arXiv:2601.00683v1 [math.AT] 2 Jan 2026

表示簇的等变上同调环 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2,\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$

SIMON GRITSCHACHER

Abstract. 我们给出了表示簇 Hom($\mathbb{Z}^2$, GL$_n$($\mathbb{C}$)) $\subseteq$ GL$_n$($\mathbb{C}$)^2 在任意n下、以 $\mathbb{Z}$ 为系数的 GL$_n$($\mathbb{C}$)- 等变上同调环的表示。该环无挠，并且作为 H^*BGL$_n$($\mathbb{C}$)- 代数由$3n$ 个元素极小生成。关系理想是一个 n元理想关于范德蒙德多项式偶次幂的饱和。对于特征不整除 n!的域上的系数，我们还给出了 Hom($\mathbb{Z}^2$, GL$_n$($\mathbb{C}$)) 的非等变上同调环的表示。

Contents

1. 引言 1
2. 谱序列与无挠性 4
3. 生成集的确定 9
4. 关系理想的确定 14
5. 生成集的极小性 16
6. 置换 n! 18
7. Atiyah-Bott 映射的整体满射性 22
附录 A. Γ-空间与谱序列 23
参考文献 28

1. Introduction

我们将计算表示簇 Hom($\mathbb{Z}^2$, GL$_n$($\mathbb{C}$)) 的整系数等变上同调环。根据 Pettet 和 Souto 的一个结果 [21]，该空间与表示空间 Hom($\mathbb{Z}^2$, $U(n)$) 同伦等价。从几何的角度看，我们所计算的上同调可视为椭圆曲线上平坦全纯向量丛的模栈的上同调，或环面上平坦酉联络的上同调。紧曲面上平坦联络的模空间已得到广泛研究，而确定其上同调的环结构是一项核心且往往颇具难度的问题。对于亏格为 $g \geq 2$ 的曲面群，人们通常通过对秩和次数施加限制，将研究范围限定于模空间的光滑分支（例如，参见 Atiyah 和 Bott 的开创性论文 [2], 、Jeffery 的综述 [13], 或 [12, 14, 15]）。在亏格为 1 时，只有一个分支；当 $n \geq 2$ 时，由于存在可约联络，该分支是奇异的。我们采用同伦论方法（Hochschild 同调、 K-理论），而非微分几何方法。

一个表示 $\mathbb{Z}^2 \to$GL$_n$($\mathbb{C}$) 由生成元的像确定，因此 Hom($\mathbb{Z}^2$,GL$_n$($\mathbb{C}$)) 可以与交换簇等同

$$C_2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) = \{(A,B) \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})^2 \mid AB = BA\},$$

赋予由同时共轭定义的 GL$_n$($\mathbb{C}$)-作用。Baird [3]证明了一个优美的公式，用于描述由 m 个

Date: 2026年1月6日。

个可交换元素组成的空间的上同调环，其中这些元素属于一个（紧）李群 G。该描述通过 Weyl 群在极大环面上的作用所对应的不变量给出。在当前情形下，这个公式意味着

$$H^*_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}(C_2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}));\mathbb{Q}) \cong H^*(BT\times T^2;\mathbb{Q})^{S_n}\,, \tag{1.1}$$

其中 T 是一个 n维环面， S_n 是对称群。然而，这一描述仅对特征与 $|S_n|$互素的系数域成立，也未提供关系理想结构的任何信息。利用Baird公式，Kishimoto和 Takeda [16] 确定了若干经典群中可交换元素空间的有理上同调环的最小生成集，但只有在极少数情况下（大多是秩为 ≤ 2 的李群；参见例如 [5, 16, 28]）通过临时计算明确给出了完整的环结构。

本文全面解决了 C_2(GL$_n(\mathbb{C})$)的等变上同调环中的挠元问题以及关系的确定问题。我们特别证明，上述公式（1.1）在整数系数下并不成立，尽管该等变上同调环嵌入相应不变环的一个真子环中。

1.1. 我们的主定理。 令 $t_1,\dots,t_n$ 为次数为二的变量，并令 $\Lambda_n = \mathbb{Z}[t_1,\dots,t_n]^{S_n}$ 表示 $t_1,\dots,t_n$ 中对称多项式构成的环。我们将Λ_n 与 BGL$_n(\mathbb{C})$ 的上同调环相对应；在此对应下，陈类对应于初等对称多项式。令 $V = (t_j^{i-1})_{1\leq i,j\leq n}$为范德蒙德矩阵，$\Delta = \prod_{i<j}(t_j - t_i)$ 为其行列式。由于 Δ 是交错的，其平方 Δ^2 是对称多项式。令 adj$(V) = \Delta V^{-1} \in$Mat$_n(\mathbb{Z}[t_1,\dots,t_n])$ 为 V 的伴随矩阵。令 s 为另一个变量。定义对角矩阵 $D(s) =$ diag$(s/(1+t_i s))_{1\leq i\leq n}$，以及矩阵

$$M(s) = \mathrm{adj}(V)^T D(s)\mathrm{adj}(V)\,;$$

该矩阵在置换 $t_1,\dots,t_n$下不变。因此，对于任意两个 k元子集 $I,J\subseteq\{1,\dots,n\}$， $M(s)$ 的（I,J）子式定义了一个形式幂级数

$$\det(M(s)_{I,J}) \in \Lambda_n[[s]]\,.$$

事实证明，det$(M(s)_{I,J})$可被 Δ^{2k-2}整除，我们将对称多项式$c^l_{I,J}\in\Lambda_n$定义为det$(M(s)_{I,J})/\Delta^{2k-2}$中 s^l的系数。

设 $Z_1,\dots,Z_n$为次数为 $|Z_i| = 2i$的变量，并设 $X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n$为次数为 $|X_i| = |Y_i| = 2i-1$的变量。我们考虑自由分次交换Λ_n-代数

$$A := \Lambda_n\otimes\mathbb{Z}[Z_1\dots,Z_n]\otimes\textstyle\bigwedge_{\mathbb{Z}}(X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n)\,.$$

对于满足 $i_1<\dots<i_k$的子集 $I=\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq\{1,\dots,n\}$，我们将 A中的乘积 $X_{i_1}\cdots X_{i_k}$记作 X_I，类似地，将乘积$Y_{i_1}\cdots Y_{i_k}$记作 Y_I。

对于 $1\leq l\leq n$，令 $R_l\in A$ 表示元素

$$\Delta^2 Z_l - \sum_{k=1}^{l}(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\sum_{\substack{I,J\subseteq\{1,\dots,n\}\\|I|=|J|=k}} c^l_{I,J}X_IY_J\,, \tag{1.2}$$

它是次数为 2($n(n-1)+l$) 的齐次元素。元素 $R_1,\dots,R_n$ 生成理想 $(R_1,\dots,R_n)\subseteq A$。我们考虑其关于 Δ^2 的饱和；这是由 $\mathcal{J}=\{a\in A\mid\exists m\geq 0$ 定义的理想 $\mathcal{J}\subseteq A$： $\Delta^{2m}a\in(R_1,\dots,R_n)\}$。

定理 1.1。 对于每个 $n\geq 0$，存在一个 Λ_n-代数同构

$$H^*_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}(C_2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}));\mathbb{Z}) \cong A\big/\mathcal{J}\,,$$

其中 $\mathcal{J}$ 是理想 $(R_1,\dots,R_n)$ 关于 Δ^2 的饱和。

此外，该代数无法由少于 $3n$ 个元素生成。

我们的证明将表明，这些生成元是从直接极限C_2(GL$_\infty$($\mathbb{C}$)) $=$ colim$_n C_2$(GL$_n$($\mathbb{C}$)) 拉回的，并且可以用陈类来解释（见备注 6.7）。定理 1.1 的一些直接推论如下：

(1) 将 Δ^2 取逆后， C_2(GL$_n$($\mathbb{C}$)) 的等变上同调是一个总秩为 2^{2n} 的自由$\Lambda_n[\Delta^{-2}]$-模；事实上，它同构于

$$\Lambda_n[\Delta^{-2}] \otimes \bigwedge_{\mathbb{Z}}(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)\,.$$

(2) C_2(GL$_n$($\mathbb{C}$)) 的等变上同调是 Λ_n-无挠的，特别是作为阿贝尔群无挠。这由前一项以及理想 $\mathcal{J}$ 是 Δ^2-饱和的这一事实推出，因此不存在 Δ^2-挠元。(3) 设 T 是酉群 $U(n) \subseteq$ GL$_n$($\mathbb{C}$) 的极大环面。那么， C_2(GL$_n$($\mathbb{C}$)) 的 T- 等变上同调是 $H^*(BT;\, \mathbb{Z})$-无挠的。这由前一条以及 Λ_n 是一个自由$H^*(BT;\, \mathbb{Z})$-模这一事实推出。

Hom($\mathbb{Z}^2$,GL$_n$($\mathbb{C}$)) 的非等变上同调具有复杂的挠元，而从等变上同调到非等变上同调的映射一般并非满射。这反映出，尽管等变上同调是系数取自 $\mathbb{Q}$ 的自由模，但它并非系数取自 $\mathbb{Z}$ 的自由 Λ_n-模。本研究的一个核心动机是探索理解这些挠元的方法；例如，利用 Eilenberg-Moore 谱序列，而这需要了解等变上同调作为 Λ_n-模的结构。

自然会问，我们的结果在多大程度上可以推广到 GL$_n$($\mathbb{C}$) 以外的情形。虽然我们不知道对于任意的 G，Hom($\mathbb{Z}^2, G$) 的等变上同调是否无挠，但在非模情形下，上同调环的代数结构确实可以推广。在这种情况下，我们的结果可以解释为对式 (1.1) 右侧所出现的不变代数的一个显式表示。范德蒙行列式 Δ 对应于$U(n)/T$ 的 T-等变欧拉类；对于其他紧李群 G，这一作用则由 G/T 的欧拉类承担。编码这些关系的矩阵将由 $H^*(BT)^W$ 中基本不变量的高阶海森矩阵取代。这些推广将在别处讨论。

