rho$ 对 $\mathfrak{h}$ 可容许。则有以下结论：

(1) [Ch25，引理 8.7] 设 $\mathfrak{h}^*=\mathfrak{h}-\Upsilon(\Delta,\mathfrak{h})+{}^-\Upsilon(\Delta,\mathfrak{h})$。则 $\mathfrak{r}(\Delta,\mathfrak{h})=\mathfrak{r}({}^-\Delta,\mathfrak{h}^*)$。(2) [Ch25，引理 8.8] 记 $\Delta=[a,b]_\rho$。对任意 $a'<a$, $\mathfrak{r}(\Delta,\mathfrak{h})[a']=\mathfrak{h}[a']$。(3) [Ch25，引理 8.9] 若 $\Delta\in\mathfrak{h}$，则 $\mathfrak{r}(\Delta,\mathfrak{h})=\mathfrak{h}-\Delta$。(4) [Ch25，引理 8.10] 假设 $a(\Delta)=a(\Delta')$。则

$$\Upsilon(\Delta,\mathfrak{h})+\Upsilon(\Delta',\mathfrak{r}(\Delta,\mathfrak{h}))=\Upsilon(\Delta',\mathfrak{h})+\Upsilon(\Delta,\mathfrak{r}(\Delta',\mathfrak{h})).$$

(5) [Ch25，引理 8。12] 若 Δ,Δ' 不相连，则 $\mathfrak{r}(\Delta',\mathfrak{r}(\Delta,\mathfrak{h}))=\mathfrak{r}(\Delta,\mathfrak{r}(\Delta',\mathfrak{h}))$。

2.5. **多重线段的移除过程**。 对于 $\mathfrak{h}\in\mathrm{Mult}_\rho$，以及按升序（定义见第 1.2 节）书写的多重线段 $\mathfrak{m}=\{\Delta_1,\dots,\Delta_r\}\in\mathrm{Mult}_\rho$，定义：

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{m},\mathfrak{h})=\mathfrak{r}(\Delta_r,\dots,\mathfrak{r}(\Delta_1,\mathfrak{h})\dots).$$

我们称 $\mathfrak{m}$ 对 $\mathfrak{h}$ 是可容许的，如果 $\mathfrak{r}(\mathfrak{m},\mathfrak{h})\neq\infty_\circ$

对于 $\pi\in\mathrm{Irr}_\rho$ 和 $\mathfrak{m}\in\mathrm{Mult}_\rho$，定义 $\mathfrak{r}(\mathfrak{m},\pi):=\mathfrak{r}(\mathfrak{m},\mathfrak{h}\partial(\pi))$。与导数的关系如下：

定理 2.4。 [Ch25，定理 10。2] 设 $\pi\in\mathrm{Irr}_\rho$。设 $\mathfrak{m},\mathfrak{m}'\in\mathrm{Mult}_\rho$ 对 π 可容许。那么 $\mathfrak{m},\mathfrak{m}'$ 对 $\mathfrak{h}\partial(\pi)$ 可容许，并且，$D_{\mathfrak{m}}(\pi)\cong D_{\mathfrak{m}'}(\pi)$ 当且仅当$\mathfrak{r}(\mathfrak{m},\pi)=\mathfrak{r}(\mathfrak{m}',\pi)$。

2.6. **与导数的更多关系**。对于 $\mathfrak{h}\in\mathrm{Mult}_\rho$ 和 $\Delta=[a,b]_\rho\in\mathrm{Seg}_\rho$，令

$$\varepsilon_\Delta(\mathfrak{h})=|\left\{\widetilde{\Delta}\in\mathfrak{h}[a]:\Delta\subset\widetilde{\Delta}\right\}|.$$

定理 2.5. [Ch25，定理 9。3] 设 $\pi\in\mathrm{Irr}_\rho$。设 $\Delta\in\mathrm{Seg}_\rho$ 对 π 可容许。设$\Delta'\in\mathrm{Seg}_\rho$。假设以下任一条件成立：$a(\Delta')>a(\Delta)$；或者 Δ' 与 Δ 不相连。则 $\varepsilon_{\Delta'}(D_\Delta(\pi))=\varepsilon_{\Delta'}(\mathfrak{r}(\Delta,\pi))$。

3. Fine Chains

回忆一下，$\mathcal{S}(\pi,\tau)$ 在第 1.2 节中定义。我们在定义 3.5 中引入细链这一概念，以便有效比较两个移除过程的效果（引理 3.9）。

3.1. **基本思想**。设 $\mathfrak{h}\in\mathrm{Mult}_\rho$。我们考虑两个形如 $\Delta=[a,b]_\rho$ 和 $\Delta'=[a+1,b']_\rho$ 的线段，其中 $b<b'$。在这种情况下，令 $\Delta\cup\Delta'=[a,b']_\rho$ 和 $\Delta\cap\Delta'=[a+1,b]_\rho$。令

$$\mathfrak{h}^*=\mathfrak{h}-\Upsilon(\Delta,\mathfrak{h})+{}^-\Upsilon(\Delta,\mathfrak{h}),\quad \widetilde{\mathfrak{h}}=\mathfrak{h}-\Upsilon(\widetilde{\Delta},\mathfrak{h})+{}^-\Upsilon(\widetilde{\Delta},\mathfrak{h}).$$

应用引理 2.3，我们有

$$\mathfrak{r}(\{\Delta',\Delta\},\mathfrak{h})=\mathfrak{r}(\left\{\Delta',{}^-\Delta\right\},\mathfrak{h}^*)$$

and

$$\mathfrak{r}(\left\{\widetilde{\Delta}',\widetilde{\Delta}\right\},\mathfrak{h})=\mathfrak{r}(\left\{\widetilde{\Delta}',{}^-\widetilde{\Delta}\right\},\widetilde{\mathfrak{h}}).$$

注意，$\{\Delta',{}^-\Delta\}=\left\{\widetilde{\Delta}',{}^-\widetilde{\Delta}\right\}$。以下命题等价：

$\tilde{\mathfrak{r}}(\{\Delta,\Delta'\},\ \mathfrak{h}) = \mathfrak{r}$ (1) $(\{\Delta,\Delta'\},\ \mathfrak{h});\tilde{}$ (2) $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h};\tilde{}$ (3) $\Upsilon(\Delta,\ \mathfrak{h}) = \Upsilon(\Delta,\ \mathfrak{h})$。

交并过程所产生影响的一般情形，需要针对上述考虑作一些修改，因此我们将重点关注条件 (3)。特别是，第3.2节和第3.3节将改进引理 2.3(1)，以便对起始点进行多重“截除”。

3.2. **多重移除起始点**。令 $\mathfrak{h},\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho$。令 a 为满足 $\mathfrak{n}[a] \neq \emptyset$ 的最小整数。记 $\mathfrak{n}[a] = \{\Delta_1,\dots,\Delta_k\}$。

(1) 假设 $\mathfrak{n}[a]$ 对 $\mathfrak{h}$ 是可容许的。令 $\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}(\{\Delta_i,\dots,\Delta_1\},\mathfrak{h})$ 和 $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{h}$。定义

$$\mathfrak{fs}(\mathfrak{n},\mathfrak{h}) = \{\Upsilon(\Delta_1,\mathfrak{r}_0),\dots,\Upsilon(\Delta_k,\mathfrak{r}_{k-1})\}.$$

（$\mathfrak{fs}$指首段。）

(2) 假设 $\mathfrak{n}[a]$ 对 $\mathfrak{h}$ 不可容许。定义 $\mathfrak{fs}(\mathfrak{n},\mathfrak{h}) = \emptyset$。

引理 3.1。概念 $\mathfrak{fs}$（$\mathfrak{n},\mathfrak{h}$）是定义良好的，即与 $\mathfrak{n}[a]$中线段的排列顺序无关。

证明。每次交换一对相邻的线段，然后应用引理 2.3(4)和 2.3(5)。□

由定义还可得到：

引理3.2。采用上述记号，

$$\mathfrak{fs}(\mathfrak{n},\mathfrak{h}) = \mathfrak{fs}(\mathfrak{n}[a],\mathfrak{h}) = \mathfrak{fs}(\mathfrak{n}[a],\mathfrak{h}[a]).$$

我们定义 $\mathfrak{h}$的一个截断：

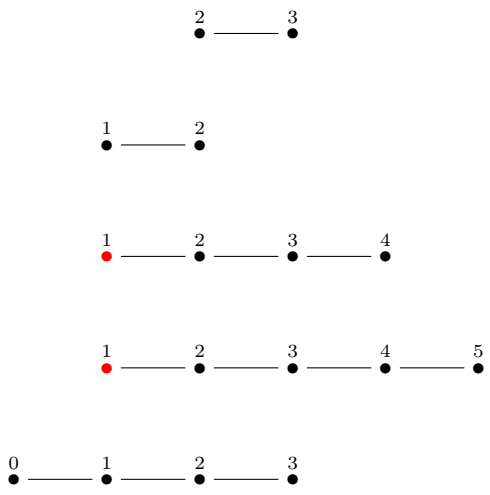
$$\mathfrak{trr}(\mathfrak{n},\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} - \mathfrak{fs}(\mathfrak{n},\mathfrak{h}) + {}^-(\mathfrak{fs}(\mathfrak{n},\mathfrak{h})), \tag{3.2}$$

以及 $\mathfrak{n}$的一个截断：

$$\mathfrak{trd}(\mathfrak{n},\mathfrak{h}) = \mathfrak{n} - \mathfrak{n}[a] + {}^-(\mathfrak{n}[a]).$$

这里我们用 r 表示 $\mathfrak{trr}$ 中的导数“结果”多重线段，并用 d 表示 $\mathfrak{trd}$中“对多重线段 $\mathfrak{n}$取导数”。

例3.3。设 $\mathfrak{h} = \{[0,3]_\rho,[1,2]_\rho,[1,4]_\rho,[1,5]_\rho,[2,3]_\rho\}$。设 $\mathfrak{n} = \{[1,3]_\rho,[1,5]_\rho,[2]_\rho\}$。



$\mathfrak{h}$ 中的两个红色圆点被“截断”，得到 $\mathfrak{trr}(\mathfrak{n},\ \mathfrak{h}) = \{[0,3]_\rho,[1,2]_\rho,[2,4]_\rho,[2,5]_\rho,[2,3]_\rho\}$。我们还得到 $\mathfrak{fs}(\mathfrak{n},\ \mathfrak{h}) = \{[1,4]_\rho,[1,5]_\rho\}$ 以及 $\mathfrak{trd}(\mathfrak{n},\ \mathfrak{h}) = \{[2,3]_\rho,[2,5]_\rho,[2]_\rho\}$。

引理 3.4。（多重移除起始点，参见引理 *2.3(1)*）令 $\mathfrak{n}$、$\mathfrak{h}$、a 如上。则

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{n},\mathfrak{h}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{trd}(\mathfrak{n},\mathfrak{h}), \mathfrak{trr}(\mathfrak{n},\mathfrak{h})).$$

