arXiv:2601.00676v1 [quant-ph] 2 Jan 2026

超冷量子重力仪：面向地球物理学家的入门介绍

Ivaldevingles Rodrigues de Souza Junior[1, 2*]、
Andrea Trombettoni[1*]和 Carla Braitenberg[2*]

[1]的里雅斯特大学物理系，Strada Costiera 11，的里雅斯特，34151，意大利。[2]的里雅斯特大学数学、信息学与地球科学系，Via Weiss 1，的里雅斯特，34100，意大利。

*通讯作者。电子邮箱：ivaldevingles@gmail.com；atrombettoni@units；berg@units.it；

摘要

本文旨在为地球物理学家提供一篇通俗易懂的超冷量子重力仪入门介绍。本文不侧重于地球物理应用，因为地球物理学家对这些应用已十分熟悉；相反，我们将以教学方式阐述理解量子重力仪工作原理所需的量子力学概念。我们综述基于二能级和三能级原子系统的重力仪，重点介绍原子干涉测量的基本机制。我们通过 $\boldsymbol{\pi/2}$ 和 $\boldsymbol{\pi}$ 脉冲讨论马赫–曾德尔干涉仪的工作原理，说明由此产生的相移如何编码重力加速度。文中还简要讨论了噪声的影响。

关键词：量子重力仪、原子干涉测量、超冷原子、场测量

1 引言

重力仪可分为两大类：绝对重力仪和相对重力仪（Telford 等，1990）。绝对重力仪测定地球表面特定点的重力加速度（g）绝对值，而相对重力仪仅测量两个不同地点之间的 g 差异。

在此背景下，弹簧式重力仪属于相对仪器，因为它们需要在 g 值已知的地点进行校准，例如参见（Crossley 等人，2013）。相比之下，经典绝对重力仪基于测试质量在真空中的自由落体原理，通过激光以高精度对其轨迹进行干涉测量——例如 FG5 重力仪（Niebauer 等人，1995）。绝对仪器广泛用于建立重力基准站，这些基准站用于校准相对重力仪（D'Agostino 等人，2007）。

本文旨在从原子在重力加速度作用下量子态演化的基本推导出发，阐释绝对量子重力仪，使感兴趣的地球物理学家能够理解其测量原理的理论框架。量子力学处理所固有的特点是原子的二重属性：原子既具有质量，其位置的概率振幅也具有波动性质。数学处理还包括原子与激光脉冲之间的相互作用，这对重力测量至关重要。本文旨在弥合物理学家对量子重力仪原理的阐述（例如 Peters 等人，2001；Chu 2001；Kasevich 和 Chu，1991；Young 等人，1997；Freier 等人 2016）与介绍重力仪应用的论文（例如 Ménoret 等人，2018；Wu 等人，2019）之间的鸿沟。前者假定读者具备物理学家理所当然拥有的量子物理学基础知识，后者则侧重于观测结果。量子重力仪的优势在于能够测量绝对重力场值，而且原则上测量值不会发生漂移；这一点将在下文选取的文献中加以说明和讨论。

Ménoret 等人（2018）在为期 1 个月的测量中，展示了便携式绝对量子重力仪的稳定性和灵敏度达到 10 nm s^{-2}。Wu 等人（2019）展示了对潮汐信号和海洋负荷重力信号的观测，其灵敏度为 20 nm s^{-2}。他们指出，潮汐信号的影响可在阿伦偏差中体现为长时间尺度上的峰值（从数小时开始，延续至 24 小时以上），也可在噪声谱中观察到。Muquans 公司商用重力仪 AQG#B01 的性能测试显示，在 2 周时间内仪器漂移未超出不确定度范围，且重复性优于 50 nm s^{-2}。研究人员在法国南部的 Larzac 观测站和蒙彼利埃的一间实验室，将其与经典光学干涉绝对重力仪（Micro-g-LaCoste，FG5#228）及超导相对重力仪（GWR，igrav#002）进行比较，以测试其性能（Cooke 等人，2021）。他们研究的地球物理信号包括固体潮、水文信号、大气重力信号和负荷效应。无漂移特性对于太空中的加速度测量尤为重要，因为其有效的频谱测量带宽没有低频下限，而静电加速度计则存在低频下限（Zingerle 等，2024；Romeshkani 等人，2025；Rossi 等人，2023）。因此，沿卫星轨道的可观测空间波长得以增加，这有利于确定重力位场球谐展开中的低阶项（Migliaccio 等人，2019；Migliaccio 等人，2023；Rossi 等人，2023）。噪声谱降低还可提高反演场的空间和时间分辨率，从而更清晰地分辨水文、海洋和固体地球信号

（Kusche 等，2025；Braitenberg 和 Pastorutti，2024；Pivetta 等，2022）。有关经典重力测量和原子静态重力测量，以及机载／海洋和空间重力测量的综述，请参阅 Fang 等，2024。

超冷量子重力仪的核心组成部分包括超冷原子源及其激发态、与三个激光脉冲的相互作用，以及取决于重力的原子干涉相位差。本文首先介绍原子的概率振幅及其对应的哈密顿量，随后对原子的二能级和三能级态、激光脉冲引起的概率函数相位变化、原子沿空间轨迹传播时获得的相位变化，以及原子处于激发态的概率及其与重力加速度的关系进行数学推导。理解量子方程所付出的努力是一种智力投资，其意义超越了量子重力仪本身。

我们注意到，20世纪用于地球科学应用的大多数设备都是“经典”的，也就是说，它们以经典物理学概念为基础并加以利用。例如，现代地震学使用的地震仪是在20世纪初发展起来的；地震学采用弹性介质中地震波传播方程的表述（Love，1911；Gutenberg，1914）。类似地，大地电磁法基于电磁学原理（Jackson，1999）。从这一角度来看，迄今为止，地球科学研究所需的相当一部分学术基础仍植根于经典物理学，直接应用量子力学概念的情况很少。然而，如前所述，基于量子原理、可靠且足够坚固便携，适用于地球物理应用的测量仪器，如今正越来越多地投入使用，用于野外和太空测量（Freier 等人 2016；Ménoret 等人，2018；Cooke 等，2021；Weng 等，2021；Bidel 等，2023；Chen，2023；Antoni-Micollier 等，2024）。商业仪器，例如（Glässel 等，2025），不仅正应用于重力仪，也逐渐用于惯性导航（Exail，2025）。其他设备则用于测量磁场（Rovny 等，2022），或光学晶格中的重力矢量（LeDesma 等，2025）。

量子重力仪以及更广泛意义上的量子传感器的问世与发展，是近年来量子科学与技术整体进步的一部分。这些进步已影响众多研究领域和技术应用，从量子计算、量子模拟到量子传感。如今，我们正见证着它们的实际应用显著扩展。基于原子干涉测量的量子重力仪，正是这一新一代仪器的杰出范例（Kasevich 和 Chu，1991；Ménoret 等人，2018）。

这些进展呼吁地球科学界予以关注，并鼓励人们探索量子物理学与地球科学的交汇领域。鉴于地球科学和地球物理学专业的本科和硕士培养中，物理学方面的大学课程通常（但并非总是）以经典物理学和电磁学为核心内容，我们认为，有必要介绍量子重力仪的基本原理。这有助于那些更熟悉经典范式的地球物理学读者，而许多

量子概念（或许更甚者，量子力学中使用的符号）可能相当违背直觉。出于同样的原因，我们不讨论量子重力仪在地球物理学中的应用，因为地球科学和地球物理学界对此当然已十分熟悉。

2 量子力学概念回顾

在介绍量子重力仪的工作机制之前，我们先简要回顾一些理解其工作原理所必需的量子力学基本概念，以此作为下文的铺垫。为明确术语，量子重力仪 指利用量子资源测量重力的量子传感器，而超冷 则表示基于超冷原子的量子重力仪。关于超冷原子的有用参考资料，可参阅相关教科书（Pethick 和 Smith 2008；Pitaevskij 和 Stringari 2016）。本文将在介绍超冷量子重力仪特性时，适时提及超冷原子的相关性质，但我们决定将讨论重点放在其工作机制所涉及的量子力学内容上。

2.1 叠加原理

为说明量子力学的一项关键机制，薛定谔提出了一个思想实验，后来广为人知，即“薛定谔的猫”（薛定谔 1983年；Peres 1995）。薛定谔最初的动机，是讨论将量子力学定律应用于宏观系统时会出现的情形；不过，本文不沿着这一思路展开，而是将薛定谔的猫作为量子叠加的示例。实验中，将一只猫与以下物品一同放入密封箱内：（i）一个可能发生衰变、也可能不发生衰变的放射性原子；（ii）一个负责识别衰变事件的辐射探测器；以及（iii）一个装有毒药的烧瓶。如果原子发生衰变，探测器就会启动一种机制，打破烧瓶并释放毒药，最终导致猫死亡（图1）。

根据量子力学，放射性原子在观测发生之前一直处于“已衰变”和“未衰变”两种态的叠加中。由于猫的命运与原子的量子态直接相关，猫本身也处于“活着”和“死亡”两种态的叠加中。

历史上，这两种状态是“活着”和“死了”，但出于善待猫咪的考虑，也为了便于讲解，我们倾向于认为烧瓶里装有某种物质，能让猫进入睡眠。因此，我们将讨论“清醒”和“睡着”两种状态。于是，只有打开盒子并进行观测时，系统才会坍缩，产生一种可能的经典结果：猫要么清醒，要么睡着。

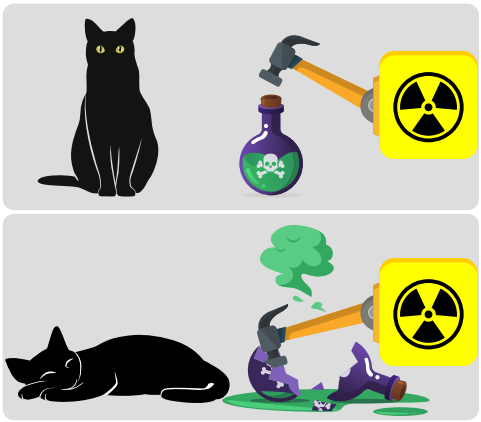

图1 薛定谔的猫的示意图。上图展示了放射性原子尚未衰变的情形。下图展示了原子已经衰变的情形，这触发了释放物质的机制，可能导致猫死亡或进入睡眠状态。

2.2 狄拉克符号

在量子力学的标准表述中（Dirac，1930；Cohen-Tannoudji 等，1977；Shankar，1980），人们使用一种称为左矢–右矢记号的符号来表示向量。在这一形式体系中，一个通用的列向量（$a_1\ a_2\ a_3\ \dots\ a_n$）^{T}，其中 a_i 为复数（$a_i \in \mathbb{C}$），用右矢符号 $|\bullet\rangle$ 表示如下：

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

同样，与 $|a\rangle$ 的共轭转置对应的向量称为左矢，并用符号 $\langle\bullet|$表示。因此，

$$\langle a| = \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* & a_3^* & \cdots & a_n^* \end{pmatrix}. \tag{2}$$

左矢 (1) 可写作 $|a\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i|i\rangle$，其中 $\{|i\rangle\}$ 与 $i = 1, \cdots, n$。这意味着 $|1\rangle$ =(1 0 0 ... 0)^T，$|2\rangle$ =(0 1 0 ... 0)^T，依此类推。向量 (1 0 $\cdots$ 0)^T，... (0 $\cdots$ 1)^{T}称为基态（或标准基向量），它们构成了系统状态空间的一组正交归一基。因此，写作 $|a\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i|i\rangle$ 相当于在基底 $\{|i\rangle\}$下写出左矢 $|a\rangle$ 。同理，我们有 $\langle a| = \sum_{i=1}^{n} a_i^*\langle i|$。

左矢与右矢的组合定义了内积，而右矢与左矢的组合定义了外积。考虑右矢 $|b\rangle$（其维数与 $|a\rangle$ 相同），这两个向量之间的内积为

（Cohen-Tannoudji 等，1977；Shankar，1980）

$$\langle a|b\rangle = \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* & a_3^* & \cdots & a_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + a_3^* b_3 + \cdot + a_n^* b_n \tag{3}$$

相应的外积形式为

$$|a\rangle\langle b| = \begin{pmatrix} a_1 b_1^* & a_1 b_2^* & \cdots & a_1 b_n^* \\ a_2 b_1^* & a_2 b_2^* & \cdots & a_2 b_n^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1^* & a_n b_2^* & \cdots & a_n b_n^* \end{pmatrix}.$$

在狄拉克符号中，也可以计算可观测量的期望值：如果有一个可观测量 $\mathcal{O}$，对应于厄米算符 $\mathcal{O}$，则可以在左矢(1)和右矢(2)所处的基底中，将其写成矩阵$O_{i,j} = \langle i|\mathcal{O}|j\rangle$。可观测量 $\mathcal{O}$ 在态 $|a\rangle$ 上的期望值由 $\langle a|\mathcal{O}|a\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_i^* O_{i,j} a_j$给出。

2.3 量子态的描述

假设在薛定谔的猫实验中，打开盒子时发现猫醒着的概率为$9/10$ (90%)，因此发现猫在睡觉的概率为$1/10$ (10%)。那么，如何用数学表示这种“醒着—睡着”的状态呢？考虑到量子态用 $|\psi\rangle$表示，表示猫所处状态的最简单方法是使用一个列向量，记录“观测到”每种状态的概率，即：

$$\frac{1}{10} \rightarrow \text{Probability that the cat is dead/sleeping}$$

$$\frac{9}{10} \rightarrow \text{Probability that the cat is alive/awake}$$

我们可以将 $|\psi\rangle$ 改写如下：

$$|\psi\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中 α 和 β 是复数。我们可以选择其中一个（例如 α）为实数。

向量 (1 0)^T 和 (0 1)^T 是基态，分别表示猫的两种可能状态：

$$\left|\ \text{}\ \right\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \text{ Cat awake} \tag{5}$$

$$\left|\ \text{}\ \right\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \text{ Cat sleeping} \tag{6}$$

因此，式 (4) 可以写成

$$|\psi\rangle = \alpha \left|\ \text{}\ \right\rangle + \beta \left|\ \text{}\ \right\rangle \tag{7}$$