1.2. 论文概要。 我们简要概述证明策略和论文结构。由于 C_2(GL$_n$($\mathbb{C}$)) 形变收缩到酉群 $U(n) \subseteq$GL$_n$($\mathbb{C}$) 中交换对的空间上，我们将计算 $U(n)$-等变上同调环 $C_2(U(n)) = \{(A,\ B) \in U(n)^2 \mid AB = BA\}$。

在第2节中，我们构造一个谱序列，它以多项式代数的迭代 Hochschild 同调为起点，并收敛到 $C_2(U(n))$ 的等变同调（命题 2.7）。

该谱序列用于证明，极大环面$T \hookrightarrow U(n)$的包含映射将 $C_2(U(n))$ 的等变上同调嵌入自由分次交换代数 $H^*(BT \times T^2;\, \mathbb{Z})$ 中（推论 2.12）。

在第3节中，我们利用谱序列证明映射到直接极限 $C_2(U(n))_{hU(n)} \to C_2(U)_{hU}$ 在上同调上是满射的。这为我们提供了一组方便的生成元，因为从同伦角度看，$C_2(U)_{hU}$就是乘积 $BU^2 \times U^2$（推论 3.2）。

在命题 3.7 中，我们证明 $3n$ 生成元已经足够。它们在嵌入到自由分次交换代数后的像在 (3.7) 和 (3.8) 中给出。至此，我们已将等变上同调环描述为自由分次交换代数的一个具体子代数。

在第 4 节中，我们通过形式代数运算确定定理 1.1 的关系理想 $\mathcal{J}$ （引理 4.3）。

在第5节中，我们通过证明所展示的生成集是最小的，完成主定理的证明。在补遗 5.4 中，我们证明，反转 n 后，最小生成集的大小是 $3n-1$，而不是 $3n$。

在第6节中，我们确定了 $C_2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ 的非等变上同调环的一个表示，其系数取自特征为零或与 $n!$ 互素的域（定理6.3）。推论6.5给出了一种算法，用于计算关系理想的加法基。

在第7节中，我们通过讨论 Atiyah–Bott [2], 所考察的自然映射的满射性，对我们的结果作出规范理论诠释。该映射从规范群分类空间的上同调映至 $C_2(U(n))$ 的等变上同调。

附录 A 解释了我们所用谱序列的一些细节。

2. A spectral sequence and the absence of torsion

2.1. 预备知识。 我们的目标是计算 $C_2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ 的等变上同调环。我们将证明一些适用于更一般空间 $C_m(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ 的中间结果；该空间由 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 中两两可交换元素组成的 m 元组构成。显然，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 形变收缩到其极大紧子群——酉群 $U(n)$。而不那么显然的是，Pettet–Souto [21] 的一个非平凡定理指出，对易簇也有同样的结论：对于所有 m，$C_m(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ 形变收缩到 $C_m(U(n))$。与一般线性群对应的空间相比，空间 $C_m(U(n))$ 更易处理，因此我们所有的计算都将在 $C_m(U(n))$ 上进行。

为方便起见，我们回顾一下定义：

$$C_m(U(n)) = \{(A_1, \dots, A_m) \in U(n)^m \mid \forall i,j : A_iA_j = A_jA_i\}\,.$$

令 $U(m)$ 通过同时共轭作用于 $C_n(U(m))$，并记

$$C_m(U(n))_{hU(n)} = EU(n) \times_{U(n)} C_m(U(n))$$

为同伦轨道空间；根据定义，其上同调是 $C_m(U(n))$ 的 $U(n)$-等变上同调。注意，$C_m(U(n))$ 与 $C_m(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ 之间的同伦等价可延拓到同伦轨道空间，即

$$C_m(U(n))_{hU(n)} \simeq C_m(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))_{h\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}\,.$$

因此，相应的等变上同调环同构，我们所做的所有计算对酉情形和复数情形同样适用。我们的主要结果将针对 $C_m(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ 陈述，因为这个空间在代数几何中更受关注，不过这实际上只是个人偏好。

一个重要的视角是同时考察所有 n 对应的空间 $C_m(U(n))$，因为这能揭示一些原本隐藏的额外结构。我们定义

$$\mathscr{C}_m = \bigsqcup_{n\geq 0} C_m(U(n))_{hU(n)}\,. \tag{2.1}$$

可以将 $\mathscr{C}_m$ 视为某个拓扑对称幺半范畴的分类空间（即在 $\mathbb{Z}^m$ 上的有限维酉表示在直和运算下构成的范畴）；因此它是一个 $\mathbb{E}_\infty$-空间，也就是说，是一个具有相容同伦交换结构的 H-空间。我们将在少数几个地方使用这一结构，而不作过多解释；可参阅 [17] 或 [23]。

我们有时还会用到另一个事实：对于所有 $m, n \geq 0$，$C_m(U(n))$ 都是路径连通的。这是因为在酉群中，任何阿贝尔子群都包含在某个极大环面中。

我们的第一个目标是构造一个谱序列，它从多项式代数的迭代 Hochschild 同调出发，并收敛到 $\mathscr{C}_m$ 的同调。

2.2. **Loday 构造**。我们回顾 Loday 构造和高阶 Hochschild 同调，参见例如 [22, 第 1.7] 节。设 k 为交换环，令 dgca_k 为 k上的微分分次交换代数范畴。Fin，Set 和 Fin_*，Set_* 分别表示（有限）集合范畴和（有限）带基点集合范畴。带基点集合 $S \in \mathsf{Set}_*$ 的基点记为 $* \in S$；有限带基点集合 $\{*, 1, \dots, n\}$ 记为 $\langle n \rangle$。单点集合（或空间）也记为 $*$。

构造 2.1 （例如 [22]）。固定 $A \in \mathsf{dgca}_k$。由于 dgca_k 具有所有余极限，且范畴 Set 由 $*$ 在余极限下生成，我们可以作如下构造：

(1) 我们令 $\mathcal{L}(A)\colon \mathsf{Set} \to$ 微分分次交换代数$_k$ 为满足 $\mathcal{L}(A)(*) = A$的、保持余极限的唯一函子（在自然同构意义下）。(2) 若 $S \in \mathsf{Set}_*$，则 $\mathcal{L}(A)(S)$ 在 A下自然地是一个微分分次交换代数（即配备一个典范映射 $A \to \mathcal{L}(A)(S)$）。设 A 是 k上的增广代数。则我们定义 $\mathcal{L}(A;\, k) : \mathsf{Set}_* \to$ 微分分次交换代数$_k$，其定义为 $\mathcal{L}(A;\, k)(S) = k \otimes_A \mathcal{L}(A)(S)$。

具体而言，对于 $\{1, \dots, n\} \in \mathsf{Fin}$

$$\mathcal{L}(A)(\{1, \dots, n\}) \cong A^{\otimes n}$$

是将 A 与自身作 n重张量积（在 k上）的选择。对于 $S \in \mathsf{Set}$

$$\mathcal{L}(A)(S) \cong \operatorname{colim}_{\substack{U \subseteq S \\ \text{finite}}} \mathcal{L}(A)(U)\,,$$

其中余极限遍历 S的所有有限子集。若 S 是一个带基点集合，且 A 是 k上的增广代数，则 $\mathcal{L}(A;k)(S)$ 是微分分次交换代数$_k$ 范畴中的推出，其图表为

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathcal{L}(A)(S) \\ \downarrow & & \\ k & & \end{array}$$

它仍然是相对于 k 增广的，因为 $\mathcal{L}(A)(S)$ 总是相对于 A 增广的（通过唯一的映射 $S \to *$）。

令 sSet（分别地，sSet_*）表示（带基点的）单纯集合范畴。对于 $X \in \mathsf{sSet}$，逐层计算 $\mathcal{L}(A)$ 在 X 上的值，得到一个单纯微分分次交换代数

$$\mathcal{L}(A)(X) := \{[q] \mapsto \mathcal{L}(A)(X_q)\}\,.$$

这个单纯微分分次交换代数可以视为一个带双微分的双分次 k-模

$$(\mathcal{L}(A)(X), d_h, d_v)$$

其“水平”微分 d_h：$\mathcal{L}(A)(X_q)_p \to \mathcal{L}(A)(X_q)_{p-1}$ 来自 A，而“垂直”微分 d_v：$\mathcal{L}(A)(X_q)_p \to \mathcal{L}(A)(X_{q-1})_p$ 通常定义为该单纯微分分次交换代数的面映射的交错和。我们将这个双复形的全复形记为

$$|\mathcal{L}(A)(X)| = \mathrm{Tot}^{\oplus}(\mathcal{L}(A)(X))\,.$$

对于 $X \in \mathsf{sSet}_*$，$|\mathcal{L}(A;k)(X)|$ 的定义类似。

例 2.2. 设 A 是一个分次交换 k-代数（微分为平凡微分）。设 S^1 是圆的标准单纯形模型，其中总共只有两个非退化单形。那么 $|\mathcal{L}(A)(S^1)|$ 就是通常的霍赫希尔德复形

[18, §1.1.1]。在（单纯形）次数 n 上，它是张量积 $A^{\otimes(n+1)}$，而微分 d: $A^{\otimes(n+1)} \to A^{\otimes n}$ 由下式给出

$$\begin{aligned} d(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = (-1)^{n+(|a_0|+\cdots+|a_{n-1}|)|a_n|} a_n a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \\ + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \,. \end{aligned}$$

