arXiv:2601.00674v1 [math.RT] 2 Jan 2026

伯恩斯坦–泽列文斯基导数的简单商与最高导数多重线段的构造 III：极小序列的性质

KEI YUEN CHAN

摘要. 设 F 是一个非阿基米德局部域。对于一般线性群 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的一个不可约光滑表示 π 和一个多重线段 $\mathfrak{m}$，可以将 π 的一个伯恩斯坦–泽列文斯基导数的简单商 $D_{\mathfrak{m}}(\pi)$ 与之关联。在前一篇文章中，我们证明了

$$\mathcal{S}(\pi,\tau) := \{\mathfrak{m} : D_{\mathfrak{m}}(\pi) \cong \tau\},$$

在泽列文斯基序下有唯一的极小元，其中 $\mathfrak{m}$ 遍历所有多重线段。本文的主要结果包括极小序列的交换性及其后续性质。本文最后，我们猜想由极小性产生的某种模结构。

第1. 部分 引言与预备知识

1. 引言

1.1. 偏序集 $\mathcal{S}(\pi,\ \tau)$ 与极小序列。设 F是一个非阿基米德局部域。令 $G_n = \mathrm{GL}_n(F)$ 为 F上的一般线性群。全文固定一个尖点表示 ρ。我们所考虑的所有表示都是 $\mathbb{C}$上的光滑表示。令 $\mathrm{Irr}(G_n)$ 表示 G_n的不可约表示集合。通常我们不区分同构的不可约表示。对于 G_{n_1} 的表示 π_1 和 G_{n_2}的表示 π_2，用 $\pi_1 \times \pi_2$表示归一化抛物诱导。

关于 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的复表示论，文献中已有丰富研究，最早可追溯至 [Ze80]。一个核心对象是所谓的多重线段，它们用于参数化 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的不可约表示。近期， [Ch25, Ch25b] 在 Bernstein-Zelevinsky 导数 [Ch25, Ch25b]的背景下，发现了由本质平方可积表示的某些导数序列所产生的多重线段中有趣的组合学结构。最高导数多重线段是用于编码导数信息的关键组合学概念，而且相当容易计算（参见 [LM16, CP25+]中的显式算法）。这些结果受到商分支律 [Ch 22+b], 的启发，也应用于其中；此外，它们还试图将 [AL25, LM25]中某些线段情形的若干方面推广到多重线段情形。

本文继续研究这些导数序列。主要目标是建立并证明导数序列的一些一般性质，并解释为何这些性质从 Jacquet 模的某些结构来看是自然的。为了精确定义导数的概念，我们需要引入更多记号，沿用 Zelevinsky [Ze80]。

令 $\nu : G_n \to \mathbb{C}^\times$ be 特征 $\nu(g) = |\det(g)|_F$，其中 $|.|_F$ 是 F的归一化绝对值。令 $\mathrm{Irr}_\rho(G_n)$ 表示 G_n 的不可约表示集合，其中的表示是某个整数 $a_1, \ldots, a_r$所对应的 $\nu^{a_1}\rho \times \ldots \times \nu^{a_r}\rho$的不可约组成因子。令 $\mathrm{Irr}_\rho = \sqcup_n \mathrm{Irr}_\rho(G_n)$。

现在定义一些组合对象，用于表示的参数化和研究。对于 $a,\ b \in \mathbb{Z}$其中 $b - a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们称 $[a,b]_\rho$为一个线段 （与 ρ相关联）。我们还将 $[a, a-1]_\rho = \emptyset$设为$a \in \mathbb{Z}$。对于线段 $\Delta = [a,b]_\rho$，记 $a(\Delta) = a$和 $b(\Delta) = b$。我们还记 $[a]_\rho := [a,a]_\rho$。令 Seg_ρ 为线段的集合。一个多重线段 （与 ρ相关联）是非空线段构成的多重集。

日期：2026年1月5日。

令 Mult_ρ 为多重线段的集合。对于每个线段 $\Delta \in \mathrm{Seg}_\rho$，我们将 G_n 的唯一一个本质平方可积表示 $\mathrm{St}(\Delta)$与之关联，它是 $\nu^a\rho \times \ldots \times \nu^b\rho$ 中的一个不可约合成因子（另见 [Ch25，第 2.6]节）。关于更一般的多重线段概念，可参见 [Ze80]；本文中我们不会用到这一概念。

对于 $\pi \in$ 不可约表示集合$_\rho(G_n)$ 和一个线段 $\Delta \in \mathrm{Seg}_\rho$，至多存在一个不可约模 $\tau \in$ 不可约表示集合$_\rho(G_{n-i})$，使得

$$\pi \hookrightarrow \tau \times \mathrm{St}(\Delta).$$

若此类 τ 存在，我们将此类 τ 记为 $D_\Delta(\pi)$，并称 Δ 对 π可容许。否则，我们令$D_\Delta(\pi) = 0$。我们称 D_Δ 为一个导数。

若线段序列 $[a_1, b_1]_\rho$、……、$[a_k, b_k]_\rho$（均为 a_j，$b_j \in \mathbb{Z}$）满足以下条件，则称其按升序排列：对于任意 $i \leq j$，要么 $[a_i, b_i]_\rho$与 $[a_j, b_j]_\rho$不相连；要么 $a_i < a_j$。对于一个多重线段 $\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho$，我们将其中的线段按升序排列为 $\mathfrak{n}$ Δ_1、……、Δ_k。定义

$$D_{\mathfrak{n}}(\pi) := D_{\Delta_k} \circ \ldots \circ D_{\Delta_1}(\pi).$$

导数与升序的选择无关 [Ch25]。特别地，可以选择一种排序使得 $a_1 \leq \ldots \leq a_k$。我们称 $\mathfrak{n}$对 π 是可容许的，当且仅当 $D_{\mathfrak{n}}(\pi) \neq 0$。关于导数的更多理论，请参阅 [LM16、Ch24、Ch25]。

对于 $\pi \in$不可约表示集合$_\rho$，记其第 i 个伯恩斯坦–泽列文斯基导数为 $\pi^{(i)}$。关于精确定义，请参阅[Ze80、Ch21、Ch25]；主要讨论和证明不会涉及伯恩斯坦–泽列文斯基导数的使用。导数与伯恩斯坦–泽列文斯基导数之间的主要关系是，$D_{\mathfrak{n}}(\pi)$ 是 $\pi^{(i)}$ [Ch25], 的一个简单商，其中 $i = l_{abs}(\mathfrak{n})$（记号 l_{abs}见第 3.1 节）。本系列文章 [Ch25、Ch25b] 旨在研究从 $D_{\mathfrak{n}}(\pi)$构造伯恩斯坦–泽列文斯基导数。特别地，[Ch25b] 研究以下偏序集：对于 $\pi^{(i)}$ 的一个简单商 τ，

$$\mathcal{S}(\pi, \tau) := \{\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho : D_{\mathfrak{n}}(\pi) \cong \tau\}.$$

$\leq_Z$ 在 $\mathcal{S}(\pi, \tau)$上的序是泽列文斯基序（见第 4.1 节）。我们回忆集合 $\mathcal{S}(\pi, \tau)$上的两个基本组合结构：

定理 1.1. [Ch25b, 定理 1.1] 我们使用上述记号。设 $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2 \in \mathcal{S}(\pi, \tau)$ 满足 $\mathfrak{n}_1 \leq_Z \mathfrak{n}_2$。若 $\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho$ 满足 $\mathfrak{n}_1 \leq_Z \mathfrak{n} \leq_Z \mathfrak{n}_2$，则 $\mathfrak{n} \in \mathcal{S}(\pi, \tau)$。

定理 1.2. [Ch25b, 定理 1.2] 我们使用上述记号。设 $\mathcal{S}(\pi, \tau) \neq \emptyset$。那么$\mathcal{S}(\pi, \tau)$ 有一个唯一的 $\leq_Z$-极小元素。

对于 $\pi \in$ 不可约表示集合$_\rho$，若多重线段 $\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho$ 相对于 π 是极小的，即 $D_{\mathfrak{n}}(\pi) \neq 0$ 且 $\mathfrak{n}$ 在 $\mathcal{S}(\pi, D_{\mathfrak{n}}(\pi))$中是$\leq_Z$-极小的，有时我们称这样的 $\mathfrak{n}$ 为 $\mathcal{S}(\pi, \tau)$的（导数的）极小多重线段 或极小序列 。

1.2. **主要结果**。本文的主要目标是获得极小序列的一些性质，这些性质在 [Ch22+b] 中很有用。我们还在第 3 部分提供了一些表示论解释（其中部分仍属猜想）。主要结果是以下子序列现象和交换性现象：

定理 1.3。*(=定理 8.6)* 设 $\pi \in$ 不可约表示集合$_\rho$。若 $\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho$ 对 π 是极小的，则 $\mathfrak{n}$ 的任意子多重线段 $\mathfrak{n}'$ 也对 π 是极小的，特别是 $D_{\mathfrak{n}'}(\pi) \neq 0$。

定理 1.4。*(=定理 9.4)* 设 $\pi \in$ 不可约表示集合$_\rho$。若 $\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho$ 对 π 是极小的，则对 $\mathfrak{n}$ 的任意子多重线段 $\mathfrak{n}'$，有：

(1) $\mathfrak{n} - \mathfrak{n}'$ 对 $D_{\mathfrak{n}'}(\pi)$ 是极小的；并

且(2) $D_{\mathfrak{n}-\mathfrak{n}'} \circ D_{\mathfrak{n}'}(\pi) \cong D_{\mathfrak{n}}(\pi)$。

多次应用定理 1.4，我们得到：

推论 1.5。 设 $\pi \in$ 不可约表示集合$_\rho$。设 $\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho$ 是相对于 π极小的。将 $\mathfrak{n}$ 中的线段按任意顺序写为$\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}$。那么，

$$D_{\Delta_r} \circ \dots \circ D_{\Delta_1}(\pi) \cong D_{\mathfrak{n}}(\pi).$$

研究交换性时，一个重要的要素是 η-不变量的概念（见定义 4.1）；它在研究 [Ch22+c] 中的“左—右”交换性时也发挥着重要作用。导数中的这种可交换现象似乎在商分支定律 [Ch22+b]，中起着关键作用，而上述结果此前并非显而易见，甚至极小序列此前似乎也无人知晓。探究这种交换性背后是否存在更深层的原因颇有意义。猜想 11.3 中的嵌入模型试图对此作出解释，而它与移除过程之间的相互作用则在第 13.3 节中提出了猜想。

为了阐明上述并非显而易见的结果，无法避免地需要处理一些细节。定理 1.3 和 1.4 的证明主要思路是借助定理 1.1，将检验初等交并过程的问题化简。然后利用两分段情形中一些更基本的交换性（例如命题 5.4），将问题化归到第 7 节的三段情形。证明中还涉及交换性与极小性之间的相互作用。

尽管我们的证明在很大程度上具有组合性质，但其动机来自下文引理 10.2 中的一个简单例子。关于极小性还有一些其他结果，例如通过移除过程进行构造；这些内容将在后续论文 [CZ26+] 中探讨。

交换性与极小性在分支律 [Ch22+b]中也发挥着重要作用。极小性的唯一性与 Bernstein-Zelevinsky 滤过的层密切相关，该层决定了分支律 [Ch22+b]。

我们指出，约化 p-进群的表示论与许多 A 型对象之间存在联系，这一点早已为人所知。Borel-Casselman 的经典结果将相关结果转移到仿射 Hecke 代数的模范畴（例如参见[Ro86, CS 19]），继而转移到 A 型量子仿射代数的模范畴（例如[Ch86, CP96]）。我们可以预期，这些结果能够以适当的方式转化到那些背景中，并可能有其他解释。此外，一个有趣的问题是，这些结果在 ABV 包的几何中是否有几何对应物；例如，参见近期研究 [CR24] 以及 [AL25]。

我们还指出，伯恩斯坦–泽列文斯基导数可以被视为某些类型的退化 Whittaker 模型。尽管导数序列研究的是伯恩斯坦–泽列文斯基导数的结构，但相关信息在表示范畴中比在其 Grothendieck 群中更为敏锐。这与一些在退化 Whittaker 模型背景下研究波前集某些性质的工作形成对比，参见例如 [Mu03], 较近期的研究 [CMBO24] 及其中的参考文献；因此，我们的研究也应能提供一些互补信息。

1.3. **关于应用的讨论**。 对于 $\pi \in$不可约表示集合$_\rho$ 和 $\Delta \in \mathrm{Seg}_\rho$，人们研究的不是 $D_\Delta(\pi)$，而是在 [Ch24] 中研究所谓的大导数，其中涉及某些高阶结构。文献 [Ch24] 表明，按照以下意义研究 π 的约化分解 [AL 25] 是有用的:

$$\mathrm{St}(\mathfrak{p}) \times D_{\mathfrak{p}}(\pi) \twoheadrightarrow \pi \quad (\text{equivalently, } \pi \hookrightarrow D_{\mathfrak{p}}(\pi) \times \mathrm{St}(\mathfrak{p}) \ ), \tag{1.1}$$

其中，对于某个线段 Δ， $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{x}}(\pi, \Delta)$（定义见（10.7））。在附录 B 中，我们将其推广到多线段情形。这种约化分解也有助于研究 [Ch22+b] 中伯恩斯坦–泽列文斯基导数与伯恩斯坦–泽列文斯基滤过的各层之间的关系。

另一项应用是对伯恩斯坦-泽列文斯基导数的一些简单商给出归纳构造（这是这一系列文章的主要目标之一）。例如，对于 $\pi \in$Irr$_\rho$和 $\Delta \in \mathrm{Seg}_\rho$，如果 $\pi^{(i)}$ 的一个简单商是 Δ-约化的，即满足 $\mathfrak{m}_{\mathfrak{x}}(\pi, \Delta) = \emptyset$ （详细定义见 (10.7)），则可以从一个简单商构造出这样的简单商

$(D_{\mathfrak{p}}(\pi))^{(i-l)}$，方法是通过 (1.1)，其中 $l = l_{abs}(\mathfrak{p})$。这一构造的思想与上文讨论的交换性密切相关；精确表述见命题 15.2。

1.4. **组织**。在最初几节中，我们回顾一些主要构成要素：第 2 节中的最高导数多线段、第 3 节中的消去过程，以及第 4 节中的非重叠性质和中间线段性质。

第 5 节至第 9 节研究极小序列的交换性及后续性质。所采用的方法主要是利用重叠性质进行组合分析。第 5 节研究两分段情形，而第 7 节研究三段情形。第 6 节给出一般情形的一些初步结果。第 8 节和第 9 节分别证明后续性质和交换性的一般情形。

第 10 节至第 13 节研究极小性的若干表示论方面。第 10 节解释两分段情形交换性的一种表示论证明。第 11 节提出极小性的一个表示论解释，并证明两分段情形。第 12 节和第 13 节研究该解释如何带来一些应用，以及其与消去过程的联系。

1.5. **致谢**。本文得益于作者于2023年12月和2024年12月访问台湾 NCTS，作者谨此感谢该中心的热情接待。本项目部分获得中国香港特别行政区研究资助局（项目编号：17305223）及国家自然科学基金委员会优秀青年科学基金（项目编号：12322120）的资助。

2. 最高导数多重线段

最高导数多重线段在 [Ch25 第8节中被引入，作为整个研究的主要工具。本节先回忆其定义，然后证明一个新的实现定理，该定理本身也具有独立的研究价值。

2.1. **最高导数多重线段**。对于 $c \in \mathbb{Z}$ 和 $\pi \in$ 不可约表示集合$_\rho$，定义 $\mathfrak{mxpt}^a(\pi, c)$ 为满足下述条件的极大多重线段：

(1) 对任意 $\Delta \in \mathfrak{mxpt}^a(\pi, c)$，$a(\Delta) = c$；

以及 (2) $D_{\mathfrak{mxpt}^a(\pi,c)}(\pi) \neq 0$。

这里的极大性是指对所有线段的 $b(\Delta)$ 值取字典序，其中$\mathfrak{mxpt}^a(\pi, c)$。详情和示例见 [Ch25] 。定义$\pi \in$Irr$_\rho$ 的最高导数多线段为

$$\mathfrak{hd}(\pi) := \sum_{c\in\mathbb{Z}} \mathfrak{mxpt}^a(\pi, c).$$

[Ch25 定理 7.3] 证明了，按照 [Ze80]的意义，$D_{\mathfrak{hd}(\pi)}(\pi)$ 是 π 的最高导数。[CP25+]给出了计算最高导数多线段的有效算法。然而，关键在于，导数的作用可以从最高导数多线段上的移除过程中反映出来，因此我们可以直接研究消去过程。

2.2. **实现定理**。对于 $d, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和一个尖点表示 ρ，定义 $u_\rho(d, m)$ 为以下对象的唯一简单商

$$\mathrm{St}\left(\left[-\frac{d-m}{2}, \frac{d+m-2}{2}\right]_\rho\right) \times \mathrm{St}\left(\left[-\frac{d-m}{2}-1, \frac{d+m-2}{2}-1\right]_\rho\right) \times \ldots \times \mathrm{St}\left(\left[-\frac{d+m-2}{2}, \frac{d-m}{2}\right]_\rho\right).$$

换言之，$u_\rho(d,\ m)$ 是上述抛物诱导模的朗兰兹商，相关记号见[Ch25，第 2 节。6] 。$u_\rho(d,\ m)$ 的一个特殊性质是它是可酉化的，但这并非本文主要用到的性质。

若不可约表示 π 属于 G_n，且对于某个 $c \in \mathbb{Z}$ 及某个 $d,\ m \in \mathbb{Z}_{>0}$，有 $\pi \cong \nu^c \cdot u_\rho(d,\ m)$，则称其为本质 *Speh* 表示。将此类表示记为 $^u\rho(c,\ d,\ m)$。现在我们通过显式构造证明以下实现定理。关键思路是利用若干本质 Speh 表示之乘积的某种交换性。关于这一主题的结果，例如可参见 [Ba08], [Ta15], [LM16] 和 [Ch21]。

为便于讨论，对于 $\pi \in$不可约表示集合$_\rho$，定义 csupp(π) 为满足以下条件的尖点表示的多重集：$\{\rho_1, \ldots, \rho_r\}$ 使得 π 是 $\rho_1 \times \ldots \times \rho_r$中的一个不可约合成因子。

引理 2.1. 设 $^u\rho(c, d, m)$ 是一个本质 *Speh* 表示。设 $\pi \in \mathrm{Mult}_\rho$。假设对任意 $\rho' \in \mathrm{csupp}(\pi)$，都有 $\rho' \in \mathrm{csupp}(^u\rho(c, d, m))$。则 $\pi \times u_\rho(c, d, m)$ 不可约，并且

$$\pi \times u_\rho(c, d, m) \cong u_\rho(c, d, m) \times \pi.$$

证明。 例如参见 [LM16，第 6], [Ch21 节，以及 [Ch24，命题 5.2]。 □

本质 Speh 表示的最高导数多重线段尤其简单：**引理 2.2**。 设 $^u\rho(c, d, m)$ 是一个本质 *Speh* 表示。则

$$\mathfrak{hd}(u_\rho(c, d, m)) = \left\{ [c - \frac{d-m}{2}, c + \frac{d+m-2}{2}]_\rho \right\}.$$

证明。 参见 [Ch25，第 11 节3]。 □

定理 2.3。 设 $\mathfrak{m} \in$ 多重线段$_\rho$。则存在 $\pi \in$ 不可约表示集合$_\rho$，使得

$$\mathfrak{hd}(\pi) = \mathfrak{m}.$$

证明。 我们将 $\mathfrak{m}$ 中的线段标记如下：

$$\Delta_1, \ldots, \Delta_r$$

使得 $b(\Delta_1) \leq b(\Delta_2) \leq \ldots \leq b(\Delta_r)$。

我们只需令 $\pi_1 = \mathrm{St}(\Delta_1)$。显然，$\mathfrak{hd}(\pi_1) = \{\Delta_1\}$。现在，对于 $i \geq 2$，我们递归地定义 π_i 为本质 Speh 表示 $^u\rho(c_i,\ d_i,\ m_i)$，使得对于任意 $\sigma \in \mathrm{csupp}(\pi_{i-1})$，$\sigma \in \mathrm{csupp}(\pi_i)$。我们只需证明这样的 π_i 存在。为此，我们写作 $\Delta_i = [a_i, b_i]_\rho$，并且可以先选取足够大的 d_i，使得 csupp(π_{i-1}) 中的任意表示都属于 $[b_i - d_i + 1, b_i]_\rho$。（利用 $b(\Delta_i) \geq b(\Delta_{i-1})$ 可知这样的 d_i 存在。）对于这样固定的 d_i，现在我们求解 c_i 和 m_i，使得$\mathfrak{hd}(^u\rho(c_i,\ d_i,\ m_i)) = \Delta_i$。