量子态 $|\psi\rangle$ 包含了关于整个系统的所有信息。因此，我们必须能够据此计算测量结果对应的概率，也就是猫是活着还是睡着的概率。在薛定谔的猫这个例子中，概率是实数（例如式 (7) 中的 $9/10$ 和 $1/10$ ）。因此，我们必须确保与测量所有可能结果相关的总概率等于 1。

由于 $|\psi\rangle$ 描述了所有可能态（在此例中为活着或睡着）的叠加，所有这些态的概率之和必然等于 1。在数学上，通过对态 $|\psi\rangle$进行归一化并施加以下条件，可以确保这一点：

$$\langle \psi_{\text{norm}} \mid \psi_{\text{norm}} \rangle = 1,$$

从而保证系数（可能是复数）的模平方之和恰好等于 1。

换句话说，态表示中出现的系数是复振幅，而不是概率本身。概率由这些振幅的绝对值的平方得到：

$$P_{\text{awake}} = |\alpha|^2,$$
$$P_{\text{sleeping}} = |\beta|^2.$$

在我们考察的这个特例中，与“唤醒”态相关联的系数为 α

$$\alpha = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

而对于“休眠”态，可得

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{10}}\, e^{i\theta} = \frac{1}{\sqrt{10}}\, e^{i\theta},$$

其中 θ 为任意实数。因此，归一化量子态的正确表示为

$$|\psi_{\text{norm}}\rangle = \frac{3}{\sqrt{10}} \left| \text{} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}} e^{i\theta} \left| \text{} \right\rangle, \tag{8}$$

这等价于:

$$|\psi_{\text{norm}}\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \\ \frac{3}{\sqrt{10}} e^{i\theta} \end{pmatrix}.$$

请注意，现在当我们计算

$$\langle \psi_{\text{norm}} | \psi_{\text{norm}} \rangle = \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \right)^2 = 1.$$

从现在起，我们将省略下标 范数。使用这种记法，要计算状态 $|i\rangle$ 的概率（其中，索引 i 可能指活跃态或休眠态），只需计算

$$P_i = |\langle i \mid \psi \rangle|^2, \tag{9}$$

也就是说，对于状态 (8):

$$\left\langle \text{} \middle| \psi \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{10}} \qquad \therefore \qquad P_{awake} = \left| \left\langle \text{} \middle| \psi \right\rangle \right|^2 = \frac{9}{10}$$

$$\left\langle \text{} \middle| \psi \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad \therefore \qquad P_{sleeping} = \left| \left\langle \text{} \middle| \psi \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{10}$$

重要的是，向量 $|\psi\rangle$ 可以表示为不同基态 $|i\rangle$ 的线性组合（或叠加），这些基态对应于测量可能得到的结果。于是可以写成

$$|\psi\rangle = \sum_i C_i |i\rangle, \tag{10}$$

其中， C_i 是称为概率振幅的复数。这些振幅的绝对值的平方 $|C_i|^2$，给出了测量一个可观测量时得到状态 $|i\rangle$ 的概率，而该可观测量的本征值恰好就是状态 $\{|i\rangle\}$。

2.4 能级

原子中的电子等粒子，当其具有负能量并处于束缚态时，不能占据任意能级，而只能处于离散的

或量子化的能级。这些粒子只能处于某些允许的态，每种态都具有明确定义的能量值（Cohen-Tannoudji 等，1977；Shankar，1980；Griffiths，2018；Sakurai 和 Napolitano，2020）。

原子物理学中一个极其有用的模型是所谓的**二能级系统**。虽然原子当然具有许多可能的能级（Foot 2007），但在许多情况下，我们可以仅使用两个能级来简化对其的描述（Orszag 2024）：换句话说，当物理量中只有（或主要是）两个能级的贡献时，我们可以将基底限制在这两个能级上

- 一个态 $|a\rangle$ 能量为 E_a;
- 一个态 $|b\rangle$ 能量为 E_b。

$|a\rangle$ 以及 $|b\rangle$ 是哈密顿量 H的本征态:

$$H|a\rangle = E_a|a\rangle, \tag{11}$$
$$H|b\rangle = E_b|b\rangle. \tag{12}$$

我们将 $|a\rangle$ 称为**基态**，将 $|b\rangle$ 称为**激发态**。例如，对于处于双势阱中的粒子，如果两个能量极小值之间由能垒充分分隔，那么态 $|a\rangle$ 和 $|a\rangle$ 确实可以是两个最低能量态，而 $|a\rangle$ 则是能量最低的态。

能量 E_b 和 E_a 之间的差决定了跃迁频率

$$\omega = \frac{E_b - E_a}{\hbar}$$

也就是说，如果光子的角频率 ω满足相应条件，原子就可以从态 $|a\rangle$ 跃迁到态 $|b\rangle$。反过来，当原子态从 $|b\rangle$ 自发地衰变到 $|a\rangle$时，它会发射一个能量相同的光子。

需要注意的是，系统哈密顿量的所有参数（例如质量）都包含在能量 E_a，E_b中。若要研究原子的运动，就必须显式地加入动能项（见第 4 节）。

原子的平均能量可以通过对构成该系统的各能级（E_a 和 E_b）的能量求加权平均来计算，权重为各态（P_a 和 P_b）的概率，即

$$\langle E\rangle = E_b\,P_b \;+\; E_a\,P_a.$$

利用式（9），我们可以将平均能量改写为

$$\begin{aligned}\langle E\rangle &= E_b\,|\langle b|\psi\rangle|^2 + E_a\,|\langle a|\psi\rangle|^2 \\ &= \langle\psi|\left(E_b|b\rangle\langle b| + E_a|a\rangle\langle a|\right)|\psi\rangle\end{aligned}$$

根据前面的表达式，我们可以在基底$\langle a|$，$\langle b|$ 中定义哈密顿算符:

$$H = E_b|b\rangle\langle b| + E_a|a\rangle\langle a|$$

进而可将其改写为矩阵形式，例如参见（Kok 2018）：

$$H = \begin{pmatrix} E_b & 0 \\ 0 & E_a \end{pmatrix}.$$

2.5 薛定谔方程

哈密顿量不仅编码了系统的能量，还与系统的时间演化有关。因此，一旦知道量子系统的哈密顿量，就可以确定其态如何随时间演化（Cohen- Tannoudji 等，1977；Shankar，1980；Griffiths，2018；Kok2018；Sakurai 和 Napolitano，2020）。再次考虑二能级原子在时刻（$t = 0$）的态。我们将初态写成能量本征态的相干叠加：

$$|\psi(0)\rangle = C_a|a\rangle + C_b|b\rangle,$$

其中， C_a e C_b 是满足 $|C_a|^2 + |C_b|^2 = 1$的复振幅。

由于根据式（12）， $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 是哈密顿量的本征态，因此概率振幅 C_a， C_b 的时间演化仅表现为一个相位因子。时刻t 的态变为

$$|\psi(t)\rangle = C_a e^{-iE_a t/\hbar}|a\rangle + C_b e^{-iE_b t/\hbar}|b\rangle.$$

这个表达式表明，态的每个分量都会获得一个与其能量成正比的相位。重要的是，能级之间的相对相位随时间演化为

$$\Delta\phi(t) = \frac{E_b - E_a}{\hbar}\, t = \omega t,$$

其中， ω 是二能级系统的跃迁频率。对态求时间导数，并利用哈密顿量（12）的本征值方程，我们得到著名的含时薛定谔方程：

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle. \tag{13}$$

这是支配非相对论量子系统量子演化的核心方程。它告诉我们，一旦哈密顿量已知，系统的时间演化便完全确定。对于哈密顿量为（2.4）的二能级原子，薛定谔方程描述了基态与激发态之间布居数和相位的演化。在接下来的章节中，我们将纳入激光场等相互作用，它们会改变哈密顿量，并使能级之间发生跃迁，从而产生原子干涉测量和量子传感所依赖的量子动力学。

3 二能级系统

量子重力仪利用干涉测量原理，对重力加速度进行精确测量。更具体地说，它们作为马赫-曾德尔

干涉仪，利用干涉现象测量波沿两条不同路径传播时的相位差（Freier 等人 2016；Schilling 等人 2020；Müller 和 Wu 2020）。在典型的马赫-曾德尔装置中，光源发出的一束光首先进入所谓的分束器，使波沿两条不同的干涉臂（路径）传播。随后，每束光都会被反射，例如由反射镜反射，直至重新汇合，之后再由另一个分束器再次分开。最后，两个光强探测器测量由光束重新汇合产生的干涉图样；该图样是 $\Delta\phi$沿不同路径传播的两束光之间相位差的函数（图 2.a）。

量子马赫-曾德尔干涉仪也可以探测物质波的干涉。在这种情况下，与电磁波不同，系统中没有实体分束器或反射镜。激光脉冲作用于原子的方式等效于分束器或反射镜，具体取决于激光-原子相互作用的过程。决定激光发挥分束器还是反射镜作用的，是相关频率与脉冲持续时间之间的关系。本节将对此作更详细的讨论。就本文而言，$\pi/2$ 脉冲定义为发挥分束器作用的脉冲，而 π 脉冲定义为以等效于反射镜的方式发挥作用的脉冲。

在量子马赫-曾德尔干涉仪中，原子最初可以制备在相同的内态 $|a\rangle$（基态）中，经过一个 $\pi/2$ 脉冲后，会被“分束”到两条路径上，分别由处于不同内态 $|a\rangle$ 和$|b\rangle$的原子描述。处于 $|a\rangle$ 态的原子沿着一条轨迹运动，这条轨迹不同于处于 $|b\rangle$ 态（激发态）的原子所遵循的轨迹。随后，原子沿着干涉仪的两条不同路径传播，经过时间间隔 T后，与一个 π 脉冲相互作用，该脉冲会使量子态发生反转。接着，再经过时间间隔T，两条路径重新合并，并与第三个 $\pi/2$ 激光脉冲相互作用，最终形成处于 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 态叠加态中的原子云（图 2.b）。

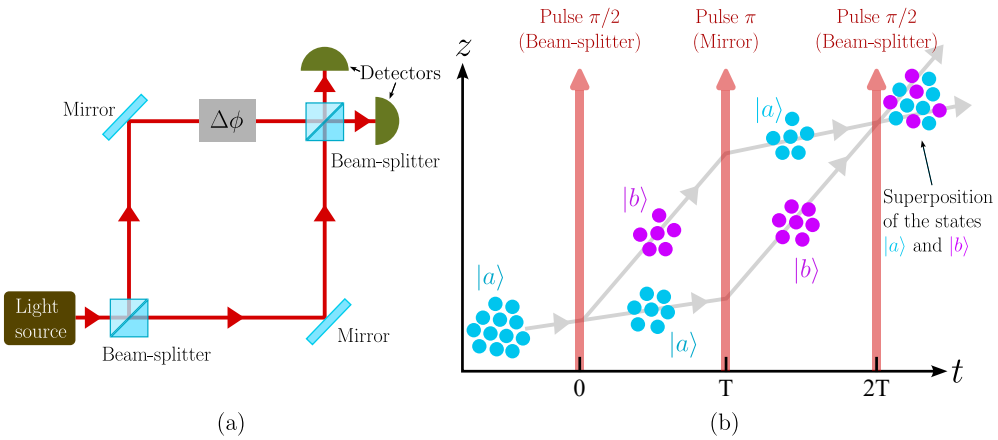

图 2 (a) 基于光束的马赫-曾德尔干涉仪示意图。(b) 量子马赫-曾德尔干涉仪示意图，其中使用了物质波。

为了联系上一节提到的概念，量子重力仪在概念上可以简化为一个二能级系统，具有两个态：基态（$|a\rangle$）和激发态（$|b\rangle$）。需要注意的是，这个系统呈现出两个能级，其方式类似于薛定谔的猫思想实验。因此，仅为教学之用作比较时，可以将能级 $|a\rangle$ 对应于原子处于“清醒”状态，而 $|b\rangle$ 则对应于“睡眠”状态。

在此背景下，随之而来的问题是：量子重力仪中的“辐射探测器”对应的是什么？换言之，量子重力仪中负责诱导原子能级之间跃迁的机制是什么？答案是：激光脉冲。在量子重力仪中，粒子最初处于基态，其能量为 E_a。与激光脉冲相互作用后，粒子可能吸收一个光子，进而跃迁到能量为 E_b 的激发态。

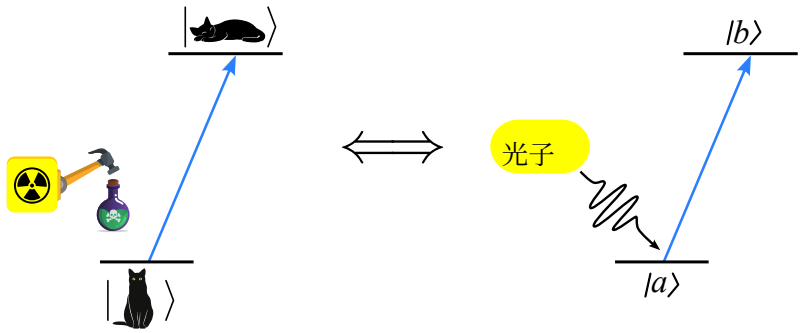

图 3 量子重力仪与薛定谔的猫思想实验在工作原理上的示意对比。图中说明，猫的“活着”（或“醒着”）和“死亡”（或“睡着”）状态，在概念上类似于原子能级。在这个类比中，激光光子所起的作用相当于猫实验中的辐射探测器。具体而言，原子对光子的吸收决定了能级之间是否会发生跃迁，这与在薛定谔的猫思想实验中是否释放毒药／致眠物质的情形相同。

要发生态跃迁，激光频率 ω 必须与两个能级之间的能量差共振，使光子提供诱导跃迁所需的能量（Orszag 2024）。因此，共振条件要求 $\omega \approx \omega_{ba}$，其中 $\omega_{ba} = \omega_b - \omega_a$ 是与该跃迁相关的频率（Orszag 2024；Young 等人，1997）。激光频率与跃迁频率之差定义为失谐，表示为

$$\delta = \omega - \omega_{ba} = \omega - (\omega_b - \omega_a)$$

（见图 4）。

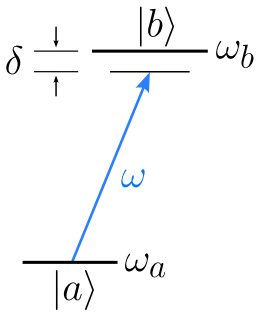

图 4 两个能级及其对应频率的示意图。

激光的电场可以表示为:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \phi). \tag{14}$$