定义 2.3。设 $X \in$ 属于单纯集合范畴，且 A 是交换环 k 上的微分分次交换代数。

(1) A 在 X 上的（未导出）*Hochschild* 同调定义为

$$\mathrm{HH}_*^X(A) = H_*(|\mathcal{L}(A)(X)|)\,.$$

(2) 若 X 带基点，且 A 是 k 上增广的，则取系数于 A-模 k 的（未导出）Hochschild 同调定义为

$$\mathrm{HH}_*^X(A;k) = H_*(|\mathcal{L}(A;k)(X)|)\,.$$

设 $X \in$ 属于单纯集合范畴，并用 X_+ 表示添加一个不交基点后的单纯集合 X。那么，若 A 是 k 上增广的，则存在自然同构

$$\mathcal{L}(A;k)(X_+) \cong \mathcal{L}(A)(X)\,; \tag{2.2}$$

这由 $\mathcal{L}(A;k)(X_+)$ 的定义及同构可得

$$\mathcal{L}(A)(X_+) \cong A \otimes \mathcal{L}(A)(X)$$

在 A 下（回想一下，$\mathcal{L}(A)$ 保持余极限以及 $X_+ = X \sqcup *$）。

$|\mathcal{L}(A)(X)|$ 和 $|\mathcal{L}(A;k)(X)|$ 在 洗牌积 下也都是定义在 k 上的微分分次交换代数（经典情形参见 [18, §4.2]；增广情形参见定义 A.10；$\mathcal{L}(A)(X)$ 的洗牌积定义类似）。因此，洗牌积赋予 $\mathrm{HH}_*^X(A)$（以及基点／增广情形下的 $\mathrm{HH}_*^X(A;k)$）一个分次交换 k-代数结构。

例 2.4。设 k 是一个交换环。为简单起见，假设 $2 \neq 0$ 属于 k，因此，如果 y 是一个奇数次变量，外代数 $\bigwedge_k(y) = k[y]/(y^2)$ 就是一个自由分次交换代数。设 x 是一个偶数次生成元，σx 是一个次数为 $|\sigma x| = |x| + 1$ 的生成元。定义一个分次交换 k-代数的映射

$$k[x] \otimes \bigwedge\nolimits_k(\sigma x) \to |\mathcal{L}(k[x])(S^1)| \tag{2.3}$$

通过将 $x \mapsto x$（在单纯次数 0 中）和 $\sigma x \mapsto 1 \otimes x$（在单纯次数 1 中）映射过去。容易验证（见例 2.2），$1 \otimes x$ 是一个闭链，因此，如果将左侧出现的代数赋予零微分，则（2.3）是一个微分分次交换代数的映射。一个经典事实（例如，这是霍赫希尔德-科斯祖尔-罗森伯格定理[18, 定理 3.4.4]的推论）是，该映射在同调上是一个同构。这不仅表明

$$\mathrm{HH}_*^{S^1}(k[x]) \cong k[x] \otimes \bigwedge\nolimits_k(\sigma x)$$

它们作为分次代数是同构的，而且还表明 Loday 构造 $\mathcal{L}(k[x])(S^1)$ 是形式的（参见 [4, 命题 2.1]）。这将在下文的推论 2.6 中发挥重要作用。

例 2.5。现在设 x 是一个奇数次生成元，σx 是一个次数为 $|\sigma x| = |x| + 1$ 的生成元。那么分次代数之间存在一个同构

$$\mathrm{HH}_*^{S^1}(\textstyle\bigwedge_k(x)) \cong \bigwedge_k(x) \otimes \Gamma_k[\sigma x]\,,$$

其中 $\Gamma_k[\sigma x]$ 是一个除幂多项式代数。计算如下：令 $A = \bigwedge_k(x)$。霍赫希尔德复形 $|\mathcal{L}(A)(S^1)|$ 与归一化霍赫希尔德复形拟同构（见 [18, §1.1.14]），后者在

$$A \otimes \bar{A}^{\otimes n} \cong k\{1 \otimes x^{\otimes n}, x^{\otimes(n+1)}\}$$

次数 n；这里 $\bar{A} = (x) \subseteq A$。由于 $x^2 = 0$，我们有 $d(x^{\otimes(n+1)}) = 0$；又由于 $|x|$ 是奇数，$= (-1)^{n+(n-1)|x|^2} + 1 = 0$，因为 $|x|$ 是奇数。由此可知，映射 $\bigwedge_k(x) \otimes \Gamma_k[\sigma x] \to \mathrm{HH}_*^{S^1}(A)$ 将 $x \mapsto x \in A \otimes \bar{A}^{\otimes 0} = A$ 和 $\gamma_m(x) \mapsto 1 \otimes x^{\otimes m} \in A \otimes \bar{A}^{\otimes m}$ 映到对应元素，是一个同构。显然，它相对于归一化霍赫希尔德复形上的洗牌积是乘法的。事实上，由于洗牌积可以降到归一化霍赫希尔德链上，该计算给出了微分分次交换代数之间的一条拟同构折线，连接 $|\mathcal{L}(\bigwedge_k(x))(S^1)|$、归一化霍赫希尔德复形和 $\bigwedge_k(x) \otimes \Gamma_k[\sigma x]$（参见 [4, 命题 2.3]）。

下面，我们用 S^1 表示标准单纯形圆，并用 $(S^1)^m$ 表示乘积单纯集。在对 A 作出适当的平坦性假设时，Loday 构造 $\mathcal{L}(A)(X)$ 在拟同构意义下只取决于 X 的弱同伦类型；我们不会用到这一事实。

不过，我们将用到这样一个事实：有界下、逐次数平坦的微分分次交换代数之间的拟同构 $A \to B$ 会诱导拟同构 $\mathcal{L}(A)(X) \to \mathcal{L}(B)(X)$。这是因为平坦微分分次交换代数的张量积保持拟同构，而单纯微分分次交换代数之间逐层的拟同构会在全复形上诱导拟同构（可利用全复形同调的标准谱序列论证；为保证谱序列收敛，我们使用有界性）。

我们还将使用自然同构

$$\mathcal{L}(A \otimes B)(X) \cong \mathcal{L}(A)(X) \otimes \mathcal{L}(B)(X) \tag{2.4}$$

对于任意两个微分分次交换代数 A 和 B 以及任意单纯集合 X；要证明这一点，只需在有限带基点集合上验证，而这可直接由构造得出。

推论 2.6. 设 x 是一个偶数次变量。那么，存在一个同构

$$\mathrm{HH}_*^{(S^1)^2}(\mathbb{Z}[x]) \cong \mathbb{Z}[x] \otimes \textstyle\bigwedge_{\mathbb{Z}}(\sigma x, \tau x) \otimes \Gamma_{\mathbb{Z}}[\rho x]\,,$$

其中次数分别为 $|\sigma x| = |\tau x| = |x| + 1$ 和 $|\rho x| = |x| + 2$。

证明。 Eilenberg-Zilber 定理给出了一个微分分次交换代数之间的拟同构

$$|\mathcal{L}(\mathbb{Z}[x])((S^1)^2)| \simeq \mathcal{L}(|\mathcal{L}(\mathbb{Z}[x])(S^1)|)(S^1)$$

（例如，参见 [6, 推论 2.4。4]）。根据例 2.4，并利用平坦微分分次交换代数之间的拟同构会诱导出 Loday 构造的拟同构这一事实，我们得到一个拟同构 $\mathcal{L}(|\mathcal{L}(\mathbb{Z}[x])(S^1)|)(S^1) \simeq |\mathcal{L}(\mathbb{Z}[x] \otimes \bigwedge_{\mathbb{Z}}(\sigma x))(S^1)|$。现在，由同构 (2.4)、K¨unneth 同构以及例 2.5 中的计算，即可得到所述结论。□

2.3. **谱序列**。 令 $\mathscr{C}_m$ 如 (2.1) 中所定义。

命题 2.7。 设 x_0、x_1、... 是次数为 $|x_i| = 2i$ 的变量。对于每个 $m \geq 0$ 和任意交换环 k，存在一个代数的第一象限谱序列

$$E^2 = \mathrm{HH}_*^{(S^1)^m}(k[x_0, x_1, x_2, \dots]) \Longrightarrow H_*(\mathscr{C}_m; k)\,.$$

如果 k 是特征为零的域，则该谱序列在 E^2 页退化。

E^2 页的双分次如下：垂直次数是来自变量 x_i 的分次的“内部”次数，而水平次数（记作 $p \geq 0$）是为 Hochschild 同调群 $\mathrm{HH}_p^{(S^1)^m}(\quad)$ 编号的“单纯”次数。

证明。 该谱序列是我们在 [9, 命题 5.5]中得到的谱序列的特殊情形。但我们会提供更多细节：令 ku 为复 K 理论的 Γ-空间（见例 A.3）。首先，证明 $\mathscr{C}_m$ 与 $ku((S^1)^m_+)$同伦等价，其中 $(S^1)^m_+ = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, S^1)_+$ 是 $\mathbb{Z}^m$ 的特征群，并且

添加了一个不交基点。这是 [9, 命题 3.6], 的特殊情形，而几乎相同的陈述见于 [10, 命题 2.4]。

ku 的底空间是 $\bigsqcup_{n\geq 0} BU(n)$，其同调是由第一陈类各次幂的对偶元生成的多项式代数 $k[x_0, x_1, \dots]$。由此可得， $H_*(ku(\langle 1\rangle); k)$是 k-平坦的。由于 ku 是特殊且余纤维的，命题 A.7 给出一个代数谱序列

$$E^2 = \mathrm{HH}^{(S^1)_+^m}(k[x_0, x_1, x_2, \dots]; k) \Longrightarrow H_*(\mathscr{C}_m; k)\,.$$

利用同构 (2.2)，即可得到所声称的谱序列。

现在假设 k 是特征为零的域。证明谱序列退化的方法是证明 E^2页与收敛项同构： E^2页可以像推论 2.6 中那样，通过迭代计算得到；计算依据是例 2.4 和例 2.5 的结果、特征为零的域上的除幂多项式代数同构于多项式代数这一事实，以及自由分次交换代数是内在形式的这一事实。例如，

$$\begin{aligned}\mathrm{HH}_*^{(S^1)^m}(k[x_0]) &\cong H_*(\mathcal{L}(|\mathcal{L}(k[x_0])(S^1)|)((S^1)^{m-1}))\\ &\cong H_*(\mathcal{L}(k[x_0]\otimes \textstyle\bigwedge_k(\sigma x_0))((S^1)^{m-1}))\\ &\cong \mathrm{HH}_*^{(S^1)^{m-1}}(k[x_0])\otimes \mathrm{HH}_*^{(S^1)^{m-1}}(\textstyle\bigwedge_k(\sigma x_0))\,,\end{aligned}$$