现在令

$$\pi = \pi_1 \times \ldots \times \pi_r.$$

尖点条件保证 π 不可约，这是通过多次应用引理 2.1 得到的。根据[Ch25，命题 11.1]，（另见 [Ch25，命题 11.2]中的 Arthur 型表示），我们有

$$\mathfrak{hd}(\pi) = \mathfrak{hd}(\pi_1) + \ldots + \mathfrak{hd}(\pi_r) = \mathfrak{m}.$$

□

第2. 部分 组合方面

3. 消去过程

本节回忆 [Ch25]中关于消去过程的一些结果。

3.1. 关于多重线段的更多记号。 令 deg(ρ) 为满足 ρ 属于不可约表示集合($G_{\deg(\rho)}$)的数。对于线段 $\Delta = [a, b]_\rho$，令 $l_{abs}(\Delta) = (b - a + 1)\deg(\rho)$。对于多重线段 $\mathfrak{m}$ 属于 Mult_ρ 以及整数 c，令 $\mathfrak{m}[c]$ 为 $\mathfrak{m}$ 的子多重线段，它包含所有满足 $a(\Delta) = c$的线段 Δ；并令 $\mathfrak{m}\langle c\rangle$ 为 $\mathfrak{m}$ 的子多重线段，它包含所有满足 $b(\Delta) = c$的线段 Δ。

对于多重线段 $\mathfrak{m} = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_k\}$，我们还定义：

$$l_{abs}(\mathfrak{m}) = l_{abs}(\Delta_1) + \ldots + l_{abs}(\Delta_k).$$

3.2. **移除过程**。 我们记 $[a,b]_\rho \prec^L [a',b']_\rho$ ，若 $a<a'$；或 $a=a'$ 且 $b<b'$。若多重线段 $\mathfrak{h}$ 中存在某个形如 $[a,c]_\rho$ 的线段，其中某个 $c\geq b$满足条件，则称线段 $\Delta=[a,b]_\rho$ 对 $\mathfrak{h}$ 是可容许的 。现在我们回忆移除过程。

定义 3.1. [Ch25，第 8 节。2] 设 $\mathfrak{h}\in \mathrm{Mult}_\rho$ ，且 $\Delta=[a,b]_\rho$ 对 $\mathfrak{h}$可容许。通过 Δ 对 $\mathfrak{h}$ 进行的移除过程，是执行以下步骤的一种算法：

(1) 在 $\mathfrak{h}[a]$ 中选取一个满足 $b\leq c$的最短线段 $[a,c]_\rho$。设 $\Delta_1=[a,c]_\rho$。设 $a_1=a$和$b_1=c$。(2) 递归地在 $\mathfrak{h}$ 中寻找 $\prec^L$-极小线段 $\Delta_i=[a_i,b_i]_\rho$ ，使得 $a_{i-1}<a_i$ 和$b\leq b_i<b_{i-1}$ [1]。如果无法再找到这样的线段，则停止此过程。(3) 令 $\Delta_1,\dots,\Delta_r$为所有这些线段。对于 $1\leq i<r$，定义 $\Delta_i^{tr}=[a_{i+1},b_i]_\rho$和 $\Delta_r^{tr}=[b_r+1,b]_\rho$ （可能为空）。(4) 定义

$$\mathfrak{r}(\Delta,\mathfrak{h}):=\mathfrak{h}-\sum_{i=1}^r\Delta_i+\sum_{i=1}^r\Delta_i^{tr}.$$

我们称 $\Delta_1,\dots,\Delta_r$ 为 $(\Delta,\mathfrak{h})$ 的移除序列 。我们还定义 $\Upsilon(\Delta,\mathfrak{h})=\Delta_1$，即移除序列的第一条线段。若 Δ 对 $\mathfrak{h}$不可容许，则令 $\mathfrak{r}(\Delta,\mathfrak{h})=\infty$，称为无穷多重线段。我们还令 $\mathfrak{r}(\Delta,\infty)=\infty$。

3.3. **移除过程的性质**。 对于一条线段 $\Delta=[a,b]_\rho\neq\emptyset$，令 $^-\Delta=[a+1,b]_\rho$。若两个非空线段 $\Delta=[a,b]_\rho$ 和 $\Delta'=[a',b']_\rho$ 属于 Seg_ρ，且满足以下条件之一，则称它们相连：

(1) $a<a'\leq b+1\leq b'$;
或 (2) $a'<a\leq b'+1\leq b$。
否则， Δ 和 Δ' 称为不相连。对于两个相连的线段 Δ， Δ'，若满足上述第一种情形，则记作 $\Delta<\Delta'$ 。否则，记作 $\Delta'<\Delta$。例如，$[2,3]_\rho<[4,5]_\rho$。

回忆以下计算性质：

引理 3.2。 [Ch25] 设 $\mathfrak{h}\in\mathrm{Mult}_\rho$ ，且 Δ、 $\Delta'\in\mathrm{Seg}_\rho$ 对 $\mathfrak{h}$可容许。则

(1) [Ch25，引理 8.7] 设 $\mathfrak{h}^*=\mathfrak{h}-\Upsilon(\Delta,\mathfrak{h})+{}^-\Upsilon(\Delta,\mathfrak{h})$。则 $\mathfrak{r}(\Delta,\mathfrak{h})=\mathfrak{r}({}^-\Delta,\mathfrak{h}^*)$。(2) [Ch25，引理 8.8] 记 $\Delta=[a,b]_\rho$。对任意 $a'<a$， $\mathfrak{r}(\Delta,\mathfrak{h})[a']=\mathfrak{h}[a']$。(3) [Ch25，引理 8.9] 若 $\Delta\in\mathfrak{h}$，则 $\mathfrak{r}(\Delta,\mathfrak{h})=\mathfrak{h}-\Delta$。(4) [Ch25，引理 8.10] 设 $a(\Delta)=a(\Delta')$。则

$$\Upsilon(\Delta,\mathfrak{h})+\Upsilon(\Delta',\mathfrak{r}(\Delta,\mathfrak{h}))=\Upsilon(\Delta',\mathfrak{h})+\Upsilon(\Delta,\mathfrak{r}(\Delta',\mathfrak{h})).$$

(5) [Ch25，引理 8。12] 如果 Δ、 Δ'不相连，则 $\mathfrak{r}(\Delta'$、 $\mathfrak{r}(\Delta$、 $\mathfrak{h}))=\mathfrak{r}(\Delta$、 $\mathfrak{r}(\Delta'$、 $\mathfrak{h}))$。

对于 $\mathfrak{h}\in\mathrm{Mult}_\rho$，将多重线段 $\mathfrak{n}=\{\Delta_1,\dots,\Delta_r\}\in\mathrm{Mult}_\rho$ 按升序书写，定义：

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{n},\mathfrak{h})=\mathfrak{r}(\Delta_r,\dots,\mathfrak{r}(\Delta_1,\mathfrak{h})\dots).$$

我们称 $\mathfrak{n}$ 对 $\mathfrak{h}$ 是可容许的，如果 $\mathfrak{r}(\mathfrak{n},\mathfrak{h})\neq\infty$。

定理 3.3。 [Ch25，定理 10。2] 设 $\pi\in$ 不可约表示集合$_\rho$。设 $\mathfrak{m},\mathfrak{m}'\in\mathrm{Mult}_\rho$ 对 π 可容许。那么$\mathfrak{m},\mathfrak{m}'$对 $\mathfrak{h}\mathfrak{d}(\pi)$可容许，并且， $D_{\mathfrak{m}}(\pi)\cong D_{\mathfrak{m}'}(\pi)$ 当且仅当 $\mathfrak{r}(\mathfrak{m},\pi)=\mathfrak{r}(\mathfrak{m}',\pi)$。

[1] [Ch25] 和 [Ch25b] 中有一个条件遗漏： $b\leq b_i$。作者谨此感谢周鹏指出这一点。或者，也可以使用引理 3.2(1) 计算移除过程。 [Ch25] 和 [Ch25b] 中的结果和证明均无变化。

3.4. **关于导数的更多关系**。对于 $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mult}_\rho$ 和 $\Delta = [a,b]_\rho \in \mathrm{Seg}_\rho$，令

$$\varepsilon_\Delta(\mathfrak{h}) = |\left\{\widetilde{\Delta} \in \mathfrak{h}[a] : \Delta \subset \widetilde{\Delta}\right\}|. \tag{3.2}$$

定义 $\varepsilon_\Delta(\pi) := \varepsilon_\Delta(\mathfrak{h}\mathfrak{d}(\pi))$，这等价于 Ch25 第 4 节[中的同一记号的另一种表述2]。我们还指出，当 Δ 是单元素集时，这个数与 Ja07 定义 2.1 [中定义的数相同1]。用导数来表述，我们有如下结论：

定理 3.4。 [Ch25，定理 9。3] 设 $\pi \in$ 不可约表示集合$_\rho$。设 $\Delta = [a,b]_\rho \in \mathrm{Seg}_\rho$ 对 π可容许。设$\Delta' = [a',b']_\rho$ 是Seg_ρ中的另一条线段。若 $a' > a$；或者 Δ' 与 Δ 不相连，则

$$\varepsilon_{\Delta'}(D_\Delta(\pi)) = \varepsilon_{\Delta'}(\mathfrak{r}(\Delta,\pi)).$$

定理 3.5。 [Ch25，定理 9。3] 设 $\pi \in$ 不可约表示集合$_\rho$。设 $\Delta = [a,b]_\rho \in \mathrm{Seg}_\rho$ 对 π可容许。设$\Delta' = [a',b']_\rho$ 是另一条线段。若 $a' < a$，则

$$\varepsilon_{\Delta'}(D_\Delta(\pi)) \geq \varepsilon_{\Delta'}(\mathfrak{r}(\Delta,\pi)) = \varepsilon_{\Delta'}(\pi).$$

我们指出，定理 3.5 中的等式由引理3.2(2)推出。

4. 序列的不重叠性质

在 [Ch25b]，中，我们已经给出了两分段情形极小性的若干刻画。本节的目标是将所谓的不重叠性质推广到多重线段情形。为此，我们首先回忆 [Ch25b] 中的一些要素：精细链和局部可极小化性。这些要素本质上是组合性的，因此大多数陈述将针对 Mult_ρ 而非不可约表示集合 ρ 来表述。

4.1. **泽列文斯基序**。 对于两个相连线段 $\Delta = [a,b]_\rho$ 和 $\Delta' = [a',b']_\rho$，满足 $\Delta < \Delta'$，我们定义：

$$\Delta \cup \Delta' = [a,b']_\rho, \quad \Delta \cap \Delta' = [a',b]_\rho.$$

如果存在一对相连线段 Δ，Δ' 属于 $\mathfrak{m}$，使得.....，则称多重线段 $\mathfrak{n}$ 通过一个初等交并过程由另一个多重线段 $\mathfrak{m}$ 得到。

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{m} - \Delta - \Delta' + \Delta \cup \Delta' + \Delta \cap \Delta'.$$

这里的减法表示（多重）集合论意义下的减法，加法表示（多重）集合论意义下的并集。之后我们也会对减法和加法使用这些概念。注意， $\Delta \cap \Delta'$ 可能是空集，在这种情况下，我们直接省略该项。例如， $\{[1,3]_\rho, [2]_\rho, [4,5]_\rho\}$ 和 $\{[1,2]_\rho, [2,5]_\rho\}$ 可通过初等交并过程由 $\{[1,2]_\rho, [2,3]_\rho, [4,5]_\rho\}$ 得到。

对于两个多重线段 $\mathfrak{m},\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho$，若 $\mathfrak{n}$ 可通过一系列交并过程由 $\mathfrak{m}$ 得到，或者 $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$，我们记作 $\mathfrak{n} \leq_Z \mathfrak{m}$。众所周知，根据 [Ze80]， $\leq_Z$ 在Mult_ρ上定义了一个偏序。

4.2. **不重叠性质与中间线段性质**。我们首先定义η-不变量，这在研究导数序列的极小性时至关重要：

定义 4.1。(1) 设 $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mult}_\rho$。设 $\Delta = [a,b]_\rho \in \mathrm{Seg}_\rho$ 对 $\mathfrak{h}$ 是可容许的。定义

$$\eta_\Delta(\mathfrak{h}) := (\varepsilon_{[a,b]_\rho}(\mathfrak{h}), \varepsilon_{[a+1,b]_\rho}(\mathfrak{h}), \dots, \varepsilon_{[b,b]_\rho}(\mathfrak{h})).$$

(2) 设 $\pi \in$ 不可约表示集合$_\rho$。设 $\Delta \in \mathrm{Seg}_\rho$ 对 π 是可容许的。定义 $\eta_\Delta(\pi) = \eta_\Delta(\mathfrak{h}\mathfrak{d}(\pi))$。

定义 4.2。设 Δ，$\Delta' \in \mathrm{Seg}_\rho$，其中 $\Delta < \Delta'$。设 $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mult}_\rho$。假设 Δ 对.....是可容许的 $\mathfrak{h}$.

(1) 我们称 $(\Delta, \Delta', \mathfrak{h})$ 满足不重叠性质，如果

$$\eta_{\Delta'}(D_\Delta(\pi)) = \eta_{\Delta'}(\pi).$$

(2) 我们称 $(\Delta,\ \Delta',\ \mathfrak{h})$ 满足中间线段性质，如果存在一个线段 $\widetilde{\Delta} \in \mathfrak{h}$ 使得

$$a(\Delta) \leq a(\widetilde{\Delta}) < a(\Delta'), \text{ and } a(\widetilde{\Delta}) \leq b(\Delta) \leq b(\widetilde{\Delta}) < b(\Delta').$$

我们指出，Ch25b 中不重叠性质的原始表述是通过线段之间交集相关的某些性质来表述的。我们将采用上述等价的组合表述（见 Ch25b，命题 9.），这对我们后续的研究更有帮助。

命题 4.3. [Ch25b，命题 9.5] 设 $\Delta, \Delta', \mathfrak{h}$ 如定义 *4.2* 所述。进一步假设 Δ' 对 $\mathfrak{h}$是可容许的。那么以下条件等价：

(1) $(\Delta, \Delta', \mathfrak{h})$ 满足不重叠性质。(2) $(\Delta, \Delta', \mathfrak{h})$ 满足中间线段性质。(3) $\{\Delta, \Delta'\}$ 是 $\leq_Z$-极小元素，属于 $\mathcal{S}(\mathfrak{h}, \mathfrak{r}(\{\Delta, \Delta'\}, \mathfrak{h}))$，其中 $\mathcal{S}(\mathfrak{h}, \mathfrak{r}(\{\Delta, \Delta'\}, \mathfrak{h})$ 定义如下：

$$\mathcal{S}(\mathfrak{h}, \mathfrak{r}(\{\Delta, \Delta'\}, \mathfrak{h}) := \{\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho : \mathfrak{r}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{r}(\{\Delta, \Delta'\}, \mathfrak{h})\}.$$

4.3. **精细链**。

定义4.4. 设 $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mult}_\rho$，且设 $\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho$。设 a 为满足 $\mathfrak{n}[a] \neq \emptyset$的最小整数。记为 $\mathfrak{n}[a] = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_k\}$。

- 定义 $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{h}$。对于 $i \geq 2$，定义

$$\mathfrak{r}_i := \mathfrak{r}(\Delta_{i-1}, \ldots, \mathfrak{r}(\Delta_1, \mathfrak{h}) \ldots).$$

定义

$$\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) := \{\Upsilon(\Delta_1, \mathfrak{r}_1), \ldots, \Upsilon(\Delta_k, \mathfrak{r}_k)\}.$$

- 定义

$$\mathfrak{trr}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) := \mathfrak{h} - \mathfrak{fs}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) + {}^-(\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}))$$

and

$$\mathfrak{trd}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) := \mathfrak{n} - \mathfrak{n}[a] + {}^-(\mathfrak{n}[a]).$$

定义 4.5. 设 $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mult}_\rho$。设 $\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho$ 可容许于 $\mathfrak{h}$。令 $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}$。递归定义

$$\mathfrak{h}_i = \mathfrak{trr}(\mathfrak{n}_{i-1}, \mathfrak{h}_{i-1}), \quad \mathfrak{n}_i = \mathfrak{trd}(\mathfrak{n}_{i-1}, \mathfrak{h}_{i-1}).$$

$(\mathfrak{n},\ \mathfrak{h})$ 的移除过程的细链（或简称为 $(\mathfrak{n},\ \mathfrak{h})$ 的细链）是序列

$$\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}_0, \mathfrak{h}_0), \mathfrak{fs}(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{h}_1), \ldots$$

序列 $\mathfrak{h}_0,\ \mathfrak{h}_1,\ \ldots$ 和 $\mathfrak{n}_0,\ \mathfrak{n}_1,\ \ldots$ 之后也会用到。

引理 4.6. 采用定义 *4.5* 中的记号。那么，对所有 i，

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{n}_i, \mathfrak{h}_i).$$

证明。这可由反复应用引理 3.2(1) 得出，也可由 [Ch25b 中略强一些的陈述——引理 3.4]——得出。□

4.4. **局部可极小化性**。

定义4.7。 设 $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mult}_\rho$，且 $\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho$。令 a 为满足 $\mathfrak{n}[a] \neq \emptyset$ 的最小整数。若存在一条线段 Δ 属于 $\mathfrak{n}[a+1]$，使得 $(\mathfrak{n}, \mathfrak{h})$ 是可局部极小化 的，则称之为

$$|\left\{\widetilde{\Delta} \in \mathfrak{n}[a] : \Delta \subset \widetilde{\Delta}\right\}| < |\left\{\widetilde{\Delta} \in \mathfrak{fs}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) : \Delta \subset \widetilde{\Delta}\right\}|.$$

~ ~注意，每个满足 $\Delta \subset \Delta$ 的 $\Delta \in \mathfrak{n}[a]$ 都能保证移除序列中的对应首个线段 Δ 满足 $\Delta \subset \Delta$。粗略地说，当定义 4.7 中两个基数之差不为零时，可以在 $\mathfrak{n}[a]$ 中找到一条“短”线段来进行交并过程，同时仍不改变移除过程中首个线段的选择。

定理4.8。 [Ch25b，引理6.1和引理6。2] 设 $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mult}_\rho$。设 $\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho$ 对 $\mathfrak{h}$ 可容许。设 $\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_1, \ldots$ 和 $\mathfrak{n}_0, \mathfrak{n}_1, \ldots$ 是按定义 *4.5* 构造的。那么，当且仅当对所有 i，$(\mathfrak{n}_i, \mathfrak{h}_i)$ 不可局部极小化时， $\mathfrak{n}$ 对 $\mathfrak{h}$ 是极小的。

4.5. **序列的不重叠性质**。 现在我们将命题 4.3 推广到多线段情形，这将在第7.3节中用到。我们先证明一个引理：

引理4.9。 设 $\Delta = [a, b]_\rho$ 和 $\Delta' = [c, d]_\rho$ 是两个线段。假设 $\Delta' < \Delta$。设 $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mult}_\rho$满足 Δ' 对 $\mathfrak{h}$可容许。若 $\Delta \subset \Upsilon(\Delta', \mathfrak{h})$，则 $\eta_\Delta(\mathfrak{r}(\Delta', \mathfrak{h})) \neq \eta_\Delta(\mathfrak{h})$。

证明。 设 $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ 是 $(\Delta', \mathfrak{h})$ 的移除序列。由我们的假设，存在 i^*，使其为满足 $b(\Delta) \leq b(\Delta_{i^*})$ 的最大整数。记 $\Delta_{i^*}^{tr} = [a_{i^*}, b_{i^*}]_\rho$。那么，对于 $\mathfrak{r}(\Delta', \mathfrak{h})$， $\Delta_{i^*}^{tr} \neq \emptyset$ 给 $\mathcal{E}_{[a_{i^*}, b]_\rho}$ 贡献额外的一个。然而，线段 $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ 以及 $\Delta_j^{tr} (j \neq i^*)$ 均不对 $\mathcal{E}_{[a_{i^*}, b]_\rho}$作出贡献。这就得到了所需不等式。□

命题 4.10。 设 $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mult}_\rho$。设 $\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho$ 对于 $\mathfrak{h}$是极小的。设 $\Delta = [a, b]_\rho$ 为一条线段，使得对于任意 $\Delta' \in \mathfrak{n}$，都有 $a(\Delta') < a$ 以及 $b(\Delta') < b$。那么，当且仅当

$$\eta_\Delta(\mathfrak{r}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h})) = \eta_\Delta(\mathfrak{h}).$$

证明。 按照定义 4.5，我们构造多重线段序列 $\mathfrak{n}_0, \mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots$ 以及 $\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots$。由引理 4.6，我们有：

$$(*) \quad \mathfrak{r}(\mathfrak{n}_0, \mathfrak{h}_0) = \mathfrak{r}(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{h}_1) = \ldots$$