证明。记 $\mathfrak{n}[a] = \left\{\Delta_1, \overline{}, \ldots, \Delta_k\right\}^{\neg}$。假设该结论对小于$k$的正整数成立，其中基本情形由引理 2.3(1)给出。若有必要，重新标记，使 Δ_1 成为 $\mathfrak{n}[a]$中最短的线段。令

$$\mathfrak{h}_1^* = \mathfrak{h} - \overline{\Delta}_1 + {}^{-}\overline{\Delta}_1.$$

我们注意到：

$$\begin{aligned}
\mathfrak{r}(\mathfrak{n}[a],\mathfrak{h}) &= \mathfrak{r}(\left\{\overline{\Delta}_2,\ldots,\overline{\Delta}_k\right\}, \mathfrak{r}(\overline{\Delta}_1,\mathfrak{h})) \\
&= \mathfrak{r}(\left\{\overline{\Delta}_2,\ldots,\overline{\Delta}_k\right\}, \mathfrak{r}({}^{-}\overline{\Delta}_1,\mathfrak{h}_1^*)) \\
&= \mathfrak{r}({}^{-}\overline{\Delta}_1, \mathfrak{r}(\left\{\overline{\Delta}_2,\ldots,\overline{\Delta}_k\right\}, \mathfrak{h}_1^*)) \\
&= \mathfrak{r}({}^{-}\overline{\Delta}_1, \mathfrak{r}(\left\{{}^{-}\overline{\Delta}_2,\ldots,{}^{-}\overline{\Delta}_k\right\}, \mathfrak{trr}(\mathfrak{n},\mathfrak{h}))) \\
&= \mathfrak{r}({}^{-}(\mathfrak{n}[a]), \mathfrak{trr}(\mathfrak{n},\mathfrak{h})),
\end{aligned}$$

其中，第二个等式由引理 2.3(1)得出，第一个、第三个和最后一个等式由引理 2.3(5)得出，第四个等式则由归纳假设得出。

对首项和末项应用 $\mathfrak{r}(\mathfrak{n}-\mathfrak{n}[a],\ \circ)$，即可得到该引理。 □

3.3. **细链**。

定义 3.5. 对于 $c\in\mathbb{Z}$，我们将 $\mathrm{Mult}^a_{\rho,c}\cup\{\infty\}$ 上的序 $<^a_c$ 修改如下。对于 $\mathrm{Mult}^a_{\rho,c}\cup\{\infty\}$ 中的 $\mathfrak{p}_1$、$\mathfrak{p}_2$，若 $\mathfrak{p}_1\neq\infty$ 且 $\mathfrak{p}_2=\infty$，我们也记作 $\mathfrak{p}_1<^a_c\mathfrak{p}_2$。若 $\mathfrak{p}_1=\mathfrak{p}_2=\infty$，则记作 $\mathfrak{p}_1\leq^a_c\mathfrak{p}_2$。

De定义 3.6.（移除序列中的首段集合）设 $\mathfrak{h},\mathfrak{n}\in\mathrm{Mult}^\rho$. Set $\mathfrak{n}_0=\mathfrak{n}$ 和 $\mathfrak{h}_0=\mathfrak{h}$。我们递归地定义：

$$\mathfrak{h}_i = \mathfrak{trr}(\mathfrak{h}_{i-1},\mathfrak{n}_{i-1}),\quad \mathfrak{n}_i = \mathfrak{trd}(\mathfrak{h}_{i-1},\mathfrak{n}_{i-1}).$$

多重线段序列

$$\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}_0,\mathfrak{h}_0), \mathfrak{fs}(\mathfrak{n}_1,\mathfrak{h}_1),\ldots$$

称为 $(\mathfrak{n},\mathfrak{h})$ 的细链。由于在使用细链时，我们通常固定 $\mathfrak{h}$ 并改变 $\mathfrak{n}$，因此将该细链记为 $\mathfrak{fc}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{n})$。由定义可知

$$\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}_i,\mathfrak{h}_i), \mathfrak{fs}(\mathfrak{n}_{i+1},\mathfrak{h}_{i+1}),\ldots$$

也是 $(\mathfrak{n}_i,\mathfrak{h}_i)$ 的细链。

例 3.7. 令 $\mathfrak{h}=\{[0,4]_\rho,[1,5]_\rho\}$。

- 令 $\mathfrak{n}=\{[0,1]_\rho,[1,2]_\rho\}$。那么，$(\mathfrak{n},\ \mathfrak{h})$ 的细链具有如下形式：
$$\{[0,4]_\rho\},\{[1,4]_\rho,[1,5]_\rho\},\{[2,4]_\rho\}.$$
- 令 $\mathfrak{n}=\{[0,2]_\rho,[1]_\rho\}$。那么，$(\mathfrak{n},\ \mathfrak{h})$ 的细链与前一个相同。

De定义 3.8。令 $\mathfrak{h}\in\mathrm{Mult}^\rho$。我们称两个细链 $\mathfrak{fc}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{n})$ 和 $\mathfrak{fc}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{n}')$ 重合i f (1) $\mathfrak{r}(\mathfrak{n},\ \mathfrak{h})\ \mathfrak{r}(\mathfrak{n}',\ \mathfrak{h})\neq\infty$；以及 (2) 两个序列 $\mathfrak{fc}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{n})$ 和 $\mathfrak{fc}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{n}')$ 相等。

引理 3.9. 设 $\mathfrak{h}\in\mathrm{Mult}^\rho$。设 $\mathfrak{n},\mathfrak{n}'\in\mathrm{Mult}^\rho$。那么 $\mathfrak{r}(\mathfrak{n},\mathfrak{h})=\mathfrak{r}(\mathfrak{n}',\mathfrak{h})\neq\infty$ 当且仅当细链 $\mathfrak{fc}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{n})$ 与 $\mathfrak{fc}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{n}')$ 相同。

证明. 采用定义 3.6 中的记号，将细链 $\mathrm{fc}\mathfrak{h}(\mathfrak{n})$ 和 $\mathrm{fc}\mathfrak{h}(\mathfrak{n}')$ 写为：

$$\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}_0,\mathfrak{h}_0),\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}_1,\mathfrak{h}_1),\dots$$

and

$$\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}'_0,\mathfrak{h}'_0),\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}'_1,\mathfrak{h}'_1),\dots$$

与 $\mathfrak{n}_0=\mathfrak{n},\ \mathfrak{n}'_0=\mathfrak{n}',\ \mathfrak{h}_0=\mathfrak{h}'_0=\mathfrak{h}$。

对于仅当方向，引理 2.3(2) 蕴含对所有 i，$\mathfrak{h}_i=\mathfrak{h}'_i$。于是，根据 $\mathfrak{h}_i$ 和 $\mathfrak{h}'_i$ 的构造，我们有 $\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}_{i-1},\ \mathfrak{h}_{i-1})=\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}'_{i-1},\ \mathfrak{h}'_{i-1})$。换言之，$(\mathfrak{n},\ \mathfrak{h})$ 和 $(\mathfrak{n}',\ \mathfrak{h})$ 的细链相同。

对于若方向，由于细链相同，根据 (3.2)，我们必有 $\mathfrak{h}_i=\mathfrak{h}'_i$。特别地，$\mathfrak{r}(\mathfrak{n},\ \mathfrak{h})=\mathfrak{r}(\mathfrak{n}',\ \mathfrak{h})$，正如所需。□

3.4. **细链序**。若多重线段 $\mathfrak{n}$ 和 $\mathfrak{n}'$ 满足 $\cup_{\Delta\in\mathfrak{n}}\Delta=\cup_{\Delta\in\mathfrak{n}'}\Delta$（按重数计），则称它们具有相同的尖点支撑。

定义 3.10。设 $\mathfrak{n},\mathfrak{n}'\in\mathrm{Mult}_\rho$ 具有相同的尖点支撑。设 $\mathfrak{h}\in\mathrm{Mult}_\rho$。假设 $\mathfrak{r}(\mathfrak{n},\mathfrak{h})\neq\infty$ 且 $\mathfrak{r}(\mathfrak{n}',\mathfrak{h})\neq\infty$。将 $\mathrm{fc}\mathfrak{h}(\mathfrak{n})$ 记作 $\mathfrak{s}_1,\mathfrak{s}_2,\dots$，将 $\mathrm{fc}\mathfrak{h}(\mathfrak{n}')$ 记作$\mathfrak{s}'_1,\mathfrak{s}'_2,\dots$。类似于定义 3.6 中的记号，归纳地定义 $\mathfrak{n}_i=\mathfrak{n}_{i-1}-\mathfrak{s}_i+{}^-\mathfrak{s}_i$ 和 $\mathfrak{n}'_i=\mathfrak{n}'_{i-1}-\mathfrak{s}'_i+{}^-\mathfrak{s}'_i$，其中 $\mathfrak{n}_0=\mathfrak{n}$ 且 $\mathfrak{n}'_0=\mathfrak{n}'$。令 c_i（分别为 c'_i）为满足 $\mathfrak{n}_i[c_i]\neq\emptyset$（分别为 $\mathfrak{n}'_i[c'_i]\neq\emptyset$）的最小整数。

如果存在某个 i，使得对任意 $j<i$、$\mathfrak{s}_j=\mathfrak{s}'_j$ 以及.....，则我们将 $\mathfrak{n}<^{fc}\mathfrak{n}'$ 定义为细链序

$$\mathfrak{s}_i<^a_{c_{i-1}}\mathfrak{s}'_i.$$

如果 $\mathfrak{n}<^{fc}\mathfrak{n}'$ 或 $\mathrm{fc}\mathfrak{h}(\mathfrak{n})=\mathrm{fc}\mathfrak{h}(\mathfrak{n}')$，我们就写作 $\mathfrak{n}\leq^{fc}\mathfrak{n}'$。注意，$\leq^{fc}$ 是传递的。

4. 对交并过程的封闭性

本节的主要结果是定理 4.4，它证明了 $\mathcal{S}(\pi,\ \tau)$ 的凸结构。定理 2.4 将凸性问题转化为移除过程上的一些显式组合学问题。

引理 4.1. 设 $\mathfrak{h}\in\mathrm{Mult}_\rho$。设 $\mathfrak{m}_1$ 属于 $\mathrm{Mult}^a_{\rho,c}$。设 $\mathfrak{m}_2\in\mathrm{Mult}^a_{\rho,c}$ 由 $\mathfrak{m}_1$通过将 $\mathfrak{m}_1$ 中的一个线段替换为某个 $b\in\mathbb{Z}$对应的更长线段 $[c,b]_\rho$ 得到。则

$$\mathfrak{fs}(\mathfrak{m}_1,\mathfrak{h})\leq^a_c\mathfrak{fs}(\mathfrak{m}_2,\mathfrak{h}).$$