此外，

$$\mathrm{HH}_*^{(S^1)^{m-1}}(\textstyle\bigwedge_k(\sigma x_0)) \cong \mathrm{HH}_*^{(S^1)^{m-2}}(\textstyle\bigwedge_k(\sigma x_0)) \otimes \mathrm{HH}_*^{(S^1)^{m-2}}(\Gamma_k[\sigma^2 x_0])\,.$$

现在使用 $\Gamma_k[\sigma^2 x_0] \cong k[\sigma^2 x_0]$，并继续归纳。设 $\mathscr{S}_*$ 是一个分次集合，其在次数 l 上有 $\binom{m}{l}$ 个元素。那么 $\mathrm{HH}_*^{(S^1\ ^m}{}_)(k[x_0])$ 是由 $\mathscr{S}_*$ 生成的自由分次交换 k- 代数。因此，对次数为 $2i$ 的变量 x_i 重复这一论证， E^2-页是由分次集合 $\bigsqcup_{i\geq 0}\Sigma^{2i}\mathscr{S}_*$ 生成的自由分次交换 k-代数，其中 Σ^{2i} 是分次平移 $2i$。

另一方面，正如在 [9, 第6节2], 中所解释的，如果 k 是零特征域，那么奇异 k- 链 $C_*(\mathscr{C}_m; k)$ 是由奇异 k- 链 $C_*(BS^1 \times (S^1)^m; k)$ 生成的自由 $\mathbb{E}_\infty$-k- 代数。这个自由 $\mathbb{E}_\infty$-k-代数的同调是由分次 k-模 $H_*(BS^1 \times (S^1)^m; k)$ 生成的自由分次交换代数。由于后者同构于由 $\bigsqcup_{i\geq 0}\Sigma^{2i}\mathscr{S}_*$ 生成的自由 k-模，我们得出 E^2-页与收敛项同构。□

推论 2.8. 对于所有 $n \geq 0$， $U(n)$-等变同调 $C_2(U(n))$ 的整数系数同调无挠。

证明. 考虑命题 2.7 中关于 $m = 2$ 和 $k = \mathbb{Z}$ 的谱序列，

$$E^2 = \mathrm{HH}_*^{(S^1)^2}(\mathbb{Z}[x_0, x_1, x_2, \dots]) \Longrightarrow H_*(\mathscr{C}_2; \mathbb{Z})\,.$$

根据推论 2.6， E^2 页无挠。因此，任何非零微分在张量乘以 $\mathbb{Q}$ 后仍会给出非零微分。这意味着谱序列在 E^2 页退化，因为正如我们在命题 2.7 中所指出的，在 $\mathbb{Q}$ 上情况也是如此。由此可得 $H_*(\mathscr{C}_2; \mathbb{Z}) \cong E^2$，因此它无挠。□

注2.9。当 n 和 m 充分大时，$C_m(U(n))$的等变同调含有挠元，因此推论 2.8 不能推广到任意m， n。事实上，我们在 [9] 中证明，对于每个 m，空间 $C_m(U(n))$ $_{hU(n)}$ 都满足同调稳定性，其系数取 $\mathbb{Z}$，且 n趋于无穷。其稳定同调是 BU 和 U的若干高阶连通覆盖的乘积的同调；出现的覆盖的连通度取决于 m。如果 $m \geq 7$，那么其中一些覆盖具有挠元 [27] ，因此当 n足够大时， $C_m(U(n))^{hU(n)}$ 也具有挠元。

假设 k 是特征为零的域，我们来描述 $\mathscr{C}_m$每个路径连通分支的同调。取一个极大环面 $T \subseteq U(n)$。那么 $T \cong (S^1)^n$ ，且 Weyl 群 S_n 通过置换各因子作用于 T。包含映射 $T \hookrightarrow U(n)$诱导出一个映射

$$f_n \colon BT \times T^m = (T^m)_{hT} \to C_m(U(n))_{hU(n)} .$$

空间 $\mathscr{C}_m$ 具有一个 H-空间结构，其分支映射

$$C_m(U(n))_{hU(n)} \times C_m(U(l))_{hU(l)} \to C_m(U(n+l))_{hU(n+l)}$$

由酉矩阵的块和诱导而来。利用这些映射，我们可以将映射 f_n 另述如下：令 $\iota_1 \colon BS^1 \times (S^1)^m \hookrightarrow \mathscr{C}_m$ 为相应不交直和项的包含映射（因此，根据 $BS^1 \times (S^1)^m$ ，我们实际上指的是$BU(1) \times C_m(U(1))$）。那么 f_n 是以下映射的复合

$$(\iota_1)^{\times n} \colon (BS^1 \times (S^1)^m)^{\times n} \to \mathscr{C}_m^{\times n}$$

其中 $\mathscr{C}_m^{\times n} \to \mathscr{C}_m$ 是 $\mathscr{C}_m$的 H-空间结构中的乘法。

事实上，等价 $\mathscr{C}_m \simeq ku((S^1)_+^m)$（参见命题 2.7 的证明）以及 ku 是一个特殊 Γ- 空间这一事实，意味着 $\mathscr{C}_m$ 上的 H- 空间结构延拓为一个 $\mathbb{E}_\infty$- 结构。这意味着 f_n 经过同伦S_n-轨道分解

$$(BT \times T^m)_{hS_n} \to C_m(U(n))_{hU(n)} .$$

在命题 2.7 的证明中，我们注意到 $C_*(\mathscr{C}_m; k)$ 是一个由 $C_*(BS^1 \times (S^1)^m; k)$ 生成的自由 $\mathbb{E}_\infty$-k-代数。这意味着所显示的映射在同调上诱导出一个同构：

引理 2.10. 设 k 为特征为零的域。对所有 n、$m \geq 0$，极大环面 $T \subseteq U(n)$ 的包含映射诱导一个同构

$$H_*(BT \times T^m; k)_{S_n} \cong H_*^{U(n)}(C_m(U(n)); k) .$$

注 2.11. 引理 2.10 的结论也可通过一种截然不同的方式，由 Baird [3, 定理 3.5] 得出。

取特例 $m = 2$，可得以下推论。

推论 2.12. 对每个 $n \geq 0$， f_n 都诱导一个嵌入

$$f_n^* \colon H_{U(n)}^*(C_2(U(n)); \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^*(BT \times T^2; \mathbb{Z})^{S_n} .$$

证明。 根据引理 2.10，包含映射 $T \subseteq U(m)$ 诱导一个同构

$$H_{U(n)}^*(C_2(U(n)); \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H^*(BT \times T^2; \mathbb{Q})^{S_n} .$$

由于 $H_{U(n)}^*(C_2(U(n)); \mathbb{Z})$ 根据推论 2.8 是无挠的，结论得证。 □

因此，通过计算 f_n^* 的像，可以得到对 $H^*_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}(C_2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})); \mathbb{Z})$ 的初步描述。

3. Determination of a generating set

本节中，所有（上）同调群均取整数系数。我们的目标是计算推论 2.12 中嵌入 f_n^* 的像。回顾一下， $\mathscr{C}_2$ 是一个 $\mathbb{E}_\infty$-空间的底空间。令

$$\gamma \colon \mathscr{C}_2 \to \mathscr{C}_2^{gp}$$

表示其群完备化。根据群完备化定理 [20]， γ 诱导出一个同构

$$H_*(\mathscr{C}_2)[x_0^{-1}] \cong H_*(\mathscr{C}_2^{gp}) ,$$

其中， $x_0 \in H_0(\mathscr{C}_2)$ 是分支幺半群 $\pi_0(\mathscr{C}_2) \cong \mathbb{N}$ 的生成元。

引理 3.1。 $H_*(\mathscr{C}_2)$ 在每个次数上都是有限生成的自由 $\mathbb{Z}[x_0]$-模。

证明。 我们考虑命题 2.7 的谱序列。根据推论 2.6， E^∞ 页为 $E^\infty \cong \bigotimes_{n\geq 0}(\mathbb{Z}[x_n]\otimes \bigwedge_{\mathbb{Z}}(\sigma x_n,\ \tau x_n)\otimes \Gamma_{\mathbb{Z}}(\rho x_n))$，它是一个按次数有限生成的自由 $\mathbb{Z}[x_0]$-模。该谱序列是代数的谱序列，尤其是 $\mathbb{Z}[x_0]$-模的谱序列。由于 E^∞ 页是自由 $\mathbb{Z}[x_0]$-模，因此不存在扩张问题，并且 $H_*(\mathscr{C}_2)\cong E^\infty$ 作为 $\mathbb{Z}[x_0]$-模。□

推论 3.2。 诱导映射 $\gamma^*\colon\ H^*(\mathscr{C}_2^{gp})\to H^*(\mathscr{C}_2)$ 是满射。

证明。 根据引理 3.1 和群完备化定理，该映射

$$\gamma_*\colon\ H_*(\mathscr{C}_2)\to H_*(\mathscr{C}_2^{gp})$$

在每个次数上都是自由阿贝尔群的直和项的包含映射。因此，其分次对偶是满射的。□

我们考虑复合映射

$$BT\times T^2\xrightarrow{f_n} C_2(U(n))_{hU(n)}\subseteq \mathscr{C}_2\xrightarrow{\gamma}\mathscr{C}_2^{gp}\,.$$