令 a_i 为满足 $\mathfrak{n}_i[a_i] \neq \emptyset$的最小整数。

~令 i^* 为满足 $a_{i^*} = c-1$的指标。若不存在这样的指标，则意味着对于所有 $\Delta \in \mathfrak{n}$， $b(\Delta) < c-1$~。在这种情况下，根据定义 3.1(3) 和 (4) 对移除过程进行直接计算，可得对于 $x \geq c$， $\mathfrak{r}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h})[x] = \mathfrak{h}[x]$。特别地， $\eta_\Delta(\mathfrak{r}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h})) = \eta_\Delta(\mathfrak{h})$；并且由于 Δ 与 $\mathfrak{n}$中的任何线段都不相连， $\mathfrak{n} + \Delta$ 仍然是极小的。换言之，如果不存在这样的 i^*，则两个条件都会自动满足。

现在假设这样的 i^* 存在。我们先证明“仅当”方向。根据极小性条件和定理4.8，$(\mathfrak{n}_{i^*} + \Delta, \mathfrak{h}_{i^*})$ 不可局部极小化。另一方面，本命题中的假设保证 $\mathfrak{n}_{i^*}$ 中的任意线段 Δ 都满足 $\Delta \notin \Delta$，因此

$$|\left\{\widetilde{\Delta} \in \mathfrak{n}_{i^*}[a] : \Delta \subset \widetilde{\Delta}\right\}| = 0.$$

$(\mathfrak{n}_{i^*} + \Delta, \mathfrak{h}_{i^*})$的局部不可极小化意味着

$$|\left\{\widetilde{\Delta} \in \mathfrak{fs}(\mathfrak{n}_{i^*} + \Delta, \mathfrak{h}_{i^*}) : \Delta \subset \widetilde{\Delta}\right\}| = 0.$$

换言之，对于任意线段 $[x, y]_\rho$ in $\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}_{i^*} + \Delta, \mathfrak{h}_{i^*}) = \mathfrak{fs}(\mathfrak{n}_{i^*}, \mathfrak{h}_{i^*})$（等式由定义 4.5 得出），它必定具有 $[x', y']_\rho$ for $y' \leq b-1$ 的形式。因此，移除过程中涉及或产生的线段（根据嵌套性质）不能对 $\eta_\Delta(\mathfrak{r}(\mathfrak{n}_{i^*}, \mathfrak{h}_{i^*}))$ 作出贡献，因而

$$(**) \quad \eta_\Delta(\mathfrak{r}(\mathfrak{n}_{i^*}, \mathfrak{h}_{i^*})) = \eta_\Delta(\mathfrak{h}_{i^*}).$$

此外，$\mathfrak{h}_{i^*}$ 是通过对某个 $x \leq c-2$ 的 $\nu^x\rho$ 截去左端点得到的。因此，根据定义4.4和定义4.5，$\eta_\Delta(\mathfrak{h}_0) = \ldots = \eta_\Delta(\mathfrak{h}_{i^*})$。结合 (*) 和 (**)，可得所需等式，从而证明了“仅当”方向。

现在证明充分性方向。根据 $\mathfrak{h}_i$ 的构造（定义 4.5），我们有：

$$\eta_\Delta(\mathfrak{h}) = \eta_\Delta(\mathfrak{h}_{i^*})$$

现在结合 (*) 和假设 $\eta_\Delta(\mathfrak{h}) = \eta_\Delta(\mathfrak{r}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}))$，我们再次得到

$$\eta_\Delta(\mathfrak{r}(\mathfrak{n}_{i^*}, \mathfrak{h}_{i^*})) = \eta_\Delta(\mathfrak{h}_{i^*}).$$

根据引理4.9以及假设 $\mathfrak{n}$ 中的任意线段（因此 $\mathfrak{n}_{i^*}$ 中的任意线段）都满足 $b(\Delta) < b$，该条件意味着 $\mathfrak{fs}(\mathfrak{n}_{i^*}, \mathfrak{h}_{i^*})$ 不可能具有 $[c-1, y]_\rho$ 的形式，其中 $y \geq b$。换言之，$(\mathfrak{n}_{i^*}, \mathfrak{h}_{i^*})$ 不可局部极小化。对于 $j < i^*$，其他线段对 $(\mathfrak{n}_j, \mathfrak{h}_j)$ 的局部不可极小化性由 $\mathfrak{n}$ 的极小性推出。然后，根据定理 4.8，$\mathfrak{n} + \Delta$ 到 $\mathfrak{h}$ 的极小性随之成立。□

5. Two segment basic case (commutativity)

5.1. 不相连线段的引理。我们回忆如下第一交换性（参见例如 [Ch25，引理 4.4]），稍后将用到：

引理 5.1。 设 $\Delta, \Delta' \in$ 线段$_\rho$ 不相连。对于任意 $\pi \in$ 不可约表示集合$_\rho$，

$$D_{\Delta'} \circ D_\Delta(\pi) \cong D_\Delta \circ D_{\Delta'}(\pi).$$

5.2. **导数下的中间线段性质。**

引理 5.2。 设 $\pi \in$ 不可约表示集合$_\rho$。设 $\Delta, \Delta'' \in$ 线段$_\rho$ 对 π可容许。设 $\Delta' \in$ 线段$_\rho$。假设 $(\Delta, \Delta', \mathfrak{hd}(\pi))$ 满足不重叠性质或中间线段性质。若 $\Delta'' \subset \Delta'$，则$(\Delta, \Delta', \mathfrak{hd}(D_{\Delta''}(\pi)))$ 也满足不重叠性质和中间线段性质。

证明。 由于根据命题 4.3，不重叠性质与中间线段性质等价，因此只需证明 $(\Delta, \Delta', \mathfrak{hd}(D_{\Delta''}(\pi)))$ 也满足中间线段性质。

记 $\Delta = [a, b]_\rho$, $\Delta' = [a', b']_\rho$和 $\Delta'' = [a'', b'']_\rho$。根据定理3.4和定理3.5，对于$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$任意线段 $\Delta = [\widetilde{a}, b]_\rho$,

$$(*) \quad \varepsilon_{\widetilde{\Delta}}(\mathfrak{r}(\Delta'', \pi)) \leq \varepsilon_{\widetilde{\Delta}}(D_{\Delta''}(\pi)).$$

由此，可以得到每个整数 c 对应的 $\mathfrak{hd}(\pi)[c]$ 和 $\mathfrak{r}(\Delta, \pi)[c]$。(*) 中 $\mathfrak{r}(\Delta', \mathfrak{hd}(\pi))$ 与 $\mathfrak{hd}(D_{\Delta''}(\pi))$ 之间缺失的部分取自某些值 $a''-1, \ldots\ldots, b''-1 < b'$。因此，可以通过延长 $\mathfrak{r}(\Delta'', \mathfrak{hd}(\pi))$ 中的一些线段（可能会用到 $a''-1, \ldots\ldots, b''-1$ 中的某些项），得到 $\mathfrak{hd}(D_{\Delta''}(\pi))$。

现在，根据 $(\Delta, \Delta', \mathfrak{hd}(\pi))$ 的中间线段性质，存在一个形如 $[c, d]_\rho$ 的线段，满足：

$$a \leq c < a', \quad b \leq d < b'.$$

现在，按照上述得到 $\mathfrak{hd}(D_{\Delta''}(\pi))$ 的过程，线段 $[c, d]_\rho$ 可以延长为 $\mathfrak{r}(\Delta'', \pi)$ 中形如 $[c, e]_\rho$ 的线段，其中 $e \leq b'-1$ 是某个值。然后，线段 $[c, e]_\rho$ 满足了 $(\Delta, \Delta', D_{\Delta''}(\pi))$ 的中间线段性质所需的条件。因此，根据命题 4.3，这个三元组满足这两条性质。□

对于线段 $\Delta = [a, b]_\rho \in \mathrm{Seg}_\rho$ 和 $\pi \in$ 不可约表示集合$_\rho$，定义：

$$|\eta|_\Delta(\pi) = \varepsilon_{[a,b]_\rho}(\pi) + \varepsilon_{[a+1,b]_\rho}(\pi) + \ldots + \varepsilon_{[b,b]_\rho}(\pi).$$

根据 (3.2)，$|\eta|_\Delta(\pi)$ 衡量了 $\mathfrak{hd}(\pi)$ 中满足 $\nu^a\rho \leq a(\Delta) \leq \nu^b\rho$且 $\nu^b\rho \leq b(\Delta)$ 的线段 Δ 的数量。例如，假设我们有 $\pi \in$不可约表示集合$_\rho$，使得

$$\mathfrak{hd}(\pi) = \{[1,4]_\rho, [1,3]_\rho, [1,2]_\rho, [2,5]_\rho, [2,4]_\rho\}.$$

那么 $|\eta|_{[1,3]_\rho}(\pi) = 4$，其中一部分来自 $[1,4]_\rho$，$[1,3]_\rho$，对应于 $\varepsilon_{[1,3]_\rho}(\pi)$；另一部分来自 $[2,5]_\rho$，$[2,4]_\rho$，对应于 $\varepsilon_{[2,3]_\rho}(\pi)$。

引理 5.3。令 $\pi \in$ 不可约表示集合$_\rho$。令 $\Delta, \Delta' \in \mathrm{Seg}_\rho$。假设 Δ 对 π是可容许的。假设 $(\Delta, \Delta', \mathfrak{hd}(\pi))\widetilde{\ }$满足不重叠性质或中间线段性质。令 $\Delta = \Delta \cup \Delta'$。

$$|\eta|_{\widetilde{\Delta}}(\pi) - |\eta|_{\Delta'}(\pi) = |\eta|_{\widetilde{\Delta}}(D_\Delta(\pi)) - |\eta|_{\Delta'}(D_\Delta(\pi)).$$

证明。将 (Δ, π) 的移除序列写为：

$$\Delta_1, \dots, \Delta_r.$$

由中间线段性质，存在一个线段 Δ_k，使得 $a(\Delta_k) < a(\Delta')$ 且$b(\Delta_k) < b(\Delta')$。令 k^* 为满足条件的最小整数。于是，根据嵌套性质，只有$\Delta_1, \dots, \Delta_{k^*-1}$（在 $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ 中）对 $|\eta|_{\widetilde{\Delta}}(\pi) - |\eta|_{\Delta'}(\pi)$ 有贡献。

写作 $\Delta = [a,b]_\rho$和 $\Delta' = [a',b']_\rho$。根据定理 3.4，对于 $a \le c \le a' - 1$

$$\varepsilon_{[c,b']_\rho}(D_\Delta(\pi)) = \varepsilon_{[c,b']_\rho}(\mathfrak{r}(\Delta, \pi)).$$

那么，只有 $\Delta_1^{tr}, \dots, \Delta_{k^*-1}^{tr}$（在 $\Delta_1^{tr}, \dots, \Delta_r^{tr}$ 中）能够对 $|\eta|_{\widetilde{\Delta}}(\pi) - |\eta|_{\Delta'}(\pi)$ 作出贡献，因此可得等式。□

5.3. **两分段情形下的交换性与极小性**。

命题 5.4. 设 $\pi \in$ 不可约表示集合$_\rho$。设 $\Delta_1, \Delta_2 \in$ 线段$_\rho$ 对 π 是可容许的。假设 $\Delta_1 < \Delta_2$ 和$(\Delta_1, \Delta_2, \mathfrak{hd}(\pi))$ 满足不重叠性质，或者等价地

$$D_{\Delta_2} \circ D_{\Delta_1}(\pi) \ncong D_{\Delta_1 \cup \Delta_2} \circ D_{\Delta_1 \cap \Delta_2}(\pi).$$

Then

$$D_{\Delta_2} \circ D_{\Delta_1}(\pi) \cong D_{\Delta_1} \circ D_{\Delta_2}(\pi).$$

证明。这两个条件的等价性由命题 4.3 得出。

我们将采用证明中的记号。事实上，根据 [Ch25 中命题 6.2], 的可交换性判据，只需证明

$$D_{\Delta_1} \circ D_{\Delta_2}(\pi) \ncong D_{\Delta_1 \cup \Delta_2} \circ D_{\Delta_1 \cap \Delta_2}(\pi).$$

令 $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$。为此，只需证明

$$(|\eta|_{\widetilde{\Delta}} - |\eta|_{\Delta_2})(D_{\Delta_1} \circ D_{\Delta_2}(\pi)) = (|\eta|_{\widetilde{\Delta}} - |\eta|_{\Delta_2})(\pi). \tag{5.3}$$

注意，由定理 3.4 中不相连的部分可知，

$$(|\eta|_{\widetilde{\Delta}} - |\eta|_{\Delta_2})(D_{\Delta_2}(\pi)) = (|\eta|_{\widetilde{\Delta}} - |\eta|_{\Delta_2})(\pi)$$

另一方面，由命题 4.3(2)，$(\Delta_1, \Delta_2, \pi)$ 满足中间线段性质，因此根据引理 5.2，$(\Delta_1, \Delta_2, D_{\Delta_2}(\pi))$ 也满足中间线段性质。现在，由引理 5.3，

$$(|\eta|_{\widetilde{\Delta}} - |\eta|_{\Delta_2})(D_{\Delta_1} \circ D_{\Delta_2}(\pi)) = (|\eta|_{\widetilde{\Delta}} - |\eta|_{\Delta_2})(D_{\Delta_2}(\pi)).$$

结合上述两个等式，即得所需的 (5.3)。 □

我们将从表示论视角给出命题 5.4 的证明（见引理 10.2）。

6. 后续内容及交换性性质的一些预备结果 ES

6.1. **消去性质**。

命题 6.1. （消去性质）设 $\pi \in$不可约表示集合ρ。设 $\mathfrak{n}$ 和 $\mathfrak{n}'$ 为多重线段，其对应线段分别属于以下升序序列：

$$\Delta_1', \ldots, \Delta_p', \Delta_1, \ldots, \Delta_r$$

and

$$\Delta_1'', \ldots, \Delta_q'', \Delta_1, \ldots, \Delta_r.$$

那么 $\mathfrak{r}(\mathfrak{n}', \pi) = \mathfrak{r}(\mathfrak{n}'', \pi)$ 当且仅当

$$\mathfrak{r}(\left\{\Delta_1', \ldots, \Delta_p'\right\}, \pi) = \mathfrak{r}(\left\{\Delta_1'', \ldots, \Delta_q''\right\}, \pi).$$

证明。“若”方向显然。现在考虑“仅若”方向。由定理 2.3，设 $\pi \in$ 不可约表示集合ρ，使得 $\mathfrak{h}\mathfrak{d}(\pi) = \mathfrak{h}$。由定理 3.3，我们有：

$$D_{\Delta_r} \circ \ldots \circ D_{\Delta_1} \circ D_{\Delta_p'} \circ \ldots \circ D_{\Delta_1'}(\pi) \cong D_{\Delta_r} \circ \ldots \circ D_{\Delta_1} \circ D_{\Delta_q'} \circ \ldots \circ D_{\Delta_1'}(\pi).$$

对于任意不可约表示 $\tau \in$ 不可约表示集合ρ 和任意线段 $\Delta \in \mathsf{Seg}_\rho$，记 $I_\Delta(\tau)$ 为 $\pi \times \mathsf{St}(\Delta)$ 的唯一不可约子模。现在，由唯一性可知，对于任意 i 和不可约表示 τ，若 $D_{\Delta_i}(\tau) \neq 0$，则 $I_{\Delta_i} \circ D_{\Delta_i}(\tau) \cong \tau$。因此，我们消去导数 $D_{\Delta_r}, \ldots, D_{\Delta_1}$，得到：

$$D_{\Delta_p'} \circ \ldots \circ D_{\Delta_1'}(\pi) \cong D_{\Delta_q'} \circ \ldots \circ D_{\Delta_1'}(\pi).$$

□

6.2. **第一个后续性质**。

我们将经常使用以下简单事实：

引理 6.2。 [Ze80，第 6 节。7] 设 $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ 是按升序排列的线段序列。假设对于某个 k，Δ_k 和 Δ_{k+1} 相连。那么

$$\Delta_1, \ldots, \Delta_{k-1}, \Delta_k \cup \Delta_{k+1}, \Delta_k \cap \Delta_{k+1}, \Delta_{k+2}, \ldots, \Delta_r$$

也按升序排列。

特例 殊情况下，若 $\Delta', \Delta'', \Delta'''$ 按升序排列，则有：

(1) $\Delta' \cap \Delta'', \Delta' \cup \Delta'', \Delta'''$ 也按升序排列；(2) $\Delta', \Delta'' \cap \Delta''', \Delta'' \cup \Delta'''$ 也按升序排列。

由这两个简单情形，可以推导出下述命题 6.3 中所需的其他变式。

命题 6.3。 设 $\pi \in$不可约表示集合ρ。设 $\mathfrak{n}$ 关于 π 是极小的。我们将 $\mathfrak{n}$ 中的线段按升序排列

$$\Delta_1, \ldots, \Delta_r.$$

那么，对于任意 $s \leq r$，

（1） $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_s\}$ 关于 π 仍然是极小的；并且（2） $\{\Delta_{s+1}, \ldots, \Delta_r\}$ 关于 $\mathfrak{r}(\{\Delta_1, \ldots, \Delta_s\}, \pi)$ 是极小的。

证明。 我们只证明（1），（2）可类似证明。

可容许性由定义（以及引理 3.2(5)）得到。设

$$\mathfrak{n}' = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_s\}.$$

我们选取两个相连线段 Δ_i 和 Δ_j，它们位于 $\mathfrak{n}'$ 中，并令

$$\mathfrak{n}'' = \mathfrak{n}' - \{\Delta_i, \Delta_j\} + \Delta_i \cup \Delta_j + \Delta_i \cap \Delta_j.$$

只需证明 $\mathfrak{r}(\mathfrak{n}'', \mathfrak{h}) \neq \mathfrak{r}(\mathfrak{n}, \mathfrak{h})$。为此，我们先将 $\mathfrak{n}''$ 中的线段按升序排列：

$$\Delta_1', \ldots, \Delta_s'.$$

（如果 $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$，则有 $s-1$ 条线段，但以下论证仍然适用。）由引理 6.2 可知，Δ'_1，……，Δ'_s，Δ_{s+1}，……，Δ_r 仍按升序排列。

现在我们回到证明。 $\mathfrak{n}$的极小性意味着

$$\mathfrak{r}(\{\Delta'_1,\dots,\Delta'_s,\Delta_{s+1},\dots,\Delta_r\},\pi) \neq \mathfrak{r}(\{\Delta_1,\dots,\Delta_s,\Delta_{s+1},\dots,\Delta_r\},\pi).$$

由命题 6.1，

$$\mathfrak{r}(\{\Delta'_1,\dots,\Delta'_s\},\pi) \neq \mathfrak{r}(\{\Delta_1,\dots,\Delta_s\},\pi),$$

正如所需。 □

7. 三段基本情形

本节的主要目标是证明三段情形下的后续性质和交换性。为了证明极小性，主要策略是使用定理 1.1 中关于 $\mathcal{S}(\pi,\ \tau)$ 的凸性以及定理 4.3 的不重叠性质。

7.1. 情形： $\{\Delta_1,\Delta_3\}$ 极小到 $D_{\Delta_2}(\pi)$。

引理 7.1. 设 $\Delta,\Delta' \in$ 分段ρ 满足 $\Delta \subset \Delta'$。设 $\pi \in$ 不可约表示集合ρ 满足 $D_{\Delta'}(\pi) \neq 0$。则有以下结论：

(1) 若 $a(\Delta) > a(\Delta')$，则 $\eta_\Delta(D_{\Delta'}(\pi)) = \eta_\Delta(\pi)$。*(2)* 若 $a(\Delta) = a(\Delta')$，则 $\eta_\Delta(D_{\Delta'}(\pi))$ 可由 $\eta_\Delta(\pi)$ 将坐标 $\varepsilon_\Delta(\pi)$ 减 *1* 得到。

证明。 由定理 3.4，只需比较 $\eta_\Delta(\mathfrak{r}(\Delta',\pi))$ 和 $\eta_\Delta(\pi)$。令 (Δ',π) 的移除序列为

$$\Delta_1,\dots,\Delta_r.$$

对于 (1)，我们考虑两种情形。

(i) 假设不存在整数 i^*，使得 $a(\Delta_{i^*}) \geq a(\Delta)$ 且 $a(\Delta_{i^*}) \leq b(\Delta)$。在这种情况下，所有 $\Delta_1,\dots,\Delta_r$ 和 $\Delta_1^{tr},\dots,\Delta_r^{tr}$ 都不对 η_Δ 作出贡献。因此，我们得到这样的等式。(ii) 假设存在整数 i^*，使得 $a(\Delta_{i^*}) \geq a(\Delta)$。令 $i^* > 1$ 为满足条件的最小整数。令 j^* 为满足 $a(\Delta_{j^*}) \leq b(\Delta)$ 的最大整数。我们有，$\Delta_{i^*},\dots,\Delta_{j^*}$ 是移除序列中所有对 $\eta_\Delta(\pi)$ 作出贡献的线段，而 $\Delta^{tr}_{i^*-1},\dots,\Delta^{tr}_{j^*-1}$ 是截断序列中所有对 $\eta_\Delta(\mathfrak{r}(\Delta',\pi))$ 作出贡献的线段。注意，对于 $i^* \leq k \leq j^*$，Δ_k 和 Δ^{tr}_{k-1} 对某个线段 Δ 的同一坐标 $\varepsilon_{\widetilde{\Delta}}$ 作出贡献。这证明了两个 η_Δ 的等式。