证明。$\mathfrak{m}_1$ 和 $\mathfrak{m}_2$ 之间唯一的差异在于一条线段。根据引理 3.1，我们可以安排在得到 $\mathfrak{fs}(\mathfrak{m}_1,\mathfrak{h})$和 $\mathfrak{fs}(\mathfrak{m}_2,\mathfrak{h})$的过程中，将这些线段分别置于最后。因此，$\mathfrak{fs}(\mathfrak{m}_1,\mathfrak{h})$和 $\mathfrak{fs}(\mathfrak{m}_2,\mathfrak{h})$之间唯一的差异也只在于一条线段。对于这样的情形，为 $\mathfrak{m}_2$ 生成的首段比为 $\mathfrak{m}_1$生成的首段更长。为 $\mathfrak{m}_1$ 和 $\mathfrak{m}_2$ 生成的其他首段则相同。因此，我们有 $\mathfrak{fs}(\mathfrak{m}_1,\mathfrak{h})\leq^a_c\mathfrak{fs}(\mathfrak{m}_2,\mathfrak{h})$。□

引理 4.2. 设 $\mathfrak{h}\in\mathrm{Mult}_\rho$。固定 $\mathfrak{n}\in\mathrm{Mult}_\rho$。令 $\mathcal{N}=\mathcal{N}(\mathfrak{n})$ 为所有与 $\mathfrak{n}$具有相同尖点支撑的多重线段所构成的集合。那么，对于 $\mathfrak{n}',\mathfrak{n}''\in\mathcal{N}$，

$$\mathfrak{n}'\leq_Z\mathfrak{n}''\quad\Longrightarrow\quad\mathfrak{n}''\leq^{fc}\mathfrak{n}'.$$

证明。根据 $\leq_Z$的传递性，我们只需考虑 $\mathfrak{n}'$ 由 $\mathfrak{n}''$ 经一次初等交并运算得到的情形。设 Δ_1 和 Δ_2 是参与该初等交并运算的两个相连线段。必要时重新标记，我们写作：

$$\Delta_1=[a_1,b_1]_\rho,\quad\Delta_2=[a_2,b_2]_\rho,$$

与 $a_1<a_2$ 和 $b_1<b_2$。

我们再次将 $\mathrm{fc}(\mathfrak{n}')$ 写作 $\mathfrak{s}_1'$，$\mathfrak{s}_2'$，……，并将 $\mathrm{fc}(\mathfrak{n}'')$ 写作 $\mathfrak{s}_1''$，$\mathfrak{s}_2''$，……。与定义 3.6 中的记号类似，设 $\mathfrak{n}_i' = \mathfrak{n}_{i-1}' - \mathfrak{s}_i' + {}^-\mathfrak{s}_i'$ 和 $\mathfrak{n}_i'' = \mathfrak{n}_{i-1}'' - \mathfrak{s}_i'' + {}^-\mathfrak{s}_i''$。再次令 c_i 为满足 $\mathfrak{n}_i'[c_i] \neq \emptyset$的最小整数。从交并运算可以直接看出，$\mathfrak{n}_i''[c_i]$ 是通过将 $\mathfrak{n}_i'[c_i]$ 中的一个线段替换为更长的线段（形式为 $[c_i, b]_\rho$）得到的。因此，由引理 4.1 可得 $\mathfrak{n}'' \leq^{fc} \mathfrak{n}'$。□

定理 4.3. 设 $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}' \in$ 多重集$_\rho$。假设 $\mathfrak{n}' \leq_Z \mathfrak{n}$。设 $\mathfrak{n}'' \in$ 多重集$_\rho$，使得

$$\mathfrak{n}' \leq_Z \mathfrak{n}'' \leq_Z \mathfrak{n}.$$

那么，若 $\mathfrak{r}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{n}', \mathfrak{h})$，则 $\mathfrak{r}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{n}'', \mathfrak{h})$。

证明。若 $\mathfrak{r}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) \neq \mathfrak{r}(\mathfrak{n}'', \mathfrak{h})$，则引理 3.9 和 4.2 蕴含 $\mathfrak{n} <^{fc} \mathfrak{n}''$。再次由引理 4.2，$\mathfrak{n} <_Z \mathfrak{n}'$。现在，$<^{fc}$ 的传递性意味着 $\mathfrak{n} <^{fc} \mathfrak{n}'$。然而，随后由引理 3.9 可得 $\mathfrak{r}(\mathfrak{n}', \mathfrak{h}) \neq \mathfrak{r}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h})$，从而产生矛盾。□

我们将定理 4.3 中的组合陈述转化为相应的表示论陈述：

定理 4.4. 设 $\pi \in \mathrm{Irr}\rho$，且设 τ 是 $\pi^{(i)}$ 的一个简单商。令 $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}' \in \mathcal{S}(\pi, \tau)$ 满足$\mathfrak{n}' \leq_Z \mathfrak{n}$。对于任意满足 $\mathfrak{n}' \leq_Z \mathfrak{n}'' \leq_Z \mathfrak{n}$ 的 $\mathfrak{n}'' \in$多重集$_\rho$，我们有 $\mathfrak{n}'' \in \mathcal{S}(\pi, \tau)$。

证明。这由定理 2.4 和定理 4.3 得出。□

我们还有如下组合性推论：

推论 4.5。我们采用引理 *4.2* 中的记号。令

$$\widetilde{\mathcal{N}} := \{\mathfrak{n} \in \mathcal{N} : \mathfrak{r}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) \neq \infty\}.$$

我们在 $\mathcal{N}$ 上定义等价关系 $\sim$：$\mathfrak{n} \sim \mathfrak{n}'$ 当且仅当 $\mathfrak{r}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{n}', \mathfrak{h})$。在 $\mathcal{N}/\sim$ 上定义 $\preceq_Z$ 如下：对于 $N, N' \in \mathcal{N}/\sim$，记 $N \preceq_Z N'$，如果存在 $\mathfrak{n} \in N$ 和 $\mathfrak{n}' \in N'$ 使得 $\mathfrak{n} \leq_Z \mathfrak{n}'$。类似地，我们通过将 $\leq_Z$ 替换为 $\leq^{fc}$ 来定义 $\widetilde{\mathcal{N}}$ 上的概念 $\preceq^{fc}$。则有如下结论：

- $\preceq_Z$ 和 $\preceq^{fc}$ 都在 $\widetilde{\mathcal{N}}/\sim$ 上定义了良定义的偏序集结构。
- $\mathcal{N}/\sim$ 上的恒等映射在$(\mathcal{N}/\sim, \preceq_Z)$与$(\widetilde{\mathcal{N}}/\sim, \preceq^{fc})$之间诱导出一个反序映射。

证明。对于第一点，唯一不明显的部分是反对称性，这确实由引理 3.9 和 4.2 得出。第二点是引理 4.2 的直接推论。□

5. 可极小化性

5.1. 关于极小性的基本例子。

例 5.1。设 $\mathfrak{h} = \{[0,5]_\rho, [3,8]_\rho\}$。设 $\mathfrak{n} = \{[0,3]_\rho, [3,4]_\rho\}$。则 $\mathfrak{r}([0,3]_\rho, \mathfrak{h}) = \{[4,5]_\rho, [3,8]_\rho\}$，因此 $\mathfrak{r}([3,4]_\rho, \mathfrak{r}([0,3]_\rho, \mathfrak{h})) = \{[4,8]_\rho, [5]_\rho\}$。注意，线段 $[5]_\rho$ 来自对 $\mathfrak{r}([0,3]_\rho, \mathfrak{h})$ 中的线段 $[4,5]_\rho$ 进行截断，而线段 $[4,5]_\rho$ 确实来自对线段 $[0,5]_\rho$ 进行截断。不禁让人思考，是否可以“结合”这两种作用。事实上，如果可以考虑 $\mathfrak{n}' = \{[0,4]_\rho, [3]_\rho\}$，那么 $\mathfrak{r}([3]_\rho, \mathfrak{h}) = \{[0,5]_\rho, [4,8]_\rho\}$，并且 $\mathfrak{r}([0,4]_\rho, \mathfrak{r}([3]_\rho, \mathfrak{h})) = \{[5]_\rho, [4,8]_\rho\}$。在最后一次移除过程中，$[5]_\rho$ 是通过对 $[0,5]_\rho$ 截断一次而直接得到的。

为方便起见，我们定义 $\mathcal{S}(\pi,\ \tau)$ 的多重线段类比。对于 $\mathfrak{h},\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Mult}_\rho$,

$$\mathcal{S}'(\mathfrak{h},\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult}_\rho : \mathfrak{r}(\mathfrak{m},\mathfrak{h}) = \mathfrak{p}\}.$$

上述例子表明，$\mathfrak{n}$ 在 $\mathcal{S}'(\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}(\mathfrak{n},\ \mathfrak{h}))$中不是 $\leq_Z$-极小的。例 5.1 中的直观想法将在第9.1节中得到正式表述，但我们先来讨论下面更一般的多重线段（而非仅有两个线段）。

5.2. **局部可极小化性**。现在我们在定义 5.2 中定义可极小化性，以证明定理 6.4 中 $\mathcal{S}(\pi,\ \tau)$的 $\leq_Z$-极小元的唯一性。

定义 5.2。设 $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mult}_\rho$，且 $\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho$ 对 $\mathfrak{h}$可容许。设 a 为满足 $\mathfrak{n}[a] \neq \emptyset$的最小整数。若存在一条线段$\Delta$ 属于 $\mathfrak{n}[a+1]$，使得下述条件成立，则称$(\mathfrak{n},\ \mathfrak{h})$是局部可极小化的：

$$|\left\{\Delta \in \mathfrak{n}[a] : \overline{\Delta} \subset \Delta\right\}| < |\left\{\Delta \in \mathfrak{fs}(\mathfrak{n},\mathfrak{h}) : \overline{\Delta} \subset \Delta\right\}|.$$