根据推论 3.2， f_n^* 的像等于（γf_n）*的像。使用 γf_n 而不是 f_n 的优势在于，$\mathscr{C}_2^{gp}$ 比 $\mathscr{C}_2$更容易描述。令 ku 表示连通复 K-理论谱。由等价关系 $\mathscr{C}_2\simeq ku$（（S^1）$^2_+$），或者由 [17], ，可知存在一个等价关系

$$\mathscr{C}_2^{gp}\simeq \Omega^\infty(ku\wedge (S^1)^2_+)\,, \tag{3.1}$$

其中 Ω$^\infty$ 表示一个谱的底空间。这里我们滥用记号，将 ku也表示连通复 K-理论谱，而不仅仅是对其进行建模的 Γ-空间。该等价关系意味着

$$\mathscr{C}_2^{gp}\simeq \mathbb{Z}\times BU\times U^2\times BU$$

（详见下文）。对 H^*（BU）和 H^*（U）的多项式生成元和外代数生成元作任意选择，都为 im（（γf_n）*）$\cong H^*_{U(n)}$（C_2（U（n））） 提供了一组自然的生成元。

记 $f_{n,\ \infty}=\gamma f_n$。在同伦意义下，我们可以将 $f_{n,\ \infty}$ 表示为如下复合映射

$$BT\times T^2=(BS^1\times (S^1)^2)^{\times n}\xrightarrow{f_{1,\infty}^{\times n}}(\mathscr{C}_{2,1}^{gp})^{\times n}\to \mathscr{C}_{2,n}^{gp}\,, \tag{3.2}$$

其中 $\mathscr{C}_{2\,k,}^{gp}$ 表示由 $k\in\mathbb{Z}\cong\pi_0(\mathscr{C}_2^{gp})$ 索引的 $\mathscr{C}_2^{gp}$ 的路径连通分支，并且最后一个映射是 $\mathbb{E}_\infty$-空间 $\mathscr{C}_2^{gp}$ 中的乘法。因此，这基本上将我们的任务归结为描述映射

$$f_{1,\infty}^*\colon\ H^*(\mathscr{C}_{2,1}^{gp})\to H^*(BS^1\times (S^1)^2)\,,$$

或者等价地，映射 $(f_{1,\ \infty})_*$：$H_*(BS^1\times(S^1)^2)\to H_*(\mathscr{C}_{2\,1,}^{gp})$。为此，我们将利用 $\mathscr{C}_2^{gp}$ 上的进一步结构。

赋予 S^1 其自然的阿贝尔群结构。它在 $ku\wedge(S^1)^2_+$ 上诱导出一个 ku-代数结构。由 [17] 可知， $U(n)$ 中的直和与张量积在 $\mathscr{C}_2$ 上定义了一个 $\mathbb{E}_\infty$-环空间结构，因而也在 $\mathscr{C}_2^{gp}$ 上定义了该结构，使得 (3.1) 是 $\mathbb{E}_\infty$-环空间的一个等价。包含映射 ι_1：$BS^1\times(S^1)^2\to\mathscr{C}_2$ 关于 $\mathscr{C}_2$ 上的乘法 $\mathbb{E}_\infty$- 结构（即由张量积给出的 $\mathbb{E}_\infty$-结构）是一个 H-映射。这意味着 $f_{1,\ \infty}$ 也是一个 H-映射。因此，若记

$$(f_{1,\infty})_*\colon\ \Gamma_{\mathbb{Z}}[x]\otimes\bigwedge_{\mathbb{Z}}(a,b)\to H_*(\mathscr{C}_{2,1}^{gp})\,,$$

其中 $x\in H_2(BS^1)$ 和 $a,\ b\in H_1((S^1)^2)$ 是生成元，因此只需计算 $(f_{1,\ \infty})_*$ 在 $x,\ a$ 和 b 上的作用。尽管 $(f_{n,\ \infty})^*$ 的像与所作的任何具体选择无关，但我们将在过程中对生成元作出各种选择；这将

最终为我们提供所选生成元 $H^*(BU)$ 和 $H^*(U)$ 的像的显式公式。

映射 $f_{1,\infty}$ 可识别为由包含映射诱导的映射

$$BS^1 \times (S^1)^2 \cong C_2(U(1))_{hU(1)} \to C_2(U)_{hU}$$

。映射 $C_2(U(1)) \to C_2(U)$ 根据 [7, 定理 1.1] 是一个 π_1-同构。因此，$f_{1,\infty}$ 在 H_1 上是同构。取生成元

$$a, b \in H_1(BS^1 \times (S^1)^2)\,. \tag{3.3}$$

令 a_1，$b_1 \in H_1(\mathscr{C}_{2\,0,}^{gp})$ 分别为在复合映射同构下对应于 a 和 b 的类

$$H_1(BS^1 \times (S^1)^2) \xrightarrow[\cong]{(f_{1,\infty})_*} H_1(\mathscr{C}_{2,1}^{gp}) \xrightarrow[\cong]{\cdot x_0^{-1}} H_1(\mathscr{C}_{2,0}^{gp})\,.$$

利用 Hurewicz 同态

$$h\colon \pi_*(\mathscr{C}_{2,0}^{gp}) \to H_*(\mathscr{C}_{2,0}^{gp})$$

我们通过 $a_1 = h(\mu)$ 和 $b_1 = h(\nu)$ 定义生成元 μ，$\nu \in \pi_1(\mathscr{C}_{2\,0,}^{gp})$。令 $\beta \in \pi_2(\mathscr{C}_2^{gp})$ 为 Bott 元在单位 $\mathbb{Z} \times BU \to \mathscr{C}_2^{gp}$ 下的像。

引理 *3.3. </style>*存在一个 $\mathbb{Z}[\beta]$-代数同构

$$\pi_*(\mathscr{C}_2^{gp}) \cong \mathbb{Z}[\beta] \otimes \textstyle\bigwedge_{\mathbb{Z}}(\mu, \nu)\,.$$

证明。这由 (3.1) 和 K¨unneth 同构推出。 □

由于 $\pi_*(\mathscr{C}_2^{gp})$ 是一个自由的 $\mathbb{Z}[\beta]$-模，生成元 μ, ν 和 $\mu\nu$ 诱导出 $\mathbb{E}_\infty$-($\mathbb{Z} \times BU$)-模的一个分裂

$$\mathscr{C}_2^{gp} \simeq (\mathbb{Z} \times BU) \times BU \times U^2\,; \tag{3.4}$$

在该分裂下，单位元 $\mathbb{Z} \times BU \to \mathscr{C}_2^{gp}$ 对应于第一个因子的包含映射，μ, ν 对应于 $\pi_1(U^2)$ 的生成元，而 $\mu\nu$ 对应于 $\pi_2(BU)$ 的一个生成元。必要时改变 a（以及由此改变 μ）的符号后，我们可以假设 $\mu\nu$ 是 Bott 元。

令 $\mathbb{Z}[x_0^{-1}, x_n \,|\, n \geq 0] \subseteq H_*(\mathscr{C}_2^{gp})$ 为 $\mathbb{Z} \times BU$ 的同调环，其中如前所述，x_n 是由包含映射 $BU(1) \to \{1\} \times BU$ 产生的生成元。定义类 $q_1 = h(\mu\nu) \in H_2(\mathscr{C}_{2\,0,}^{gp})$。$\mathscr{C}_2^{gp}$ 的同调是一个 Hopf 环（关于 Hopf 环的概念，参见例如 [25]）。我们用 $\circ$ 表示 Hopf 环乘法，也就是由乘法 $\mathbb{E}_\infty$结构在 $H_*(\mathscr{C}_2^{gp})$ 上诱导的乘法。对每个$n \geq 1$，定义

$$q_n := x_{n-1} \circ q_1, \quad a_n := x_{n-1} \circ a_1, \quad b_n := x_{n-1} \circ b_1\,.$$

根据 (3.4)，类 $q_1, q_2, \ldots$ 生成 $H_*(BU)$ 的本原元子空间，而 $a_1, a_2, \ldots$ 和 $b_1, b_2, \ldots$ 是外代数$H_*(U^2)$的本原生成元。

设 $x \in H_2(BS^1)$ 为满足 $(f_{1,\infty})_*(x) = x_1 \in H_*(\mathscr{C}_{2\,1,}^{gp})$ 的生成元，因而也满足 $(f_{1,\infty})_*(\gamma_n(x)) = x_n$，其中 $\gamma_n(x)$ 是 x 的第 n 个除幂。由于 $f_{1,\infty}$是一个 H-映射，诱导在同调上的映射

$$(f_{1,\infty})_*\colon \Gamma_{\mathbb{Z}}[x] \otimes \textstyle\bigwedge_{\mathbb{Z}}(a, b) \to H_*(\mathscr{C}_{2,1}^{gp})$$

是关于 $\circ$-乘积的环同态。

引理 3.4. 我们有 $(f_{1,\infty})_*(ab) = x_0 q_1 + x_0 a_1 b_1$ 属于 $H_2(\mathscr{C}_{2\,1,}^{gp})$。

证明。 利用 ∘ 的分配律，我们得到

$$(f_{1,\infty})_*(ab) = (x_0a_1) \circ (x_0b_1) = x_0(a_1 \circ b_1) + x_0a_1b_1 .$$

由于 h: $\pi_*(\mathscr{C}^{gp}_{2\,0,})$ $\to H_*(\mathscr{C}^{gp}_{2\,0,})$ 关于 ∘ 是环同态，因此我们有 $a_1 \circ b_1 = h(\mu) \circ h(\nu) = h(\mu\nu) = q_1$。 □

令 c_1, c_2, ... 和 d_1, d_2, ... 表示 (3.4) 中两个 BU 因子的陈类。从现在起，我们使用分裂 (3.4) 将 $\mathscr{C}^{gp}_{2\,1,}$ 的上同调环与 $BU \times U^2 \times BU$ 的上同调环等同。因此，

$$H^*(\mathscr{C}^{gp}_{2,1}) = \mathbb{Z}[c_n, d_n \mid n \geq 1] \otimes \textstyle\bigwedge_{\mathbb{Z}}(\alpha_n, \beta_n \mid n \geq 1) , \tag{3.5}$$

其中 α_n 和 β_n 分别定义为与 x_0a_n 和 x_0b_n 对偶。令 t, u, $v \in H^*(BS^1 \times (S^1)^2)$ 为分别与 x, a, b 对偶的生成元。

引理 3.5. 对于每个 $n \geq 0$，映射 $(f_{1,\infty})^*$: $H^*(\mathscr{C}^{gp}_{2\,1,}) \to H^*(BS^1 \times (S^1)^2)$ 将 $\alpha_n \mapsto t^{n-1}u$ （根据对称性， $\beta_n \mapsto t^{n-1}v$）和 $d_n \mapsto (-1)^{n-1}t^{n-1}uv$ 映射到.....