由于原子的尺寸约为埃（$\approx 10^{-10}\mathbf{m}$），而$\mathbf{E}$ 的波长通常大得多，因此电场的振幅在原子的空间范围内基本保持恒定。因此，可以将原子视为处于电磁场作用下、具有偶极矩$\mathbf{d}$ 的偶极子，描述该系统的哈密顿量便可写成矩阵形式:

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\mathbf{d}\cdot\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & \langle b|-\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}|a\rangle \\ \langle a|-\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}|b\rangle & 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

因此，与电磁场相互作用的原子的哈密顿量可以写成两项之和:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}},$$

ˆ其中， H_0 对应于自由原子的含时无关哈密顿量，其表达式为

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_a|a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b|b\rangle\langle b| = \begin{pmatrix} \hbar\omega_b & 0 \\ 0 & \hbar\omega_a \end{pmatrix}, \tag{16}$$

其中为$(0\ 1)^T = |a\rangle$ 和$(1\ 0)^T = |b\rangle$ （当然，这种选择是任意的，也可以选择相反的形式）。哈密顿量 H 可写为:

$$\hat{H} = \hbar\omega_a|a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b|b\rangle\langle b| - \mathbf{d}\cdot\mathbf{E} \tag{17}$$

一般量子态的时间演化由下式描述

$$|\psi(t)\rangle = C_a(t)\, e^{-i\omega_a t}|a\rangle + C_b(t)\, e^{-i\omega_b t}|b\rangle, \tag{18}$$

其中 $C_a(t)$ 和 $C_b(t)$ 是复振幅。这种演化由含时薛定谔方程支配：

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \left(\hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}\right)|\psi(t)\rangle \tag{19}$$

对式（18）关于时间求导，得到

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle =& i\hbar\dot{C}_a\, e^{-i\omega_a t}|a\rangle + \hbar\omega_a C_a(t)\, e^{-i\omega_a t}|a\rangle + \\ &+ i\hbar\dot{C}_b\, e^{-i\omega_b t}|b\rangle + \hbar\omega_b C_b(t)\, e^{-i\omega_b t}|b\rangle \\ &= i\hbar\dot{C}_a\, e^{-i\omega_a t}|a\rangle + i\hbar\dot{C}_b\, e^{-i\omega_b t}|b\rangle + \hat{H}_0|\psi(t)\rangle, \end{aligned}$$

with

$$\hat{H}_{\text{int}}|\psi(t)\rangle = i\hbar\dot{C}_a\, e^{-i\omega_a t}|a\rangle + i\hbar\dot{C}_b\, e^{-i\omega_b t}|b\rangle.$$

接下来，将此表达式投影到基态 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$上，得到

$$\begin{aligned} \langle a|\hat{H}_{\text{int}}|\psi(t)\rangle =& i\hbar\dot{C}_a\, e^{-i\omega_a t}, \\ \langle b|\hat{H}_{\text{int}}|\psi(t)\rangle =& i\hbar\dot{C}_b\, e^{-i\omega_b t}. \end{aligned}$$

因此，

$$\langle a|\hat{H}_{\text{int}}|\psi(t)\rangle = \langle a|-\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}|b\rangle C_b(t)e^{-i\omega_b t}, \tag{20}$$

$$\langle b|\hat{H}_{\text{int}}|\psi(t)\rangle = \langle b|-\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}|a\rangle C_a(t)e^{-i\omega_a t}. \tag{21}$$

式（14）中给出的电场 $\mathbf{E}$，也出现在上述表达式中，可分解为：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\,\cos(\omega t + \phi) = \mathbf{E}_0\left(\frac{e^{i\omega t}e^{i\phi} + e^{-i\omega t}e^{-i\phi}}{2}\right). \tag{22}$$

这种分解使我们能够应用所谓的旋波近似（RWA），忽略快速振荡项（Orszag 2024），仅保留场中缓慢变化的分量。这意味着，只有一个复指数项（ $e^{i\omega t}$ 或 $e^{-i\omega t}$）对相互作用有显著贡献，而另一个因其振荡速度远快于系统动力学而可以舍弃。对于跃迁 $|g\rangle \to |e\rangle$，可以消去快速振荡分量 $e^{i\omega t}$ ，仅保留 $e^{-i\omega t}$ ，因为它负责光子吸收。相反，对于跃迁 $|e\rangle \to |g\rangle$，应保留的项是$e^{i\omega t}$，它对应于受激发射过程。

经过这一简化，式（20）和式（21）可写为

$$\langle a|-\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}|b\rangle C_b(t)e^{-i\omega_b t} = \frac{\langle a|-\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}_0|b\rangle}{2}\, C_b(t)e^{-i\omega_b t}e^{i\omega t}e^{i\phi},$$

$$\langle b|-\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}|a\rangle C_a(t)e^{-i\omega_a t} = \frac{\langle b|-\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}_0|a\rangle}{2}\, C_a(t)e^{-i\omega_a t}e^{-i\omega t}e^{-i\phi}.$$

重写这些方程，我们得到

$$\begin{aligned} i\dot{C}_a &= \frac{\langle a|-\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}_0|b\rangle}{2\hbar}\, C_b(t)e^{i[\omega-(\omega_b-\omega_a)]t}e^{i\phi} \\ i\dot{C}_b &= \frac{\langle b|-\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}_0|a\rangle}{2\hbar}\, C_a(t)e^{-i[\omega-(\omega_b-\omega_a)]t}e^{-i\phi}. \end{aligned}$$

引入拉比频率（Scully and Zubairy 1997）

$$\Omega_{ba} = \frac{\langle b|-\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}_0|a\rangle}{\hbar},$$

可得

$$\Omega_{ba}^* = \Omega_{ab} = \frac{\langle a|-\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}_0|b\rangle}{\hbar}. \tag{23}$$

于是，耦合方程组可写为：

$$\begin{aligned} i\,\dot{C}_a &= \frac{\Omega_{ba}^*}{2}\, e^{+i(\delta\, t+\phi)}\, C_b, \\ i\,\dot{C}_b &= \frac{\Omega_{ba}}{2}\, e^{-i(\delta\, t+\phi)}\, C_a. \end{aligned}$$

ˆ 这使我们可以将 H_{int} 定义为

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \Omega_{ba}\, e^{-i(\delta\, t+\phi)} \\ \Omega_{ba}^*\, e^{+i(\delta\, t+\phi)} & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

通过采用旋转参考系，可以使哈密顿量与时间无关，这表达了这样的物理思想：在短脉冲期间，$\hat{\boldsymbol{z}}$可近似视为常量。具体而言，将态（$|\psi\rangle$）变换为旋转坐标系中的态（$|\psi\rangle_R$），即可实现这一点；后者定义为绕（$\hat{\boldsymbol{z}}$）轴旋转角（$-\delta t$）所得：

$$|\psi\rangle_R = \boldsymbol{D}\,(\hat{\boldsymbol{z}},\, -\delta t)\,|\psi\rangle$$

其中， $\boldsymbol{D}$ 定义为（Young 等人，1997）：

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} e^{+i\delta\, t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta\, t/2} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

将薛定谔方程应用于旋转坐标系中表示的态，得到：

$$i\hbar\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{D}^\dagger|\psi\rangle_R\right) = \hat{H}_{\text{int}}\left(\boldsymbol{D}^\dagger|\psi\rangle_R\right) \tag{26}$$

重新整理各项后，得到旋转坐标系中态的时间演化方程：

$$i\hbar\frac{d|\psi\rangle_R}{dt} = \left(\boldsymbol{D}\hat{H}_{\text{int}}\boldsymbol{D}^\dagger - i\hbar\boldsymbol{D}\frac{d\boldsymbol{D}^\dagger}{dt}\right)|\psi\rangle_R. \tag{27}$$

因此，旋转参考系中的哈密顿量与时间无关，可表示为：

$$\hat{H}_R = \boldsymbol{D}\hat{H}_{\text{int}}\boldsymbol{D}^\dagger - i\hbar\boldsymbol{D}\frac{d\boldsymbol{D}^\dagger}{dt} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -\delta & \Omega_{ba}\, e^{-i\phi} \\ \Omega_{ba}^*\, e^{+i\phi} & +\delta \end{pmatrix}. \tag{28}$$

本征值为

$$\lambda_\pm = \pm\frac{\hbar\Omega_R}{2}, \tag{29}$$

其中 Ω_R 是所谓的（失谐拉比频率，表示为

$$\Omega_R = \sqrt{\Omega_{ba}^2 + \delta^2}$$

（从现在起，在正文和图5中，除非另有说明，我们将 Ω_{ba} 的模简单记为 Ω_{ba}）。相应地，我们可以用角 θ 表示 δ、Ω_{ba} 和 Ω_R，该角定义如下（见图5）：

$$\sin\theta = \frac{\Omega_{ba}}{\Omega_R} \qquad\qquad \cos\theta = -\frac{\delta}{\Omega_R} \tag{30}$$

注意，当 $\delta \ll \Omega_{ba}$ 时，我们有 $\Omega_{ba} \approx \Omega_R$。因此，在共振条件（$\delta = 0$）下，角 θ 变为 $\theta = \pi/2$，从而 $\sin\theta = 1$ 和 $\cos\theta = 0$。

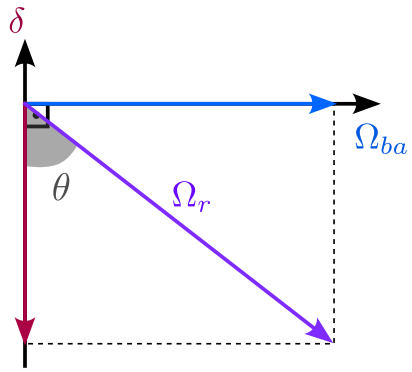

图5 几何 θ 与 p 之间关系的解释 参数 δ、Ω_{ba} 和 Ω_R。

哈密顿量 $\hat{} H_R$ 可用本征矢 $|\lambda_+\rangle_R$ 和 $|\lambda_-\rangle_R$对角化，它们分别对应本征值 λ_+ 和 λ_-（附录A）。该

在旋转参考系基底 $\{|a\rangle_R, |b\rangle_R\}$中表示的本征态，其中再次有 $(0\ 1)^T = |a\rangle_R$ 和 $(1\ 0)^T = |b\rangle_R$，其表达式为

$$
\begin{aligned}
|\lambda_+\rangle &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{+i\frac{\phi}{2}} |a\rangle_R + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\phi}{2}} |b\rangle_R \\
|\lambda_-\rangle &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{+i\frac{\phi}{2}} |a\rangle_R - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\phi}{2}} |b\rangle_R
\end{aligned} \tag{31}
$$

投影算符 $|\lambda_+\rangle\langle\lambda_+|$ 和 $|\lambda_-\rangle\langle\lambda_-|$ 的矩阵形式如方程 (32)–(33) 所示。利用方程 (25)、(29)] 和 (34)，可得:

$$
|\lambda_+\rangle\langle\lambda_+| = \begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & \frac{\sin\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \frac{\sin\theta}{2} e^{+i\phi} & \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \tag{32}
$$

$$
|\lambda_-\rangle\langle\lambda_-| = \begin{pmatrix} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\frac{\sin\theta}{2} e^{-i\phi} \\ -\frac{\sin\theta}{2} e^{+i\phi} & \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \tag{33}
$$

在旋转坐标系中，与从时刻 $t = t_0$ 开始的光脉冲相互作用期间，原子态的时间演化由下式给出

$$
|\psi(t_0 + \tau)\rangle_R = \left(e^{-\frac{i\lambda_+\tau}{\hbar}} |\lambda_+\rangle\langle\lambda_+| + e^{-\frac{i\lambda_-\tau}{\hbar}} |\lambda_-\rangle\langle\lambda_-|\right) \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{z}}, -\delta t) |\psi(t_0)\rangle. \tag{34}
$$

由此可得

$$
|\psi(t_0+\tau)\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\delta\tau/2}\left[\cos\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right) - i\cos\theta\,\sin\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right)\right] & -ie^{-i\delta\tau/2}e^{-i(\delta t_0+\phi)}\sin\theta\sin\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right) \\ -ie^{i\delta\tau/2}e^{i(\delta t_0+\phi)}\sin\theta\sin\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right) & e^{i\delta\tau/2}\left[\cos\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right) + i\cos\theta\,\sin\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right)\right] \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_b(t_0) \\ C_a(t_0). \end{pmatrix} \tag{35}
$$

最终结果如下:

$$
\begin{aligned}
C_b(t_0+\tau) &= e^{-i\delta\tau/2}\Bigg\{C_b(t_0)\left[\cos\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right) - i\cos\theta\,\sin\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right)\right] + \\
&\qquad + C_a(t_0)e^{-i(\delta t_0+\phi)}\sin\theta\sin\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right)\Bigg\}, \\
C_a(t_0+\tau) &= e^{+i\delta\tau/2}\Bigg\{C_b(t_0)\left[-ie^{i(\delta t_0+\phi)}\sin\theta\sin\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right)\right] +
\end{aligned} \tag{36}
$$

$$+ C_a(t_0)\left[\cos\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right) + i\cos\theta\,\sin\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right)\right]\Bigg\}. \tag{37}$$

对于 $|\delta| \ll \Omega_R$，有

$$C_b(t_0+\tau) = e^{-i\delta\tau/2}\left[C_b(t_0)\cos\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right) - i\,C_a e^{-i(\delta t_0+\phi)}\sin\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right)\right]; \tag{38}$$

$$C_a(t_0+\tau) = e^{+i\delta\tau/2}\left[-iC_b(t_0)e^{i(\delta t_0+\phi)}\sin\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right) + C_a(t_0)\cos\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right)\right]. \tag{39}$$