对于 (2)，情况类似，但上述记号中的 i^* 变为 1。同样，$2 \leq k \leq j^*$、Δ_k 和 Δ^{tr}_{k-1}对同一个 ε 有贡献。项 Δ_1 解释 $\varepsilon_\Delta(\pi)$ 减少 1，以得到 $\varepsilon_\Delta(D_{\Delta'}(\pi))$。□

引理 7.2. 设 $\mathfrak{m} = \{\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3\} \in \mathrm{Mult}\rho$ 按升序排列。设 $\pi \in$ 不可约表示集合ρ，使得 $\mathfrak{m}$相对于 π是极小的。那么 $\{\Delta_1,\Delta_3\}$ 相对于 $D_{\Delta_2}(\pi)$也是极小的。

证明。 根据命题 6.3，$\{\Delta_1,\Delta_2\}$ 相对于 π是极小的。根据命题 5.4（针对 Δ_1 与 Δ_2之间的关联情形）以及引理 5.1（针对 Δ_1 与 Δ_2之间的不相连情形），我们有

$$D_{\Delta_3} \circ D_{\Delta_2} \circ D_{\Delta_1}(\pi) \cong D_{\Delta_3} \circ D_{\Delta_1} \circ D_{\Delta_2}(\pi).$$

如果 Δ_1 和 Δ_3 不相连，则极小性是自动满足的。因此我们假设 Δ_1 和 Δ_3 相连。共有三种可能：

- Δ_2 与 Δ_1 不相连（因此 $\{\Delta_2,\Delta_1,\Delta_3\}$ 仍按升序排列）。那么，$\mathfrak{m}$ 的极小性和命题 6.3 蕴含了这种情形。
- Δ_2 与 Δ_3不相连。我们考虑以下可能性：

(i) $\Delta_3 \subset \Delta_2$。由引理 5.1 和命题 6.3 可知，$\{\Delta_1, \Delta_3\}$ 对于 π 也极小。因此，$\eta_{\Delta_3}(D_{\Delta_1}(\pi)) = \eta_{\Delta_3}(\pi)$。另一方面，如果 $a(\Delta_3) > a(\Delta_2)$，根据引理 7.1(1)，

$$\eta_{\Delta_3}(D_{\Delta_2}(\pi)) = \eta_{\Delta_3}(\pi)$$

and

$$\eta_{\Delta_3}(D_{\Delta_2} \circ D_{\Delta_1}(\pi)) = \eta_{\Delta_3}(D_{\Delta_1}(\pi)).$$

结合两个方程，得到

$$\eta_{\Delta_3}(D_{\Delta_2} \circ D_{\Delta_1}(\pi)) = \eta_{\Delta_3}(D_{\Delta_2}(\pi))$$

因此，再由命题 5.4 和引理 5.1，

$$\eta_{\Delta_3}(D_{\Delta_1} \circ D_{\Delta_2}(\pi)) = \eta_{\Delta_3}(D_{\Delta_2}(\pi)).$$

因此，由命题 4.3 可知其具有极小性。

当 $a(\Delta_3) \cong a(\Delta_2)$ 时，论证类似。根据引理 7.1(2)，唯一的区别在于，$\eta_{\Delta_3}(D_{\Delta_2}(\pi))$（分别为 $\eta_{\Delta_3}(D_{\Delta_2} \circ D_{\Delta_1}(\pi))$）是通过将 $\eta_{\Delta_3}(\pi)$（分别为 $\eta_{\Delta_3}(D_{\Delta_1}(\pi))$）中的 $\varepsilon_{\Delta_3}(\pi)$（分别为 $\varepsilon_{\Delta_3}(D_{\Delta_1}(\pi))$）减小 1 得到的。

(ii) $\Delta_2 \subset \Delta_3$。在这种情况下，首先由 $\{\Delta_1, \Delta_3\}$ 到 π 的极小性可知，$(\Delta_1, \Delta_3, \mathfrak{h}\mathfrak{d}(\pi))$ 满足不重叠性质。然后，由引理 5.2 可知，$(\Delta_1, \Delta_3, \mathfrak{h}\mathfrak{d}(D_{\Delta_2}(\pi)))$ 仍满足不重叠性质。因此，$\{\Delta_1, \Delta_3\}$ 是 $D_{\Delta_2}(\pi)$ 的极小序列。

(iii) $b(\Delta_2) < a(\Delta_3)$。那么，$\Delta_1$ 和 Δ_3 之间的升序关系和相连性也表明，Δ_1 和 Δ_2 不相连。这又回到了上面的要点。(iv) $b(\Delta_3) < a(\Delta_2)$。那么，$\Delta_1$ 和 Δ_3 之间的升序关系和相连性也表明，Δ_1 和 Δ_2 不相连。这又回到了上面的要点。

- $\Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3$。如果 $\{\Delta_1, \Delta_3\}$ 不对 $D_{\Delta_2}(\pi)$ 极小，那么

$$D_{\Delta_1 \cup \Delta_3} \circ D_{\Delta_1 \cap \Delta_3} \circ D_{\Delta_2}(\pi) \cong D_{\Delta_3} \circ D_{\Delta_1} \circ D_{\Delta_2}(\pi) \cong D_{\Delta_3} \circ D_{\Delta_2} \circ D_{\Delta_1}(\pi).$$

这与 $\mathfrak{m}$ 的极小性矛盾。

□

7.2. **情形：** $\{\Delta_2, \Delta_3\}$ **对** π**极小。**

引理 7.3。 设 $\pi \in$ 不可约表示集合$_\rho$。设 Δ_1、Δ_2、Δ_3 为按升序排列的线段。若 $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$ 对 π 是极小的，则 $\{\Delta_2, \Delta_3\}$ 对 π 也是极小的。

证明。当 Δ_2 和 Δ_3 不相连时，无需证明。我们假设 Δ_2 和 Δ_3 相连，因此 $\Delta_2 < \Delta_3$。下面分情况讨论：

- $b(\Delta_3) \leq b(\Delta_1)$。此时 Δ_1 与 Δ_2 和 Δ_3 均不相连。由命题 6.3，$\{\Delta_2, \Delta_3\}$ 对 π 的极小性可由 $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$ 对 π 的极小性推出。
- $b(\Delta_1) < b(\Delta_3)$ 且 $a(\Delta_1) < a(\Delta_3)$，并且 Δ_1 和 Δ_3 相连。此时，$\{\Delta_1, \Delta_2\}$ 与 Δ_3 符合命题 4.10 的情形。因此，$\eta_{\Delta_3}(D_{\{\Delta_1, \Delta_2\}}(\pi)) = \eta_{\Delta_3}(\pi)$。另一方面，由引理 7.2 和命题 4.3(1)⇔(3)，可得 $\eta_{\Delta_3}(D_{\Delta_1} \circ D_{\Delta_2}(\pi)) = \eta_{\Delta_3}(D_{\Delta_2}(\pi))$。此外，$D_{\Delta_1} \circ D_{\Delta_2}(\pi) \cong D_{\{\Delta_1, \Delta_2\}}(\pi)$，这同样可由命题 5.4 和引理 5.1 推出（更多细节见引理 7.2 证明的开头）。综上可得 $\eta_{\Delta_3}(\pi) = \eta_{\Delta_3}(D_{\Delta_2}(\pi))$。由命题 4.3(1)⇔(3)，这意味着 $\{\Delta_2, \Delta_3\}$ 对 π 是极小的。
- $b(\Delta_1) < b(\Delta_3)$ 与 $a(\Delta_1) < a(\Delta_3)$，以及 Δ_1 和 Δ_3 不相连。事实上，上面项目中的论证仍然适用，只需直接从移除过程中观察到 $\eta_{\Delta_3}(D_{\Delta_1} \circ D_{\Delta_2}(\pi)) = \eta_{\Delta_3}(D_{\Delta_2}(\pi))$ 即可。

- $b(\Delta_1) < b(\Delta_3)$ 与 $a(\Delta_3) \leq a(\Delta_1)$。特别地， Δ_1 与 Δ_3不相连。由于我们假设 Δ_1， Δ_2，Δ_3 按升序排列，并且假设 Δ_2 与 Δ_3 相连，因此 Δ_1 与 Δ_2 也不相连。于是，由 $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$ 到 π 的极小性以及命题 6.3，可得 $\{\Delta_2, \Delta_3\}$ 到 π的极小性。

□

7.3. **情形：** $\{\Delta_1, \Delta_3\}$ **相对于** π **极小**。

引理 7.4. 设 $\pi \in$不可约表示集合$_\rho$。设 Δ_1、 Δ_2、 Δ_3 是按升序排列的线段。若 $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$ 相对于 π 极小，则 $\{\Delta_1, \Delta_3\}$ 相对于 π 极小。

证明。 不妨设 Δ_1 与 Δ_3 相连。否则，无须证明。我们考虑以下情形。

- $\Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3$。由命题 5.4，我们有
$$D_{\{\Delta_1, \Delta_3, \Delta_2\}}(\pi) \cong D_{\Delta_2} \circ D_{\{\Delta_1, \Delta_3\}}(\pi).$$
若极小性不成立，则有
$$D_{\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}}(\pi) \cong D_{\{\Delta_2, \Delta_1 \cup \Delta_3, \Delta_1 \cap \Delta_3\}}(\pi)$$
因为 $\Delta_1 \cup \Delta_3$， $\Delta_1 \cap \Delta_3$， Δ_2 仍然按升序排列。这与 $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$ 对 π的极小性相矛盾。

- Δ_2 和 Δ_3 不相连。因此，我们可以交换 Δ_2 和 Δ_3的标记，由此根据命题 6.3 可知 $\{\Delta_1, \Delta_3\}$ 对 π 是极小的。
- Δ_1 和 Δ_2 不相连。在这种情况下，我们可以利用相连性交换 Δ_1 和 Δ_2 的标记。于是结论由引理 7.3 得出。

□

7.4. **情形：** $\{\Delta_1, \Delta_2\}$ **对** $D_{\Delta_3}(\pi)$**为极小的**。现在我们需要表示论中的一些结果来证明一个组合学结论。令 $N_i \subset G_n$ （依赖于 n）为包含形如 $\begin{pmatrix} I_{n-i} & * \\ & I_i \end{pmatrix}$的矩阵的幂零根。对于 G_n的光滑表示 π ，我们将其 Jacquet 模记为 π_{N_i} 。

引理 7.5. 设 $\Delta = [a, b]_\rho, \Delta' = [a', b']_\rho$ 是两个线段，使得 $\Delta < \Delta'$。设 $\omega = \mathrm{St}(\{\Delta, \Delta'\})$。设 $\mathfrak{m}$ 是一个多重线段，其线段 $\Delta'' = [a'', b'']_\rho$ 满足 $b'' = b$ 和 $a'' < a$。那么$\mathrm{St}(\mathfrak{m}) \times \omega$ 不可约，且

$$\mathrm{St}(\mathfrak{m}) \times \omega \cong \omega \times \mathrm{St}(\mathfrak{m}).$$

证明。 众所周知，第二个断言蕴含第一个断言。我们只需证明第一个断言。由于 St(m) 可写为 $\times_{\Delta \in \mathfrak{m}}$St(Δ)，问题归结为 $\mathfrak{m}$ 只包含一个线段的情形，因此现在我们考虑 $\mathfrak{m} = \left\{\widetilde{\Delta}\right\}$。

我们分析以下表示的可能合成因子:

$$\mathrm{St}(\widetilde{\Delta}) \times \omega.$$

~ ~由于我们知道， St(Δ) × ω 的合成因子也是 St(Δ) ×St(Δ) × St(Δ′) 的合成因子，因此可能的合成因子为

$$\mathrm{St}(\left\{\widetilde{\Delta}, \Delta, \Delta'\right\}), \mathrm{St}(\widetilde{\Delta} \cup \Delta' + \widetilde{\Delta} \cap \Delta' + \Delta), \mathrm{St}(\Delta \cup \Delta' + \Delta \cap \Delta' + \widetilde{\Delta}).$$

我们分别将这三个表示记为 π_1， π_2， π_3 。

~因此，只需证明最后两个合成因子不能出现在 St(Δ) × ω 中。我们~首先考虑 π_2。注意， π_2 是通用的。然而， ω 不是通用的，因此 St(Δ) × ω 不能~含有一个通用的合成因子，所以 π_2 不能出现在 St(Δ) × ω 中。

现在我们考虑 π_3。令 $l = l_{abs}(\Delta \cup \Delta')$。那么 $(\pi_3)^{N_l}$ 具有合成因子 $\mathrm{St}(\Delta) \widetilde{\boxtimes} \widetilde{\mathrm{St}}(\Delta \cup \Delta')$。现在我们考虑 $(\mathrm{St}(\Delta) \times \omega)^{N_l}$ 中的合成因子。如果 $(\mathrm{St}(\Delta) \times \omega)^{N_l}$ 含有因子 $\mathrm{St}(\Delta) \boxtimes \mathrm{St}(\Delta \cup \Delta')$，则一个简单合成因子是其中的一个简单合成因子

$$\mathrm{St}(\Delta) \times \omega_1 \boxtimes \omega_2,$$

其中，$\omega_1 \boxtimes \omega_2$ 是 ω_{N_l}中的一个简单合成因子。然而，这些合成因子的可能性是众所周知的，且 ω_2 不可能是因子 $\mathrm{St}(\Delta \cup \Delta')$。□

引理 7.6。设 $\pi \in$ 不可约表示集合$_\rho$。设 Δ_1、Δ_2、Δ_3 为满足 $\Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3$的线段。假设 $\sim\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$ 是 π的极小线段。那么 $D_{\Delta_3}(\pi)$。设 $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$。则有以下结论：

(1) $\eta_{\widetilde{\Delta}}(\pi) - \eta_{\Delta_2}(\pi) = \eta_{\widetilde{\Delta}}(D_{\Delta_3}(\pi)) - \eta_{\Delta_2}(D_{\Delta_3}(\pi))$；(2) 若$(\Delta_1$、$\Delta_2$、$\pi)$ 满足中间线段性质，则 $(\Delta_1$、Δ_2、$D_{\Delta_3}(\pi))$ 也满足中间线段性质。

这里，*(1)* 中的减法是逐项相减。

证明。我们已在引理 7.3 中证明，$\{\Delta_2, \Delta_3\}$ 对 π 是极小的。因此，我们有

$$D_{\Delta_3} \circ D_{\Delta_2}(\pi) \ncong D_{\Delta_2 \cup \Delta_3} \circ D_{\Delta_2 \cap \Delta_3}(\pi).$$

根据一个标准论证（例如，参见 [Ch25, Proposition 6.2] 的证明），我们有 π 是唯一的简单子模

$$D_{\Delta_3} \circ D_{\Delta_2}(\pi) \times \mathrm{St}(\{\Delta_2, \Delta_3\}).$$

记 $\Delta_2 = [a_2, b_2]_\rho$。令

$$\mathfrak{m} = \sum_{c < a_2} \varepsilon_{[c, b_2]_\rho}(D_{\Delta_3}(\pi)) \cdot [c, b_2]_\rho,$$

and

$$\mathfrak{p} = \sum_{c < a_2} \varepsilon_{[c, b_2]_\rho}(\pi) \cdot [c, b_2]_\rho.$$

因此，我们有：

$$D_{\Delta_3} \circ D_{\Delta_2}(\pi) \hookrightarrow D_{\mathfrak{m}} \circ D_{\Delta_3} \circ D_{\Delta_2}(\pi) \times \mathrm{St}(\mathfrak{m})$$

于是

$$\pi \hookrightarrow D_{\Delta_2} \circ D_{\Delta_2}(\pi) \times \mathrm{St}(\{\Delta_2, \Delta_3\}) \hookrightarrow D_{\mathfrak{m}} \circ D_{\Delta_3} \circ D_{\Delta_2}(\pi) \times \mathrm{St}(\mathfrak{m}) \times \mathrm{St}(\{\Delta_2, \Delta_3\}).$$

根据引理 7.5,

$$\pi \hookrightarrow D_{\mathfrak{m}} \circ D_{\Delta_3} \circ D_{\Delta_2}(\pi) \times \mathrm{St}(\{\Delta_2, \Delta_3\}) \times \mathrm{St}(\mathfrak{m}).$$

这意味着 $D_{\mathfrak{m}}(\pi) \neq 0$，因此 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{p}$的子多重线段。另一方面，利用引理 3.2 和定理 3.5，我们还可得 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{m}$的子多重线段。因此，$\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$。转化为 η-不变量后，我们得到 (1)。

现在证明 (2)。设 $\Delta_1 = [a_1, b_1]_\rho$。假设 $(\Delta_1,\ \Delta_2,\ \pi)$ 满足中间线段性质。那么，存在一个线段 $[a, b]_\rho$ 属于 $\mathfrak{hd}(\pi)$，满足 $a_1 \leq a < a_2$ 且 $b_1 \leq b < b_2$。于是，

$$\varepsilon_{[a,b]_\rho}(\pi) > \varepsilon_{[a,b_2]_\rho}(\pi)$$

由 (1)，我们有

$$\varepsilon_{[a,b_2]_\rho}(\pi) = \varepsilon_{[a,b_2]_\rho}(D_{\Delta_3}(\pi)).$$

由定理 3.5,

$$\varepsilon_{[a,b]_\rho}(D_{\Delta_3}(\pi)) \geq \varepsilon_{[a,b]_\rho}(\pi).$$

结合上述等式和不等式，我们得到：

$$\varepsilon_{[a,b]_\rho}(D_{\Delta_3}(\pi)) > \varepsilon_{[a,b_2]_\rho}(D_{\Delta}(\pi)).$$

这意味着在 $\mathfrak{hd}(D_{\Delta_3}(\pi))$ 中存在一条线段 $[a, b']_\rho$，满足 $b' < b_2$。因此，$(\Delta_1, \Delta_2, D_{\Delta_3}(\pi))$ 满足中间线段性质。□

当然，若能为引理 7.6 提供一个更具组合性的证明，那将是可取的；不过，要做到这一点，似乎还需要对移除过程作进一步研究。

引理 7.7. 设 $\pi \in$不可约表示集合$_\rho$。设 Δ_1、Δ_2、Δ_3 为按升序排列的线段。若 $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$ 是关于 π 极小的，则 $\{\Delta_1, \Delta_2\}$ 也关于 $D_{\Delta_3}(\pi)$极小。

证明。若 Δ_1 与 Δ_2 不相连，则无需证明。若 Δ_2 与 Δ_3 不相连，则利用引理 5.1将问题转化为引理 7.2。

剩下的情况是 Δ_1 与 Δ_2 相连，且 Δ_2 与 Δ_3 相连。换言之，$\Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3$。此情况由命题 4.3(2)⇔(3)和引理 7.6推出。□

7.5. **情况：** $\{\Delta_1, \Delta_2\}$ **关于** π**极小**。

引理 7.8。设 $\pi \in$不可约表示集合$_\rho$。设 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 为按升序排列的线段。若 $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$ 对 π 极小，则 $\{\Delta_1, \Delta_2\}$ 对 π 也极小。

上述引理是命题 6.3(1)的一个特例。

7.6. **情形：** $\{\Delta_2, \Delta_3\}$ **对** $D_{\Delta_1}(\pi)$ **极小**。

引理 7.9。设 $\pi \in$不可约表示集合$_\rho$。设 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 为按升序排列的线段。若 $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$ 对 π 极小，则 $\{\Delta_2, \Delta_3\}$ 对 $D_{\Delta_1}(\pi)$ 也极小。

上述引理同样是命题 6.3(2)的一个特例。

8. Subsequent property of minimal sequences

8.1. **连续对**。

定义 8.1. 设 $\mathfrak{m} \in$Mult$_\rho$。若在 $\mathfrak{m}$ 中，两个线段 Δ_1 和 Δ_2 满足以下条件，则称它们在 $\mathfrak{m}$ 中是连续

- $\Delta_1 < \Delta_2$ 即 Δ_1 和 Δ_2 与 $a(\Delta_1) < a(\Delta_2$ 相连 $)$
- 不存在其他线段 Δ' 属于 $\mathfrak{m}$，使得

$$a(\Delta_1) \le a(\Delta') \le a(\Delta_2), \quad b(\Delta_1) \le b(\Delta') \le b(\Delta_2)$$