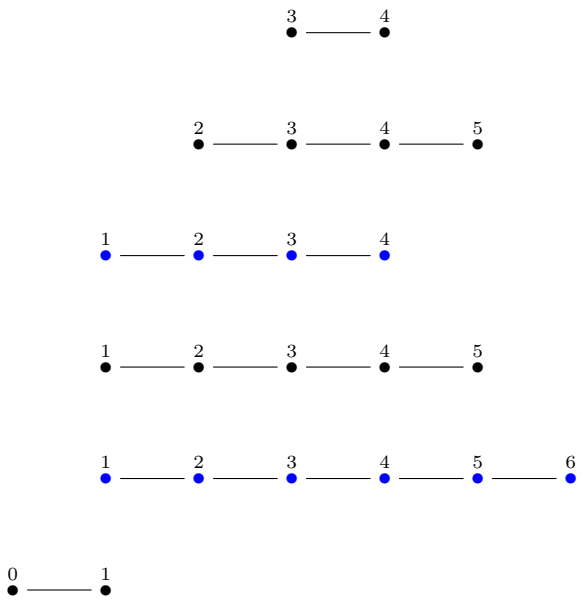
我们强调，非严格不等式 $\leq$ 始终成立。

注5.3。我们进一步解释定义 5.2。正如术语所暗示的，局部可极小化性$(\mathfrak{n},\ \mathfrak{h})$旨在找到某个 $\mathfrak{n}' <_Z \mathfrak{n}$，使得 $\mathfrak{r}(\mathfrak{n}',\ \mathfrak{h}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{n},\ \mathfrak{h})$。例如，若 $\mathfrak{n}[a]$ 中的所有线段 Δ 都满足$\Delta \subset \Delta$，则移除过程保证$\mathfrak{fs}(\mathfrak{n},\mathfrak{h})$中的任意 Δ 也满足$\Delta \subset \Delta$。因此，定义 5.2 中的不等式不成立。另一方面，$\mathfrak{n}[a]$ 中的所有线段都不与 Δ 相连，因此 $\mathfrak{n}[a]$ 与 Δ中的线段之间不存在交并运算。

我们可以通过只处理一条线段，以一种简单的方式检验局部可极小化性。以下引理的证明直接由定义得到：

引理 5.4。设 $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mult}_\rho$ 和 $\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho$ 对 $\mathfrak{h}$ 是可容许的。设 a 是满足 $\mathfrak{n}[a] \neq \emptyset$ 的最小整数。设 Δ 是 $\mathfrak{n}[a]$ 中的一条线段。若存在 $\mathfrak{n}[a+1]$ 中的一条线段 Δ，使得 $\Delta \not\subset \Delta$ 且 $\Delta \subset \Upsilon(\Delta, \mathfrak{h})$，则 $(\mathfrak{n}, \mathfrak{h})$ 是局部可极小化的。

例5.5。设 $\mathfrak{h} = \{[0,1]_\rho, [1,4]_\rho, [1,5]_\rho, [1,6]_\rho, [2,5]_\rho, [3,4]_\rho\}$，设 $\mathfrak{n} = \{[1,3]_\rho, [1,6]_\rho, [2,4]_\rho\}$，并设 $\mathfrak{n}' = \{[1,3]_\rho, [1,6]_\rho, [2,5]_\rho\}$。



蓝色点表示 $\mathfrak{fs}(\mathfrak{n},\ \mathfrak{h})$ 和 $\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}',\ \mathfrak{h})$。注意，

$$|\{\Delta\in\mathfrak{n}[1]:[2,4]_\rho\subset\Delta\}|=1,\quad |\{\Delta\in\mathfrak{fs}(\mathfrak{n},\mathfrak{h}):[2,4]_\rho\subset\Delta\}|=2$$

因此，$(\mathfrak{n},\ \mathfrak{h})$ 是局部可极小化的。另一方面，

$$|\{\Delta\in\mathfrak{n}'[1]:[2,5]_\rho\subset\Delta\}|=1,\quad |\{\Delta\in\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}',\mathfrak{h}):[2,5]_\rho\subset\Delta\}|=1.$$

因此，$(\mathfrak{n}',\ \mathfrak{h})$ 不是局部可极小化的。

引理 5.6。设 $\mathfrak{h}\in\mathrm{Mult}^\rho$ 和 $\mathfrak{n}\in\mathrm{Mult}^\rho$ 对 $\mathfrak{h}$ 是可容许的。设 $\mathfrak{n}'=\mathfrak{trd}(\mathfrak{n},\mathfrak{h})$ 和$\mathfrak{h}'=\mathfrak{trr}(\mathfrak{n},\mathfrak{h})$。令 a 为满足 $\mathfrak{n}'[a]\neq\emptyset$ 的最小整数。固定某个 $c>a+1$。固定一条形如 $[c,d]_\rho$ 的线段 Δ，其中 d。假设

$$(*)\quad \left|\left\{\Delta\in\mathfrak{n}'[a+1]:\overline{\Delta}\subset\Delta\right\}\right|<\left|\left\{\Delta\in\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}',\mathfrak{h}'):\overline{\Delta}\subset\Delta\right\}\right|.$$

- 存在一条线段 Δ，属于$\widetilde{\ }\mathfrak{n}[a]+\mathfrak{n}[a+1]$，使得

$$\mathfrak{fs}(\mathfrak{n},\mathfrak{h})=\mathfrak{fs}(\widetilde{\mathfrak{n}},\mathfrak{h}),\quad \mathfrak{fs}(\mathfrak{n}',\mathfrak{h}')=\mathfrak{fs}(\widetilde{\mathfrak{n}}',\mathfrak{h}'),$$

  $\widetilde{\ }$其中 $\widetilde{\mathfrak{n}}$ 由 $\mathfrak{n}$ 通过在 Δ 和 Δ 之间进行初等交并过程得到，而 $\widetilde{\mathfrak{n}}'=\mathfrak{trd}(\widetilde{\mathfrak{n}},\mathfrak{h})$。

- 此外，若无法在 $\mathfrak{n}[a+1]$ 中选$\widetilde{\ }$取线段 Δ，则

$$\left|\left\{\Delta\in\mathfrak{n}[a]:\overline{\Delta}\subset\Delta\right\}\right|<\left|\left\{\Delta\in\mathfrak{fs}(\mathfrak{n},\mathfrak{h}):\overline{\Delta}\subset\Delta\right\}\right|.$$

证明。回忆

$$^-(\mathfrak{n}[a])=\left\{^-\Delta:\Delta\in\mathfrak{n}[a],\Delta\neq[a]_\rho\right\}.$$

设 $r=|^-(\mathfrak{n}[a])|$，且设 $s=|\mathfrak{n}[a+1]|$。我们按如下方式排列 $\mathfrak{n}'[a+1]$ 中的线段：前 r 条线段是 $^-(\mathfrak{n}[a])$ 中的线段，其余的 $\mathfrak{n}'[a+1]$ 中的线段则是 $\mathfrak{n}[a+1]$ 中的线段。为便于讨论，将 $\mathfrak{n}'[a+1]$ 中的前 r 条线段标记为

$$\Delta_1,\dots,\Delta_r$$

$\mathfrak{n}'[a+1]$ 中其余的线段标记为：

$$\widetilde{\Delta}_1,\dots,\widetilde{\Delta}_s.$$

我们还设

$$\Lambda_i=\Upsilon(\Delta_i,\mathfrak{r}(\{\Delta_1,\dots,\Delta_{i-1}\},\mathfrak{h}'),$$
$$\widetilde{\Lambda}_i=\Upsilon(\widetilde{\Delta}_i,\mathfrak{r}(\left\{\widetilde{\Delta}_1,\dots,\widetilde{\Delta}_{i-1},\Delta_1,\dots,\Delta_r\right\},\mathfrak{h}')).$$

情形 1：

$$\left|\left\{\Delta\in\mathfrak{n}[a]:\overline{\Delta}\subset\Delta\right\}\right|=\left|\left\{\Delta\in\mathfrak{fs}(\mathfrak{n},\mathfrak{h}):\overline{\Delta}\subset\Delta\right\}\right|.$$

此条件和嵌套性质意味着，对于前 r 条线段 Δ_i，若 $\Delta\not\subset\Delta_i$，则 $\overline{\ }$

$$\overline{\Delta}\not\subset\Lambda_i.$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$因此，条件 (*) 意味着存在一条线段 Δ_i，使得 $\Delta\not\subset\overline{\ }\Delta_i$ 且 $\Delta\subset\ \overline{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\overline{\ }\widetilde{\ }\Lambda_i$。现在，我们对 Δ 和 Δ_i 进行交并运算，从 $\mathfrak{n}$得到 $\widetilde{\mathfrak{n}}$。于是$\mathfrak{n}[a]=\widetilde{\mathfrak{n}}[a]$，因此 $\mathfrak{fs}(\mathfrak{n},\mathfrak{h})=\mathfrak{fs}(\widetilde{\mathfrak{n}},\mathfrak{h})$。并且，$\mathfrak{n}'$和 $\widetilde{\mathfrak{n}}':=\mathfrak{trd}(\widetilde{\mathfrak{n}},\mathfrak{h}')$ 仅相差$\sim$ $\widetilde{\ }\Delta_i$ 和 $\Delta_i\cup\Delta$。然而，如果我们在计算 $\mathfrak{fs}(\widetilde{\mathfrak{n}}',\mathfrak{h}')$ 时采用相同的序，则可以$\widetilde{\ }$直接利用 $\Delta\subset\Lambda_i$ 看出 $\overline{\ }$

$$\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}',\mathfrak{h}')=\mathfrak{fs}(\widetilde{\mathfrak{n}}',\mathfrak{h}').$$

情况 2：

$$\left|\left\{\Delta\in\mathfrak{n}[a]:\overline{\Delta}\subset\Delta\right\}\right|<\left|\left\{\Delta\in\mathfrak{fs}(\mathfrak{n},\mathfrak{h}):\overline{\Delta}\subset\Delta\right\}\right|.$$

现在，由 (*) 可知，存在一个线段 $\Delta = \Delta_i$ 或 $-\Delta_i$，属于 $\mathfrak{n}'$，使得 $\Delta \not\subset \Delta$ 且 $\Delta \subset \Lambda$，其中 $\Lambda = \Lambda_i$ 或 Λ_i，具体取决于 Δ。

If Δ 和 Δ_i 之间进行比较的情形，论证与前面类似，细节从略。

现在考虑对于某个 i，$\Delta = \Delta_i$ 的情形。为方便起见，对任意 e，设 ${}^+[a+1, e]_\rho = [a, e]_\rho$。注意，所有 ${}^+\Delta_k$（$k = 1$、……、r）构成了 $\mathfrak{n}[a]$中的所有非单点线段。我们可以使用序 ${}^+\Delta_1$、……、${}^+\Delta_r$（将其他单点线段置于末尾）来计算 $\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h})$；类似地，将 ${}^+\Delta_i$ 替换为 ${}^+\Delta_i \cup \Delta$，并使用该序来计算 $\mathfrak{fs}(\widetilde{\mathfrak{n}}, \mathfrak{h})$。

计算 $\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h})$ 与 $\mathfrak{fs}(\widetilde{\mathfrak{n}}, \mathfrak{h})$ 的唯一差别在于计算${}^+\Delta_i$ 和 ${}^+\Delta_i \cup \Delta$的首段，但利用移除过程的嵌套性质和条件 $\Delta \subset \Lambda$，仍可保证所选的首段（用于计算$\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h})$ 和 $\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}', \mathfrak{h}')$）保持一致。因此，$\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{fs}(\widetilde{\mathfrak{n}}, \mathfrak{h})$。更具体地说，我们再次考虑并按如下方式排列 $\mathfrak{n}[a]$ 中的线段：前 r 条线段为 ${}^+\Delta_1$、……、${}^+\Delta_r$，而 $\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h})$ 中的其余线段为单点线段 $[a]_\rho$。现在，对于 $i = 1$、……、r，令

$$\Lambda_i' = \Upsilon({}^+\Delta_i, \mathfrak{r}(\{{}^+\Delta_1, \ldots, {}^+\Delta_{i-1}\}, \mathfrak{h})),$$