对于持续时间为 $\tau = \pi/\Omega_R$ 的脉冲，演化算符对应于一个 π-脉冲。在此情况下，除取决于失谐 δ、激光相位 ϕ 和脉冲起始时间 t_0 的确定相位因子外，该脉冲会使两个内态 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$之间发生完全的布居反转。因此，振幅演化大为简化，因为 $\cos\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ 和 $\sin\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$。将这些值代入振幅的一般表达式，可得著名的能级布居反转，这与持续时间为 τ 的脉冲相对应：

$$C_b(t_0+\tau) = -i\,C_a(t_0)\,e^{-i(\delta t_0+\phi)}e^{-i\delta\tau/2}; \tag{40}$$

$$C_a(t_0+\tau) = -i\,C_b(t_0)\,e^{i(\delta t_0+\phi)}e^{i\delta\tau/2} \tag{41}$$

方程 40 和 41 给出了系数 C_a 和 C_b 的演化。对于即将介绍的序列中的每个脉冲，都必须分别应用这两个方程，并考虑该 $\pi/2-\pi-\pi/2$脉冲序列。因此，方程 40 和 41 中所示的时间 t_0表示每个脉冲开始的时刻。这样，便可根据每个脉冲的起始时间，确定各量子态的系数随时间的演化，具体如下述脉冲序列所示。

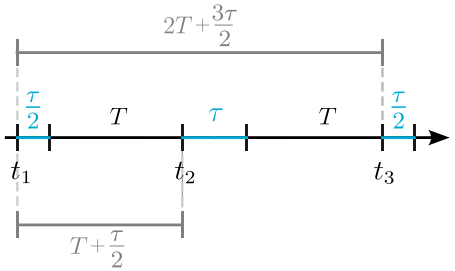

图 6 文中讨论的脉冲序列。第一个脉冲的持续时间为 $\tau/2$，于时间 t_1 开始。第二个脉冲的持续时间为 τ，于时间 $t_2 = t_1 + T + \tau/2$ 开始。第三个脉冲于 $t_3 = t_1 + 2T + 3\tau/2$ 开始，持续时间为 $\tau/2$。

现在定义如图 6 所示的脉冲序列。第一个脉冲的持续时间为 $\tau/2$，相位为 ϕ_1，发生于时刻 t_1。第二个脉冲的持续时间为τ，相位为 ϕ_2，发生于时刻 $t_2 = t_1 + T + \tau/2$。最后，第三个脉冲再次是一个

$\pi/2$ 脉冲（持续时间为 $\tau/2$，相位为 ϕ_3），发生于时刻 $t_3 = t_1 + 2T + 3\tau/2$。根据这一序列，并结合公式（40）和（41）以及初始条件$C_a(t_1) = 1$ 和 $C_b(t_1) = 0$，可以确定时刻 $t_1 + \tau/2$ 的原子态如下：

$$C_b\left(t_1 + \frac{\tau}{2}\right) = \frac{e^{-i\delta\tau/4}}{\sqrt{2}}\left[-i\, e^{-i(\delta t_1 + \phi_1)}\right];$$
$$C_a\left(t_1 + \frac{\tau}{2}\right) = \frac{e^{+i\delta\tau/4}}{\sqrt{2}}.$$

假设基态在时刻 t_2 ($C_a(t_2)$) 的振幅等于基态在时刻 $t_1 + \frac{\tau}{2}$ 的振幅，并且激发态在时刻 t_2 ($C_b(t_2)$) 的振幅同样等于激发态在时刻$t_1 + \frac{\tau}{2}$ 的振幅，我们可以推导出激发态在时刻 $t_2 + \tau$ 的以下表达式：

$$C_b(t_2 + \tau) = -i\,\frac{e^{-i\delta\tau/4} e^{-i(\delta t_2 + \phi_2)}}{\sqrt{2}}$$
$$C_a(t_2 + \tau) = -\frac{e^{+i\delta\tau/4}}{\sqrt{2}}\left[e^{-i(\delta t_1 + \phi_1)} e^{i(\delta t_2 + \phi_2)}\right]$$

同样，考虑到基态在时刻 t_3 ($C_a(t_3)$) 的振幅和激发态在同一时刻（$C_b(t_3)$）的振幅，分别等于它们在时刻 $t_2 + \tau$ 的对应振幅，即 $C_a(t_2 + \tau)$ 和 $C_b(t_2 + \tau)$，可得：

$$C_b\left(t_3 + \frac{\tau}{2}\right) = -\frac{ie^{-\delta\tau/2}}{2}\left[1 - e^{+\delta\tau/2} e^{-i\Delta\phi}\right].$$

最后，测量到激发态的概率由振幅$C_b(t_3 + \frac{\tau}{2})$给出，即：

$$\left|C_b\left(t_3 + \frac{\tau}{2}\right)\right|^2 = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\Delta\phi - \delta\tau/2\right)\right] \tag{42}$$

其中 $\Delta\phi = \phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3$。注意，式（42）表明，在 $\pi/2 - \pi - \pi/2$ 脉冲序列结束时，原子处于激发态的概率取决于与各个脉冲相关的相位（ϕ_1、ϕ_2 和 ϕ_3）。

总而言之，本节的主要目标是尽可能以易于理解的方式介绍支配原子－光相互作用的基本物理原理。文中介绍了一个两能级模型，用以阐明描述光与原子相互作用所涉及的物理和数学概念，从而帮助说明激光脉冲如何诱导原子的内态之间发生跃迁。然而，两能级框架既未考虑原子的动能，也未考虑电场的空间依赖性，因此无法完整描述量子重力仪的工作原理。在原子干涉仪中，原子整体的运动至关重要，因为激光场会产生位置相关相位

并向原子传递动量。要全面理解量子重力仪，必须在哈密顿量中加入动能项；下一节介绍的三能级模型便实现了这一点。

4 三能级系统

我们考虑一个由两个能量态（$|a\rangle$ 和 $|b\rangle$）以及一个亚稳态（$|i\rangle$）组成的三能级系统。原子最初处于基态 $|a\rangle$，动量为$\mathbf{p}$。

在与由电场描述的一对反向传播激光束相互作用后

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \cos\left(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega_1 t + \phi_1\right) + \mathbf{E}_2 \cos\left(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega_2 t + \phi_2\right) \tag{43}$$

原子吸收一个光子，瞬时跃迁至中间态 $|i\rangle$（动量为 $\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_1$），随后发射一个动量为 $\hbar\mathbf{k}_2$,的光子，同时到达激发态 $|b\rangle$，其动量为 $\mathbf{p} + \hbar$（$\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$）。对于反向传播激光束，我们假设其波矢满足条件$\mathbf{k}_1 \approx -\mathbf{k}_2$。因此，光子相互作用的有效波矢为

$$\mathbf{k}_{\text{eff}} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \approx 2\mathbf{k}_1.$$

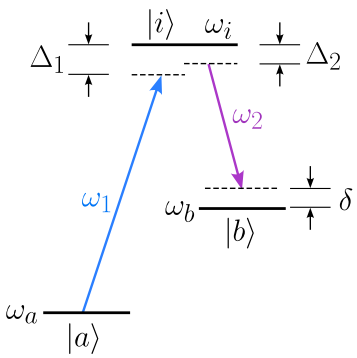

图 7 三能级系统示意图。

每个原子态都可以表示为内部自由度（能级）的希尔伯特空间与外自由度（动量）的希尔伯特空间之间的张量积：

$$\mathcal{H}_{\text{total}} = \mathcal{H}_{\text{internal}} \otimes \mathcal{H}_{\text{external}}$$

并且，根据内基底的正交归一性，我们有（Young 等人，1997）

$$|a,\, \mathbf{p}\rangle = |a\rangle \otimes |\mathbf{p}\rangle,$$

$$|i,\,\mathbf{p}\,+\,\hbar\mathbf{k}_1\rangle = |i\rangle \otimes |\mathbf{p}\,+\,\hbar\mathbf{k_1}\rangle,$$
$$|b,\,\mathbf{p}\,+\,\hbar\mathbf{k}\rangle = |b\rangle \otimes |\mathbf{p}\,+\,\hbar\,(\mathbf{k_1}-\mathbf{k_2})\rangle.$$

存在三个能级并不是与上一节相比的唯一差异。在当前情况下，电磁场显式依赖于位置，这一点可由式（43）中与 $\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{x}$ 成正比的项看出。因此，描述该系统的哈密顿量变为

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \hbar\omega_a|a\rangle\langle a| + \hbar\omega_i|i\rangle\langle i| + \hbar\omega_b|b\rangle\langle b| - \mathbf{d}\cdot\mathbf{E}. \tag{44}$$

与两能级情形相比，这个哈密顿量包含两个额外项：动能项 $\hat{\mathbf{p}}^2/2m$，以及项 $\hbar\omega_i|i\rangle\langle i|$”。前者表示粒子的动能，其动量算符为 $\hat{\mathbf{p}}$，质量为 m；后者则对应与亚稳态 $|i\rangle$ 相关的内能。

时刻 t 的量子态可写为:

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle = {} & C_{a,\mathbf{p}}\, e^{-i\left(\omega_a+\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m\hbar}\right)t}|a,\,\mathbf{p}\rangle + \\ & + C_{i,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_1}\, e^{-i\left(\omega_i+\frac{|\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_1|^2}{2m\hbar}\right)t}|i,\,\mathbf{p}\,+\,\hbar\mathbf{k}_1\rangle + \\ & + C_{b,\mathbf{p}+\hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)}\, e^{-i\left(\omega_b+\frac{|\mathbf{p}+\hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)|^2}{2m\hbar}\right)t}|b,\,\mathbf{p}\,+\,\hbar\,(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\rangle.\end{aligned}$$

将 $|\psi(t)\rangle$ 乘以 $i\hbar$ 并计算其时间导数，可得

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = {} & i\hbar\,\dot{C}_{a,\mathbf{p}}\, e^{-i\left(\omega_a+\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m\hbar}\right)t}|a,\,\mathbf{p}\rangle + \\ & + i\hbar\,\dot{C}_{i,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_1}\, e^{-i\left(\omega_i+\frac{|\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_1|^2}{2m\hbar}\right)t}|i,\,\mathbf{p}\,+\,\hbar\mathbf{k}_1\rangle + \\ & + i\hbar\,\dot{C}_{b,\mathbf{p}+\hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)}\, e^{-i\left(\omega_b+\frac{|\mathbf{p}+\hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)|^2}{2m\hbar}\right)t}|b,\,\mathbf{p}\,+\,\hbar\,(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\rangle + \\ & + \left(\hat{H}_0+\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}\right)|\psi(t)\rangle,\end{aligned}$$

其中，$\hat{H}_0$ 由式（16）给出。考虑式（44）并利用薛定谔方程，可得

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\mathrm{int}}|\psi(t)\rangle = {} & i\hbar\,\dot{C}_{a,\mathbf{p}}\, e^{-i\left(\omega_a+\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m\hbar}\right)t}|a,\,\mathbf{p}\rangle + \\ & + i\hbar\,\dot{C}_{i,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_1}\, e^{-i\left(\omega_i+\frac{|\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_1|^2}{2m\hbar}\right)t}|i,\,\mathbf{p}\,+\,\hbar\mathbf{k}_1\rangle + \\ & + i\hbar\,\dot{C}_{b,\mathbf{p}+\hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)}\, e^{-i\left(\omega_b+\frac{|\mathbf{p}+\hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)|^2}{2m\hbar}\right)t}|b,\,\mathbf{p}\,+\,\hbar\,(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\rangle.\end{aligned}$$

将前一个方程分别乘以 $\langle a|$、$\langle b|$ 和 $\langle i|$，可得：

$$\langle a|\hat{H}_{\mathrm{int}}|\psi(t)\rangle = i\hbar\,\dot{C}_{a,\mathbf{p}}\,e^{-i\left(\omega_a+\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m\hbar}\right)t}|\mathbf{p}\rangle \tag{45}$$

$$\langle i|\hat{H}_{\mathrm{int}}|\psi(t)\rangle = i\hbar\,\dot{C}_{i,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_1}\,e^{-i\left(\omega_i+\frac{|\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_1|^2}{2m\hbar}\right)t}|\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k_1}\rangle \tag{46}$$

$$\langle b|\hat{H}_{\mathrm{int}}|\psi(t)\rangle = i\hbar\,\dot{C}_{b,\mathbf{p}+\hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)}\,e^{-i\left(\omega_b+\frac{|\mathbf{p}+\hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)|^2}{2m\hbar}\right)t}|\mathbf{p}+\hbar(\mathbf{k_1}-\mathbf{k_2})\rangle \tag{47}$$

与频率 ω_1 和 ω_2 （图7）对应的单光子失谐 Δ_1 和 Δ_2 定义如下（Chu 2001；Tinsley 2019）：

$$\Delta_1 \equiv \omega_1-(\omega_i-\omega_a)+\frac{|\mathbf{p}|^2-|\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_1|^2}{2m\hbar}, \tag{48}$$

$$\Delta_2 \equiv \omega_2-(\omega_i-\omega_b)+\frac{|\mathbf{p}+\hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)|^2-|\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_1|^2}{2m\hbar}. \tag{49}$$

如上一节所述应用旋波近似，忽略方程（45）、（46）和（47）中带有快速振荡指数的项后，可得到以下微分方程：

$$i\dot{C}_{a,\mathbf{p}} = \frac{\Omega_{ai}^*}{2}C_{i,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_1}\,e^{+i\Delta_1 t}e^{-i\phi_1} \tag{50}$$

$$i\dot{C}_{b,\mathbf{p}+\hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)} = \frac{\Omega_{bi}^*}{2}C_{i,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_1}\,e^{+i\Delta_2 t}e^{-i\phi_2} \tag{51}$$

$$i\dot{C}_{i,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_1} = \frac{\Omega_{ai}}{2}C_{a,\mathbf{p}}\,e^{-i\Delta_1 t}e^{+i\phi_1}+\frac{\Omega_{bi}}{2}C_{b,\mathbf{p}+\hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)}\,e^{-i\Delta_2 t}e^{+i\phi_2} \tag{52}$$

其中 $\Omega_{bi}=\frac{\langle i|-\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}_{\hbar}{}_2|b\rangle}{\hbar}$ 和 $\Omega_{ai}=\frac{\langle i|-\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}_{\hbar}{}_1|a\rangle}{\hbar}$。