且 Δ' 与 Δ_1 或 Δ_2 相连。

（最后一个相连性条件保证 $\Delta' \neq \Delta_1 \cap \Delta_2$ 和 $\Delta' \neq \Delta_1 \cup \Delta_2$。）

E例 8.2. • 设 $\mathfrak{h} = \{[0,3],[1,4],[2,5]\}$。那么 $[0,3],[1,4]$ 构成一对连续线段。类似地，$[1,4],[2,5]$ 也构成一对连续线段，但 $[0,3],[2,5]$ 不构成一对连续线段。

- 设 $\mathfrak{h} = \{[0,4],[1,2],[2,5]\}$。则 $[0,4],[2,5]$ 构成一对连续线段；而$[1,2],[2,5]$ 也构成一对连续线段。
- 设 $\mathfrak{h} = \{[0,3],[1,3],[2,4],[2,5]\}$。则 $[1,3],[2,4]$ 构成一对连续线段，而 $[0,3],[2,4]$ 不构成一对连续线段。

连续线段这一术语的由来，是其在交并过程中的性质。

引理8.3。设 Δ_1, Δ_2 是相连线段，且满足 $\Delta_1 < \Delta_2$。假设存在一个线段 Δ'，满足定义 *8.1* 第二个项目中的条件。那么，若 Δ' 与 Δ_i *(*$i = 1,2$*)*相连，则

$$\{\Delta_1 \cap \Delta_2, \Delta_1 \cup \Delta_2, \Delta'\} \le_Z \{\Delta_i \cap \Delta', \Delta_i \cup \Delta', \Delta_j\} \le_Z \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta'\}.$$

这里，j 是不同于 i 的指标，即 $j \in \{1,2\} - \{i\}$。

上述引理可通过直接检验得出，细节从略。简单的组合学推导出以下结论：

引理 8.4. (1) 设 $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}' \in \mathrm{Mult}_\rho$ 满足 $\mathfrak{m}' \leq_Z \mathfrak{m}$，且 $\mathfrak{m}' \neq \mathfrak{m}$。那么在 $\mathfrak{m}$ 中存在一对连续线段 Δ, Δ'，使得由 $\mathfrak{m}$ 通过涉及 Δ 和 Δ'的初等交并过程得到的多重线段 $\mathfrak{m}''$ 满足 $\mathfrak{m}' \leq_Z \mathfrak{m}'' \leq_Z \mathfrak{m}$。

(2) 设 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult}_\rho$。设 Δ, Δ' 是 $\mathfrak{m}$ 中的一对连续线段，且满足 $\Delta < \Delta'$。设 $\mathfrak{m}'$ 为 $\mathfrak{m} - \Delta - \Delta'$ 的子多重线段，其中包含所有满足 $a(\Delta') \leq a(\Delta)$ 或 $b(\Delta') \leq b(\Delta)$ 的线段 Δ。将 $\mathfrak{m} - \mathfrak{m}' - \Delta - \Delta'$ 中的线段按升序排列：$\Delta_1, \ldots, \Delta_r$，并将 $\mathfrak{m}'$ 中的线段按升序排列：$\Delta'_1, \ldots, \Delta'_s$。那么序列：

$$\Delta_1, \ldots, \Delta_r, \Delta, \Delta', \Delta'_1, \ldots, \Delta'_s$$

是升序的。

证明。对于 (1)，只需证明对于 $\mathfrak{m}'$，它由涉及 Δ 和 Δ'的一对初等交并运算得到。如果运算中涉及的线段连续，则 $\widetilde{\mathfrak{m}}$ 的结论显然成立。否则，存在一条线段 Δ，使得 Δ 与 Δ或 Δ'相连，并产生一个多重线段 $\widetilde{\mathfrak{m}}$，满足 $\mathfrak{m}' \leq_Z \widetilde{\mathfrak{m}} \leq_Z \mathfrak{m}''$。如果这对相连线段仍不连续，我们就重复这一过程。注意，若 $\widetilde{\Delta}$ 与 Δ（分别与 Δ'）相连，则必有 $\widetilde{\Delta} \cap \Delta$（分别为 $\widetilde{\Delta} \cap \Delta'$）严格长于 $\Delta \cap \Delta'$，因此重复这一过程若干次后，我们就能得到所需的连续线段。

对于 (2)，根据升序的定义可直接验证。 □

8.2. **交换性下的极小性（第二个基本情形）**。我们首先证明极小序列的一个交换性结果，这对证明定理 8.6 有用。

引理 8.5。设 $\pi \in$ 不可约表示集合。设 $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ 按升序排列，且对 π 极小。那么 $\{\Delta, \Delta_{k+1}, \ldots, \Delta_r\}$ 对 $D_{\Delta_k} \circ \ldots \circ D_{\Delta_1}(\pi) \neq 0$ 也极小，并且

$$D_{\Delta_r} \circ \ldots \circ D_{\Delta_{k+1}} \circ D_\Delta \circ D_{\Delta_k} \circ \ldots D_{\Delta_1}(\pi) \cong D_{\Delta_r} \circ \ldots \circ D_{\Delta_1} \circ D_\Delta(\pi).$$

证明。由归纳法，只需证明 $k = 1$ 时的情形。若 Δ 与 Δ_1 不相连，则由引理 5.1 和命题 6.3(1) 可轻易得出结论。假设 $\{\Delta, \Delta_2, \ldots, \Delta_r\}$ 对 $D_{\Delta_1}(\pi)$ 不是极小的，以导出矛盾。由定理 1.1 和引理 8.4(1)，存在一对连续线段$\Delta' < \Delta''$，对这两条线段进行交并运算后得到的多重线段 Δ', Δ'' 在 π 上给出相同的导数。

注意，$\{\Delta_2, \ldots, \Delta_r\}$ 相对于 $D_{\Delta_1} \circ D_\Delta$（$\pi$）是极小的，$\cong D_\Delta \circ D_{\Delta_1}$（$\pi$）（最后一个同构由命题 5.4 得出）。因此，剩下可能需要考虑的情况是，Δ', Δ'' 中有一个是 Δ，因此 $\Delta' = \Delta$。令

$$\mathfrak{n} = \{\Delta_i : a(\Delta_i) \leq a(\Delta) \quad \text{or} \quad b(\Delta_i) \leq b(\Delta)\}$$

那么，利用序列 $\Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_r$（以及 $\Delta < \Delta_1$）的升序性质，任意 Δ_i 都与 Δ 和 Δ_1 不相连。（特别地，Δ_1 不在 $\mathfrak{n}$中。）

令 $\mathfrak{m} = \{\Delta_2, \ldots, \Delta_r\}$。现在，由于我们选择 Δ 和 Δ'' 使其连续，因此可以按升序排列并重新标记这些线段：

$$\widetilde{\Delta}_1, \ldots, \widetilde{\Delta}_l, \Delta, \Delta'', \widetilde{\Delta}_{k+1}, \ldots, \widetilde{\Delta}_{r-1},$$

其中，所有 $\Delta_1, \ldots, \Delta_l$ 都是 $\mathfrak{n}$ 中的元素，而 $\Delta_{k+1}, \ldots, \Delta_{r-1}$ 都是 $\mathfrak{m} - \mathfrak{n}$中的元素。

情况 1：$\widetilde{\Delta}_1, \ldots, \widetilde{\Delta}_{r-1}$ 构成升序，我们仍有 Δ 相对于 Δ'' 是极小的。特别地，根据消去性质，Δ，Δ_1，Δ'' 相对于 π 是极小的。因此

$$D_{\Delta''} \circ D_\Delta \circ D_{\Delta_1}(\pi) \ncong D_{\Delta'' \cup \Delta} \circ D_{\Delta'' \cap \Delta} \circ D_{\Delta_1}(\pi)$$

根据引理 7.2 和命题 5.4。由于

$$\Delta'' \cap \Delta, \Delta'' \cup \Delta, \widetilde{\Delta}_1, \ldots, \widetilde{\Delta}_{r-1}$$

仍构成升序（引理 6.2），应用 $D_{\widetilde{\Delta}_1}$，……，$D_{\widetilde{\Delta}_{r-1}}$会在$\pi$ 上得到不同的导数（命题 6.1），因此这就产生了矛盾。

情形 2： $\mathfrak{n} \neq \emptyset$。这意味着 $\Delta + \mathfrak{m} - \mathfrak{n}$ 对 $D_{\mathfrak{n}} \circ D_{\Delta_1}(\pi)$ 不是极小的。然而，根据第二段中讨论的非链接性，我们有，

$$D_{\mathfrak{n}} \circ D_{\Delta_1}(\pi) \cong D_{\Delta_1} \circ D_{\mathfrak{n}}(\pi).$$

根据命题 6.3，$\Delta + \Delta_1 + \mathfrak{m} - \mathfrak{n}$ 对 $D_{\mathfrak{n}}(\pi)$ 是极小的。然而，由情况 1 可知，$\Delta + \mathfrak{m} - \mathfrak{n}$ 对

$$D_{\Delta_1} \circ D_{\mathfrak{n}}(\pi) (\cong D_{\mathfrak{n}} \circ D_{\Delta_1}(\pi)).$$

这就产生了矛盾。 □

8.3. **后续序列的极小性**。

定理 8.6。 设 $\pi \in$不可约表示集合$_\rho$。设 $\mathfrak{n} \in$多重线段$_\rho$ 对 π 是极小的。那么， $\mathfrak{n}$ 的任意子多重线段对 π 也是极小的。

证明。 通过归纳法，只需证明对于 $\mathfrak{n}$中的任意线段 Δ， $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n} - \Delta$ 的极小性。由定理 1.1 和引理 8.4，只需验证：对于由 $\mathfrak{n}'$ 经过涉及两个连续线段的初等交并运算得到的任意多重线段 $\mathfrak{m}'$，

$$D_{\mathfrak{m}'}(\pi) \ncong D_{\mathfrak{n}'}(\pi).$$

~ ~将这两个连续线段记为 $\Delta < \Delta'$。

~ ~设 $\mathfrak{m}$ 是由 $\mathfrak{n}$ 经过涉及 Δ 和 Δ'的交并过程得到的。于是 $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m} - \Delta$。我们考虑以下几种可能：

~ ~(1) 情况 1：假设 Δ 和 Δ' 在 $\mathfrak{n}$中仍构成一对连续线段。那么按照引理 8.4 中的方式（显然地替换记号）将 $\mathfrak{n}$ 中的线段写为：

$$\Delta_1, \ldots, \Delta_r, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\Delta}', \Delta'_1, \ldots, \Delta'_s.$$

(a) 情况 1(a)： Δ 出现在 Δ'_1、……、Δ'_s中的一个线段里。若 $D_{\mathfrak{n}-\Delta}(\pi) = D_{\mathfrak{m}-\Delta}(\pi)$，则消去性质（命题 6.1）和引理 8.4（另见命题 6.3）推出

$$D_{\left\{\Delta_1, \ldots, \Delta_r, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\Delta}'\right\}}(\pi) \ncong D_{\left\{\Delta_1, \ldots, \Delta_r, \widetilde{\Delta} \cup \widetilde{\Delta}', \widetilde{\Delta} \cap \widetilde{\Delta}'\right\}}(\pi).$$

然而，通过应用 $D_{\Delta'_1}, \ldots, D_{\Delta'_s}$（省略 D_Δ），这意味着 $D_{\mathfrak{n}}(\pi) \ncong D_{\mathfrak{m}}(\pi)$。

(b) 情形 1(b)： Δ 出现在 $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ 中的某一个中。令

$$\mathfrak{p} = \left\{\Delta_1, \ldots, \Delta_r, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\Delta}'\right\} - \Delta$$

~ ~，并令 $\mathfrak{q}$ 由 $\mathfrak{p}$ 通过对 Δ 和 Δ' 进行初等交并过程得到。根据消去性质（命题 6.1），只需证明 $D_{\mathfrak{p}}(\pi) \ncong D_{\mathfrak{q}}(\pi)$。令 $\tau = D_{\mathfrak{p} - \widetilde{\Delta} - \widetilde{\Delta}' - \Delta}(\pi)$。反复使用引理 8.5，可得：

$$D_{\mathfrak{p}+\Delta}(\pi) \cong D_{\widetilde{\Delta}'} \circ D_{\widetilde{\Delta}} \circ D_{\Delta}(\tau)$$

并且 $\left\{\Delta, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\Delta}'\right\}$ 相对于 τ 是极小的。现在根据引理 7.3，我们有

$$D_{\mathfrak{p}}(\pi) = D_{\widetilde{\Delta}'} \circ D_{\widetilde{\Delta}}(\tau) \ncong D_{\widetilde{\Delta} \cup \widetilde{\Delta}'} \circ D_{\widetilde{\Delta} \cap \widetilde{\Delta}'}(\tau) = D_{\mathfrak{q}}(\pi)$$

如所需。

(2) 情形 2： Δ 与 Δ' 不构成连续的一对。于是我们先将 $\mathfrak{n}'$中的线段写成引理 8.4 中的形式：

$$\Delta_1, \dots, \Delta_r, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\Delta}', \Delta_1', \dots, \Delta_s'.$$

由于这对对象并不连续，线段 Δ 必须具有定义 8.1 第二个要点中的形式。接着仍可验证

$$\Delta_1, \dots, \Delta_r, \widetilde{\Delta}, \Delta, \widetilde{\Delta}', \Delta_1', \dots, \Delta_s'$$

是一个升序序列。现在令 $\tau = D_{\{\Delta_1,\dots,\Delta_r\}}(\pi)$。根据消去性质（命题 6.1），只需证明

$$D_{\{\widetilde{\Delta},\widetilde{\Delta}'\}}(\tau) \ncong D_{\{\widetilde{\Delta}\cap\widetilde{\Delta}',\widetilde{\Delta}\cup\widetilde{\Delta}'\}}(\tau).$$

这可由引理 7.4 的基本情形推出。

□

9. 交换性与极小性

本节研究极小序列的交换性。

9.1. **交换性与极小性（另一个基本情形）**。

引理 9.1. 设 $\pi \in$ 不可约表示集合$_\rho$。设 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult}_\rho$ 关于 π 是极小的。设 $\Delta \in \mathfrak{m}$。则 $D_{\mathfrak{m}-\Delta} \circ D_\Delta(\pi) \cong D_{\mathfrak{m}}(\pi)$。

证明。 我们将线段按升序排列： $\Delta_1, \dots, \Delta_r$。根据命题 6.3(1)，我们可以将问题归结为 $\Delta_1, \dots, \Delta_r, \Delta$ 仍按升序排列的情形。根据命题 6.3(2) 和基本情形（命题 5.4），

$$D_{\mathfrak{m}}(\pi) \cong D_\Delta \circ D_{\mathfrak{m}-\Delta}(\pi) \cong D_{\Delta_r} \circ D_\Delta \circ D_{\mathfrak{m}-\Delta-\Delta_r}(\pi).$$

根据定理 8.6， $\mathfrak{m} - \Delta_r$ 关于 π 仍是极小的。现在通过归纳即可得到结论。 □

我们首先研究交换性与极小性的一个特殊情形，并将在定理 9.3 中证明完整版本。

引理 9.2. 设 $\pi \in$不可约表示集合$_\rho$。设 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult}_\rho$ 相对于 π 是极小的。设 c （分别为 d）是满足 $\mathfrak{m}[c] \neq 0$ （分别为 $\mathfrak{m}\langle d\rangle \neq 0$）的最大整数。设 $\Delta \in \mathfrak{m}[c]$ 或 $\in \mathfrak{m}\langle d\rangle$。那么 $\mathfrak{m} - \Delta$ 相对于 $D_\Delta(\pi)$ 是极小的。

证明。 引理中的条件保证，对于 $\mathfrak{m}$ 的升序排列，可以将 Δ 安排在最后一个位置。

假设 $\mathfrak{m} - \Delta$ 相对于 $D_\Delta(\pi)$ 不是极小的。设 $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m} - \Delta$。根据定理 1.1 和引理 8.4，只需证明，对于任意一对连续线段 $\Delta < \Delta'$，

$$\mathfrak{n}' := \mathfrak{m}' - \left\{\widetilde{\Delta}, \widetilde{\Delta}'\right\} + \widetilde{\Delta} \cup \widetilde{\Delta}' + \widetilde{\Delta} \cap \widetilde{\Delta}'$$

在 $D_\Delta(\pi)$ 上不会给出相同的导数，即

$$(*) \quad D_{\mathfrak{n}'} \circ D_\Delta(\pi) \ncong D_{\mathfrak{m}'} \circ D_\Delta(\pi).$$

现在我们按照引理 8.4 对 $\mathfrak{m}'$ 中的线段重新排列并重新标记：

$$\Delta_1, \dots, \Delta_k, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\Delta}', \Delta_{k+3}, \dots, \Delta_r,$$

它们按升序排列。根据命题 6.3，要证明 (*)，只需证明$\left\{\Delta_1、\dots\dots、\Delta_k、\widetilde{\Delta}、\widetilde{\Delta}'\right\}$对 $D_\Delta(\pi)$ 仍然是极小的。令

$$\tau = D_{\Delta_k} \circ \dots \circ D_{\Delta_1}(\pi), \text{ and } \tau' = D_{\Delta_k} \circ \dots D_{\Delta_1} \circ D_\Delta(\pi).$$

由引理 6.2 和命题 6.1，只需证明

$$D_{\widetilde{\Delta}'} \circ D_{\widetilde{\Delta}}(\tau') \ncong D_{\widetilde{\Delta}'\cup\widetilde{\Delta}} \circ D_{\widetilde{\Delta}'\cap\widetilde{\Delta}}(\tau'). \tag{9.4}$$

设 $\mathfrak{p}=\{\Delta_1,\ldots,\Delta_k\}$。为此，根据下述性质（定理 8.6），我们有 $\mathfrak{p}+\widetilde{\Delta}'+\widetilde{\Delta}+\Delta$ 相对于 π 是极小的。因此，根据命题 6.3，我们也有 $\left\{\Delta,\ \widetilde{\Delta}',\ \widetilde{\Delta}\right\}$ 相对于 $\tau=D_{\mathfrak{p}}(\pi)$ 是极小的。现在，引理 7.7 推出：

$$D_{\widetilde{\Delta}'}\circ D_{\widetilde{\Delta}}\circ D_{\Delta}(\tau)\ncong D_{\widetilde{\Delta}'\cup\widetilde{\Delta}}\circ D_{\widetilde{\Delta}'\cap\widetilde{\Delta}}\circ D_{\Delta}(\tau).$$

另一方面，根据后续性质（定理 8.6），可知 $\{\Delta_1,\ldots,\Delta_k,\Delta\}$ 对 π 是极小的。再结合引理 9.1，可得 $D_{\Delta}(\tau)\cong\tau'$。综上，得到所需的非同构关系 (9.4)。□

9.2. **交换性与极小性（单段情形）**。

定理 9.3. 设 $\pi\in$ 不可约表示集合$_{\rho}$。设 $\mathfrak{n}\in\mathrm{Mult}_{\rho}$ 对 π 是极小的。设 $\Delta\in\mathfrak{n}$。则 $\mathfrak{n}-\Delta$ 对 $D_{\Delta}(\pi)$ 是极小的，并且

$$D_{\mathfrak{n}-\Delta}\circ D_{\Delta}(\pi)\cong D_{\mathfrak{n}}(\pi).$$

证明。 我们先证明第二个断言。将 $\mathfrak{n}$ 中的线段按升序排列：

$$\Delta_1,\ldots,\Delta_k,\Delta,\Delta_{k+1},\ldots,\Delta_r$$

其中 $b(\Delta_1)\leq\ldots\leq b(\Delta)\leq\ldots\leq b(\Delta_r)$。于是，根据命题 6.3，$\{\Delta_1,\ldots,\Delta_k,\Delta\}$ 对 $\mathfrak{n}$ 仍然是极小的。接着，第二个断言由引理 9.2 得出。

现在证明第一个断言。由定理 1.1 和引理 8.4，只需考虑一个~ ~连续线段对。设 Δ,Δ' 是 $\mathfrak{n}-\Delta$ 中的一对连续线段。令

$$\mathfrak{n}'=\mathfrak{n}-\Delta-\left\{\widetilde{\Delta},\widetilde{\Delta}'\right\}+\widetilde{\Delta}\cup\widetilde{\Delta}'+\widetilde{\Delta}\cap\widetilde{\Delta}'.$$

我们将证明

$$D_{\mathfrak{n}-\Delta}\circ D_{\Delta}(\pi)\ncong D_{\mathfrak{n}'}\circ D_{\Delta}(\pi).$$

我们考虑以下两种情形：

~ ~(1) Δ 和 Δ' 仍构成 $\mathfrak{n}$中的一对连续线段。我们将这些线段重新排列并重新编号如下：

$$\Delta_1,\ldots\Delta_p,\widetilde{\Delta},\widetilde{\Delta}',\Delta_{p+1},\ldots,\Delta_r$$