其中都不是单元素集（因为每个 ${}^+\Delta_i$ 都不是单元素集）。根据定义，这些 Λ_i' 属于 $\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h})$，因此根据 (3.2)，这些 $-\Lambda_i'$ 属于 $\mathfrak{h}'$。现在，根据选取首段时的极小性，我们有：

$$\Lambda_i \subset \Lambda_i'$$

因此，$\Delta_i \cup \Delta \subset \Lambda_i$ 意味着 ${}^+\Delta_i \cup \Delta \subset \Lambda_i'$。选取这些首段时，$\mathfrak{h}[a]$ 中对应于 ${}^+\Delta_i \cup \Delta$ 的那一段将与对应于 ${}^+\Delta_i$的那一段一致。

计算 $\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}', \mathfrak{h}') = \mathfrak{fs}(\widetilde{\mathfrak{n}}', \mathfrak{h}')$也类似，因为 $\mathfrak{n}'$ 和$\widetilde{\mathfrak{n}}'$ 之间唯一的差别是 Δ_i 和$\Delta_i \cup \Delta$。具体而言，$\mathfrak{n}'[a+1]$ 和 $\widetilde{\mathfrak{n}}'$ 的前 $i-1$ 个线段都可以排列为 Δ_1，……，Δ_{i-1}，因此两种情况下首段的选取分别为Λ_1，……，Λ_{i-1}。$\mathfrak{n}'[a+1]$ 的第 i个线段可以排列为 Δ_i，而 $\widetilde{\mathfrak{n}}'[a+1]$ 的第 i个线段可以排列为$\Delta_i \cup \Delta (\subset \Lambda_i)$。现在，在 $\mathfrak{n}'[a+1]$ 的情况下，下一个首段选为 Λ_i；根据为 $\mathfrak{n}'[a+1]$选取 Λ_i 时的极小性，在 $\widetilde{\mathfrak{n}}'[a+1]$ 的情况下，下一个首段也必须选为 Λ_i。□

6. Uniqueness of minimality in $\mathcal{S}(\pi, \tau)$

“可极小化性”这一术语由以下引理启发而来：

引理 6.1。设 $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mult}_\rho$ 和 $\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho$ 对 $\mathfrak{h}$ 可容许。细链 $\mathrm{fch}(\mathfrak{n})$ 具有如下形式

$$\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}_0, \mathfrak{h}_0), \mathfrak{fs}(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{h}_1), \ldots$$

如定义 *3.6* 所示。若对于任意 j，$(\mathfrak{n}_j, \mathfrak{h}_j)$ 都不是局部可极小化的，则不存在多重线段 $\mathfrak{n}'$ 使得 $\mathfrak{n}' \lesssim_Z \mathfrak{n}$ 且 $\mathfrak{r}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{n}', \mathfrak{h})$。

证明。假设存在多重线段 $\mathfrak{n}'$ 使得 $\mathfrak{n}' \lesssim_Z \mathfrak{n}$ 且 $\mathfrak{r}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{n}', \mathfrak{h})$。那么，根据定理 4.4，我们可以设 $\mathfrak{n}'$ 是由 $\mathfrak{n}$ 经过一次初等交并过程得到的。设 $\Delta = [\widetilde{a}, b]_\rho, \Delta = [a, b]_\rho$ 是 $\mathfrak{n}$ 中参与交并过程的线段；如有必要，交换标号后，我们可以假设 $\widetilde{a} < a$。

同样地，我们得到细链

$$\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}_0', \mathfrak{h}_0'), \mathfrak{fs}(\mathfrak{n}_1', \mathfrak{h}_1'), \ldots,$$

对于 $(\mathfrak{n}', \mathfrak{h})$。我们考虑满足以下条件的 j：$a-1$ 是满足 $\mathfrak{n}_j[c] \neq \emptyset$ 的最小整数 c。（利用 Δ 和 Δ 相连这一条件，可知这样的 $\sim j$ 存在。）

$\mathfrak{n}_j$ 中有一条线段 $[a-1,b]_\rho$，它是通过截断 Δ 得到的。若在 $\mathfrak{n}_j$ 中用 $[a-1,\mathfrak{b}]_\rho$ 替换 $[a-1,\mathfrak{b}]_\rho$，则得到 $\mathfrak{n}'_j$。

Now

$$|\{\Delta\in\mathfrak{n}_j[a-1]:\overline{\Delta}\subset\Delta\}|<|\{\Delta\in\mathfrak{n}'_j[a-1]:\overline{\Delta}\subset\Delta\}|\leq|\left\{\Delta\in\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}'_j,\mathfrak{h}_j):\widetilde{\Delta}\subset\Delta\right\}|,$$

其中，第一个严格不等式来自 $[a-1,b]_\rho$。但根据引理 3.9，两条细链重合，特别是 $\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}_j,\mathfrak{h}_j)=\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}'_j,\mathfrak{h}_j)$。因此，如所需，根据定义 5.2，$(\mathfrak{n}_j,\mathfrak{h}_j)$ 是局部可极小化的。□

现在我们证明引理 6.1 的逆命题。主要思路是利用引理 5.6，为交并过程找到一个合适的线段。由于局部可极小化性针对的是细链 $\mathfrak{fch}(\mathfrak{n})$ 中的多重线段，因此可能无法立即找到一个最初来自 $\mathfrak{n}$ 的线段；于是引理 5.6 的第二条允许我们回溯，并归纳地运用引理 5.6，找到合适的线段。这些线段来自 $\mathfrak{n}$ 中的某个原始线段，而该线段正是交并运算的成因。

引理 6.2。*我们继续使用引理 6.1 中的记号。若对于某个 j，$(\mathfrak{n}_j,\mathfrak{h}_j)$ 是局部可极小化的，则存在一个多重线段 $\mathfrak{n}'$，使得 $\mathfrak{n}'\lesssim_Z\mathfrak{n}$ 且 $\mathfrak{r}(\mathfrak{n},\mathfrak{h})=\mathfrak{r}(\mathfrak{n}',\mathfrak{h}')$。*

证明。我们任取满足 $(\mathfrak{n}_j,\mathfrak{h}_j)$ 局部可极小化的 j。令 a 为满足 $\mathfrak{n}_j[a]\neq\emptyset$ 的最小整数。若 $j=1$，则下面的论证类似，因此为便于使用引理 5.6 中所述的形式，我们假设 $j>1$。

注意，$\mathfrak{n}_j[a]=\mathfrak{n}[a]\setminus\mathfrak{n}_{j-1}[a-1]$。（这里我们有 $\mathfrak{n}_{j-1}[a]=\mathfrak{n}[a]$。）局部可极小化条件意味着，对于 $\mathfrak{n}[a+1]$ 中某条线段（记为 Δ），我们可以使用引理 5.6 的第一条（在我们的情形中，令 $c=a+1>a-1+1$）。于是，该引理意味着我们可以在 $\mathfrak{n}_{j-1}[a-1]\cup\mathfrak{n}[a]$ 中找到一条线段 Δ，满足所需性质。

第一种情况是 $\Delta\in\mathfrak{n}[a]$。在这种情况下，令 $\widetilde{\mathfrak{n}}$ 为由 $\mathfrak{n}$ 通过对线段 Δ 和 Δ进行交并运算所得的多重线段。根据定义，很容易得到

$$\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}_0,\mathfrak{h}_0)=\mathfrak{fs}(\widetilde{\mathfrak{n}}_0,\mathfrak{h}_0),\dots,\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}_{j-1},\mathfrak{h}_{j-1})=\mathfrak{fs}(\widetilde{\mathfrak{n}}_{j-1},\mathfrak{h}_{j-1}),$$

其中 $\mathfrak{h}_0=\mathfrak{h}$，$\mathfrak{fs}(\widetilde{\mathfrak{n}}_k,\mathfrak{h}_k)$ 是 $\mathfrak{fch}(\widetilde{\mathfrak{n}})$ 的前 $j-1$ 项。然而，根据引理 5.6，可保证 $\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}_j,\mathfrak{h}_j)=\mathfrak{fs}(\widetilde{\mathfrak{n}}_j,\mathfrak{h}_j)$，因此 $\mathfrak{trr}(\mathfrak{n}_j,\mathfrak{h}_j)=\mathfrak{trr}(\widetilde{\mathfrak{n}}_j,\mathfrak{h}_j)$。但这意味着 $\mathfrak{n}_{j+1}=\widetilde{\mathfrak{n}}_{j+1}$；这是因为在截去点 $\nu^c\rho$（其中 $c\leq a$）后，对于 $\Delta\cup\Delta$ 和 $\Delta\cap\Delta$，截断后的线段重合。根据定义，两条细链中剩余的项也相同。因此，两条细链重合，故由引理 3.9，$\mathfrak{r}(\mathfrak{n},\mathfrak{h})=\mathfrak{r}(\widetilde{\mathfrak{n}},\mathfrak{h})$。

第二种情况是 $\Delta\notin\mathfrak{n}[a]$。这种情况可以通过反复应用引理 5.6，再应用引理 3.9 得到。□

命题 6.3。*设 $\mathfrak{h},\mathfrak{p}\in\mathrm{Mult}_\rho$。那么，当 $\mathcal{S}'(\mathfrak{h},\mathfrak{p})\neq\emptyset$ 时，$\mathcal{S}'(\mathfrak{h},\mathfrak{p})$ 中存在唯一极小元。*

证明。我们先说明证明的主要思路，它本质上是归纳性的。为此，对于线段 $[a,b]_\rho\in\mathsf{Seg}_\rho$，定义 $l_{rel}([a,b]_\rho)=b-a+1$；对于多重线段 $\mathfrak{n}\in\mathsf{Mult}_\rho$，定义 $l_{rel}(\mathfrak{n})=\sum l_{rel}(\Delta)$，其中求和遍历 $\mathfrak{n}$ 中的所有线段。首先，在 $\mathcal{S}'(\mathfrak{h},\mathfrak{p})$ 中选取两个极小多重线段 $\mathfrak{n}$ 和 $\mathfrak{n}'$。然后分别在 $\mathfrak{n}$ 和 $\mathfrak{n}'$ 中找出 $\prec^L$-极小线段 $\widetilde{\Delta}$ 和 $\widetilde{\Delta}'$。若 $\Delta=\Delta'$，则利用关于 $\mathfrak{n}$ 大小的归纳法来论证 $\mathfrak{n}-\Delta=\mathfrak{n}'-\Delta$。若 $\Delta\neq\Delta'$，则先归结为 $\Delta\subsetneq\Delta'$ 的情形。然后在 $l_{rel}(\mathfrak{n})$ 上应用归纳假设，以证明 $\mathfrak{n}-\Delta'$ 也属于 $\mathfrak{n}$。接着证明 $\mathfrak{n}-\Delta$ 和 $\mathfrak{n}$ 中的 Δ' 可导出局部可极小化性。下面我们将详细说明。