如果假设振幅项的衰变速度远慢于指数项，那么可以将振幅视为与时间无关，因此可将其移出积分号（Tinsley 2019）：

$$i\int_{t_0}^{t}\dot{C}_{i,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_1}dt' = \frac{\Omega_{ai}}{2}C_{a,\mathbf{p}}\,e^{+i\phi_1}\int_{t_0}^{t}e^{-i\Delta_1 t}+\frac{\Omega_{bi}}{2}C_{b,\mathbf{p}+\hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)}\,e^{+i\phi_2}\int_{t_0}^{t}e^{-i\Delta_2 t}dt'.$$

积分可得：

$$i\dot{C}_{b,\mathbf{p}+\hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)} = \frac{\Omega_{ai}\Omega_{bi}^*}{4\Delta_1}\left(e^{-i(\Delta_1-\Delta_2)t}-e^{i\Delta_2 t}\right)e^{i\phi}+\frac{|\Omega_{bi}|^2}{4\Delta_2}\left(1-e^{i\Delta_2 t}\right)C_{b,\mathbf{p}+\hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)} \tag{53}$$

将（53）代入方程（50）和（51）后，后两式不再依赖系数$C_{i,\ \mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_1}$，从而得到一个取决于

两个变量的耦合微分方程组：($C_{a,\ \mathbf{p}}$和$C_{b,\ \mathbf{p}+\hbar\ (\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)}$)：

$$i\dot{C}_{a,\mathbf{p}} = \frac{|\Omega_{ai}|^2}{4\Delta_1}\left(1-e^{i\Delta_1 t}\right)C_{a,\mathbf{p}} + \frac{\Omega_{bi}\Omega_{ai}^*}{4\Delta_2}\left(e^{i(\Delta_1-\Delta_2)t}-e^{i\Delta_1 t}\right)e^{-i(\phi_1-\phi_2)}C_{b,\mathbf{p}+\hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)} \tag{54}$$

$$i\dot{C}_{b,\mathbf{p}+\hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)} = \frac{\Omega_{ai}\Omega_{bi}^*}{4\Delta_1}\left(e^{-i(\Delta_1-\Delta_2)t}-e^{i\Delta_2 t}\right)e^{i(\phi_1-\phi_2)} + \frac{|\Omega_{bi}|^2}{4\Delta_2}\left(1-e^{i\Delta_2 t}\right)C_{b,\mathbf{p}+\hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)} \tag{55}$$

与第 3 节所讨论的情况不同，失谐 δ 是动量的函数，可定义为（Young 等人，1997; Tinsley 2019）：

$$\delta = \Delta_1 - \Delta_2 = \omega_1 - \omega_2 + \left(\omega_{ba} + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}_{\text{eff}}}{m} + \frac{\hbar|\mathbf{k}_{\text{eff}}|^2}{2m}\right).$$

使用这一定义并再次应用旋波近似后，表达式（54）和（55）变为：

$$i\dot{C}_{b,\mathbf{p}+\hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)} = \frac{\Omega_{ai}\Omega_{bi}^*}{4\Delta_1}e^{-i\delta t}e^{i(\phi_1-\phi_2)} + \frac{|\Omega_{bi}|^2}{4\Delta_2}C_{b,\mathbf{p}+\hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)} \tag{56}$$

$$i\dot{C}_{a,\mathbf{p}} = \frac{|\Omega_{ai}|^2}{4\Delta_1}C_{a,\mathbf{p}} + \frac{\Omega_{bi}\Omega_{ai}^*}{4\Delta_2}e^{i\Delta_1 t}e^{-i(\phi_1-\phi_2)}C_{b,\mathbf{p}+\hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)} \tag{57}$$

对于近共振的拉曼跃迁，项 Δ_1 和 Δ_2 变得近似相等，因为两次激光相互作用都涉及非常接近的内部能级以及很小的动量差。因此，$\Delta_1 \approx \Delta_2 = \Delta$。在此近似下，式（56）和（57）可以写成矩阵形式：

$$i\hbar\begin{pmatrix}\dot{C}_{b,\mathbf{p}+\hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)}\\ \\ \dot{C}_{a,\mathbf{p}}\end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix}\Omega_b^{AC} & \Omega_{\text{eff}}\,e^{-i(\delta\,t+\phi)}/2\\ \\ \Omega_{\text{eff}}^*\,e^{+i(\delta\,t+\phi)}/2 & \Omega_a^{AC}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_{b,\mathbf{p}+\hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)}\\ \\ C_{a,\mathbf{p}}\end{pmatrix}, \tag{58}$$

其中参数定义如下：

$$\begin{aligned}\Omega_b^{AC} &= \frac{\Omega_{ai}\Omega_{bi}^*}{4\Delta}\\ \Omega_a^{AC} &= \frac{\Omega_{bi}\Omega_{ai}^*}{4\Delta_2}\\ \Omega_{\text{eff}} &= \frac{\Omega_{ai}\Omega_{bi}^*}{4\Delta}\\ \phi &= \phi_2 - \phi_1\end{aligned}$$

因此，根据式 (58)，相互作用哈密顿量（$\hat{H}_{\rm int}$）可写为：

$$\hat{H}_{\rm int} = \hbar \begin{pmatrix} \Omega_b^{AC} & \Omega_{\rm eff}\, e^{-i(\delta\, t+\phi)}/2 \\ \Omega_{\rm eff}^{*}\, e^{+i(\delta\, t+\phi)}/2 & \Omega_a^{AC} \end{pmatrix}. \tag{59}$$

从哈密顿量 (59) 中减去常数能量项 $(\Omega_b^{AC}+\Omega_a^{AC})/2$（当然要乘以 2×2单位矩阵），得到：

$$\hat{H}_{\rm int} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} (\Omega_b^{AC} - \Omega_a^{AC}) & \Omega_{\rm eff}\, e^{-i(\delta\, t+\phi)} \\ \Omega_{\rm eff}^{*}\, e^{+i(\delta\, t+\phi)} & -(\Omega_b^{AC} - \Omega_a^{AC}) \end{pmatrix}. \tag{60}$$

定义 $\delta^{AC} = \Omega_b^{AC} - \Omega_a^{AC}$，并应用式 (27) 给出的旋转坐标系变换，得到：

$$\hat{H}_R = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\left(\delta - \delta^{AC}\right) & \Omega_{\rm eff}\, e^{-i\phi} \\ \Omega_{\rm eff}^{*}\, e^{+i\phi} & \left(\delta - \delta^{AC}\right) \end{pmatrix}. \tag{61}$$

该矩阵的本征值为：

$$\lambda \equiv \pm\frac{\hbar\Omega_R}{2} \equiv \pm\frac{\hbar\sqrt{|\Omega_{\rm eff}|^2 + (\delta - \delta^{AC})^2}}{2} \tag{62}$$

按照第 3 节中的方法，并使用式 (34)，我们得到以下关于 $C_{b,\ \mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{\rm eff}}$和 $C_{a,\ \mathbf{p}}$时间演化的方程：

$$C_{b,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{\rm eff}}(t_0+\tau) = e^{-i\left(\Omega_b^{AC}+\Omega_a^{AC}\right)\tau/2}\, e^{-i\delta\tau/2}\Bigg\{ C_{b,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{\rm eff}}(t_0)\left[\cos\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right) - i\cos\theta\,\sin\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right)\right] + \\ + C_{a,\mathbf{p}}(t_0) e^{-i(\delta t_0+\phi)}(-i)\sin\theta\sin\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right)\Bigg\}; \tag{63}$$

$$C_{a,\mathbf{p}}(t_0+\tau) = e^{-i\left(\Omega_b^{AC}+\Omega_a^{AC}\right)\tau/2}\, e^{+i\delta\tau/2}\Bigg\{ C_{b,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{\rm eff}}(t_0)\left[-ie^{i(\delta t_0+\phi)}\sin\theta\sin\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right)\right] + \\ + C_{a,\mathbf{p}}(t_0)\left[\cos\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right) + i\cos\theta\,\sin\left(\frac{\Omega_R\tau}{2}\right)\right]\Bigg\}. \tag{64}$$

因此，对于持续时间为 τ 的 π-脉冲，我们得到：

$$C_{b,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{\rm eff}}(t_0+\tau) = -ie^{-i\left(\Omega_b^{AC}+\Omega_a^{AC}\right)\tau/2}\, e^{-i\delta\tau/2} e^{-i(\delta t_0+\phi)} C_{a,\mathbf{p}}(t_0), \tag{65}$$

$$C_{a,\mathbf{p}}(t_0+\tau) = -ie^{-i\left(\Omega_b^{AC}+\Omega_a^{AC}\right)\tau/2}\, e^{+i\delta\tau/2}\, e^{i(\delta t_0+\phi)} C_{b,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{\rm eff}}(t_0), \tag{66}$$

对于持续时间为 $\tau/2$ 的 $\pi/2$ 脉冲，则有：

$$C_{b,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{\text{eff}}}(t_0+\tau/2)=e^{-i\left(\Omega_b^{AC}+\Omega_a^{AC}\right)\tau/2}\,e^{-i\delta\tau/2}\left[C_{b,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{\text{eff}}}(t_0)\;-\;iC_{a,\mathbf{p}}(t_0)e^{-i(\delta t_0+\phi)}\right]/\sqrt{2}, \tag{67}$$

$$C_{a,\mathbf{p}}(t_0+\tau/2)=e^{-i\left(\Omega_b^{AC}+\Omega_a^{AC}\right)\tau/2}\,e^{+i\delta\tau/2}\left[-iC_{b,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{\text{eff}}}(t_0)e^{i(\delta t_0+\phi)}+C_{a,\mathbf{p}}(t_0)\right]/\sqrt{2}. \tag{68}$$

假设在时刻 t_1，我们有 $C_{a,\,\mathbf{p}}(t_1)\;=\;1$ 和 $C_{b,\,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{\text{eff}}}(t_1)\;=\;0$，并考虑到第一个 $\pi/2$ 脉冲的持续时间为 $\tau/2$，作用时间为 t_1 至 $t_1+\tau/2$，我们得到该脉冲作用后 $C_{b,\,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{\text{eff}}}$ 和 $C_{a,\,\mathbf{p}}$ 的时间演化：

$$C_{b,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{\text{eff}}}(t_1+\tau/2)=-ie^{-i\left(\Omega_b^{AC}+\Omega_a^{AC}\right)\tau/4}\,e^{-i\delta\tau/4}e^{-i(\delta t_1+\phi_1)}/\sqrt{2}, \tag{69}$$

$$C_{a,\mathbf{p}}(t_1+\tau/2)=e^{-i\left(\Omega_b^{AC}+\Omega_a^{AC}\right)\tau/4}\,e^{+i\delta\tau/4}/\sqrt{2}. \tag{70}$$

如果假设脉冲传播过程中没有累积额外的相移（我们将在下一节讨论这一点），那么在时刻 t_2，我们有 $C_{b,\,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{\text{eff}}}(t_2)=C_{b,\,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{\text{eff}}}(t_1+\tau/2)$，以及 $C_{a,\,\mathbf{p}}(t_2)=C_{a,\,\mathbf{p}}(t_1+\tau/2)$。因此，第二个 $\pi/2$ 脉冲（发生在 t_2 和 $t_2+\tau$ 之间）之后振幅的时间演化为：

$$C_{b,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{\text{eff}}}(t_2+\tau)=-ie^{-i\left(\Omega_b^{AC}+\Omega_a^{AC}\right)3\tau/4}\,e^{-i\delta\tau/4}e^{-i(\delta t_2+\phi_2)}/\sqrt{2}, \tag{71}$$

$$C_{a,\mathbf{p}}(t_2+\tau)=-\,e^{-i\left(\Omega_b^{AC}+\Omega_a^{AC}\right)3\tau/4}\,e^{+i\delta\tau/4}\,e^{i(\delta t_2+\phi_2)}e^{-i(\delta t_1+\phi_1)}/\sqrt{2}. \tag{72}$$

最后，考虑从 t_3 到 $t_3+\tau/2$ 施加、持续时间为 $\tau/2$ 的最后一个 $\pi/2$ 脉冲，我们得到该脉冲之后 $C_{b,\,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{\text{eff}}}$ 的最终演化：

$$C_{b,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{\text{eff}}}(t_3+\tau/2)=-\frac{i}{2}e^{-i\left(\Omega_b^{AC}+\Omega_a^{AC}\right)\tau}\,e^{-i\delta\tau/2}\left[1-e^{+i\delta\tau/2}\,e^{\Delta\phi}\right]. \tag{73}$$

由此可得，第三个脉冲之后在激发态（$C_{b,\,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{\text{eff}}}$）中找到该系统的概率为：

$$\left|C_{b,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{\text{eff}}}(t_3+\tau/2)\right|^2=\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\Delta\phi-\delta\tau/2\right)\right]. \tag{74}$$

值得注意的是，公式（74）与两能级情形（第 3 节）中得到的公式（42）完全相同。这表明，在所考虑的近似条件下，三能级系统的布居概率与两能级近似所预测的相同。

5 重力测量

上一节已指出，经过 $\pi/2-\pi-\pi/2$ 个脉冲序列后，探测到原子处于激发态的概率由公式（74）给出。到目前为止，尚未考虑重力加速度的影响。因此，干涉相位 $\Delta\phi$ 由 $\pi/2-\pi-\pi/2$ 脉冲序列的相位（ϕ_1、 ϕ_2 和 ϕ_3）决定。最终的贡献——在没有重力的情况下（即 $g=0$）——来自以下三个激光脉冲所产生的相位之和：

$$\Delta\phi_{\text{laser}}=\phi_1-2\phi_2+\phi_3. \tag{75}$$

然而，在引力势存在的情况下，粒子的跃迁频率会连续变化，从而在干涉仪的输出端引入额外的相移。换言之，测得的总相位（$\Delta\phi_{\text{tot}}$）不仅取决于脉冲相位 ϕ_1、ϕ_2 和 ϕ_3，还存在由重力对粒子轨迹的作用所引起的相移 $\Delta\phi_{\text{grav}}$。因此，为便于讲解，我们将总相位写作

$$\Delta\phi_{\text{tot}}=\Delta\phi_{\text{laser}}+\Delta\phi_{\text{grav}}, \tag{76}$$