~ ~其中 $\Delta_{p+1},\ldots,\Delta_r$ 是所有满足 $a(\Delta_t)\geq a(\Delta')$ 或 $b(\Delta_t)\geq b(\Delta')$ 的线段。类似于引理 8.4，可得

$$\Delta_1,\ldots,\Delta_p,\widetilde{\Delta}\cup\widetilde{\Delta}',\widetilde{\Delta}\cap\widetilde{\Delta}',\Delta_{p+1},\ldots,\Delta_r$$

构成一个升序序列。

(i) 假设 Δ 出现在 Δ_1、……、Δ_p 中的某一项中，设为 Δ_i。令 $\tau=D_{\Delta_p}\circ\ldots\circ D_{\Delta_{i+1}}\circ D_{\Delta_{i-1}}\circ\ldots\circ D_{\Delta_1}\circ D_{\Delta}(\pi)$。在这种情况下，已证明的第二个断言给出

$$\tau\cong D_{\Delta_p}\circ\ldots\circ D_{\Delta_1}(\pi).$$

结合 $\left\{\Delta_1、\ldots\ldots、\Delta_p、\widetilde{\Delta}、\widetilde{\Delta}'\right\}$ 的同构与极小性，以及上面对升序序列的讨论，可得

$$D_{\widetilde{\Delta}'}\circ D_{\widetilde{\Delta}}(\tau)\ncong D_{\widetilde{\Delta}'\cup\widetilde{\Delta}}\circ D_{\widetilde{\Delta}'\cap\widetilde{\Delta}}(\tau).$$

应用 $D_{\Delta_{p+1}}$、……、D_{Δ_r}，根据命题 6.1，可得

$$D_{\mathfrak{n}-\Delta}\circ D_{\Delta}(\pi)\ncong D_{\mathfrak{n}'}\circ D_{\Delta}(\pi).$$

(ii) 假设 Δ 出现在 Δ_{p+1}、……、Δ_r 中的某一个中，记为 Δ_j。如有必要，通过重排并重新标记 Δ_{p+1}、……、Δ_r 中的线段，我们可假设：若 $b(\Delta')\leq b(\Delta_j)$，则 $b(\Delta_{p+1})\leq\ldots\leq b(\Delta_r)$；并假设：若 $a(\Delta')\leq a(\Delta_j)$，则 $a(\Delta_{p+1})\leq\ldots\leq a(\Delta_r)$。令

$$\mathfrak{n}_j=\left\{\Delta_1,\ldots,\Delta_p,\widetilde{\Delta},\widetilde{\Delta}',\Delta_{p+1},\ldots,\Delta_j=\Delta\right\},$$

$$\mathfrak{n}'_j = \left\{\Delta_1, \dots, \Delta_p, \widetilde{\Delta} \cup \widetilde{\Delta}', \widetilde{\Delta} \cap \widetilde{\Delta}', \Delta_{p+1}, \dots, \Delta_j = \Delta\right\}.$$

那么，根据引理 9.2，

$$D_{\mathfrak{n}'_j - \Delta} \circ D_\Delta(\pi) \ncong D_{\mathfrak{n}_j - \Delta} \circ D_\Delta(\pi)$$

因此，应用导数 $D_{\Delta_{j+1}}, \dots, D_{\Delta_r}$，我们得到 $D_{\mathfrak{n}'} \circ D_\Delta(\pi) \ncong D_{\mathfrak{n}-\Delta} \circ D_\Delta(\pi)$，如所需。

(2) Δ和Δ'在 $\mathfrak{n}$中不构成连续对。采用定理 8.6 中的类似论证，可将问题化归为三段情形。然后再化归为一个基本情形（参见定理 8.6 证明中的类似讨论），即引理 7.2。具体而言，我们将 $\mathfrak{n}$中的线段按升序排列：

$$\Delta_1, \dots, \Delta_p, \widetilde{\Delta}, \Delta, \widetilde{\Delta}', \Delta_{p+1}, \dots, \Delta_r.$$

然后，我们仍有

$$\Delta_1, \dots, \Delta_p, \widetilde{\Delta}, \Delta, \widetilde{\Delta}'$$

根据定理 8.6，对 π仍是极小的。于是我们也有 $\left\{\widetilde{\Delta}, \Delta, \widetilde{\Delta}'\right\}$ 对

$$\tau' := D_{\Delta_p} \circ \dots \circ D_{\Delta_1}(\pi). \tag{9.5}$$

由引理 7.2，我们便有

$$D_{\widetilde{\Delta}'} \circ D_{\widetilde{\Delta}} \circ D_\Delta(\tau') \ncong D_{\widetilde{\Delta}' \cup \widetilde{\Delta}} \circ D_{\widetilde{\Delta}' \cap \widetilde{\Delta}} \circ D_\Delta(\tau').$$

但现在，由定理 8.6，$\{\Delta_1, \dots, \Delta_p, \Delta\}$ 相对于 π是极小的，因此根据已证明的第二个断言，我们也有

$$\tau' \cong D_{\Delta_p} \circ \dots \circ D_{\Delta_1} \circ D_\Delta(\pi). \tag{9.6}$$

现在，将 $D_{\Delta_{p+1}}$、.....、D_{Δ_r}应用于（9.5），再利用（9.6）和命题 6.1，即可得到所需的 $D_{\mathfrak{n}-\Delta} \circ D_\Delta(\pi) \ncong D_{\mathfrak{n}'} \circ D_\Delta(\pi)$。

□

9.3. **交换性与极小性的一般形式**。

定理 9.4. 设 $\pi \in$ 不可约表示集合$_\rho$。设 $\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho$ 相对于 π是极小的。设 $\mathfrak{n}'$ 是 $\mathfrak{n}$的一个子多重线段。那么$D_{\mathfrak{n}-\mathfrak{n}'} \circ D_{\mathfrak{n}'}(\pi) \cong D_{\mathfrak{n}}(\pi)$，且 $\mathfrak{n} - \mathfrak{n}'$ 相对于$D_{\mathfrak{n}'}(\pi)$是极小的。

证明。 这可通过反复应用定理 9.3 得出。 □

第3. 部分 表示论方面

10. η-INVARIANT AND COMMUTATIVITY

我们首先讨论 η-不变量的表示论解释。随后说明如何将其与交换性联系起来。表示论方法提供了不同的技巧，这些技巧本身也具有独立的研究价值。

10.1. η_Δ **的表示论对应物**。令 $\Delta = [a, b]_\rho$。对于 $\pi \in$ 不可约表示集合$_\rho$，l et

$$\mathfrak{mx}(\pi, \Delta) = \sum_{a \le a' \le b} \varepsilon_{[a', b]_\rho}(\pi) \cdot [a', b]_\rho, \tag{10.7}$$

这意味着 $[a', b]_\rho$ 在 $\mathfrak{mx}(\pi, \Delta)$ 中的重数为 $\varepsilon_{[a',b]_\rho}(\pi)$。这是 η-不变量的多重线段对应物。

以下是关键性质：

引理 10.1. [Ch24, Proposition 11.1] 设 $l = l_{abs}(\mathfrak{mx}(\pi, \Delta))$。设 $\mathfrak{m} = \mathfrak{mx}(\pi, \Delta)$。那么 $D_{\mathfrak{m}}(\pi) \boxtimes \mathrm{St}(\mathfrak{m})$ 是 π_{N_l} 的一个直和项。

10.2. **交换性**。这里我们从引理 10.1 的角度说明如何看待命题 5.4 的交换性。我们首先利用引理 10.1 证明以下新引理：

引理 10.2. 设 $\pi \in$ 不可约表示集合$\rho(G_n)$。设 $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathrm{Seg}_\rho$ 对 π 可容许。假设 $\Delta_1 < \Delta_2$。假设 $(\Delta_1, \Delta_2, \pi)$ 满足不重叠性质。令 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{x}}(\pi, \Delta_2)$。则 $D_{\Delta_1} \circ D_{\mathfrak{m}}(\pi) \cong D_{\mathfrak{m}} \circ D_{\Delta_1}(\pi)$。

证明。设 $l = l_{abs}(\Delta_1)$，并设 $N = N_l$。我们有：

$$\pi \hookrightarrow D_{\mathfrak{m}}(\pi) \times \mathrm{St}(\mathfrak{m}).$$

Then

$$D_{\Delta_1}(\pi) \boxtimes \mathrm{St}(\Delta_1) \hookrightarrow \pi_N \hookrightarrow (D_{\mathfrak{m}}(\pi) \times \mathrm{St}(\mathfrak{m}))_N.$$

对几何引理中的各层进行分析，可得

$$(*) \quad D_{\Delta_1}(\pi) \boxtimes \mathrm{St}(\Delta_1) \hookrightarrow D_{\mathfrak{m}}(\pi)_{N_l} \dot{\times}^1 \mathrm{St}(\mathfrak{m}),$$

其中 $\dot{\times}^1$ 表示归纳到一个 $G_{n-l} \times G_l$-表示。由命题 4.10 和引理 10.1，$D_{\mathfrak{m}} \circ D_{\Delta_1}(\pi) \boxtimes \mathrm{St}(\mathfrak{m})$ 是 $D_{\Delta_1}(\pi)^{N_{l'}}$ 的一个直和项，其中 $l' = l_{abs}(\mathfrak{m})$。此外，$D_{\Delta_1}(\pi)^{N_{l'}}$ 中没有其他合成因子具有 $\tau \boxtimes \mathrm{St}(\mathfrak{m})$ 的形式。现在，利用 (*) 中映射的弗罗贝尼乌斯互反律，我们得到一个从 $D_{\Delta_1}(\pi)_{N_{l'}} \boxtimes \mathrm{St}(\Delta_1)$ 到 $(D_{\mathfrak{m}}(\pi)_{N_l} \boxtimes \mathrm{St}(\mathfrak{m}))^\phi$ 的非零映射，其中 ϕ 是一种扭曲，将一个 $G_{n-l-l'} \times G_l \times G_{l'}$-表示映为一个 $G_{n-l-l'} \times G_{l'} \times G_l$-表示。于是

$$D_{\mathfrak{m}} \circ D_{\Delta_1}(\pi) \boxtimes \mathrm{St}(\Delta_1) \hookrightarrow D_{\mathfrak{m}}(\pi)_{N_l}.$$

因此，我们有 $D_{\mathfrak{m}} \circ D_{\Delta_1}(\pi) \cong D_{\Delta_1} \circ D_{\mathfrak{m}}$({v4})。 □

引理 10.2 也可由命题 5.4 和引理 5.2 推出。另一方面，也可以利用引理 5.2 和引理 10.2 给出命题 5.4 的另一种证明。

11. 极小序列的猜想性解释

11.1. **两个线段的极小性**。

命题 11.1. 设 $\pi \in$ 不可约表示集合ρ。设 Δ_1, Δ_2 是一对相连线段，满足 $\Delta_1 < \Delta_2$。假设

$$D_{\Delta_1 \cup \Delta_2} \circ D_{\Delta_1 \cap \Delta_2}(\pi) \ncong D_{\Delta_2} \circ D_{\Delta_1}(\pi).$$

那么唯一的非零映射

$$D_{\Delta_2} \circ D_{\Delta_1}(\pi) \boxtimes (\mathrm{St}(\Delta_1) \times \mathrm{St}(\Delta_2)) \to \pi_N,$$

其中 $N = N_{l_{abs}(\Delta_1) + l_{abs}(\Delta_2)}$ 是单射。

证明。假设该映射不是单射。由于 $D_{\Delta_2} \circ D_{\Delta_1}(\pi) \boxtimes (\mathrm{St}(\Delta_1) \times \mathrm{St}(\Delta_2))$ 不可分解且长度为 2，该映射的像只能与 $D_{\Delta_2} \circ D_{\Delta_1}(\pi) \boxtimes (\mathrm{St}(\Delta_1 \cup \Delta_2) \times \mathrm{St}(\Delta_1 \cap \Delta_2))$ 同构。这意味着

$$D_{\Delta_2} \circ D_{\Delta_1}(\pi) \boxtimes (\mathrm{St}(\Delta_1 \cup \Delta_2) \times \mathrm{St}(\Delta_1 \cap \Delta_2))$$

是 π_N 的子模。然后，应用弗罗贝尼乌斯互反律，我们得到 π 是 $D_{\Delta_2} \circ D_{\Delta_1}(\pi) \times \mathrm{St}(\Delta_1 \cup \Delta_2 + \Delta_1 \cap \Delta_2)$ 的唯一子模（见 [LM16, Ch24]）。

回忆，$\mathrm{St}(\Delta_1 \cup \Delta_2 + \Delta_1 \cap \Delta_2) \cong \mathrm{St}(\Delta_1 \cup \Delta_2) \times \mathrm{St}(\Delta_1 \cap \Delta_2)$。令 τ 为 $D_{\Delta_2} \circ D_{\Delta_1}(\pi) \times \mathrm{St}(\Delta_1 \cup \Delta_2)$ 的唯一子模，使得

$$(*) \quad D_{\Delta_1 \cup \Delta_2}(\tau) \cong D_{\Delta_2} \circ D_{\Delta_1}(\pi).$$

因此，上述子模的唯一性也迫使

$$\pi \hookrightarrow \tau \times \mathrm{St}(\Delta_1 \cap \Delta_2)$$

因此 $D_{\Delta_1 \cap \Delta_2}(\pi) \cong \tau$。结合 (*)，我们得到：

$$D_{\Delta_1 \cup \Delta_2} \circ D_{\Delta_1 \cap \Delta_2}(\pi) \cong D_{\Delta_2} \circ D_{\Delta_1}(\pi),$$

这就产生了矛盾。 □

在附录（第14节）中，我们将证明命题 11.1 的逆命题。

11.2. **极小序列的表示论解释**。

定义11.2. 对于按升序标记的多重线段 $\mathfrak{h} = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_r\} \in \mathrm{Mult}^\rho$，定义

$$\widetilde{\lambda}(\mathfrak{h}) := \mathrm{St}(\Delta_1) \times \ldots \times \mathrm{St}(\Delta_r).$$

我们称其为余标准表示。有时 $\lambda(\mathfrak{h})$ 用于表示标准模，因此~我们在此更倾向于使用 λ 。

We 猜想命题 11.1 可以推广到一般的极小多重线段。

猜想 11.3。 设 $\pi \in$不可约表示集合$_\rho$。设 $\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}^\rho$ 是相对于 π 的极小对象。则唯一的非零映射

$$D_{\mathfrak{n}}(\pi) \boxtimes \widetilde{\lambda}(\mathfrak{n}) \to \pi_{N_l},$$

其中 $l = l_{abs}(\Delta_1) + \ldots + l_{abs}(\Delta_r)$ 是单射。

我们指出，猜想 11.3 中非零映射的唯一性源于伯恩斯坦–泽列文斯基导数的简单商的唯一性，这一点已在 [Ch25，命题 3.15]中证明。

12. 嵌入模型的一些应用

在本节中，我们将讨论由命题 11.1 中的极小性所产生的嵌入模型的应用。

引理 12.1。 设 Δ'、Δ''、$\Delta''' \in \mathrm{Seg}^\rho$。假设 $\Delta' < \Delta''$。设 $\tau = D_{\Delta''} \circ D_{\Delta'}(\pi)$ ，并设 $l' = l_{abs}(\Delta')$ $l'' = l_{abs}(\Delta'')$ $l''' = l_{abs}(\Delta''')$。设 $\kappa = D_{\Delta'''}(\pi)$。假设以下条件成立：

- dim 同态空间$_{G_{n-l'-l''} \times G_{l'+l''}}(\tau \boxtimes (\mathrm{St}(\Delta') \times \mathrm{St}(\Delta''))$, $(\kappa \times \mathrm{St}(\Delta'''))^{N_{l'+l''}}) \leq 1$;
- 第一条中的非零映射经由自然嵌入分解：

$$\kappa_{N_{l'+l''}} \dot{\times}^1 \mathrm{St}(\Delta''') \hookrightarrow (\kappa \times \mathrm{St}(\Delta'''))_{N_{l'+l''}}$$

来自几何引理中的底层。这里， $\dot{\times}^1$ 再次表示从一个 $G_{n-l'-l''-l'''} \times G_{l'''} \times G_{l'+l''}$-表示到一个 $G_{n-l'-l''} \times G_{l'+l''}$-表示的抛物诱导。

- $D_{\Delta'''} \circ D_{\Delta''} \circ D_{\Delta'}(\pi) \cong D_{\Delta''} \circ D_{\Delta'''} \circ D_{\Delta'}(\pi)$。

那么，若 $\{\Delta', \Delta''\}$ 相对于 π是极小的，则 $\{\Delta', \Delta''\}$ 相对于 $D_{\Delta'''}(\pi)$是极小的。

证明。 假设 $\{\Delta', \Delta''\}$ 对于 $D_{\Delta'''}(\pi)$ 不是极小的。令 $i = l' + l''$。令 $\lambda_1 = \mathrm{St}(\Delta' \cup \Delta'') \times \mathrm{St}(\Delta' \cap \Delta'')$。令 $i = l_{abs}(\Delta') + l_{abs}(\Delta'')$。于是，根据命题 11.1，

$$D_{\Delta''} \circ D_{\Delta'} \circ D_{\Delta'''}(\pi) \boxtimes \lambda_1 \hookrightarrow D_{\Delta'''}(\pi)_{N_i}.$$

另一方面，我们有如下嵌入：

$$\pi \hookrightarrow D_{\Delta'''}(\pi) \times \mathrm{St}(\Delta''').$$

令 $\omega = D_{\Delta''} \circ D_{\Delta'} \circ D_{\Delta'''}(\pi) \times \mathrm{St}(\Delta''')$。通过几何引理中的底层，我们有一个嵌入：

$$\omega \boxtimes \lambda_1 \hookrightarrow (D_{\Delta'''}(\pi) \times \mathrm{St}(\Delta'''))_{N_i}.$$

根据假设的第三点， $D_{\Delta''} \circ D_{\Delta'}(\pi)$ 是 ω 的子模。结合以上内容，我们得到：

$$D_{\Delta''} \circ D_{\Delta'}(\pi) \boxtimes \lambda_1 \hookrightarrow (D_{\Delta'''}(\pi) \times \mathrm{St}(\Delta'''))_{N_i}.$$

令 $\lambda_2 = \mathrm{St}(\Delta') \times \mathrm{St}(\Delta'')$。于是，由 $\{\Delta', \Delta''\}$ to π 的极小性以及命题 11.1，我们有

$$D_{\Delta''} \circ D_{\Delta'}(\pi) \boxtimes \lambda_2 \hookrightarrow \pi_{N_i}.$$

这会诱导出另一个嵌入：

$$D_{\Delta''} \circ D_{\Delta'}(\pi) \boxtimes \lambda_2 \hookrightarrow (D_{\Delta'''}(\pi) \times \mathrm{St}(\Delta'''))_{N_i}.$$

由于 λ_1 和 λ_2 没有同构子模，上述两个嵌入给出：

$$D_{\Delta''} \circ D_{\Delta'}(\pi) \boxtimes (\lambda_1 \oplus \lambda_2) \hookrightarrow (D_{\Delta'''}(\pi) \times \mathrm{St}(\Delta'''))_{N_i}.$$

然而，这会导出两个从 $D_{\Delta''} \circ D_{\Delta'}(\pi) \boxtimes \lambda_1$ 到 $(D_{\Delta'''}(\pi) \times \mathrm{St}(\Delta'''))_{N_i}$ 的非零映射，它们彼此并非标量倍数。这与第一条相矛盾。□

引理 12.1 为第 7 节中的一些三段情形提供了另一种检验极小性的策略，例如引理 7.2 证明中的第二条情形，以及引理 7.7 证明中的关联情形。检验第二条通常需要分析几何引理产生的各层，而检验第三条在其他一些情形下通常会用到由极小性（命题 5.4）得到的已知交换性。检验第一条则需要借助 [AGRS10] 和 [Ch23] 中的重数一性定理。

13. 嵌入模型 , 极小性与移除过程

13.1. 组合预备知识。 令 S_n 为置换整数 $\{1, \dots, n\}$ 的对称群。

定义 13.1。 令 $w \in S_n$。对于 $1 \le k \le n$ 和 $1 \le l \le n$，定义

$$w[k, l] := |\{a : 1 \le a \le k, w(a) \ge l\}|.$$

我们将 $\le_B$ 记为 S_n 上的布鲁哈特序，即 $w' \le_B w$ 当且仅当 w' 是 w 的某个约化表达式的子词。若 $w' \le_B w$ 且 $w' \ne w$，则记作 $w' <_B w$。

命题 13.2。 [BB05，定理 2.1。5] 令 w、$w' \in S_n$。则以下陈述等价：

(1) $w' \le_B w$；(2) $w'[k, l] \le w[k, l]$ 对任意 k, l 均成立。

现在我们讨论一种特殊情形。设 $S^{n-i\,i}$ 是 $S_n/(S_{n-i} \times S_i)$ 中各陪集的极小代表元集合。众所周知，若 $w \in S^{n-i\,i}$，则