设 $\mathfrak{n}$，$\mathfrak{n}'$ 是 $\mathcal{S}'(\mathfrak{h},\ \mathfrak{p})$ 中的两个极小多重线段。令 a 为满足 $\mathfrak{n}[a] \neq 0$ 的最小整数。于是，通过对尖点表示进行比较，a 也是满足 $\mathfrak{n}'[a] \neq 0$ 的最小整数。

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$假设 $\mathfrak{n}[a] \cap \mathfrak{n}'[a] \neq \emptyset$。令 $\Delta \in \mathfrak{n}[a] \cap \mathfrak{n}'[a]$。那么我们考虑 $\mathcal{S}'(\mathfrak{r}(\Delta,\ \mathfrak{h})\ \mathfrak{p})$。$\mathfrak{n}$和 $\mathfrak{n}'$的极小性也保证了 $\mathfrak{n}-\Delta$和 $\mathfrak{n}'-\Delta$在 $\mathcal{S}'(\mathfrak{r}(\Delta,\ \mathfrak{h})\ \mathfrak{p})$中也是极小的。

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$因此，对 $\mathfrak{n}$的大小应用归纳法可得 $\mathfrak{n}-\Delta=\mathfrak{n}'-\Delta$，从而 $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}'$。

现在假设 $\mathfrak{n}[a] \cap \mathfrak{n}'[a] = \emptyset$，以导出矛盾。令 Δ 和 Δ' 分别为 $\mathfrak{n}[a]$ 和 $\mathfrak{n}'[a]$ 中最短的线段。必要时交换标记，我们可以假设$\Delta \subsetneq \Delta'$。于是，根据引理 3.4,

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{n},\mathfrak{h}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{trd}(\mathfrak{n},\mathfrak{h}),\mathfrak{trr}(\mathfrak{n},\mathfrak{h})),\quad \mathfrak{r}(\mathfrak{n}',\mathfrak{h}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{trd}(\mathfrak{n}',\mathfrak{h}),\mathfrak{trr}(\mathfrak{n}',\mathfrak{h})).$$

由引理 3.9,

$$\mathfrak{trr}(\mathfrak{n},\mathfrak{h}) = \mathfrak{trr}(\mathfrak{n}',\mathfrak{h}).$$

由引理 6.2，$(\mathfrak{trr}(\mathfrak{n},\ \mathfrak{h})\ \mathfrak{trd}(\mathfrak{n},\ \mathfrak{h}))$ 以及细链中的项都不是局部可极小化的。类似地，对于 $(\mathfrak{trr}(\mathfrak{n}',\ \mathfrak{h})\ \mathfrak{trd}(\mathfrak{n},\ \mathfrak{h}))$，结论也成立。然而，引理 6.1 表明，$\mathfrak{trd}(\mathfrak{n},\ \mathfrak{h})$ 和 $\mathfrak{trd}(\mathfrak{n}',\ \mathfrak{h})$ 都是 $\mathcal{S}'(\mathfrak{trr}(\mathfrak{n},\ \mathfrak{h})\ \mathfrak{p}) = \mathcal{S}'(\mathfrak{trr}(\mathfrak{n}',\ \mathfrak{h})\ \mathfrak{p})$ 中的极小元。因此，对 $l_{rel}(\mathfrak{n})$ 使用归纳法,

$$\mathfrak{trd}(\mathfrak{n},\mathfrak{h}) = \mathfrak{trd}(\mathfrak{n}',\mathfrak{h}).$$

但此时，不相交假设意味着 $^{-}\Delta' \in \mathfrak{n}$。然而，$^{-}\Delta' \not\subset \Delta$ 和 $^{-}\Delta' \subset \Upsilon(\Delta,\ \mathfrak{h})$。由引理 5.4，这意味着

$$|\left\{\widetilde{\Delta} \in \mathfrak{n}[a] : {}^{-}\Delta' \subset \widetilde{\Delta}\right\}| < |\left\{\widetilde{\Delta} \in \mathfrak{fs}(\mathfrak{n},\mathfrak{h}) : {}^{-}\Delta' \subset \widetilde{\Delta}\right\}|.$$

因此，$(\mathfrak{n},\ \mathfrak{h})$ 是局部可极小化的。这与引理 6.2 矛盾。 □

定理 6.4。设 $\pi \in \mathrm{Irr}\rho$，且设 τ 是某个 i 的简单商 $\pi^{(i)}$。那么，当 $\mathcal{S}(\pi,\tau) \neq \emptyset$ 时，$\mathcal{S}(\pi,\tau)$ 有唯一极小元。这里的极小性是相对于 $\leq_Z$ 而言的。

证明。 由命题 6.3 和定理 2.4 可得。 □

7. Examples of minimality

7.1. 最高导数多重线段的极小性。对于 $\pi \in \mathrm{Irr}\rho$，令 π^{-} 表示按照 [BZ77 第 3.5]节的定义，π 的 Bernstein-Zelevinsky 最高导数。我们不需要其显式定义，只需使用 [Ch25 定理 1.3]。

定理 7.1。设 $\pi \in \mathrm{Irr}\rho$。那么 $\mathfrak{hd}(\pi)$ 在 $\mathcal{S}(\pi,\pi^{-})$中是极小的。

证明。 Ch25 定理 1.3] 证明了 $D_{\mathfrak{hd}(\pi)}(\pi) \cong \pi^{-}$。定理 4.4 归结为证明：若 $\mathfrak{n}$ 是由$\mathfrak{hd}(\pi)$经过初等交并过程得到的多重线段，则 $D_{\mathfrak{n}}(\pi) = 0$。

设 $\Delta_1 = [a_1,b_1]_\rho$，$\Delta_2 = [a_2,b_2]_\rho$ 是 $\mathfrak{hd}(\pi)$中的两条相连线段。必要时重新标记，假设 $a_1 < a_2$。定义

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{hd}(\pi) - \{\Delta_1,\Delta_2\} + \Delta_1 \cup \Delta_2 + \Delta_1 \cap \Delta_2.$$

那么，对于任意 $e < a_1$，$\mathfrak{n}[e] = \mathfrak{hd}(\pi)[e]$，且 $\mathfrak{n}[a_1] \not\leq_{a_1} \mathfrak{hd}(\pi)[a_1]$。

令 c 为满足 $\mathfrak{hd}(\pi)[c] \neq 0$ 的最小整数。根据定理 2.4 和 2.5,

$$D_{\mathfrak{n}[a_1]} \dots D_{\mathfrak{n}[c]}(\pi) = D_{\mathfrak{n}[a_1]} \circ D_{\mathfrak{hd}(\pi)[a_1-1]} \circ \dots \circ D_{\mathfrak{hd}(\pi)[c]}(\pi) = 0,$$

因此 $\mathfrak{n} \notin \mathcal{S}(\pi,\ \pi^{-})$。 □

7.2. **一般情形的极小多重线段**。

命题 7.2。 设 $\pi \in \mathrm{Irr}\rho$ 是一般的。设 τ 是某个 i 的一个（一般的）简单商，其中 $\pi^{(i)}$ 。那么， $\mathcal{S}(\pi,\tau)$ 中的极小多重线段是一般的，即极小多重线段中的任意两条线段都不相连。

通过分析上述命题的导数所产生的多重线段，可以证明该命题。我们将利用以下引理给出另一种证明:

引理 7.3. 设 $\pi \in \mathrm{Irr}\rho(G_n)$ 是一般的。对于任意 i，以及作为 $G_{n-i} \times G_i$-表示的 π_{N_i} 的任意不可约子模$\tau_1 \boxtimes \tau_2$， τ_1 和 τ_2 都是一般的。

证明。 回忆一下，对于一般的 π,

$$\pi \cong \mathrm{St}(\Delta_1) \times \ldots \times \mathrm{St}(\Delta_r)$$

对于两两不相连的线段 Δ_1，.....， Δ_r。

现在，通过对线段的序进行适当安排，可以按照[Ch21，推论 2.6] 中的论证，得到 π_{N_i} 的一个简单商具有如下形式： $\tau \boxtimes \omega$ ，其中某个一般的 $\tau \in \mathrm{Irr}(G_{n-i})$成立。因此，剩下要证明 ω 也是一般的。我们考虑

$$\pi_{N_i} \twoheadrightarrow \tau \boxtimes \omega$$

并对 G_{n-i}-部分取扭 Jacquet 函子，得到

$$^{(n-i)}\pi \twoheadrightarrow \omega.$$

现在，利用关于左导数的 [Ch21，推论 2.6]，可知 ω 也是一般的，正如所需。□

命题 *7.2* 的证明。设 $\pi \in \mathrm{Irr}\rho$ 是一般的，并设 τ 是$\pi^{(i)}$的一个简单（一般）商。那么， π_{N_i} 有一个形如 $\tau \boxtimes \omega$ 的简单商，其中 $\omega \in \mathrm{Irr}\rho(G_i)$。由引理 7.3， ω 也是一般的，因此对某些两两不相连的线段 Δ_1、.....、 Δ_k，有 $\omega \cong \mathrm{St}(\Delta_1) \times \ldots \times \mathrm{St}(\Delta_k)$。现在， π 是 $\tau \times \mathrm{St}(\Delta_1) \times \ldots \times \mathrm{St}(\Delta_k)$ 的唯一子模。由标准论证可得:

$$D_{\Delta_1} \circ \ldots \circ D_{\Delta_k}(\pi) \cong \tau.$$

因此， $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_k\} \in \mathcal{S}(\pi, \tau)$。 $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_k\}$ 的极小性是自动成立的，因为任何一般的多重线段相对于 $\leq_Z$在 Mult^ρ 中都是极小的。现在由定理 6.4 的唯一性即可得出该结论。□

8. Non-uniqueness of maximal elements in $\mathcal{S}(\pi, \tau)$

8.1. **最高导数多重线段**。设 $\pi \in \mathrm{Irr}_\rho$。则 $\mathcal{S}(\pi, \pi^-)$ 包含唯一的极大多重线段，且该多重线段的所有线段都是单元素集。结合定理 4.4，可以描述 $\mathcal{S}(\pi, \pi^-)$ 中的所有多重线段。

8.2. **极大性的唯一性失效**。如 [第 25]，章所述，一般而言，尖点表示的导数不足以构造 Bernstein-Zelevinsky 导数的所有简单商，而集合 $\mathcal{S}(\pi, \tau)$ 可能包含一些线段并非全为单元素集的多重线段。我们举例说明，一般而言， $\mathcal{S}(\pi, \tau)$ 中的 $\leq_Z$-极大元并不唯一。