其中， $\Delta\phi_{\text{laser}}$ 由式（75）给出。

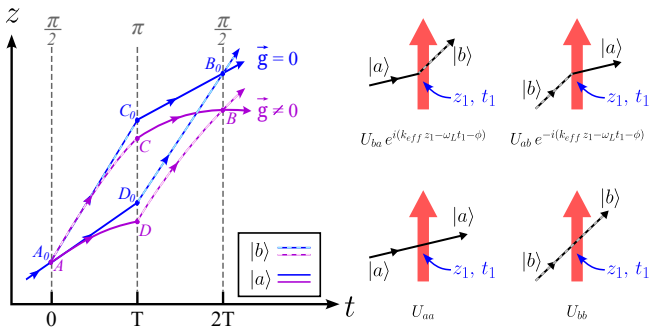

图 8 左图：示意了干涉仪中原子在 $\pi/2-\pi-\pi/2$ 脉冲序列作用下的运动轨迹，并对比了不存在（蓝线）和存在（紫线）引力场的情况。右图：展示了原子与激光束之间的四种相互作用（红色箭头）。该激光束的频率为 ω_L，波矢为 k_{eff}（相互作用发生在时刻 t_1、位置 z_1）：（左上）原子吸收一个光子，获得动量 $\hbar k_{\text{eff}}$，并从态 $|a\rangle$ 跃迁至态 $|b\rangle$；（右上）原子发射一个光子，损失动量 $\hbar k_{\text{eff}}$，并从态 $|b\rangle$ 衰变至态 $|a\rangle$；（左下）原子保持在态 $|a\rangle$；（右下）原子保持在态 $|b\rangle$。

要了解如何确定 $\Delta\phi_{\text{grav}}$，我们可以按以下方式进行。在没有重力的情况下，原子的运动轨迹是直线，因为它们在干涉仪的每个臂中都保持恒定速度。速度的变化仅来自拉曼脉冲期间光子的吸收或发射。然而，在引力场存在时，原子的速度会沿着运动轨迹连续变化，这是由于原子受到重力加速度的作用

。因此，路径在“深度 $\times$ 时间”图中变成曲线（图 8）。这种曲率会引入额外的相移，记为 $\Delta\phi_{\mathrm{path}}$ （Storey 和 Cohen-Tannoudji1994年；Bhardwaj 等人 2024），可通过以下方式确定

$$\Delta\phi_{\mathrm{path}} = \frac{S_{cl}}{\hbar}, \tag{77}$$

其中 S_{cl} 表示沿经典轨迹计算的作用量（Chu 2001）。式 (77) 的推导见附录 B；在接下来的讨论中，我们将紧密遵循 Storey 和 Cohen-Tannoudji（1994）。

从点 z_1 （时刻 t_1）到点 z_2 （时刻 t_2）的经典作用量，定义为拉格朗日量 $L(z,\ \dot{z})$ 沿原子轨迹对时间的积分：

$$S_{cl}\left(z_2\, t_2, z_1\, t_1\right) = \int_{t_1}^{t_2} L(z, \dot{z})\, dt.$$

拉格朗日量 $L(z,\ \dot{z})$ 写作

$$L(z(t), \dot{z}(t)) = \frac{1}{2} m \dot{z}(t)^2 - mgz(t),$$

其中， $z(t)$ 和 $\dot{z}(t)$ 是粒子的运动方程。粒子在初始时刻（时刻 t_1）的位置为 z_1，速度为 v_1：

$$\begin{aligned} z(t) &= z_1 + v_1(t - t_1) - \frac{1}{2} g(t - t_1)^2, \\ \dot{z}(t) &= v_1 - g(t - t_1). \end{aligned}$$

据此，经典作用量 $S_{cl}\left(z_2\, t_2,\ z_1\, t_1\right)$ 的解为（Storey 和 Cohen-Tannoudji 1994）

$$S_{cl}\left(z_2\, t_2, z_1\, t_1\right) = \frac{m}{2} \frac{\left(z_2 - z_1\right)^2}{\left(t_2 - t_1\right)} - \frac{m\, g}{2} \left(t_2 - t_1\right) \left(z_2 + z_1\right) - \frac{mg^2}{24} \left(t_2 - t_1\right)^3. \tag{78}$$

因此，根据图 8 左侧所示的几何结构，传播对两条干涉臂之间相位差的总贡献为（Storey 和 Cohen-Tannoudji 1994）：

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{\mathrm{path}} &= \left\{\left[S_{cl}\left(AC\right) - S_{cl}\left(AD\right)\right] + \left[S_{cl}\left(CB\right) - S_{cl}\left(DB\right)\right]\right\} / \hbar \\ &= \frac{m}{T\hbar} \left(z_C - z_D\right) \left[z_C + z_D - z_A - z_B - g\, T^2\right] \end{aligned}$$

请注意，我们用 z_A、 z_B、 z_C、 z_D 表示原子在不同脉冲处的位置，其标记依据它们在图 8 中的位置而定；而在无重力情况下的对应量则带有额外的索引$_0$，这在图 8 中也有所标示。根据几何考量

$$z_{D_0} - z_D = (1/2) g T^2 = z_{C_0} - z_C,$$

$$z_{B_0} - z_B = 2gT^2.$$

此外，由于 $A_0B_0C_0D_0$ 是一个平行四边形，这意味着在无重力情况下，沿两条干涉臂的相位差必然为零。因此

$$z_C + z_D - z_A - z_B - g\,T^2 = z_{C_0} + z_{D_0} - z_{A_0} - z_{B_0} = 0,$$

由此 $\Delta\phi_{\rm path} = 0$ 和

$$g\,T^2 = z_C + z_D - z_A - z_B. \tag{79}$$

$\Delta\phi_{\rm path} = 0$ 这一事实并不意味着，按照式（75）给出的 $\Delta\phi_{\rm laser}$，式（76）中定义的 $\Delta\phi_{\rm grav}$ 也为零，正如我们接下来将要讨论的那样。

我们来分析激光脉冲诱导的态跃迁。原子与拉曼脉冲之间的相互作用有四种不同的方式（图 8 右侧）：

- 原子吸收一个光子，获得动量 $\hbar k$，并从态 $|a\rangle$ 跃迁到态 $|b\rangle$;
- 原子发射一个光子，失去动量 $\hbar k$，并从态 $|b\rangle$衰变到态 $|a\rangle$;
- 激光相互作用期间，原子保持在态 $|a\rangle$；
- 原子在激光相互作用期间保持在态 $|b\rangle$。

这四个过程决定了与每次激光脉冲相互作用相关的累积相位。根据表1，与每个拉曼脉冲相关的跃迁算符 U_{ij} 可用于计算脉冲产生的累积相位。

表1 各次跃迁对应的振幅和相位。

Time	**脉冲**	**上臂**	**下臂**
$t=0$	$\pi/2$	U_{aa}	$U_{ba}e^{+i(k_{\rm eff}z_A-\phi_1)}$
$t=T$	π	$U_{ba}e^{+i(k_{\rm eff}z_C-\phi_2)}$	$U_{ab}e^{-i(k_{\rm eff}z_D-\phi_2)}$
$t=2T$	$\pi/2$	U_{bb}	$U_{ba}e^{+i(k_{\rm eff}z_B-\phi_3)}$

根据表1中的信息，上臂的最终振幅和相位为：

$$U_{aa}U_{bb}\,e^{+i[k_{\rm eff}z_C-\phi_2]},$$

而对于下臂，我们得到

$$U_{bb}\,U_{aa}\,e^{+i(k_{\rm eff}(z_A-z_D+z_B)-\phi_1+\phi_2-\phi_3)}.$$

因此，两个干涉臂中累积相位之差为：

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{tot} &= k_{\text{eff}}\,(z_C - z_B) + \omega_L T - \phi_2 + \phi_3 - [k_{\text{eff}}\,(z_A - z_D) + \omega_L T - \phi_1 + \phi_2] = \\ &= k_{\text{eff}}\,(z_C - z_B - z_A + z_D) + \phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3,\end{aligned}$$

其中 k_{eff} 的出现源于表1中所写算符 U 的相位。

利用公式（79），我们得到了所寻求的主要结果：累积总相位可表示为

$$\Delta\phi_{tot} = k_{\text{eff}} g T^2 + \phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3. \tag{80}$$

换言之，按照公式（75）给出的 $\Delta\phi_{\text{laser}}$，式（76）中定义的 $\Delta\phi_{\text{grav}}$ 可表示为 $\Delta\phi_{\text{grav}} = k_{\text{eff}} g T^2$。

重力加速度的作用沿整个原子轨迹持续存在，因此，项 $k_{\text{eff}} g T^2$ 表示在 $t = 2T$ 处累积的总相位。然而，重力加速度也会使原子共振频率发生偏移；也就是说，如果激光频率保持不变，最初与第一个 $\pi/2$ 脉冲共振的原子将无法继续与后续脉冲保持共振。

为补偿这一效应，可以对拉曼频率差施加线性啁啾（Young 等人，1997）。因此，我们将时变相位记为 $\Phi(t)$，其在每个脉冲处的取值为

$$\Phi_1(t_1) = \omega_1 t_1 - k_{\text{eff}} g\, t_1^2 + \phi_1, \tag{81}$$
$$\Phi_2(t_2) = (\omega_1 + \omega_m) t_2 - k_{\text{eff}} g\, t_2^2 + \phi_2, \tag{82}$$
$$\Phi_3(t_3) = (\omega_1 + 2\omega_m) t_3 - k_{\text{eff}} g\, t_3^2 + \phi_3. \tag{83}$$

代入 $t_1 = 0$、$t_2 = T$ 和 $t_3 = 2T$，可得

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Phi_1(0) - 2\Phi_2(T) + \Phi_3(2T) \\ &= 2\,\omega_m T - k_{\text{eff}}\, g\, T^2 + \Delta\phi_{\text{laser}},\end{aligned} \tag{84}$$

其中，ω_m 是待确定的频率。

通过对拉曼频差施加单一连续啁啾，可以维持共振：可得

$$\Delta\Phi = (\beta - k_{\text{eff}} g) T^2, \tag{85}$$

其中 $\beta = \omega_m / T$。当拉曼频率的变化率（啁啾）满足以下条件时

$$\beta = k_{\text{eff}}\, g,$$

总干涉相位变为零，即 $\Delta\Phi = 0$。在这种情况下，与原子重力加速度相关的多普勒频移被完全

由施加到拉曼光束上的啁啾补偿。因此，相位抵消条件可写为

$$\beta - k_{\mathrm{eff}}\, g = 0, \tag{86}$$

由此可直接得到（Ménoret 等人，2018）

$$g = \frac{\beta}{k_{\mathrm{eff}}}. \tag{87}$$

实验参数 τ、T 和 $\Delta\phi_0$ 是已知的，因为它们对应于受控量。在这些参数固定的情况下，可以根据激发态的跃迁概率推断三脉冲拉曼干涉序列中累积的总相位，如式（42）和式（74）所述。在实验中，该概率由施加三个激光脉冲后，在激发态检测到的原子数与原子总数之比确定。因此，通过改变频率啁啾 β，可以改变干涉相位，进而改变激发态中的最终布居数。通过控制 β，可以连续调节与干涉相关的相位。随后，通过确定使干涉相位抵消的 β 值，并应用式（87）给出的关系，即可确定局部重力加速度 g。

6 量子重力仪稳定性分析

量子重力仪的精度和稳定性取决于对影响相位测量的各种噪声源进行表征的能力，因为这些仪器获得的信号往往呈现非高斯、非平稳噪声。正如前文所述，原子干涉仪的输出是原子累积的相位（对局部重力敏感），但也会受到各种噪声源的影响，其中包括激光噪声，以及实验平台机械振动引起的相位波动（Le Gouët 等，2008年）。

在此背景下，阿伦偏差（Allan，1966年；Riley 和 Howe，2008年）是一种用于量化信号在不同时间尺度上稳定性的工具。此外，还可以在频域中获得一种互补描述，其中相位方差根据功率谱密度（PSD）计算得出。

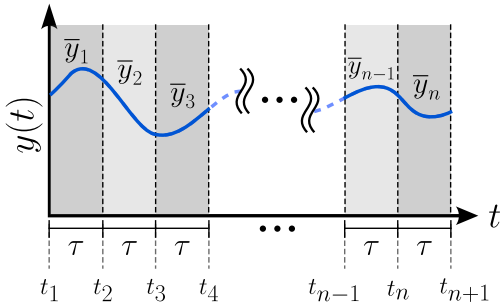

图 9 数据 $y(t)$ 的采样示意图：将数据划分为持续时间为 τ 的 n 个时间间隔，并计算每个时间间隔内各数值的平均值。也就是说，计算第 i 个时间间隔内所有 y 个样本的平均值 $\bar{y}_i$ 。

时间序列 $y(t)$ 的阿伦偏差计算基于对信号在持续时间为 τ 的窗口内各连续平均值进行统计比较。对于给定的 τ 值，总观测时间间隔被划分为 n 个相邻区块，每个区块覆盖时间间隔 $[t_i, t_{i+1}]$（Rubiola，2008年），如图9所示。随后，将信号在每个区块中的平均值定义为

$$\bar{y}_i(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_{t_i}^{t_{i+1}} y(t)\, dt \tag{88}$$

其中 $i = 1$，2，3，……，n。相应的阿伦方差为

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left[\bar{y}_{i+1}(\tau) - \bar{y}_i(\tau)\right]^2, \tag{89}$$

阿伦偏差就是 $\sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2}$。

实际上，$y(t)$ 并非连续的，而是经过采样的，因此每个时间间隔 τ 包含m 个样本。所以，第 i 个窗口的平均值为

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} y_k,$$

其中，索引 k 遍历第 i 个窗口中包含的所有样本。

方差 σ_y^2 可用频域描述如下（Peters 等人，2001；Rubiola，2008）：

$$\sigma_y^2 = \int_0^\infty H(\omega) S(\omega)\, d\omega, \tag{90}$$

其中，$H(\omega)$ 是干涉仪随频率变化的响应函数，而$S(\omega)$ 是影响相位测量的噪声源的功率谱密度。通过使用功率谱密度 $S(\omega)$，可以了解噪声

在不同频率下对整体相位不稳定性的贡献，从而深入了解重力仪的行为。

6.1 对相位变化的灵敏度

在干涉仪中测得的最终相位 Φ 并非瞬间获得，而是在仪器运行过程中逐渐累积的。因此，相位中的任何时间波动 $\delta\phi(t)$ 都会影响最终测量值。然而，干涉仪对不同时刻施加的扰动并非响应一致。对这些波动的灵敏度取决于波动发生的时间，这种时间依赖性由灵敏度函数 $g_s(t)$ 描述。

考虑在时间 t 对拉曼激光器的相位施加一个无穷小扰动 $\delta\phi(t)$。该扰动会引起跃迁概率 P （由式（42）和（74）给出）的相应变化 δP 。灵敏度函数定义为这两个量之比的极限（Le Gouët 等人，2008年；Cheinet 等人，2008 年；Tinsley 2019）：

$$g_s = 2 \lim_{\delta\phi \to 0} \frac{\delta P}{\delta \phi}. \tag{91}$$

为获得最大灵敏度，假设干涉仪工作在条纹斜率最大的点，即总相位为 $\Phi = \pi/2$ 的条件下（ Cheinet 等人，2008 年；Tinsley 2019 ）。在此状态下，跃迁概率为 $P = 1/2$，微小的相位扰动会在工作点附近产生线性且对称的变化。跃迁概率可写为

$$P = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \delta\Phi(t)\right)\right]. \tag{92}$$

利用 $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \delta\Phi\right) = \mp \sin(\delta\Phi)$ 和 $\sin\ \delta\Phi \approx \delta\Phi$，我们得到 $P \approx \frac{1 \mp \delta\Phi_{(t)}}{2}$，由此可得 $\delta P = \frac{\delta\Phi_{(t)}}{2}$，并且 $g_s = \lim_{\delta\phi \to 0} \frac{\delta\Phi_{(t)}}{\delta\phi}$。按照 Cheinet 等人（2008）的推导（更多详情请参阅该文），可得 g_s 为

$$g_s(t) = \begin{cases} \sin(\Omega_R t), & 0 < t < T/2 \\ 1, & T/2 < t < T + T/2 \\ \sin(\Omega_R (t - T)), & T + T/2 < t < T + T \end{cases} \tag{93}$$

.