若 $k, l \in \{1, \dots, n-i\}$ 且 $k < l$，则 $w(k) < w(l)$；

若 $k, l \in \{n-i+1, \dots, n\}$ 且 $k < l$，则 $w(k) < w(l)$。

由命题 13.2 可直接得到以下命题：

命题 13.3. 设 $w, w' \in S^{n-i\,i}$。以下陈述等价：

(1) $w' \le_B w$；(2) $w'(k) \le w(k)$ 对所有 $k = 1, \dots, n-i$；(3) $w'(k) \ge w(k)$ 对所有 $k = n-i+1, \dots, n$。

13.2. 嵌入模型与移除过程。 现在我们来说明移除过程在嵌入模型中所起的作用。我们先在命题 13.4 中给出一个基本情形，然后在第 13.6 节中猜想更一般的情形。

命题 13.4。 设 $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mult}_\rho$。设 $l = l_{abs}(\Delta)$。那么存在一个嵌入

$$\widetilde{\lambda}(\mathfrak{r}(\Delta, \mathfrak{h})) \boxtimes \mathrm{St}(\Delta) \hookrightarrow \widetilde{\lambda}(\mathfrak{h})_{N_l}.$$

证明。将 $\mathfrak{m}$ 中的线段写作 $\Delta_i = [a_i, b_i]_\rho (i = 1, \dots, r)$。我们将 $\mathfrak{m}$ 中的线段排列如下：

- $b_1 \le b_2 \le \dots \le b_r$；
- 若 $b_i = b_{i+1}$，则 $a_{i+1} \ge a_i$。

~现在我们将几何引理应用于 $\lambda(\mathfrak{m})_{N_l}$。首先将这些线段写为：

$$\Delta_1 = [a_1, b_1]_\rho, \ldots, \Delta_r = [a_r, b_r]_\rho.$$

和 $\Delta = [a, b]_\rho$。令

$$\Delta_k^{+,l_k} = [a_k + l_k, b_k]_\rho, \quad \Delta_k^{-,l_k} = [a_k, a_k + l_k - 1]_\rho$$

它们可能是空集。

于是，几何引理产生的层具有如下形式：

$$(*) \quad (\mathrm{St}(\Delta_1^{+,l_1}) \times \ldots \times \mathrm{St}(\Delta_r^{+,l_r})) \boxtimes (\mathrm{St}(\Delta_1^{-,l_1}) \times \ldots \times \mathrm{St}(\Delta_r^{-,l_r}),$$

其中 l_1、.....、l_r 遍历所有满足 $l_1 + \ldots + l_r = l/\mathrm{deg}(\rho)$ 的整数。令 $d = \mathrm{deg}(\rho)$。令 $t_k = l_{abs}(\Delta^{+,}{}_k{}^{l_k})$。现在我们描述与几何引理对应的 $(S_{t_1} \times \ldots \times S_{t_r}) \setminus S_n / (S_{n-i} \times S_i)$ 中的底层元素。该赋值具有如下形式：

$$\begin{aligned}
n - (j-1) &\mapsto t_1 + \ldots + t_{r-1} + t_r - (j-1) \quad \text{for } j = 1, \ldots, l_r d\ , \\
(n - l_r d) - (j-1) &\mapsto t_1 + \ldots + t_{r-1} - (j-1) \quad \text{for } j = 1, \ldots, l_{r-1} d, \\
&\vdots \\
(n - l_2 d - \ldots - l_r d) - (j-1) &\mapsto t_1 - (j-1) \quad \text{for } j = 1, \ldots, l_1 d\ .
\end{aligned}$$

利用命题 13.2 之前陈述的 $S_n/(S_{n-i} \times S_i)$ 中元素的性质，便可唯一确定 $x < n - l_1 d - l_2 d - \ldots - l_r d$ 的赋值。

现在我们考虑几何引理中的一个特定层。线段按照（Δ, $\mathfrak{h}$）的移除序列顺序选取：

$$\Delta_{p_1}, \ldots, \Delta_{p_e}. \tag{13.8}$$

对于这些指标，如果对应于 Δ_{p_i} 的线段不止一条，我们总是选择指标较小的那条 p_i。利用嵌套性质以及我们对 $\mathfrak{m}$ 中线段的排列，可得

$$p_1 > p_2 > \ldots > p_e.$$

~如果对于某个 $i = 1, \ldots..., e$，有 $k \neq p_i$，那么我们令 $l_k = 0$。如果对于某个 $i = 1, \ldots..., e-1$，有 $k = p_i$，那么我们令~ $l_k = a_{p_{i-1}} - a_{p_i}$。如果 $k = p_e$，那么我们令 $l_k = b - a_{p_e}$。

现在我们研究形如 **(*)** 的几何引理的层，使得作为集合，

$$\Delta_1^{+,l_1} \cup \ldots \cup \Delta_r^{+,l_r} = \Delta.$$

对于这样的层，如果满足以下条件，我们称其处于标准顺序：

$$a(\Delta_1^{+,l_x}) \geq a(\Delta_r^{+,l_y})$$

对于任意满足 l_x, $l_y \neq 0$ 的 $x < y$。

现在我们来分析以下两种情况的一些性质。

(1) 情况 1: $\Delta^{+,}{}_1{}^{l_1}, \ldots, \Delta^{+,}{}_r{}^{l_r}$ 按标准顺序排列。令 $q_1 < \ldots < q_k$ 为所有满足 $l_{q_x} \neq 0$ 的指标。我们先证明以下断言：

断言 *1*: 序列 $\Delta_{q_1}, \ldots, \Delta_{q_k}$ 满足嵌套性质，即

$$\Delta_{q_1} \supset \ldots \supset \Delta_{q_k}.$$

断言 *1* 的证明：假设该序列不满足嵌套性质。由于嵌套性质不具有传递性，我们有一对 Δ_{q_x}, $\Delta_{q_{x+1}}$ 不满足嵌套性质。根据 $\mathfrak{m}$ 中线段的排列，我们必须有 $b_{q_x} < b_{q_{x+1}}$，因此，对嵌套性质的违反意味着

$$a_{q_x} < a_{q_{x+1}}.$$

然而，这与该序列处于标准顺序相矛盾。

作为断言 1 的推论，我们还可得到 $l_{q_i} = a_{q_{i-1}} - a_{q_i}$。

令 w^* 为与 (13.8) 相关联的 $(S_{t_1} \times \ldots \times S_{t_r}) \setminus S_n/(S_{n-i} \times S_i)$ 中的固定元素，并令 w 为 $(S_{t_1} \times \ldots \times S_{t_r}) \setminus S_n/(S_{n-i} \times S_i)$ 中与标准顺序中的任意层相关联的元素（其含义如上文定义），且满足 $w \neq w^*$。

断言 *2*： $w \not\leq_B w^*$。

断言 *2* 的证明： 策略是应用命题 13.3。假设结论不成立，并导出矛盾。令 i^* 为满足 $p_{i^*} = q_{i^*}$ 的最大整数。若不存在这样的整数，即 $p_1 \neq q_1$，则令 $i^* = 0$。

如果 $i_* = r$，那么 q_{i^*+1} 也未定义。否则，根据断言 1 中所示的嵌套性质，我们将得到与 $(\Delta, \mathfrak{h})$ 的移除序列中线段的选择相矛盾的结论。这意味着 $w^* = w$，从而产生矛盾。

因此 $i^* < r$。现在我们比较 $\Delta_{p_{i^*+1}}$ 和 $\Delta_{q_{i^*+1}}$。根据定义 3.1(2) 和断言 1，我们必有

$$a_{p_{i^*+1}} \geq a_{q_{i^*+1}},$$

或者 q_{i^*+1} 未定义。

我们进一步分为两个子情形。

- $a_{p_{i^*+1}} = a_{q_{i^*+1}}$。但现在，根据断言 1 中的嵌套性质，我们必有 $b_{q_{i^*+1}} \geq b_{p^*+1}$。接着，根据我们的安排和选择，$q_{i^*+1} > p_{i^*+1}$。如上文所述，$\widetilde{}$，$\widetilde{}$，$l_{q_1} = l_{p_1}$，$\ldots$，$l_{q_{i^*}} = l_{p_{i^*}}$，容易验证
$$w(n - l_1 d - \ldots - l_{i^*} d - 1) > w^*(n - l_1 d - \ldots - l_{i^*} d - 1)$$
因此，根据命题 13.3，$w \not\leq_B w^*$。
- $a_{p_{i^*+1}} > a_{q_{i^*+1}}$ 或者 q_{i^*+1} 未定义。在这种情况下，$l_{q_{i^*}} > \widetilde{l_{p_{i^*}}}$。因此我们也有：
$$w(n - l_1 d - \ldots - l_{i^*} d - 1) > w^*(n - l_1 d - \ldots - l_{i^*} d - 1)$$
因此根据命题 13.3，$w \not\leq_B w^*$ 再次得到。

(2) 情形 2： $\Delta^{+,\ l_1}_{1}$，……，$\Delta^{+,\ l_r}_{r}$不按标准顺序排列。

Let $\omega_{l_1,\ldots,l_r} = \mathrm{St}(\Delta_1^{-,l_1}) \times \ldots \times \mathrm{St}(\Delta_r^{-,l_r})$ and similarly let $\omega_{\widetilde{l_1},\ldots,\widetilde{l_r}}$.

$\widetilde{}$ $\widetilde{}$ $\widetilde{}$断言 *3*：设 $l = l_1 + \ldots + l_r$。对于所有 j,
$$\mathrm{Ext}^j_{G_{n-\widetilde{l}} \times G_{\widetilde{l}}}(\omega_{\widetilde{l_1},\ldots,\widetilde{l_r}} \boxtimes \mathrm{St}(\Delta), \omega_{l_1,\ldots,l_r} \boxtimes \mathrm{St}(\Delta_1^{+,l_1}) \times \ldots \times \mathrm{St}(\Delta_r^{+,l_r})) = 0$$

断言 *3* 的证明： 我们在第二个因子上应用弗罗贝尼乌斯互反律。于是，St(Δ) 的 Jacquet 模具有如下形式
$$\mathrm{St}(\Delta'_1) \boxtimes \ldots \boxtimes \mathrm{St}(\Delta'_r)$$
其中 Δ'_1，……，Δ'_r 按标准顺序排列。由于 $\Delta^{+,\ l_1}_{1}$，……，$\Delta^{+,\ l_r}_{r}$不按标准顺序排列，通过比较尖点支撑可得
$$\mathrm{Ext}^j_{G_{\widetilde{l}}}(\mathrm{St}(\Delta), \mathrm{St}(\Delta'_1) \boxtimes \ldots \boxtimes \mathrm{St}(\Delta'_r)) = 0$$
对所有 j均成立。于是 Künneth 公式给出了该断言。

我们现在回到证明。元素 $w^* \in (S_{t_1} \times \ldots \times S_{t_r}) \setminus S_n/(S_{n-i} \times S_i)$ 定义如上。对于每个 $w \in (S_{t_1} \times \ldots \times S_{t_r}) \setminus S_n/(S_{n-i} \times S_i)$，令 $\kappa(w)$ 为与之对应且取$\widetilde{}$形式 (*) 的层。注意，$\omega_{\widetilde{l_1},\ldots,\widetilde{l_r}} \cong \lambda(\mathfrak{r}(\Delta, \mathfrak{h}))$.

~令 $\kappa_{\leq w^*}$（分别地，$\kappa_{<w^*}$）为 $\lambda(\mathfrak{h})^{N_l}$ 的子模，它仅由与满足 $w' \leq_B w^*$（分别地，$w' <_B w^*$）的$w' \in (S_{t_1} \times \ldots \times S_{t_r}) \setminus S_n/(S_{n-i} \times S_i)$ 相关联的层组成。我们有如下短正合序列：

$$0 \to \kappa_{<w^*} \to \kappa_{\leq w^*} \to \kappa(w^*) \to 0.$$

另一方面，存在一个嵌入

$$\omega_{\widetilde{l}_1,\ldots,\widetilde{l}_r} \boxtimes \mathrm{St}(\Delta) \hookrightarrow \kappa(w^*)$$

因此，我们有一个子模 κ'，它具有一个短正合序列：

$$0 \to \kappa_{<w^*} \to \kappa' \to \omega_{\widetilde{l}_1,\ldots,\widetilde{l}_r} \boxtimes \mathrm{St}(\Delta) \to 0.$$

然而，对于 $w' < w^*$，我们可以得出结论：

$$\mathrm{Ext}^j_{G_{n-l}\times G_l}((\mathfrak{r}(\Delta,\mathfrak{h})) \boxtimes \mathrm{St}(\Delta), \kappa(w')) = 0$$

对所有 j 均成立。如果 $\kappa(w')$ 的 G_l 部分与 $\mathrm{St}(\Delta)$ 的尖点支撑不同，则由标准的尖点支撑论证可得此结论；否则则由断言 2 和断言 3 得出。换句话说，我们有：

$$\kappa' \cong \kappa_{<w^*} \oplus \widetilde{\lambda}(\mathfrak{r}(\Delta,\mathfrak{h})) \boxtimes \mathrm{St}(\Delta).$$

由此得到所需的嵌入

$$\widetilde{\lambda}(\mathfrak{r}(\Delta,\mathfrak{h})) \boxtimes \mathrm{St}(\Delta) \hookrightarrow \kappa' \hookrightarrow \kappa \hookrightarrow \lambda(\widetilde{\mathfrak{h}})_{N_l}.$$

□

13.3. **猜想**。对于 $n_1 + \ldots + n_s = n$，定义 $P_{n_1,\ldots,n_s}$ 为 G_n 的抛物子群，由矩阵 $\mathrm{diag}(g_1, \ldots, g_s)$（每个 $g_i \in G_{n_i}$）及上三角矩阵生成。令 $N_{n_1,\ldots,n_s}$ 为 $P_{n_1,\ldots,n_s}$ 的幂零根。

最后，我们为嵌入模型提出一些猜想；这些猜想可能有助于从表示论视角解释本文中的某些结果：

猜想13.5。设 $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mult}_\rho$。命题 *13.4* 中的嵌入是唯一的。

我们指出，猜想13.5并非 [Ch23] 中标准表示的重数一性质定理的直接推论。

猜想 13.6。设 $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mult}_\rho$。设 $\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho$ 是相对于 $\mathfrak{h}$ 极小的。设 $l = l_{abs}(\mathfrak{n})$。则存在唯一的嵌入：

$$\widetilde{\lambda}(\mathfrak{r}(\mathfrak{n},\mathfrak{h})) \boxtimes \widetilde{\lambda}(\mathfrak{n}) \hookrightarrow \widetilde{\lambda}(\mathfrak{h})_{N_l}.$$

命题 13.4 是猜想 13.6 的一个特例。

猜想 13.7. 设 $\pi \in$不可约表示集合$_\rho$。设 $\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho$ 对 π 是极小的。设 $\mathfrak{h} = \mathfrak{hd}(\pi)$。设 $l_1 = l_{abs}(\mathfrak{n})$，并设 $l_2 = l_{abs}(\mathfrak{hd}(\pi)) - l_{abs}(\mathfrak{n})$。假设猜想 *11.3* 和猜想 *13.6* 成立。我们有如下映射图：

$$\begin{array}{ccccc} D_{\mathfrak{h}}(\pi) \boxtimes \widetilde{\lambda}(\mathfrak{r}(\mathfrak{n},\pi)) \boxtimes \widetilde{\lambda}(\mathfrak{n}) & \xrightarrow{\iota_1} & D_{\mathfrak{h}}(\pi) \boxtimes \widetilde{\lambda}(\mathfrak{h})_{N_{l_2,l_1}} & \xrightarrow{\quad \iota_2 \quad} & \pi_{N_{n-l_1-l_2,l_2,l_1}} \\ & & & & \uparrow{\scriptstyle \iota_3} \\ & & & & D_{\mathfrak{n}}(\pi)_{N_{n-l_1-l_2,l_2}} \boxtimes \widetilde{\lambda}(\mathfrak{n}) \end{array},$$

其中

- ι_1 是由猜想 *13.6* 中的映射导出的映射；~
- ι_2 是由唯一嵌入诱导的映射；$D_{\mathfrak{h}}(\pi) \boxtimes \lambda(\mathfrak{h})$ 见猜想 *11.3*~
- ι_3 是由唯一嵌入 $D_{\mathfrak{n}}(\pi) \boxtimes \lambda(\mathfrak{n}) \hookrightarrow \pi_{n-l_1,l_1}$ 在猜想 *11.3* 中诱导的映射。

于是，$\iota_2 \circ \iota_1$ 可经由 ι_3 分解。

第4. 部分：附录

14. 附录 A：非同构导数

我们在本附录中证明命题 11.1 的逆命题。对于 G_k 的梯形表示或一般表示 σ，令 $I_\sigma(\pi)$ 为 $\pi \times \sigma$ 的唯一子模（参见 [LM16], , 另见[Ch24, Ch25]）。关于将梯形表示推广到其他一些经典群的一般化，请参见 [At24] 。

14.1. 非同构积分。 对于两个线段 Δ_1, Δ_2 属于 Seg_ρ,

(1) 假设 $\Delta_1 < \Delta_2$。定义 $\mathrm{St}(\{\Delta_1, \Delta_2\})$ 为 $\mathrm{St}(\Delta_2) \times \mathrm{St}(\Delta_1)$ 的唯一不可约商。(2) 假设 Δ_1 和 Δ_2 不相连。定义 $\mathrm{St}(\{\Delta_1, \Delta_2\})$ 为不可约模 $\mathrm{St}(\Delta_1) \times \mathrm{St}(\Delta_2)$。

命题 14.1。 设 $\pi \in$ 不可约表示集合$_\rho$。设 Δ_1, Δ_2 为两个相连线段。设 $\Delta_1' = \Delta_1 \cup \Delta_2$ 且令 $\Delta_2' = \Delta_1 \cap \Delta_2$ （可能为空集）。令 $\sigma = \mathrm{St}(\{\Delta_1, \Delta_2\})$ 并令 $\sigma' = \mathrm{St}(\Delta_1' + \Delta_2')$。则$I_\sigma(\pi) \not\cong I_{\sigma'}(\pi)$。

证明。 我们将使用不变量 $\mathfrak{m}_{\mathfrak{x}}(\cdot, \Delta_1)$ 来区分这两个表示。记 $\Delta_1 = [a_1, b_1]_\rho$ and $\Delta_2 = [a_2, b_2]_\rho$。如有必要，交换标签后，我们可以且将假设 $a_1 < a_2$。我们将对和 $l_{abs}(\Delta_1) + l_{abs}(\Delta_2)$ 使用归纳法进行证明。当和为 2 时，论证与下文的情况类似，故省略细节。

情况 1： $a_1 \neq a_2 - 1$。令 $k = \varepsilon_{[a_1]_\rho}(\sigma)$。我们有 $\varepsilon_{[a_1]_\rho}(I_\sigma(\pi)) \varepsilon_{[a_2]_\rho}(I_{\sigma'}(\pi)) = \varepsilon_{[a_1]_\rho}(\pi) + 1$。令 $\kappa = \mathrm{St}(\{{}^-\Delta_1, \Delta_2\})$，并令 $\kappa' = \mathrm{St}(\{{}^-\Delta_1', \Delta_2'\}$。此外，

$$D^{k+1}_{[a_1]_\rho}(I_\sigma(\pi)) = I_\kappa(D^k_{[a_1]_\rho}(\pi)), \quad D^{k+1}_{[a_1]_\rho}(I_{\sigma'}(\pi)) = I_{\kappa'}(D^k_{[a_1]_\rho}(\pi)).$$

于是，由归纳法可得 $I_\kappa(D^k_{[a_1]_\rho}(\pi)) \not\cong I_{\kappa'}(D^k_{[a_1]_\rho}(\pi))$，如所期望。

情形 2： $a_1 = a_2 - 1$。在这种情况下，令 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{x}}(\pi, \Delta_1)$。于是

$$\pi \hookrightarrow D_{\mathfrak{m}}(\pi) \times \mathrm{St}(\mathfrak{m})$$

现在令 $\widetilde{\sigma} = D_{\Delta_2'}(\sigma)$。我们有

$$\begin{aligned} I_\sigma(\pi) &\hookrightarrow \pi \times \sigma \\ &\hookrightarrow D_{\mathfrak{m}}(\pi) \times \mathrm{St}(\mathfrak{m}) \times \sigma \\ &\cong D_{\mathfrak{m}}(\pi) \times \sigma \times \mathrm{St}(\mathfrak{m}) \\ &\hookrightarrow D_{\mathfrak{m}}(\pi) \times \widetilde{\sigma} \times \mathrm{St}(\Delta_2' + \mathfrak{m}), \end{aligned}$$