证明。 类 $(f_{1,\infty})^*(\alpha_n)$ 完全由克罗内克配对确定

$$\lambda_a = \langle (f_{1,\infty})^*(\alpha_n), \gamma_{n-1}(x)a \rangle \quad \text{and} \quad \lambda_b = \langle (f_{1,\infty})^*(\alpha_n), \gamma_{n-1}(x)b \rangle .$$

为计算 λ_a，我们注意到 $(f_{1,\infty})_*(\gamma_{n-1}(x)a) = x_{n-1} \circ (x_0a_1)$，根据霍普夫环中的分配律，这等于 $\sum_i x_ia_{n-i}$。由于 α_n 是 x_0a_n 的对偶，可得 $\lambda_a = 1$。同理可知 $\lambda_b = 0$，因此 $(f_{1,\infty})^*(\alpha_n)$ 是与 $\gamma_{n-1}(x)a$ 对偶的类，即 $t^{n-1}u$。

为了计算 $(f_{1,\infty})^*(d_n)$，我们采用相同的方法。这个类由以下配对确定：

$$\lambda_\emptyset = \langle (f_{1,\infty})^*(d_n), \gamma_n(x) \rangle \quad \text{and} \quad \lambda_{ab} = \langle (f_{1,\infty})^*(d_n), \gamma_{n-1}(x)ab \rangle .$$

由于 $(f_{1,\infty})_*(\gamma_n(x)) = x_n$，这是第一个 BU 因子的一个同调类，而 d_n 是第二个 BU 因子的一个陈类，因此我们得到 $\lambda_\emptyset = 0$。另一方面，根据引理 3.4，我们有

$$(f_{1,\infty})_*(\gamma_{n-1}(x)ab) = x_{n-1} \circ (x_0q_1 + x_0a_1b_1) = x_0q_n + f ,$$

其中 f 是由形如 x_iq_{n-i} 且满足 $i \geq 1$ 的项以及对任意 i 均与 q_i 无关的项线性组合而成； d_n 在这些项上的取值均为零。因此， $\lambda_{ab} = \langle d_n, x_0q_n \rangle$。在 $\mathbb{Z} \times BU \times U^2 \times BU$ 中更换道路分支后，这就是第 n 个陈类 $d_n \in H^{2n}(BU)$ 在 $q_n \in H_{2n}(BU)$ 上的取值。陈特征表明，Bott 元的 n 次幂的 n 阶陈数为 $(-1)^{n-1}(n-1)!$。由于 $h(\beta^{n-1}\mu\nu) = x_1^{\circ(n-1)} \circ q_1 = (n-1)!q_n$，且 $\beta^{n-1}\mu\nu$ 是 $\pi_{2n}(BU)$ 中 Bott 元的 n 次幂，我们得到 $\lambda_{ab} = \langle d_n, x_0q_n \rangle = (-1)^{n-1}$。由此可知，$(f_{1,\infty})^*(d_n)$ 是与 $(-1)^{n-1}\gamma_{n-1}(x)ab$ 对偶的类，也就是 $(-1)^{n-1}t^{n-1}uv$。 □

最后，我们计算映射 $(f_{n,\infty})^*$: $H^*(\mathscr{C}^{gp}_{2\,n,}) \to H^*(BT \times T^2)$。对于所有 n，我们将上同调环 $H^*(\mathscr{C}^{gp}_{2\,n,})$ 与 (3.5) 中的上同调环等同起来（通过乘以 x_0 所诱导的等价）。记

$$H^*(BT \times T^2) \cong \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] \otimes \Lambda(u_1, \dots, u_n) \otimes \Lambda(v_1, \dots, v_n) \tag{3.6}$$

其中对于所有 $1 \leq i \leq n$， $|t_i| = 2$ 且 $|u_i| = |v_i| = 1$。 $\mathbb{E}_\infty$-空间 $\mathscr{C}^{gp}_2$ 中的 n 重乘积 $(\mathscr{C}^{gp}_{2\,1,})^{\times n} \to \mathscr{C}^{gp}_{2,n}$ 诱导出一个迭代余乘积

$$\psi^{(n-1)}\colon H^*(\mathscr{C}^{gp}_{2,n}) \to H^*(\mathscr{C}^{gp}_{2,1})^{\otimes n} .$$

为了表示这个余乘积，引入形式幂级数 $d(s) - 1 = \sum_{l\geq 1} d_ls^l$、 $\alpha(s) = \sum_{l\geq 1} \alpha_ls^{l-1}$ 和 $\beta(s) = \sum_{l\geq 1} \beta_ls^{l-1}$ 会比较方便。于是

$$\psi^{(n-1)}(d(s)) = d(s)^{\otimes n} \text{ and } \psi^{(n-1)}(\alpha(s)) = \sum_{i=1}^{n} 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \alpha(s) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$$

其中第 i个加项在第 i个位置上有 $\alpha(s)$；对于 $\beta(s)$，情况类似。

引理 3.6。 映射$(f_{n,\infty})^*: \quad H^*(\mathscr{C}_{2,n}^{gp}) \to H^*(BT\times T^2)$ 满足

$$(f_{n,\infty})^*(\alpha(s))=\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i}{1-t_is},\quad \text{and}\quad (f_{n,\infty})^*(d(s))=\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{su_iv_i}{1+t_is}\right),$$

（由对称性，$(f_{n,\infty})^*(\beta(s)) =\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i}{1-t_is}$） 。

证明。 由 (3.2)，映射 $(f_{n,\infty})^*$ 是 $\psi^{(n-1)}$ 与 $(f_{1,\infty}^*)^{\otimes n}$的复合。若在 i个张量因子中的第$f_{1,\infty}^*$ 个因子上应用 $(f_{1,\infty})^*$，则使用引理 3.5 中的公式，但其中变量 t_i，u_i，v_i 由 i编号。由此得到：

$$(f_{n,\infty})^*(\alpha(s))=\sum_{l\geq 1}\sum_{i=1}^{n}t_i^{l-1}u_is^{l-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i}{1-t_is},$$

对于 $\beta(s)$，类似地也可得到。我们还得到

$$(f_{n,\infty})^*(d(s))=\prod_{i=1}^{n}\left(1+\sum_{l\geq 1}(-1)^{l-1}t_i^{l-1}u_iv_is^l\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{su_iv_i}{1+t_is}\right).$$

□

还需计算陈类 c_l的像。设 π: $\mathscr{C}_2^{gp}\to\mathbb{Z}\times BU$ 为投影。图表

$$\begin{array}{ccc} BT\times T^2 & \xrightarrow{f_{n,\infty}} & \mathscr{C}_{2,n}^{gp} \\ \downarrow{\scriptstyle \text{proj.}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ BT & \xrightarrow{\text{incl.}} & \{n\}\times BU \end{array}$$

在同伦意义下可交换。因此

$$(f_{n,\infty})^*(c_l)=e_l(t_1,\dots,t_n)\in H^*(BT)^{S_n}\subseteq H^*(BT\times T^2)$$

是第 l 个初等对称多项式。

对于 $l\geq 1$，记 X_l 和 Y_l 分别为形式幂级数 $(f_{n,\infty})^*(\alpha(s))$ 和 $(f_{n,\infty})^*(\beta(s))$ 展开式中 s^{l-1} 的系数，并记 Z_l 为 $(f_{n,\infty})^*(d(s))$ 展开式中 s^l 的系数。这些都是变量 $t_1,\dots,t_n,u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n$ 的表达式，在同时置换这三组变量下保持对称。

命题 3.7。 推论 *2.12* 中嵌入 f_n^* 的像作为 Λ_n-代数由 X_l、Y_l 和 Z_l （$l\leq n$）生成。

证明。 已有结果表明，$(f_{n,\infty})^*$ 的像作为 Λ_n-代数由 X_l, Y_l 和 Z_l （$l\geq 1$）生成。还需证明取$l\leq n$即已足够。为此，考虑恒等式

$$\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^ke_ks^k\right)\left(\sum_{l\geq 1}X_ls^{l-1}\right)=\left(\prod_{i=1}^{n}(1-t_is)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i}{1-t_is}\right).$$

右边是一个关于 s的次数为 $\leq n-1$的多项式。因此，左边对于每个 $l\geq n$，s^l 的系数都必须为零。但对于 $l\geq n$，这个系数是 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^ke_kX_{l+1-k}$。由此递推关系可知，所有 X_l （$l>n$）都属于

Λ_n线性张成的 X_l （ $l \le n$）。同样的论证也适用于 Y_l。对于 Z_l，同样考虑恒等式

$$\left(\sum_{k=0}^{n} e_k s^k\right)\left(1+\sum_{l\ge 1} Z_l s^l\right) = \left(\prod_{i=1}^{n}(1+t_i s)\right)\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{s u_i v_i}{1+t_i s}\right).$$

右侧是一个关于 s 的次数为 $\le n$ 的多项式。左侧这意味着对所有 $l > n$，递推关系为 $\sum_{k=0}^{n} e_k Z_{l-k}$。□

展开引理 3.6 中的幂级数，得到以下显式公式:

$$X_l = \sum_{i=1}^{n} t_i^{l-1} u_i\,, \quad (\text{by symmetry, } Y_l = \sum_{i=1}^{n} t_i^{l-1} v_i)\,. \tag{3.7}$$

Z_l 的公式要复杂一些。

定义 3.8。对于整数 $1 \le k_1 < \cdots < k_j \le n$，变量 t_{k_1}，…，t_{k_j}的次数为 $q \ge 0$ 的完全齐次对称多项式 定义为

$$h_q(t_{k_1}, \ldots, t_{k_j}) = \sum_{\substack{(i_1,\cdots,i_j)\in\mathbb{N}^j,\\ i_1+\cdots+i_j=q}} t_{k_1}^{i_1}\cdots t_{k_j}^{i_j}\,.$$