在第一个脉冲和第二个脉冲之间施加的噪声分量 $\delta\phi$ 会在累积相位 Φ 中引起变化 $\delta\Phi = -\delta\phi$，从而产生 $\delta P \simeq -\delta\phi/2$。因此，在这一时间区间内，灵敏度函数取值为 -1；而在第二个脉冲和第三个脉冲之间，其取值为 $+1$（Cheinet 等，2008 年），如图 10 所示。

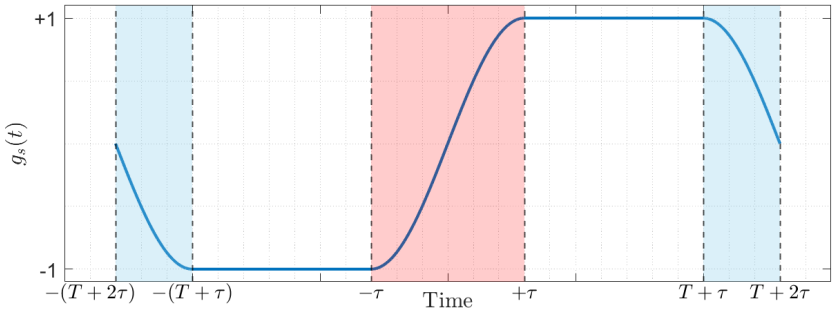

图1 灵敏度函数：蓝色阴影区域表示运行 $\pi/2$ 脉冲期间的时间间隔，红色区域则表示运行 π 脉冲期间的时间间隔。

灵敏度函数建立了时间相位波动与干涉仪中累积的总相位之间的直接关系。因此，任何影响相位的噪声源，无论来自激光、实验平台的机械振动，还是其他来源，都可以纳入灵敏度函数，以估计其对重力测量的影响。

在频域中，利用噪声功率谱密度 $S(\omega)$，灵敏度函数还可用于计算噪声对累积相位不稳定性的贡献；累积相位的阿伦方差可表示为（LeGouët 等，2008年）：

$$\sigma_\Phi^2 = \int_0^\infty \left[\omega |G(\omega)|\right]^2 S_\phi(\omega)\, d\omega, \tag{94}$$

其中，$G(\omega)$ 是灵敏度函数 $g_s(t)$ 的傅里叶变换。该公式提供了一种有力工具，可用于量化不同噪声分量的影响，包括白噪声、相位噪声和机械振动等。

6.2 量子重力仪灵敏度的噪声贡献

量子重力仪的灵敏度会受到任何能够在测得的干涉相位中产生扰动的噪声源影响。时间相位波动通过灵敏度函数耦合到总累积相位，从而产生相位方差，降低重力测量的精度。这一形式体系为描述不同噪声源的影响提供了统一框架，无论这些噪声源来自干涉系统内部还是外部。

一个特别相关的例子是重力仪安装平台的机械振动所产生的噪声。平台振动时，自由下落的原子不会随之运动。然而，若采用由干涉仪结构——尤其是拉曼光束的回射镜——定义的参考系，这种振动就等效于施加在

原子上的加速度。因此，原子与干涉仪参考系之间的这种相对运动表现为有效加速度波动，并直接耦合到测得的干涉相位（Miffre 等，2006 年）。

如 Cheinet 等（2008）所述，可以通过引入伪加速度 $\delta a(t)$ 来对此效应建模，该伪加速度通过有效波矢 k_{eff} 与干涉相位耦合。因此，累积相位的相应变化可写为

$$\delta\Phi = k_{\text{eff}} \int g_a(t)\, \delta a(t)\, dt, \tag{95}$$

其中， $g_a(t)$ 是干涉仪对加速度的灵敏度函数。该函数与相位灵敏度函数 $g_s(t)$ 直接相关，其关系为

$$g_a(t) = \frac{1}{k_{\text{eff}}} \frac{d^2 g_s(t)}{dt^2}. \tag{96}$$

在频域中，该关系使得与振动噪声相关的阿伦方差可用加速度噪声 $S_a(\omega)$ 的功率谱密度表示。对于积分时间 τ，相应的阿伦方差可写为（Le Gouët 等人，2008 年；Cheinet 等人，2008 年）

$$\sigma_a^2(\tau) = \frac{k_{\text{eff}}^2}{\tau_m} \int_0^\infty \left| \frac{G(\omega)}{\omega^2} \right|^2 S_a(\omega)\, d\omega, \tag{97}$$

其中，因子 $1/\omega^2$ 会强烈抑制高频振动的贡献。因此， $S_a(\omega)$ 的低频分量主导测量方差，而高频振动对重力加速度估计的影响则显著减弱。

7 结论

本文以教学方式介绍了超冷量子重力仪的工作原理，旨在为地球科学家提供专门面向他们的内容。我们首先简要介绍量子力学的基本概念，例如叠加原理、狄拉克符号，以及由薛定谔方程描述的时间演化。这些概念构成了对与激光场相互作用的二能级和三能级原子系统进行建模的基础。

此外，我们讨论激光脉冲如何发挥类似于电磁波分束器和反射镜的作用，最终实现一种马赫–曾德尔型原子干涉仪。在此背景下，我们阐明了干涉仪不同干涉臂上累积的相位如何与重力加速度直接相关，以及如何在干涉脉冲序列结束后，通过原子态的最终布居数在实验上获取这一信息。

分析的一个核心点在于，对于量子重力仪所采用的三能级拉曼方案，跃迁概率的最终表达式与有效二能级模型所得的表达式具有相同的函数形式。这种等价性凸显了其底层干涉原理的稳健性

也说明了为何理论研究和实际应用中反复采用简化的两能级描述。

我们进一步讨论重力如何通过与原子轨迹相关的经典作用量影响干涉相位，以及在拉曼激光器中引入频率啁啾如何补偿重力加速度引起的多普勒频移。这一过程使相位呈正比于 $k_{\mathrm{eff}} g T^2$，从而构成使用原子干涉仪进行绝对重力测量的基础。

此外，我们使用阿伦方差分析量子重力仪的稳定性，着重阐明它作为统计工具在表征仪器不同时间尺度下性能方面的作用。文中介绍了时域和频域两种表述。我们说明，干涉仪灵敏度函数如何连接时间相位波动与累积相位的方差，从而能够定量评估不同噪声源的影响，并特别关注机械振动噪声。

通过详细阐述理论基础，我们希望本文能成为地球科学家理解、使用或改进量子重力仪的实用参考。随着量子传感器日益普及并进入商业市场，它们在场测量、长期监测和重力测量应用中的影响预计将不断扩大。在此背景下，掌握其背后的量子原理正日益成为一项不可或缺的能力。

因此，我们认为这篇文章旨在邀请地球科学界深入了解基于量子物理的测量技术，促进基础物理学与地球科学交界领域的跨学科研究。

致谢。 我们感谢 Fabio Benatti 和 Ugo Marzolino 提供的有益讨论。I.R.d.S.J. 感谢“国家量子科学与技术研究所——NQSTI”项目第3专题“量子技术原子分子平台”提供的支持。

ˆ 附录A H_R的特征向量

我们在此确定以下对象的特征向量：

$$\hat{H}_R = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\delta & \Omega_{ba}\, e^{-i\phi} \\ \Omega_{ba}^{*}\, e^{+i\phi} & +\delta, \end{pmatrix} \tag{A1}$$

其本征值由 $\lambda_{\pm} = \pm \frac{\hbar\Omega_R}{2}$ 给出。

与特征值 $\lambda_+ = +\frac{\hbar\Omega_R}{2}$ 相关联的特征向量 $|\lambda_+\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 满足特征值方程：

$$\left(\hat{H}_R - \lambda_+ \boldsymbol{I}\right) |\lambda_+\rangle = \mathbf{0}. \tag{A2}$$

因此,

$$\begin{pmatrix} -(\delta+\Omega_R) & \Omega_{ba}\, e^{-i\phi} \\ \Omega_{ba}^{*}\, e^{+i\phi} & (\delta-\Omega_R) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{A3}$$

因此,

$$b = \frac{\Omega_R+\delta}{\Omega_{ba}}\, e^{+i\phi}\, a \tag{A4}$$

由公式（A10），可得

$$b = \sqrt{\frac{\Omega_R+\delta}{\Omega_R-\delta}}\, e^{+i\phi}\, a. \tag{A5}$$

考虑公式（30），并利用三角函数半角恒等式，可得:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\Omega_R+\delta}{2\,\Omega_R}}, \qquad\qquad \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\Omega_R-\delta}{2\,\Omega_R}} \tag{A6}$$

因此,

$$b = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\, e^{+i\phi}\, a \tag{A7}$$

特征向量 $|\lambda_+\rangle$ 可写为:

$$|\lambda_+\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{a e^{+i\frac{\phi}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ \sin\frac{\theta}{2}\, e^{+i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \tag{A8}$$

（其中 a 由归一化确定）。

为确定特征向量 $|\lambda_-\rangle$，我们使用相同的步骤，并采用由 $\left(\hat{H}_R - \lambda_- \boldsymbol{I}\right)|\lambda_-\rangle = \mathbf{0}$ 给出的特征值方程，由此可得

$$-b = \frac{\Omega_R-\delta}{\Omega_{ba}}\, e^{+i\phi}\, a \tag{A9}$$

and

$$-b = \sqrt{\frac{\Omega_R-\delta}{\Omega_R+\delta}}\, e^{+i\phi}\, a. \tag{A10}$$

以及 $b = -\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{-}$正弦 $\frac{\theta}{2}\, e^{+i\phi}\, a$。因此，在通过归一化固定 a 后，特征向量$|\lambda_-\rangle$ 可表示为：

$$|\lambda_-\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{a e^{+i\frac{\phi}{2}}}{\sin\frac{\theta}{2}} \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}\, e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ \\ \cos\frac{\theta}{2}\, e^{+i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \tag{A11}$$

附录 B 经典作用量产生的相位 (S_{cl})

考虑粒子从时刻 t_a 的位置 x_a 传播到时刻 t_b 的位置 x_b，描述这一运动的波函数可以用量子传播子表示。该传播子 $K(x_b, t_b;\, x_a, t_a)$ 包含系统的全部信息，并描述波函数如何在点 x_a 和 x_b 之间演化。这种演化由演化算符 $U(t_b, t_a)$ 控制；该算符作用于初始时刻 t_a 的波函数，得到较晚时刻 t_b 的波函数：

$$|\psi(x_b, t_b)\rangle = U(t_b, t_a)\, |\psi(x_a, t_a)\rangle.$$

要将此方程投影到位置基上，需将态$|\psi(x_b, t_b)\rangle$ 投影到位置本征态 $|x_b\rangle$上：

$$\langle x_b|\psi(x_b, t_b)\rangle = \langle x_b|U(t_b, t_a)\, |\psi(x_a, t_a)\rangle.$$

利用完备性关系 $\mathbf{I} = \int dx_a |x_a\rangle\langle x_a|$，前面的表达式可以改写为

$$\langle x_b|\psi(x_b, t_b)\rangle = \langle x_b|U(t_b, t_a)\, |x_a\rangle\langle x_a|\psi(x_a, t_a)\rangle.$$

将传播子定义为

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \langle x_b|U(t_b, t_a)|x_a\rangle,$$

那么，用传播子表示波函数 $\psi(x_b, t_b)$ 的方程为

$$\psi(x_b, t_b) = \int dx_a\, K(x_b, t_b; x_a, t_a)\, \psi(x_a, t_a).$$

在费曼路径积分的框架下，传播子可解释为连接点（x_a，t_a）和（x_b，t_b）的所有可能路径 Γ 之和（Shankar，1980；Feynman 等，2010）：

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \mathcal{N} \sum_{\Gamma} e^{\frac{i}{\hbar} S(\Gamma)},$$

其中，$S(\Gamma)$ 表示与路径 Γ 对应的经典作用量，

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x})\, dt,$$

是作用量，其中 L 是系统的拉格朗日量，而 $\mathcal{N}$ 是归一化因子。

在半经典区间（其特征由 $S \gg \hbar$描述）中，路径积分由经典轨迹主导。因此，波函数的演化可近似为

$$\psi(x_b, t_b) \simeq e^{\frac{i}{\hbar} S_{\mathrm{cl}}}\, \psi(x_a, t_a), \tag{B12}$$