Let

$$\mathfrak{h} = \{[0,3]_\rho, [0,1]_\rho, [1,2]_\rho, [1,2]_\rho, [2]_\rho, [3]_\rho\}.$$

设 $\mathfrak{n} = \{[0,3]_\rho, [1,2]_\rho\}$。则

$$\mathfrak{r} := \mathfrak{r}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) = \{[0,1]_\rho, [1,2]_\rho, [2]_\rho, [3]_\rho\} = \mathfrak{h} - \mathfrak{n}.$$

我们断言

$$\mathcal{S}'(\mathfrak{h},\mathfrak{r})=\{\mathfrak{n},\{[0,3]_\rho,[1]_\rho,[2]_\rho\},\{[0,2]_\rho,[1,3]_\rho\}\}.$$

直接检查可知，这三个元素都属于 $\mathcal{S}(\mathfrak{h},\ \mathfrak{r})$，且最后两个元素都是极大的。

为了说明没有其他元素，首先注意到，任意多重线段 $\mathfrak{n}'$ in$\mathcal{S}'(\mathfrak{h},\ \mathfrak{r})$ 只有一个线段 $\widetilde{\Delta}$ with $a(\widetilde{\Delta})=\nu^0$。考察$\widetilde{}$移除序列 $\mathfrak{r}(\Delta,\ \mathfrak{h})$ 中的第一个线段，我们注意到 $[0]_\rho$, $[0,1]_\rho\notin\mathcal{S}'(\mathfrak{h},\ \mathfrak{r})$。换言之， $[0,2]_\rho$或$[0,3]_\rho$ 属于 $\mathcal{S}'(\mathfrak{h},\ \mathfrak{r})$。剩下只需检查以下三个元素：

$$\{[0,2]_\rho,[1]_\rho,[2]_\rho,[3]_\rho\},\{[0,2]_\rho,[1,2]_\rho,[3]_\rho\},\{[0,2]_\rho,[1]_\rho,[2,3]_\rho\}$$

不属于 $\mathcal{S}'(\mathfrak{h},\ \mathfrak{r})$，这显而易见。

为了说明一般而言 $\mathcal{S}(\pi,\ \tau)$ 的极大性并非唯一，还需要考察是否存在 $\pi\in\mathrm{Irr}_\rho$ 使得 $\mathfrak{h}\mathfrak{d}(\pi)=\mathfrak{h}$。确实如此，我们将在后文 [Ch24+e]，中再证明这一点，因为届时我们将以更重要的方式用到这一事实。

9. Minimality for two segment case

本节研究双线段情形下的极小性。

9.1. **不重叠性质**。

定义 9.1. 设 $\mathfrak{h}\in\mathrm{Mult}_\rho$。设 $\Delta\in\mathrm{Seg}_\rho$ 对 $\mathfrak{h}$ 可容许。设 $\Delta'\in\mathrm{Seg}_\rho$ 与 Δ 相连，且 $\Delta'>\Delta$。我们称三元组 $(\Delta,\Delta',\mathfrak{h})$ 满足不重叠性质，如果在 $(\Delta,\mathfrak{h})$ 的移除序列中，包含 $\nu^{-1}a(\Delta')$ 的最短线段 Δ 满足 $\Delta'\not\subset\Delta$。（我们指出，为了后续应用，我们不要求 Δ' 对 $\mathfrak{h}$ 可容许。）

现在我们简要说明其与局部可极小化性的联系。我们采用定义 9.1 中的记号，只考虑 $a(\Delta)\ncong\nu^{-1}a(\Delta')$，并令 $a(\Delta')=\nu^{a+1}\rho$，其中 $a\in\mathbb{Z}$。令 $\mathfrak{n}=\{\Delta,\Delta'\}$，在这种情况下， $\mathfrak{fs}(\mathfrak{n},\mathfrak{h})=\{\Upsilon(\Delta,\mathfrak{h})\}$。现在注意，三元组 $(\Delta,\Delta',\mathfrak{h})$ 满足不重叠性质，当且仅当

$$|\left\{\widetilde{\Delta}\in\mathfrak{fs}(\mathfrak{n},\mathfrak{h}):\Delta'\subset\widetilde{\Delta}\right\}|=0$$

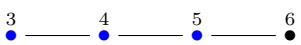
另一方面， $\mathfrak{n}[a]=\{\Delta\}$ 因此

$$|\left\{\widetilde{\Delta}\in\mathfrak{n}[a]:\Delta'\subset\widetilde{\Delta}\right\}|=0.$$

综上，$(\Delta,\ \Delta',\ \mathfrak{h})$ 满足不重叠性质，当且仅当 $(\mathfrak{n},\ \mathfrak{h})$ 不是局部可极小化的。

例 9.2. (1) 设 $\mathfrak{h}=\{[0,7]_\rho,[3,6]_\rho,[6,10]_\rho\}$。设 $\Delta=[0,5]_\rho$，并设 $\Delta'=[6,7]_\rho$。则 $(\Delta,\ \Delta',\ \mathfrak{h})$ 满足不重叠性质。

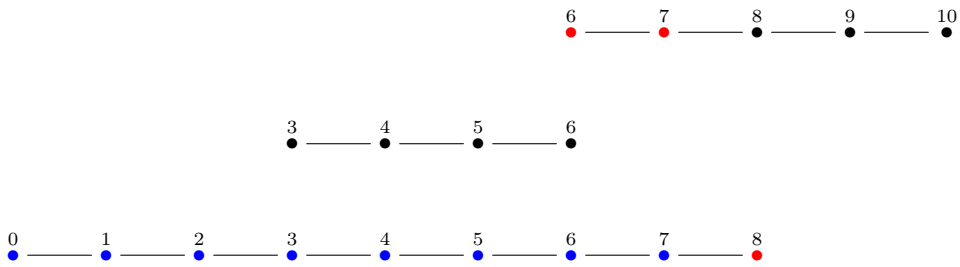






蓝色的点是通过应用 $\mathfrak{r}(\Delta, \circ)$ 移除的点。注意，移除序列中包含 $[5]_\rho$ 的最短线段是 $[3,6]_\rho$，它不包含$[6,7]_\rho$。

(2) 设 $\mathfrak{h} = \{[0,8]_\rho, [3,6]_\rho, [6,10]_\rho\}$。设 $\Delta = [0,7]_\rho$，并设 $\Delta' = [6,8]_\rho$。那么 $(\Delta, \Delta', \mathfrak{h})$ 不满足不重叠性质。执行移除序列的图如下：



在上图中，线段 $[0,8]_\rho$ 包含 $[5]_\rho$，以及 $[6,8]_\rho \subset [0,8]_\rho$。蓝色点表示在移除过程 $\mathfrak{r}([0,7]_\rho, \mathfrak{h})$ 中被“删除”的点，红色点表示在后续移除过程 $\mathfrak{r}([6,8]_\rho, \mathfrak{r}([0,7]_\rho, \mathfrak{h}))$ 中被“删除”的点。

引理 9.3。设 $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mult}_\rho$。设 $\Delta \in \mathrm{Seg}_\rho$ 对 $\mathfrak{h}$ 可容许。设 $\Delta' \in \mathrm{Seg}_\rho$ 对 $\mathfrak{r}(\Delta, \mathfrak{h})$ 可容许。假设 Δ' 与 Δ 相连，且满足 $\Delta' > \Delta$。那么 $(\Delta, \Delta', \mathfrak{h})$ 不满足不重叠性质，当且仅当

$$\mathfrak{r}(\{\Delta \cap \Delta', \Delta \cup \Delta'\}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{r}(\{\Delta, \Delta'\}, \mathfrak{h}).$$

证明。假设 $\mathfrak{r}(\{\Delta \cap \Delta', \Delta \cup \Delta'\}, \mathfrak{h}) \neq \mathfrak{r}(\{\Delta, \Delta'\}, \mathfrak{h})$。由引理 2.3(1)以及移除过程中的嵌套性质，可将问题归结为 $a(\Delta) \cong \nu^{-1}a(\Delta')$ 的情形。根据引理 6.2，证明其不满足不重叠性质，便等价于证明其局部可极小化。

假设 $\mathfrak{r}(\{\Delta \cap \Delta', \Delta \cup \Delta'\}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{r}(\{\Delta, \Delta'\}, \mathfrak{h})$。由引理 2.3(1)，问题同样可归结为$a(\Delta) \cong \nu^{-1}a(\Delta')$。由引理 6.1可知，$(\{\Delta, \Delta'\}, \mathfrak{h})$是局部可极小化的，因此$(\Delta, \Delta', \mathfrak{h})$不满足不重叠性质。□

9.2. **中间线段性质**。

定义 9.4. 设 $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mult}_\rho$。设 $\Delta \in \mathrm{Seg}_\rho$ 对 $\mathfrak{h}$ 可容许。设 $\Delta' \in \mathrm{Seg}_\rho$ 与 Δ 相连，且满足 $\Delta' > \Delta$。称三元组 $(\Delta, \Delta', \mathfrak{h})$ 满足中间线段~性质，如果存在一条线段 Δ 属于 $\mathfrak{h}$，使得

$$a(\Delta) \leq a(\widetilde{\Delta}) < a(\Delta'), \text{ and } b(\Delta) \leq b(\widetilde{\Delta}) < b(\Delta'). \tag{9.3}$$

9.3. **关于 η-不变量的判据**。设 $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mult}_\rho$。对于一条对 $\mathfrak{h}$ 可容许的线段 $\Delta = [a,b]_\rho$，注意到，根据定理 2.5，$\varepsilon_\Delta(\mathfrak{h}\mathfrak{d}(\pi)) = \varepsilon_\Delta(\pi)$。令

$$\eta_\Delta(\mathfrak{h}) = (\varepsilon_{[a,b]_\rho}(\mathfrak{h}), \varepsilon_{[a+1,b]_\rho}(\mathfrak{h}), \dots, \varepsilon_{[b,b]_\rho}(\mathfrak{h})). \tag{9.4}$$

上面定义的 η-不变量在定义 [Ch22+b] 中的广义*GGP*相关对概念时发挥着重要作用。当 $a = b$时，它有时称为最高 ρ-导数。

命题9.5. 设 $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mult}_\rho$。设 $\Delta \in \mathrm{Seg}_\rho$ 对 $\mathfrak{h}$ 可容许。设 $\Delta' \in \mathrm{Seg}_\rho$ 与 Δ 相连，且满足 $\Delta' > \Delta$。则以下条件等价：

(1) 三元组$(\Delta, \Delta', \mathfrak{h})$ 满足不重叠性质。(2) $\eta_{\Delta'}(\mathfrak{h}) = \eta_{\Delta'}(\mathfrak{r}(\Delta, \mathfrak{h}))$。