利用对所有 $1 \le i \le n$ 均有 $(u_i v_i)^2 = 0$ 这一事实，经过简单计算可得

$$Z_l = \sum_{k=0}^{\min(l,n)} (-1)^{l-k} \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,n\}\\ |I|=k}} h_{l-k}(t_I)\prod_{j\in I} u_j v_j\,, \tag{3.8}$$

其中 $t_I = \{t_j\}_{j\in I}$。

4. Determination of the ideal of relations

现在我们将从第3节推导生成元 X_1、……、X_n、Y_1、……、Y_n 和 Z_1、……、Z_n 之间的关系。设

$$B = H^*(BT\times T^2) = \mathbb{Z}[t_1,\ldots,t_n]\otimes \bigwedge\nolimits_{\mathbb{Z}}(u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_n)\,.$$

回忆 (3.7)，$X_l = \sum_{i=1}^{n} t_i^{l-1} u_i$ 和$Y_l = \sum_{i=1}^{n} t_i^{l-1} v_i$。对于 $1 \le l \le n$，利用范德蒙德矩阵 $V = (t_j^{i-1})_{1\le i,\, j\le n}$，可以简洁地写成

$$(X_1,\ldots,X_n)^T = V(u_1,\ldots,u_n)^T \quad \text{and} \quad (Y_1,\ldots,Y_n)^T = V(v_1,\ldots,v_n)^T\,.$$

如果 Δ 是 V 的行列式，而 $\mathrm{adj}(V) = \Delta V^{-1}$ 是 V 的伴随矩阵，那么我们可以将第一个恒等式重写为 $\Delta(u_1, \ldots, u_n)^T = \mathrm{adj}(V)(X_1, \ldots, X_n)^T$，第二个恒等式相应地也可如此改写。

对于一个 $n\times n$ 矩阵 E 和 k元子集 I，$J \subseteq \{1,\ldots,n\}$ 我们用$E_{I,\,J}$表示 E 的 $k\times k$ 子矩阵，该子矩阵由 E 中行索引分别属于 I 和 J的行与列组成。

引理 4.1. 设 $K \subseteq \{1,\ldots,n\}$ 是一个 k元子集。在 B 中有

$$\Delta^{2k}\prod_{j\in K} u_j v_j = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \sum_{\substack{I,J\subseteq\{1,\ldots,n\}\\ |I|=|J|=k}} \det(\mathrm{adj}(V)_{I,K}^{T}\,\mathrm{adj}(V)_{K,J}) X_I Y_J\,.$$

此外，右侧 $X_I Y_J$ 的系数可被 Δ^{2k-2} 整除。

证明。 为简化记号，我们将 $A=$ 记为 adj(V)。现在得到

$$\begin{aligned}\Delta^{2k}\prod_{j\in K}u_jv_j &= \prod_{j\in K}\left(\sum_{i=1}^n A_{j,i}X_i\right)\left(\sum_{i=1}^n A_{j,i}Y_i\right)\\ &= (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\prod_{j\in K}\left(\sum_{i=1}^n A_{j,i}X_i\right)\prod_{j\in K}\left(\sum_{i=1}^n A_{j,i}Y_i\right),\end{aligned}$$

但注意， $\prod_{j\in K}(\sum_{i=1}^n A_{j,\ i}X_i) = \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\dots,n\}\\|I|=k}}\det(A_{K,\ I})X_I$，第二个乘积同理。这就得到了所述公式。

由 Jacobi 互补子式引理可知， Δ^{2k-2} 具有整除性（例如参见 [1, §42]）；该引理特别指出，矩阵 E 的伴随矩阵的 $k\times k$ 子式可被 $\det(E)^{k-1}$整除。□

Define $D(s)=\mathrm{diag}(s/(1+t_1s),\dots,s/(1+t_ns))$ and $M(s)=\mathrm{adj}(V)^TD(s)\mathrm{adj}(V)$.

引理 4.2。 在 B 中，成立以下恒等式:

$$\Delta^2\sum_{l\geq 0}Z_ls^l=\sum_{k=0}^n(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\sum_{\substack{I,J\subseteq\{1,\dots,n\}\\|I|=|J|=k}}\det(M(s)_{I,J})/\Delta^{2k-2}X_IY_J\,.$$

证明。 记 $A=\mathrm{adj}(V)$。由引理 3.6，我们有

$$\begin{aligned}\Delta^{2k}\sum_{l\geq 0}Z_ls^l &= \Delta^{2k}\prod_{i=1}^n\left(1+\frac{su_iv_i}{1+t_is}\right)\\ &= \sum_{k=0}^n\sum_{\substack{K\subseteq\{1,\dots,n\}\\|K|=k}}\left(\Delta^{2k}\prod_{j\in K}u_jv_j\right)\underbrace{\prod_{j\in K}\left(\frac{s}{1+t_js}\right)}_{=\det(D(s)_{K,K})},\end{aligned}$$

利用引理 4.1，这变为

$$\sum_{k=0}^n(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\sum_{\substack{I,J\subseteq\{1,\dots,n\}\\|I|=|J|=k}}\underbrace{\left(\sum_{\substack{K\subseteq\{1,\dots,n\}\\|K|=k}}\det(A_{I,K}^TD(s)_{K,K}A_{K,J})\right)}_{=\det(M(s)_{I,J})}X_IY_J\,.$$

我们来解释为什么括号中的项等于 $\det(M(s)_{I,J})$。根据柯西-比内公式，若 E 和 F 是 $n\times n$ 矩阵，且 $I,J\subseteq\{1,\dots,n\}$ 是 k 元子集，则 $\det((EF)_{I,J})$ $=\sum_{K\subseteq\{1,\dots,n\}}\det(E_{I,K}F_{K,J})$。由于$^{|K|=k}$ $D(s)$ 是对角矩阵，因此这意味着

$$\det(D(s)_{K,K}A_{K,J})=\det((D(s)A)_{K,J})\,.$$

再将其应用于 $E=A^T$ 和 $F=D(s)A$，即可证明该结论。

最后，除以 Δ^{2k-2}，即可得到引理的断言。 □

通过比较引理 4.2 的恒等式中 $1\leq l\leq n$ 时 s^l 的系数，即可得到引言（1.2）中的关系 $R_1,\dots,R_n$。

现在，我们将 $X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n,Z_1,\dots,Z_n$ 视为次数为 $|X_i|=|Y_i|=2i-1$ 和 $|Z_i|=2i$ 的形式变量。令

$$A:=\Lambda_n\otimes\mathbb{Z}[Z_1\dots,Z_n]\otimes\textstyle\bigwedge_{\mathbb{Z}}(X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n)\,.$$

并令 $\rho\colon\ A\to B$ 为 Λ_n 代数的映射，它将生成元替换为公式 (3.7) 和 (3.8) 中的显式公式。

引理 4.3. ρ 的核是定理 *1.1* 中的 Δ^2-饱和理想 $\mathcal{J}$。

证明。考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & A[\Delta^{-2}] & \longrightarrow & A[\Delta^{-2}]/(R_1,\dots,R_n) \\ \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\rho}} \\ B & \longrightarrow & B[\Delta^{-1}] & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}[t_1,\dots,t_n][\Delta^{-1}] \otimes \bigwedge_{\mathbb{Z}}(X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n) \end{array}$$

左侧的两条水平箭头是映入局部化的典范映射，且二者均为单射。在环 $B[\Delta^{-1}]$ 上，范德蒙德矩阵 V可逆。底部的同构由变换 $(u_1,\dots,u_n)^T \mapsto V^{-1}(X_1,\dots,X_n)^T$ 以及 $(v_1,\dots,v_n)^T \mapsto V^{-1}(Y_1,\dots,Y_n)^T$得到。

这使得从 A到图的右下角的复合映射在 $X_1,\dots,X_n$ 和 $Y_1,\dots,Y_n$上为恒等映射。由引理 4.2，该复合映射可通过对 $(R_1,\dots,R_n)$ 取商来分解。但将 Δ^2 取逆后，这个商恰好消去生成元 $Z_1,\dots,Z_n$，除此之外别无其他。

诱导映射 $\bar{\rho}$在外代数部分上是恒等映射，在系数上是典范嵌入 $\Lambda_n[\Delta^{-2}] \to \mathbb{Z}[t_1,\dots,t_n][\Delta^{-1}]$；特别地，它是单射。因此，$\rho$的核是局部化 $A \to A[\Delta^{-2}]$下 $(R_1,\dots,R_n)$ 的原像，也就是 $(R_1,\dots,R_n)$ 的 Δ^2-饱和。□

至此，定理 1.1 第一部分的证明完成。

5. Minimality of the generating set

我们在此证明定理 1.1 的第二个结论。

命题 5.1。设 $\mathcal{G} = \{P_1,\dots,P_k\} \sqcup \{Q_1,\dots,Q_l\}$ 是 $A/\mathcal{J}$ 作为 Λ_n-代数的有限齐次生成集，其中 P_i 的次数为奇数，Q_i 的次数为偶数。那么 $k \geq 2n$ 和 $l \geq n$。

证明。我们将 $A/\mathcal{J}$ 视为 B的一个 Λ_n-子代数，更准确地说，是不变量B^{S_n} 的子代数（记号同第 4 节）。我们首先证明 $k \geq 2n$。由于总可以通过加上 Λ_n中的元素来修改 $\mathcal{G}$ 中的元素，因此不失一般性，我们可以假设

$$\mathcal{G} \subseteq (u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n) \subseteq B\,.$$