其中， S_{cl} 是沿连接两个事件的经典轨迹计算得到的作用量。公式（B12）表明，点（x_b， t_b）处的波函数可近似为点（x_a， t_a）处的波函数乘以一个与经典作用量 $e^{iS_{\mathrm{cl}}/\hbar}$ 相关的相位因子。因此，与原子轨迹相关的相位为

$$\Delta_{\mathrm{path}} = \frac{S_{\mathrm{cl}}}{\hbar}.$$

参考文献

Allan，D. 1966. 原子频率标准统计。*IEEE*会议录 *54*(2): 221–230. https://doi.org/10.1109/PROC.1966.4634。

Antoni-Micollier, L., M. Arnal, R. Gautier, C. Janvier, V. Ménoret, J. Richard, P. Vermeulen, P. Rosenbusch, C. Majek, and B. Desruelle. 2024. 用于场测量的绝对量子重力仪和梯度仪。*IEEE*仪器与测量杂志 *27*(6): 4–10. https://doi.org/10.1109/MIM.2024.10654720。

Bhardwaj, K., S. Singh, S.P. Ram, B. Jain, V. Kumar, A. Pathak, S. Tiwari, V.B. Tiwari, and S.R. Mishra. 2024. 单激光驱动原子喷泉中的重力加速度测量。arXiv 预印本 arXiv:2405.04223。https:// arxiv.org/abs/2405.04223。

Bidel, Y., N. Zahzam, A. Bresson, C. Blanchard, A. Bonnin, J. Bernard, M. Cadoret, T. Jensen, R. Forsberg, C. Salaun, S. Lucas, M. Lequentrec-Lalancette, D. Rouxel, G. Gabalda, L. Seoane, D. Vu, S. Bruinsma, 和 S. Bonvalot。2023。利用量子传感器进行机载绝对重力测量，并与经典技术进行比较。《地球物理研究杂志：固体地球》*128*(4)。https://doi.org/10.1029/ 2022JB025921 。

Braitenberg, C. 和 A. Pastorutti。2024。通过量子技术重力任务 mocast+ 探测海山喷发：洪加汤加、法尼·毛雷及其他较小规模的喷发。《地球物理学综述》*45*(4)：1331–1361。https://doi.org/10. 1007/s10712-024-09839-7 。

Cheinet, P., B. Canuel, F. Pereira Dos Santos, A. Gauguet, F. Yver-Leduc,and A. Lan- dragin. 2008. 时域原子干涉仪中灵敏度函数的测量。*IEEE*仪器与测量汇刊 *57*(6): 1141–1148. https://doi.org/10.1109/TIM.2007.915148 .

Chen, J. 2023, Dec. 移动原子干涉重力测量原理及最先进设施分析。科学、工程与技术亮点 72: 511–521. https://doi.org/10.54097/qdmsvd27 .

Chu, S. 2001. 《原子干涉测量》。载于 R. Kaiser, C. Westbrook, and F. David（编），相干原子物质波，柏林、海德堡，页 317–370。施普林格柏林海德堡。

Cohen-Tannoudji, C., B. Diu, and F. Laloë. 1977. 量子力学。纽约，NY：Wiley。译自：量子力学。巴黎：Hermann，1973。

Cooke, A.K., C. Champollion 和 N. Le Moigne。2021年。首次评估用于未来野外实验的绝对量子重力仪（aqg#b01）。地球科学仪器、方法与数据系统 *10*(1)：65–79。https://doi.org/10.5194/ gi-10-65-2021。

Crossley, D., J. Hinderer, J.P. Boy, U. Riccardi, Y. Rogister, M. Calvo 和 B. Meurers。2013年。重力变化机制及其在地球动力学中的应用综述。物理学进展报告 *76*(4)：046101。https://doi.org/10. 1088/0034-4885/76/4/046101。D' Agostino, G., A.F.L. Germak, C. Origlia, D. Quagliotti 和 G. Barbato。2007年11月。使用imgc-02便携式绝对重力仪测量自由落体加速度。载于第*20*届力、质量与扭矩测量会议（暨第*3*届压力会议）论文集，墨西哥梅里达。会议于2007年11月举行。Dirac, P.A.M. 1930年。《量子力学原理》（第1版）。牛津：牛津大学出版社。Exail。2025年。Exail——赋能关键任务。https://www.exail.com/。访问日期：2025年12月8日。Fang, J., W. Wang, Y. Zhou, J. Li, D. Zhang, B. Tang, J. Zhong, J. Hu, F. Zhou, X. Chen, J. Wang 和 M. Zhan。2024年。经典重力测量与原子重力测量。《遥感》*16*(14)：2634。https://doi.org/10.3390/rs16142634。Feynman, R., A. Hibbs 和 D. Styer。2010年。《量子力学与路径积分》。《多佛物理学丛书》。Dover出版社。Foot, C.J. 2007年。原子物理学。牛津原子、光学与激光物理学硕士系列。牛津：牛津大学出版社。Freier, C., M. Hauth, V. Schkolnik, B. Leykauf, M. Schilling, H. Wziontek, H.G. Scherneck, J. Müller 和 A. Peters。2016年。具有前所未有稳定性的移动式量子重力传感器。《物理学杂志：会议系列》723：012050。https: //doi.org/10.1088/1742-6596/723/1/012050。Glässel, J., H. Wziontek, E. Antokoletz, E. Brachmann, R. Falk 和 J. Müller。2025年。通过与精密重力基准比较评估Exail绝对量子重力仪aqg-a02和aqg-b10。《大地测量学杂志》99：73。https: //doi.org/10.1007/s00190-025-01995-x。Griffiths, D.J. 2018年。《量子力学导论》（国际版第*2*版）（第2版）。英国埃塞克斯郡哈洛：培生。Gutenberg, B. 1914年。地震波。《哥廷根科学学会数学—物理学部通报》：125–176。Jackson, J.D. 1999年。《经典电动力学》（第3版）。纽约州纽约：Wiley。Kasevich, M. 和 S. Chu。1991年7月。利用受激拉曼跃迁进行原子干涉测量。*Phys. Rev. Lett.* 67：181–184。https://doi.org/10.1103/PhysRevLett. 67.181。

Kok, P. 2018. 《量子物理学初阶导论》. 本科生物理学讲义. 施普林格国际出版. Kusche, J., C. Strohmenger, H. Gerdener, B. Uebbing, A. Springer, Y. Ewerd-walbesloh, A. Eicker, C. Braitenberg, A. Pastorutti, R. Pail, P. Zingerle, M. Schlaak, M. Reguzzoni, L. Rossi, F. Migliaccio, and I. Daras. 2025. 量子卫星重力任务在地球科学应用中的魔力与多对星优势. 《国际地球物理学杂志》*242*(2). https://doi.org/10.1093/gji/ggaf195 . Le Gouët, J., T. Mehlstäubler, J. Kim, S. Merlet, A. Clairon, A. Landragin, and F. Pereira Dos Santos. 2008, 六月. 低噪声紧凑型原子重力仪灵敏度的极限. 《应用物理*B*辑》*92*(2): 133–144. https://doi.org/10.1007/ s00340-008-3088-1 . LeDesma, C., K. Mehling, and M. Holland. 2025. 光学晶格中的矢量原子加速度测量. 《科学进展》*11*(23): eadt7480. https://doi.org/10.1126/sciadv. adt7480 . Love, A.E.H. 1911. 《地球动力学若干问题》. 剑桥大学出版社. Miffre, A., M. Jacquey, M. Büchner, G. Trénec, and J. Vigué. 2006. 马赫-曾德尔原子干涉仪中的振动诱导相位噪声. 《应用物理*B*辑》*84*(4): 617– 625. https://doi.org/10.1007/s00340-006-2377-9 . Migliaccio, F., M. Reguzzoni, K. Batsukh, G.M. Tino, G. Rosi, F. Sorrentino, C. Brait- enberg, T. Pivetta, D.F. Barbolla, and S. Zoffoli. 2019. MOCASS：利用冷原子干涉测量地球重力场的卫星任务概念. 《地球物理学综述》*40*(5): 1029–1053. https://doi.org/10.1007/s10712-019-09566-4 . Migliaccio, F., M. Reguzzoni, G. Rosi, C. Braitenberg, G.M. Tino, F. Sorrentino, S. Mottini, L. Rossi, Ö. Koç, K. Batsukh, T. Pivetta, A. Pastorutti, and S. Zoffoli. 2023, 6. MOCAST+ 量子梯度测量卫星任务研究：采用原子钟. 《地球物理学综述》*44*(3): 665–703. https://doi.org/10.1007/ s10712-022-09760-x . Müller, J. and H. Wu. 2020, 七月. 利用量子光学传感器从太空测定地球重力场. 《大地测量学杂志》*94*(8). https://doi.org/10.1007/ s00190-020-01401-8 . Ménoret, V., P. Vermeulen, N. Le Moigne, S. Bonvalot, P. Bouyer, A. Landragin, and B. Desruelle. 2018, 八月. 使用便携式绝对量子重力仪实现低于10-9 g的重力测量. 《科学报告》*8*(1). https://doi.org/10.1038/ s41598-018-30608-1 . Niebauer, T.M., G.S. Sasagawa, J.E. Faller, R. Hilt, and F. Klopping. 1995. 新一代绝对重力仪. 《计量学》*32*(3): 159–180. https://doi.org/10.

1088/0026-1394/32/3/004 .

Orszag, M. 2024. 原子—场相互作用：半经典方法, pp. 13–23. 施普林格国际出版. Peres, A. 1995. 量子理论：概念与方法,《物理学基础理论》第57卷. 多德雷赫特：施普林格. Peters，A., K.Y. Chung, and S. Chu. 2001, 二月. 利用原子干涉测量实现高精度重力测量.《计量学》*38*(1): 25. https://doi.org/10.1088/ 0026-1394/38/1/4 . Pethick，C. and H. Smith. c2008. 稀薄气体中的玻色–爱因斯坦凝聚 / *C. J. Pethick, H. Smith* (第2版). 剑桥：剑桥大学出版社. Pitaevskij，L.P. and S. Stringari. 2016. 玻色–爱因斯坦凝聚与超流动性 / *Lev Pitaevskii, Sandro Stringari* (更正重印版). 国际物理学专著丛书. 牛津：牛津大学出版社. Pivetta，T., C. Braitenberg, and A. Pastorutti. 2022. 量子技术卫星MOCASS+的重力梯度与时间观测对湖泊、地下水文及冰川质量变化的灵敏度.《遥感》*14*(17): 4278. https://doi.org/10.3390/rs14174278 . Riley，W. and D. Howe. 2008, 2008-07-01 00:07:00. 频率稳定性分析手册. Romeshkani，M., J. Müller, A. Knabe, and M. Schilling. 2025. 面向未来卫星梯度测量的量子重力测量.《空间研究进展》*75*(2): 1653–1664. https://doi.org/10.1016/j.asr.2024.11.072 . Rossi，L., M. Reguzzoni, Ö. Koç, G. Rosi, and F. Migliaccio. 2023, 一月. 评估采用原子钟和冷原子梯度仪的量子卫星任务进行重力场恢复的效果.《量子科学与技术》*8*(1): 014009. https://doi.org/10.1088/2058-9565/aca8cc . Rovny，J., Z. Yuan, M. Fitzpatrick, A.I. Abdalla, L. Futamura, C. Fox, M.C. Cam- bria, S. Kolkowitz, and N.P. de Leon. 2022, 十二月. 利用金刚石量子传感器进行纳米尺度协方差磁力测量.《科学》*378*(6626): 1301–1305. https://doi.org/10.1126/science.ade9858. arXiv:2209.08703 [quant-ph]. Rubiola，E. 2008. 振荡器的相位噪声与频率稳定性. 剑桥射频与微波工程丛书. 剑桥大学出版社. Sakurai，J.J. and J. Napolitano. 2020. 现代量子力学 (第3版). 剑桥大学出版社.

Schilling, M., É. Wodey, L. Timmen, D. Tell, K. Zipfel, D. Schlippert, C. Schubert, E. Rasel 和 J. Müller。2020年11月。汉诺威10米原子干涉仪的重力场建模。《大地测量学杂志》*94*(12)。https://doi.org/10.1007/ s00190-020-01451-y。Schrödinger, E. 1983。《量子力学的当前状况》，载于《量子理论与测量》，Wheeler, J.A. 和 W.H. Zurek 编，152–167页。普林斯顿大学出版社。译自德文原文《量子力学的当前状况》（1935年）。Scully, M.O. 和 M.S. Zubairy。1997。《量子光学》。剑桥大学出版社。Shankar, R. 1980。《量子力学原理》。纽约，纽约州：Plenum。Storey, P. 和 C. Cohen-Tannoudji。1994。原子干涉测量的费曼路径积分方法：教程。*Journal de Physique II 4*(11)：1999–2027。https: // doi.org/10.1051/jp2:1994103。Telford, W., L. Geldart 和 R. Sheriff。1990。《应用地球物理学》。剑桥大学出版社。Tinsley, J.N. 2019。用于重力梯度测量的铷喷泉原子干涉仪的构建。博士论文，利物浦大学。DOI：https://doi.org/ 10.17638/03046742。Weng, K., Y. Zhou, D. Zhu, K. Wang, B. Wu, B. Cheng 和 Q. Lin。2021年2月。利用微型量子重力仪实现高精度重力测量。*SCIENTIASINICA Physica, Mechanica & Astronomica 51*(7)：74204。https://doi.org/10.1360/ sspma-2020-0263。Wu, X., Z. Pagel, G. D'Amico, M. Prevedelli, F. Sorrentino, Q. Bodart, L. Amand, K. Bongs 和 M.A. Kasevich。2019。使用移动原子干涉仪进行重力测量调查。《科学进展》*5*(9)：eaax0800。https://doi.org/10.1126/sciadv.aax0800。Young, B., M. Kasevich 和 S. Chu。1997。利用光脉冲进行精密原子干涉测量，载于《原子干涉测量》，Berman, P.R. 编，363–406页。圣迭戈：学术出版社。https://doi.org/10.1016/B978-012092460-8/50010-2。Zingerle, P., M. Romeshkani, J. Haas, T. Gruber, A. Güntner, J. Müller 和 R. Pail。2024。未来量子加速度计对卫星重力测量的益处。《地球与空间科学》*11*(9)：e2024EA003630。https://doi.org/10.1029/2024EA003630。