(3) 三元组$(\Delta, \Delta', \mathfrak{h})$ 满足中间线段性质。

证明。 我们先证明 (3) 蕴含 (2)。假设 (3) 成立。我们将

$$\Delta_1, \ldots, \Delta_r$$

称为 $(\Delta, \mathfrak{h})$ 的移除序列。根据定义 2.1 中移除过程的 (3) 和 (4)， $\mathfrak{h}$ 中的 Δ_1，……， Δ_r 被各自的截断所替换，记为

$$\Delta_1^{tr}, \ldots, \Delta_r^{tr}.$$

根据移除过程中的中间线段性质和极小性条件，$(\Delta, \mathfrak{h})$ 的移除序列中存在一个形如 (9.3) 的线段。令 i^* 为满足 (9.3) 的最小指标。注意，考虑 $a(\Delta_j)$,

$$\Delta_1, \ldots, \Delta_{i^*-1}$$

根据定义，它们对 $\eta_{\Delta'}(\mathfrak{h})$ 没有贡献。根据截断的定义以及 Δ_{i^*} 满足 (9.3)，我们有 Δ_1^{tr}，……， $\Delta_{i^*-1}^{tr}$ 对 $\eta_{\Delta'}(\mathfrak{r}(\Delta, \mathfrak{h}))$ 也没有贡献。根据 Δ_{i^*} 的选取和嵌套性质，我们还可以通过考虑 $b(\Delta_j)$ 得到,

$$\Delta_{i^*}, \ldots, \Delta_r$$

对 $\eta_{\Delta'}(\mathfrak{h})$ 没有贡献，类似地， $\Delta_{i^*}^{tr}, \ldots, \Delta_r^{tr}$对 $\eta_{\Delta'}(\mathfrak{r}(\Delta, \mathfrak{h}))$ 也没有贡献。因此，我们有

$$\eta_{\Delta'}(\mathfrak{h}) = \eta_{\Delta'}(\mathfrak{r}(\Delta, \mathfrak{h})).$$

现在证明 (2) 蕴含 (1)。再次记作 $\Delta' = [a', b']_\rho$。假设 $(\Delta, \Delta', \mathfrak{h})$ 不满足不重叠性质。再次记

$$\Delta_1, \ldots, \Delta_r$$

为 $(\Delta, \mathfrak{h})$ 的移除序列。令 Δ_l 为移除序列中包含 $\nu^{-1}a(\Delta')$ 的最短线段。注意

$$\Delta_1, \ldots, \Delta_{l-1}, \Delta_l$$

对 $\eta_{\Delta'}(\mathfrak{h})$ 没有贡献（考虑 $a(\Delta_i)$ 即可），类似地,

$$\Delta_1^{tr}, \ldots, \Delta_{l-1}^{tr}$$

对 $\eta_{\Delta'}(\mathfrak{r}(\Delta, \mathfrak{h}))$ 没有贡献。然而， Δ_l^{tr} 对 $\eta_{\Delta'}(\mathfrak{r}(\Delta, \mathfrak{h}))$ 有贡献。这使得 $\eta_{\Delta'}(\mathfrak{h})$ 与 $\eta_{\Delta'}(\mathfrak{r}(\Delta, \mathfrak{h}))$ 在坐标 $\varepsilon_{\Delta'}$ 上相差 1。

接下来需要证明以下命题:

Claim: $k > l$, Δ_k 对 $\eta_{\Delta'}(\mathfrak{h})$ 有贡献，当且仅当 Δ_k^{tr} 对 $\eta_{\Delta'}(\mathfrak{r}(\Delta, \mathfrak{h}))$ 有贡献。

命题证明: 若 Δ_k 不对 $\eta_{\Delta'}(\mathfrak{h})$ 有贡献，则 $b(\Delta_k) < b(\Delta')$，因此 $b(\Delta_k^{tr}) < b(\Delta')$（或者 Δ_k^{tr} 被删除，或者是一个空集）。这意味着 Δ_k^{tr} 不对 $\eta_{\Delta'}(\mathfrak{r}(\Delta, \mathfrak{h}))$ 有贡献。

另一方面，若 Δ_k 对 $\eta_{\Delta'}(\mathfrak{h})$ 有贡献，则 $b(\Delta_k) \geq b(\Delta')$。注意，利用 $\Delta < \Delta'$ 可知 Δ_k^{tr} 非空。因此，我们也有 $b(\Delta_k^{tr}) \geq b(\Delta')$。此外， Δ_k^{tr} 对 $\eta_{\Delta'}(\mathfrak{r}(\Delta, \mathfrak{h}))$ 有贡献。至此，命题得证。

请注意，(1) $\Rightarrow$ (3) 可由重叠性质定义中涉及的线段推出。

□

例9.6。设 $\mathfrak{h} = \{[0, 5]_\rho, [3, 8]_\rho\}$。

- 设 $\Delta = [0, 3]_\rho$，并设 $\Delta' = [3, 6]_\rho$。此时，$\eta_{\Delta'}(\mathfrak{h}) = (1, 0, 0, 0)$。同样，$\eta_{\Delta'}(\mathfrak{r}(\Delta, \mathfrak{h})) = \eta_{\Delta'}(\{[3, 8]_\rho, [4, 5]_\rho\}) = (1, 0, 0, 0)$。

- 设 $\Delta = [0,3]_\rho$，并设 $\Delta' = [3,4]_\rho$。此时，$\eta_{\Delta'}(\mathfrak{h}) = (1,\ 0)$。并且，$\eta_{\Delta'}(\mathfrak{r}(\Delta,\ \mathfrak{h})) = \eta_{\Delta'}(\{[3,8]_\rho, [4,5]_\rho\}) = (1,\ 1)$。

命题9.5的一个推论如下：

推论 9.7. 假设三元组 $(\Delta, \Delta', \mathfrak{h})$ 满足不重叠性质。记作$_\sim\Delta' = [a', b']_\rho$。那么，对于任意与 Δ 相连且具有 $[\widetilde{a}, b']_\rho$形式的线段 Δ（其中 $\widetilde{a} \geq a'$），三元组$\widetilde{\ }(\Delta, \Delta, \mathfrak{h})$ 也满足不重叠性质。

参考文献

[AGRS10] A. Aizenbud、D. Gourevitch、S. Rallis 和 G. Schiffmann，《重数一性定理》，Ann. of Math. (2) 172 (2010)，第 2 期，1407-1434。[BZ76] I. N. Bernstein 和 A. V. Zelevinsky，《非阿基米德局部域 F 上 GL(n, F) 群的表示》，Russian Math. Surveys 31:3 (1976)，1-68。[BZ77] I. N. Bernstein 和 A. V. Zelevinsky，《约化 p 进群的诱导表示 I》，高等师范学校科学年鉴 10 (1977)，441-472。[BK93] C.J. Bushnell 和 P.C. Kutzko，《通过紧开子群研究 GL(N) 的容许对偶》，Annals Math. Studies，Princeton Univ. Press (1993)。[Ch21] K.Y. Chan，《(GL$_{n+1}(F)$, GL$_n(F)$) 的同调分支律：射影性与不可分解性》，Invent. Math. (2021)。doi.org/10.1007/s00222-021-01033-5。[Ch24] K.Y. Chan，《非阿基米德局部域上一般线性群内形式的乘积函子》，Transformation Groups (2024)。[Ch25] K.Y. Chan，《伯恩斯坦-泽列文斯基导数与最高导数多重线段的构造 I：化归为组合学》，Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B 12 (2025)，851-909。[Ch22+b] K.Y. Chan，《 p-进 (GL$_{n+1}$, GL$_n$) 的商分支律 I：广义 Gan-Gross-Prasad 相关对》，arXiv:2212.05919 (2022)。[Ch22+c] K.Y. Chan，《 p-进 GL 的广义 Gan-Gross-Prasad 相关对的对偶性》，arXiv:2210.17249 (2022)。[Ch24+e] K.Y. Chan，《伯恩斯坦-泽列文斯基导数与最高导数多重线段的构造 III：极小序列的性质》，预印本 (2024)。[CW25] K.Y. Chan 和 D.K. Wong，《GL($n, \mathbb{C}$) 与 GL($m, \mathbb{Q}_p$) 的 Lefschetz 原理》，即将发表于 Israel Journal of Mathematics。[De23] T. Deng，《通过对称约化研究诱导表示中的重数》，Manuscripta Math. 171，23-72 (2023)。doi.org/10.1007/s00229-022-01375-1。[Ja07] C. Jantzen，《 p-进一般线性群的 Jacquet 模》，Represent. Theory 11 (2007)，45-83，https://doi.org/10/1090/S1088-4165-0700316-0。[LM14] E. Lapid 和 A. Mínguez，《Tadić 的一个行列式公式》，Amer. J. Math. 136 (2014)：111-142。[LM16] E. Lapid、A. Mínguez，《非阿基米德局部域上一般线性群内形式的抛物诱导》，Sel. Math. New Ser. (2016) 22，2347-2400。[LM22] E. Lapid、Mínguez，《Lusztig 幂零簇不可约分支上的二元运算 II：GLn 在非阿基米德局部域上的表示之应用与猜想》，Pure and Applied Mathematics Quarterly 第 21 卷 (2025) 第 2 期，813-863。[HM08] M. Hanzer、G. Muić，《经典 p 进群 Zelevinsky 分类的一种代数方法》，Journal of Algebra，第 320 卷，第 8 期，2008，3206-3231，doi.org/10.1016/j.jalgebra.2008.07.002。[Ma13] I. Matić，《元辛群 Sp(n) 强正表示的 Jacquet 模》，Trans. Amer. Math. Soc. 365 (2013)，2755-2778。doi.org/10.1090/S0002-9947-2012-05725-4。[MT15] I. Matić、M. Tadić，《线段型表示的 Jacquet 模》，Manuscripta Math. 147，437-476 (2015)。https://doi.org/10.1007/s00229-015-0727-9。[MW86] C. Mœglin、J.-L. Waldspurger，《论 Zelevinski 对合》，J. Reine Angew. Math. 372，136-177 (1986)，doi.org/10.1515/crll.1986.372.136。[Mi09] A. Mínguez，《关于抛物诱导表示的不可约性》，J. Reine Angew. Math. 629，107-131 (2009)，doi.org/10.1515/CRELLE.2009.028。[St12] R. P. Stanley，《计数组合学》，第 1 卷，Cambridge Studies in Advanced Mathematics 49 (Cambridge University Press, Cambridge, 2012)。doi.org/10.1007/978-1-4615-9763-6。[Ze81] A. V. Zelevinskii，《Kazhdan-Lusztig 假设的 p 进类比》。载于：Functional Analysis and Its Applications 15.2 (1981)，第 83-92 页。doi: 10.1007/bf01082279。

[Ze80] A. Zelevinsky, 《约化 p 进群的诱导表示 II》，高等师范学校科学年鉴 **13** (1980)，154-210。

香港大学数学系电子邮件地址：kychan1@hku.hk