其中第三行的同构由任意 Δ_1-饱和线段 Δ' 的 $\mathrm{St}(\Delta') \times \sigma \cong \sigma \times \mathrm{St}(\Delta')$ 得出（例如参见 [MW86, Lemme II 10.1]）。

由于 $\mathfrak{m}_{\mathfrak{x}}(D_{\mathfrak{m}}(\pi), \Delta_1) = \emptyset$ 且 $\mathfrak{m}_{\mathfrak{x}}(\widetilde{\sigma}, \Delta_1) = \emptyset$，我们有

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{x}}(I_\sigma(\pi), \Delta_1) = \mathfrak{m} + \Delta_2'$$

最后一个等式是应用几何引理得到的（详情参见 [Ch24, 命题 11.1]的证明）。

类似地，令 $\widetilde{\sigma}' = D_{\Delta_1} \circ D_{\Delta_2'}(\sigma')$。我们还有：

$$\begin{aligned} I_{\sigma'}(\pi) &\hookrightarrow \pi \times \sigma' \\ &\hookrightarrow D_{\mathfrak{m}}(\pi) \times \mathrm{St}(\mathfrak{m}) \times \sigma' \\ &\cong D_{\mathfrak{m}}(\pi) \times \sigma' \times \mathrm{St}(\mathfrak{m}) \\ &\hookrightarrow D_{\mathfrak{m}}(\pi) \times \widetilde{\sigma}' \times \mathrm{St}(\Delta_1) \times \mathrm{St}(\Delta_2') \times \mathrm{St}(\mathfrak{m}) \\ &\hookrightarrow D_{\mathfrak{m}}(\pi) \times \widetilde{\sigma}' \times \mathrm{St}(\mathfrak{m} + \Delta_1 + \Delta_2') \end{aligned}$$

再次，$\mathfrak{mr}(D_{\mathfrak{m}}(\pi)\ \Delta_1) = \emptyset$ 和 $\mathfrak{mr}(\widetilde{\sigma}',\ \Delta_1) = \emptyset$。因此，

$$\mathfrak{mr}(I_{\sigma'}(\pi), \Delta_1) = \mathfrak{m} + \Delta_1 + \Delta_2'.$$

因此，比较不变量 $\mathfrak{mr}(.\ \ \Delta_1)$，我们有 $I_\sigma(\pi) \ncong I_{\sigma'}(\pi)$。 □

研究这样一个问题很有趣：如果将本质平方可积表示替换为其他有趣的表示，例如 Speh 表示和梯形表示，是否可以得到命题 14.1 的类似结果。关于从 Speh 表示和梯形表示抛物诱导得到的合成因子，[Ta15] 和 [Gu21], 中已有研究，因此有可能通过上述方法，从这些表示出发发展出一种平行理论。

14.2. **推论**。我们类似地为梯级表示的导数定义这些概念（另见例如 [Ch22+c]）。如果存在 $\omega \in$ 不可约表示集合(G_{n-k})，使得 $\omega \boxtimes \sigma \hookrightarrow \pi_{N_k}$ 对于 σ（其在命题 14.1 中定义），则将这样的 ω 记为 $D_\sigma(\pi)$。否则，令 $D_\sigma(\pi) = 0$。

推论 14.2. 我们采用命题 *14.1* 中的记号。则 $D_\sigma(\pi) \ncong D_{\sigma'}(\pi)$，前提是两项均非零。

证明. 设 $\pi' = D_\sigma(\pi)$。则 $I_\sigma(\pi') \ncong I_{\sigma'}(\pi')$，因此 $\pi \ncong I_{\sigma'} \circ D_\sigma(\pi)$。在两边应用 $D_{\sigma'}$，即可得到该推论。□

推论 14.3. 设 $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathrm{Seg}_\rho$，满足 $\Delta_1 < \Delta_2$。设 $\pi \in$ 不可约表示集合$_\rho$。假设 $D_{\Delta_2} \circ D_{\Delta_1}(\pi) \neq 0$。若非零映射

$$D_{\Delta_2} \circ D_{\Delta_1}(\pi) \boxtimes (\mathrm{St}(\Delta_1) \times \mathrm{St}(\Delta_2)) \to \pi_{N_{l_a(\Delta_1)+l_a(\Delta_2)}}$$

是单射，则 $\{\Delta_1, \Delta_2\}$ 相对于 π是极小的。

证明. 若该映射是单射，则 $D_{\Delta_2} \circ D_{\Delta_1}(\pi) \boxtimes \mathrm{St}(\{\Delta_1 + \Delta_2\})$ 是 $\pi_{N_{l_a(\Delta_1)+l_a(\Delta_2)}}$ 的子模。这意味着

$$D_{\Delta_2} \circ D_{\Delta_1}(\pi) \cong D_{\mathrm{St}(\Delta_1+\Delta_2)}(\pi).$$

于是该推论由推论 14.2 得出。 □

15. Appendix B: Applications

15.1. **在 Δ-约化条件下的极小性**。

推论 15.1. 设 $\pi \in$不可约表示集合$_\rho$。设 $\mathfrak{n} \in \mathrm{Mult}_\rho$ 相对于 π是极小的。设 Δ 为一条线段。假设对于任意满足 $b(\Delta') \neq b(\Delta)$的线段 $\Delta' \in \mathfrak{n}$，都有$b(\Delta') < b(\Delta)$。如果 $\eta_\Delta(D_{\mathfrak{n}}(\pi)) = 0$，那么 $\mathfrak{mr}(\pi, \Delta) \subseteq \mathfrak{n}$。

证明。设 $\Delta = [a, b]_\rho$。设 $\mathfrak{p} = \mathfrak{mr}(\pi,\ \Delta)$。设 $\mathfrak{p}'$为 $\mathfrak{n}$中满足 $b(\Delta') = b$且 $\Delta' \subseteq \Delta$的所有线段 Δ'。

我们首先证明以下断言：

断言： $|\mathfrak{p}'| \geq |\mathfrak{p}|$。

断言的证明： 我们还令 $\mathfrak{p}''$ 为 $\mathfrak{n}$ 中满足 $b(\Delta') = b$ 且 $\Delta \subsetneq \Delta'$ 的所有线段。注意

$$\eta_\Delta(D_{\mathfrak{p}''} \circ D_{\mathfrak{n}-\mathfrak{p}''}(\pi)) = \eta_\Delta(D_{\mathfrak{n}-\mathfrak{p}''}(\pi)).$$

因此，我们还有 $\eta_\Delta(D_{\mathfrak{n}-\mathfrak{p}'}(\pi))=0$。但由计算 $b(\Delta)$ 处的重数可知，必有 $|\mathfrak{p}'|\geq|\mathfrak{p}|$。这就证明了该断言。

如果 $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}'$，那么断言表明存在 $a\leq c\leq b$，使得 $\mathfrak{p}'$ 中线段$[c,b]_\rho$ 的数量严格大于 $\varepsilon_{[c,b]_\rho}(\pi)$。令 c^* 为这样的最小整数。现在令 $\widetilde{\mathfrak{n}}$ 为 $\mathfrak{n}$的子多重线段，其中线段 Δ'满足 $a(\Delta')<a$。根据后续性质，$\widetilde{\mathfrak{n}}+[c^*,b]_\rho$和 $\widetilde{\mathfrak{n}}+\mathfrak{p}'$ 对于 π仍然是极小的。现在，根据命题 4.10以及 $\widetilde{\mathfrak{n}}+[c^*,b]_\rho$的极小性，$\varepsilon_{[c^*,b]_\rho}(\mathfrak{r}(\widetilde{\mathfrak{n}},\ \pi))=\varepsilon_{[c^*,b]_\rho}(\pi)$。但是，根据 $\widetilde{\mathfrak{n}}+\mathfrak{p}'$的可容许性，

$$\varepsilon_{[c^*,b]_\rho}(\mathfrak{r}(\widetilde{\mathfrak{n}},\pi))=\text{number of segments }[c^*,b]_\rho\text{ in }\mathfrak{p}'>\varepsilon_{[c^*,b]_\rho}(\pi).$$

这就产生了矛盾。因此，我们必有 $\mathfrak{p}'=\mathfrak{p}$。 □

15.2. **广义约化分解**。约化分解的概念在 [AL25 的第 7] 节中针对线段 Δ 引入。

现在我们描述多重线段的约化分解的一种推广。设 $\pi\in$ 不可约表示集合$\rho(G_n)$。设 $\mathfrak{n}$ 对 π 极小。设 b 是所有属于 $\mathfrak{n}$ 的线段 Δ 中最大的 $b(\Delta)$。接着，我们选取最长的线段 $\Delta_1\in\mathfrak{n}$，使得 $b(\Delta_1)=b$。令 $\mathfrak{p}_1=\mathfrak{m}_{\mathfrak{x}}(D_{\mathfrak{n}}(\pi)\ \Delta)$。现在设 $\mathfrak{m}_1'=\mathfrak{n}+\mathfrak{p}_1$。一般而言，$\mathfrak{n}_1$ 对 π 并非极小，因此我们在 $\mathcal{S}(\pi,D_{\mathfrak{m}_1}(\pi))$ 中找出极小元素，记为 $\mathfrak{m}_1$。于是，根据推论 15.1，$\mathfrak{m}_1=\mathfrak{q}_1+\mathfrak{n}_2$，其中某个多重线段为 $\mathfrak{n}_2$，且 $\mathfrak{q}_1=\mathfrak{m}_{\mathfrak{x}}(\pi,\Delta)$。因此，由交换性可知，现在有 $D_{\mathfrak{m}_1}(\pi)\cong D_{\mathfrak{n}_2}\circ D_{\mathfrak{q}_1}(\pi)$。于是，可以将 $\pi\hookrightarrow D_{\mathfrak{q}_1}(\pi)\times\mathrm{St}(\mathfrak{q}_1)$ 视为约化的一步。对 $\mathfrak{n}_2$ 重复相同的过程，然后继续重复，得到三元组序列 $(\mathfrak{p}_1,\mathfrak{q}_1,\mathfrak{n}_1)\ldots,(\mathfrak{p}_r,\mathfrak{q}_r,\mathfrak{n}_r)$，直至过程终止。于是，我们得到一种关于 $\mathfrak{n}$ 的 π 的约化分解，如下所示：

$$\pi\hookrightarrow(D_{\mathfrak{q}_r}\circ\cdots\circ D_{\mathfrak{q}_1})(\pi)\times\mathrm{St}(\mathfrak{q}_r)\times\ldots\times\mathrm{St}(\mathfrak{q}_1).$$

设 $l=l_{abs}(\mathfrak{n})$。可以预期存在一个自然映射：

$$D_{\mathfrak{n}}(\pi)\boxtimes\mathrm{St}(\mathfrak{n})\to(D_{\mathfrak{q}_r}\circ\cdots\circ D_{\mathfrak{q}_1})(\pi)\dot{\times}^1(\mathrm{St}(\mathfrak{q}_r)\times\ldots\times\mathrm{St}(\mathfrak{q}_1))_{N_l},$$

其中 $\dot{\times}^1$ 是从一个 $G_{n_1}\times G_{n_2}\times G_l$表示到一个 $G_{n_1+n_2}\times G_l$ 表示的抛物诱导。这里 $n_1=n-l_{abs}(\mathfrak{q}_1)-\ldots-l_{abs}(\mathfrak{q}_r)$，且 $n_2=l_{abs}(\mathfrak{p}_1)+\ldots+l_{abs}(\mathfrak{p}_r)$。

15.3.**伯恩斯坦–泽列文斯基导数的简单商的归纳构造**。设 $\pi\in\mathrm{Irr}_\rho$。设 $\Delta\in\mathrm{Seg}_\rho$，且设 $\mathfrak{n}\in\mathrm{Mult}_\rho$。设 $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}_{\mathfrak{x}}(\pi,\Delta)$。注意，若$\eta_\Delta(D_{\mathfrak{n}}\circ D_{\mathfrak{p}}(\pi))=0$，则 $D_{\mathfrak{n}}\circ D_{\mathfrak{p}}(\pi)$ 是 $\mathrm{St}(\mathfrak{p})\times D_{\mathfrak{p}}(\pi)$ 的第 $l_{abs}(\mathfrak{n}+\mathfrak{p})$ 阶伯恩斯坦–泽列文斯基导数的一个简单商。于是可以问，$D_{\mathfrak{n}}\circ D_{\mathfrak{p}}(\pi)$ 是否也是 π 的第 $l_{abs}(\mathfrak{n}+\mathfrak{p})$ 阶伯恩斯坦–泽列文斯基导数的一个简单商。在一个特殊情形下，利用交换性，我们有以下判据：

命题 15.2. 设 $\pi\in$ 不可约表示集合$_\rho$。设 $\Delta\in$ 线段$_\rho$，且设 $\mathfrak{n}\in$ 多重线段$_\rho$。设 $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}_{\mathfrak{x}}(\pi,\Delta)$。

(1) 假设 $\mathfrak{n}$ 是 $D_{\mathfrak{p}}(\pi)$ 的极小值，且 $\eta_\Delta(D_{\mathfrak{n}}\circ D_{\mathfrak{p}}(\pi))=0$。进一步假设，对于任意线段 $\Delta'\in\mathfrak{n}$，$b(\Delta')<b(\Delta)$。若对于某个多重线段 $\mathfrak{m}\in$，$D_{\mathfrak{n}}\circ D_{\mathfrak{p}}(\pi)\cong D_{\mathfrak{m}}(\pi)$，则 $\mathfrak{n}+\mathfrak{p}$ 是 π 的极小值。*(2)* 假设 $\mathfrak{m}$ 是 π 的极小值，且 $\eta_\Delta(D_{\mathfrak{m}}(\pi))=0$。进一步假设，对于任意线段 $\Delta'\in\mathfrak{m}$，$b(\Delta')\leq b(\Delta)$。则 $D_{\mathfrak{m}}(\pi)\cong D_{\mathfrak{n}}\circ D_{\mathfrak{p}}(\pi)$，并且对于某个多重线段$\mathfrak{n}$，$\mathfrak{m}=\mathfrak{n}+\mathfrak{p}$ 是 $D_{\mathfrak{p}}(\pi)$ 的极小值。

证明。我们首先考虑 (1)。假设对于某个 $\mathfrak{m}\in\mathrm{Mult}_\rho$，$D_{\mathfrak{n}}\circ D_{\mathfrak{p}}(\pi)\cong D_{\mathfrak{m}}(\pi)$。不失一般性，我们可以假设 $\mathfrak{m}$ 相对于 π 是极小的。于是，由推论 15.1，$\mathfrak{m}=\mathfrak{p}+\mathfrak{n}'$。根据后继性质和交换性质（定理 9.4），$\mathfrak{n}'$ 相对于 $D_{\mathfrak{p}}(\pi)$ 也是极小的，并且$D_{\mathfrak{n}'}\circ D_{\mathfrak{p}}(\pi)\cong D_{\mathfrak{m}}(\pi)$。由定理 1.2，我们便有 $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}'$，这就推出了 (1)。

现在考虑 (2)。由推论 15.1，$\mathfrak{p}\subset\mathfrak{m}$ 因此，对于某个多重线段 $\mathfrak{n}$，有 $\mathfrak{m}=\mathfrak{p}+\mathfrak{n}$。根据后续性质和交换性性质（定理 9.4），我们还有，$\mathfrak{n}$ 相对于 $D_{\mathfrak{p}}$（π）是极小的。□

参考文献

[AL25] A. Aizenbud 和 E. Lapid，《Lusztig 幂零簇不可约分支上的二元运算 I：定义与性质》，《纯粹与应用数学季刊》（2025），第 21 卷（2025），第 1 期，第 5–41 页。[AGRS10] A. Aizenbud、D. Gourevitch、S. Rallis 和 G. Schiffmann，重数一定理，《数学年鉴》（第 2 辑）172（2010），第 2 期，1407–1434。[At24] H. Atobe，《经典群的梯级表示类比》，《国际数学研究通知》，2024 年第 9 期，2024 年 5 月，第 7891–7913 页。[Ba08] A. Badulescu，《整体 Jacquet-Langlands 对应、重数一与自守表示分类》，Invent. math. 172，383–438（2008）。https://doi.org/10.1007/s00222-007-0104-8。[BZ77] I. N. Bernstein 和 A. V. Zelevinsky，《约化 p 进群的诱导表示 I》，高等师范学校科学年鉴 10（1977），441–472。[BB05] A. Bjorner、F. Brenti，《Coxeter 群的组合学》，《数学研究生教材》（2005）。[Ch21] K.Y. Chan，《(一般线性群$_{n+1}(F)$，一般线性群$_n(F)$) 的同调分支定律：投射性与不可分解性》，Invent. Math.（2021）。https://doi.org/10.1007/s00222-021-01033-5。[Ch23] K.Y. Chan，《(一般线性群$_{n+1}$，一般线性群$_n$) 标准表示的 Ext 重数定理》，《数学杂志》303，45（2023）。https://doi.org/10.1007/s00209-022-03198-y。[Ch24] K.Y. Chan，《非阿基米德局部域上一般线性群内形式的乘积函子》，《变换群》（2024）。[Ch22+b] K.Y. Chan，《 p进（一般线性群$_{n+1}$，一般线性群$_n$）的商分支定律 I：广义 Gan-Gross-Prasad 相关对》，arXiv:2212.05919（2022）。[Ch22+c] K.Y. Chan，《p 进一般线性群广义 Gan-Gross-Prasad 相关对的对偶》，arXiv:2210.17249（2022）。[Ch25] K.Y. Chan，《伯恩斯坦–泽列文斯基导数及最高导数多重线段简单商的构造 I：化归为组合学》，《美国数学学会汇刊》（B 辑）（2025）。[Ch25b] K.Y. Chan，《伯恩斯坦–泽列文斯基导数及最高导数多重线段简单商的构造 II：极小序列》，《数学手稿》（2025）。[CP25+] K. Y. Chan 和 B. Pattanayak，《一般线性群 n 中抛物诱导与 Jacquet 模的算法》，arXiv:2503.00886，2025。[CS19] K.Y. Chan 和 G. Savin，《伯恩斯坦–泽列文斯基导数：一种 Hecke 代数方法》，《国际数学研究通知》，2019 年第 3 期，2019 年 2 月，第 731–760 页，https://doi.org/10.1093/imrn/rnx138。[CZ 26+] K.Y. Chan 和 P. Zhou，《伯恩斯坦–泽列文斯基导数及最高导数多重线段简单商的构造 IV：消去过程》，准备中。[CMBO24] D. Ciubotaru、L. Mason-Brown 和 E. Okada，《幺幂超尖点表示的波前集》，《代数与数论》第 18 卷（2024），第 10 期，1863–1889。[CP96] V. Chari 和 A. Pressley，《量子仿射代数与仿射 Hecke 代数》，Pacific J. Math. 174（1996），第 2 期，295–326。[Ch86] I.V. Cherednik，《Gelfand-Tzetlin 基的一种新解释》，Duke Math. J.（1987），第 54 卷（2），第 563–577 页。[CR24] C. Cunningham、M. Ray，《Arthur 包的 Vogan 猜想的证明：p 进一般线性群的不可约参数》，《数学手稿》173，1073–1097（2024）。https://doi.org/10.1007/s00229-023-01490-7。[Gu21] M. Gurevich，《A 型表示环中分解问题的量子不变量》，《组合理论杂志 A 辑》180（2021），https://doi.org/10.1016/j.jcta.2021.105431。[Ja07] C. Jantzen，《 p进一般线性群的 Jacquet 模》，《表示论》11（2007），45–83，https://doi.org/10/1090/S1088-4165-0700316-0。[LM16] E. Lapid、A. Mínguez，《非阿基米德局部域上一般线性群内形式的抛物诱导》，《数学精选，新系列》（2016）22，2347–2400。[LM25] E. Lapid、Mínguez，《Lusztig 幂零簇不可约分支上的二元运算 II：非阿基米德局部域上一般线性群 n 表示的应用与猜想》，《纯粹与应用数学季刊》（2025）。[MW86] C. Mœglin、J.-L. Waldspurger，《关于 Zelevinski 对合》，J. Reine Angew. Math. 372，136–177（1986），doi.org/10.1515/crll.1986.372.136。[Mu03] F. Murnaghan，《p 进一般线性群容许表示的局部特征标展开》。载于：《纯粹与应用数学杂志》2003.554（2003），第 139–155 页。doi:10.1515/crll.2003.002。[Ro86] J. D. Rogawski，《p 进域上一般线性群 $GL(n)$ 的表示及其 Iwahori 不变向量》，Israel J. Math. 54（1986），242–256。https://doi.org/10.1007/BF02764944。[Ta15] M. Tadić：《关于 p 进一般线性群互补级数端点之外的可约点》，J. Lie Theory（2015）25(1)，147–183。

[Ze80] A. Zelevinsky, 《约化 p 进群的诱导表示 II》, 高等师范学校科学年鉴**13** (1980年), 154-210。

香港大学数学系电子邮件地址: kychan1@hku.hk