令 $\pi\colon B \to B/(u_iu_j, u_iv_j, v_iv_j \mid 1 \leq i,j \leq n)$ 为投影到由 $\{u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n\}$ 生成的自由$\mathbb{Z}[t_1,\dots,t_n]$-模上的映射。对于所有 $1 \leq j \leq l$，我们有 $\pi(Q_j) = 0$，因为 Q_j 的次数为偶数，故它们关于变量 $\{u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n\}$ 至少是二次的。对于所有 $1 \leq i \leq n$，我们还有 $\pi(X_i) = X_i$，以及 $\pi(Y_i) = Y_i$。由于 $\mathcal{G}$ 生成 $A/\mathcal{J}$，因此 X_i 和 Y_i 对于 $1 \leq i \leq n$ 都属于 $\{\pi(P_1)\dots,\pi(P_k)\}$ 的 $\mathbb{Z}[t_1,\dots,t_n]$- 线性张成。现在忽略分次，并考虑到有理函数域 $\mathbb{Q}(t_1,\dots,t_n)$ 的基变换。由于范德蒙德矩阵变为可逆矩阵，$\{u_1,\dots,u_n\}$ 和 $\{v_1,\dots,v_n\}$ 属于 $\{X_1,\dots,X_n\}$ 和 $\{Y_1,\dots,Y_n\}$ 的 $\mathbb{Q}(t_1,\dots,t_n)$-线性张成。这意味着，$\{\pi(P_1)\dots,\pi(P_k)\}$ 的 $\mathbb{Q}(t_1,\dots,t_n)$-线性张成包含 $\{u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n\}$ 的 $\mathbb{Q}(t_1,\dots,t_n)$-线性张成。由维数可知，$k \geq 2n$。

接下来我们证明 $l \geq n$。考虑环同态

$$\tau\colon B \to \bar{B} := \bigwedge_{\mathbb{Z}}(u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n)$$

$\bar{}$定义为对所有 $1 \leq i \leq n$ 发送 $t_i \mapsto 0$。令 $A := \tau(A/\mathcal{J})$，并在 $a \in A/\mathcal{J}$ 时记 $\bar{a} := \tau(a)$ $\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$。那么，对于所有 $2 \leq i \leq n$，$X_1 = \sum_i u_i$、$Y_1 = \sum_i v_i$ 和 $X_i = Y_i = 0$。此外，(3.8) 蕴含对所有 $1 \leq i \leq n$，$Z_i = e_i(u_1v_1、\dots、u_nv_n)$，

其中 e_i 是第 i 个初等对称多项式。在 $A \subseteq B$ 中，以下除幂关系成立：

$$\bar{Z}_i \bar{Z}_j = \begin{cases} \binom{i+j}{i} \bar{Z}_{i+j} & \text{if } i+j \le n, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

令 $A' \subseteq A$ 为由 Z_1、……、Z_n 生成的子环。直接计算表明，$X_1 Y_1 Z_i$ 不可能是 Z_{i+1} 的非零倍数；这意味着分次阿贝尔群 $A \cong A' \oplus (X_1,\ Y_1)A'$ 分裂，因此有同构

$$\bar{A}/(\bar{X}_1, \bar{Y}_1) \cong A' = \Gamma_{\mathbb{Z}}[\bar{Z}_1]/(\gamma_{n+1}(\bar{Z}_1), \gamma_{n+2}(\bar{Z}_1), \dots).$$

在 $\mathbb{Z}$ 上，这个代数至少需要由 n 个元素生成。由于 $P_i \in \mathcal{G}$ 的次数为奇数次，它们在 A' 中映射为零。因此，A' 由 $\{Q_1, \dots, Q_l\}$ 生成，这意味着 $l \ge n$。□

定理 1.1 的证明至此完成。

作为补充，我们证明：如果在系数环中将 n 逆化，则最小生成集的大小可以减少一个。设 $x_1, x_2, x_3, \dots$ 为变量。令 $x_0 := 1$，并定义形式幂级数 $f(s) = \sum_{k\ge 0} (-1)^k x_k s^k$。我们通过恒等式定义 k 阶牛顿多项式 $s_k(x_1, \dots, x_k)$：

$$\sum_{k\ge 1} s_k(x_1, \dots, x_k) s^{k-1} = -\frac{f'(s)}{f(s)}.$$

例如，$s_1(x_1) = x_1$、$s_2(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_2$、$s_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 - 3x_1x_2 + 3x_3$，依此类推。继续将 $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] \otimes \bigwedge_{\mathbb{Z}}(u_1, \dots, u_n) \otimes \bigwedge_{\mathbb{Z}}(v_1, \dots, v_n)$ 记作 B。

引理 5.2. 对于每个 $k \ge 1$，以下恒等式在 B 中成立：

$$s_k(Z_1, \dots, Z_k) = k \sum_{i=1}^{n} t_i^{k-1} u_i v_i .$$

证明. 定义形式幂级数 $Z(s) = \sum_{k\ge 0} Z_k s^k$，其中 $Z_0 := 1$。于是

$$-\log(Z(-s))' = \sum_{\substack{k\ge 1}} s_k(Z_1, \dots, Z_k) s^{k-1}.$$

由引理 3.6 可知 $Z(-s) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{s u_i v_i}{1 - t_i s}\right)$，因此得到

$$-\log(Z(-s))' = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{s u_i v_i}{1 - t_i s}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i v_i}{(1 - t_i s)^2}.$$

现在将其展开为关于 s 的幂级数。那么，s^{k-1} 的系数恰好是 $k \sum_{i=1}^{n} t_i^{k-1} u_i v_i$。□

引理 5.3. 在 $A/\mathcal{J}$ 中，以下关系成立：

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} e_i \left(s_{n-i}(Z_1, \dots, Z_{n-i}) - \sum_{j=0}^{n-i-1} X_{n-i-j} Y_{j+1} \right) = 0 .$$

证明。考虑生成函数

$$X(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{1 - t_i s}, \quad Y(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{1 - t_i v_i}, \quad S(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i v_i}{(1 - t_i s)^2}.$$

Then

$$X(s)Y(s) - S(s) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{u_i v_j}{(1-t_i s)(1-t_j s)}\,,$$

因此，令 $E(s) = \prod_{i=1}^{n}(1-t_i s)$ 为初等对称多项式的生成函数，则表达式 $E(s)(X(s)Y(s) - S(s))$ 是关于 s 的次数至多为 $n-2$ 的多项式。因此，对所有 $l \geq n-1$，s^l 的系数都必须为零。但是代入 $X(s) = \sum_{l\geq 1} X_l s^{l-1}$、$Y(s) = \sum_{l\geq 1} Y_l s^{l-1}$ 以及 $S(s) = \sum_{l\geq 1} s_l(Z_1, \ldots, Z_l)s^{l-1}$（参见引理 3.6 及引理 5.2 的证明），$s^{n-1}$ 的系数恰好就是引理声称为零的表达式。□

补遗 5.4。对于每个 $n \geq 1$，$H^*_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}(C_2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})); \mathbb{Z}[1/n])$，其作为 $\Lambda_n \otimes \mathbb{Z}[1/n]$-代数由 $3n-1$ 个元素生成。它不能由更少的元素生成。

证明。在引理 5.3 的等式中，Z_n 只出现一次，即出现在 $s_n(Z_1, \ldots, Z_n)$ 中，其系数为 n。该关系表明，若将 n 取逆，则可以省略生成元 Z_n。在 [16, 定理 F] 中，Kishimoto–Takeda 证明了，$C_2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ 的有理上同调环的任何生成集都至少必须包含 $3n-1$ 个元素。根据下方的命题 6.2，从 $C_2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ 的有理等变上同调到有理非等变上同调的自然映射是满射的。这意味着，作为 $\Lambda_n \otimes \mathbb{Z}[1/n]$-代数的等变上同调的生成集也必须至少包含 $3n-1$ 个元素。□

6. 求逆 Inverting $n!$

本节的目标是确定非等变上同调环 $H^*(C_2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})); k)$ 的一个表示，其中 k 是特征为零或与 $n!$ 互素的域。若将整数 $1, \ldots, n$，等价地说，将 $n!$ 求逆，我们便可定义元素

$$W_l = s_l(Z_1, \ldots, Z_l)/l$$

在 $A/\mathcal{J} \otimes \mathbb{Z}[1/n!\,]$ 中。这些元素可以取代 $Z_1, \ldots, Z_n$ 作为生成元，因为 $s_l(Z_1, \ldots, Z_l)$ 的首项总是 $(-1)^{l+1} l Z_l$。在这一基下，关系理想大大简化：记 $X^T = (X_1, \ldots, X_n)$ 等，并令 A_l 表示对称矩阵

$$A_l = \mathrm{adj}(V)^T \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)^{l-1} \mathrm{adj}(V) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z}[e_1, \ldots, e_n])\,.$$

令 $\mathcal{J} \subseteq A$ 如定理 1.1 所述。

命题 6.1。将 $n!$ 求逆后，理想 $\mathcal{J} \subseteq A$ 是由元素 $R'_l := \Delta^2 W_l - X^T A_l Y$（其中 $1 \leq l \leq n$）生成的理想的 Δ^2-饱和。

证明。令 $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$ 以及 $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$。在环 B 中，根据引理 5.2，我们有 $W_l = \sum_{k=1}^{n} t_k^{l-1} u_k v_k$。这意味着

$$\begin{aligned}\Delta^2 W_l &= (\Delta u)^T \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)^{l-1} (\Delta v) \\ &= (\mathrm{adj}(V)X)^T \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)^{l-1} (\mathrm{adj}(V)Y) \\ &= X^T A_l Y\,.\end{aligned}$$

证明的其余部分与引理 4.3 中的相同。□

在将 $n!$ 求逆后，引理 5.3 使我们能够消去生成元 W_n。正如引理 4.3 的证明所示，命题 6.1 的关系 R'_n 随后必然是 $R'_1, \ldots, R'_{n-1}$ 的推论。

我们还需要以下等变形式性结果：

命题 6.2。设 k 是一个特征为零或与 $n!$ 互素的域。那么，对所有 $m \geq 0$, $H^*_{U(n)}(C_m(U(n)); k)$ 都是一个自由的 $H^*(BU(n); k)$-模。

这是命题 [3, A.3] 的一个推论（该命题使用了 Borel 局部化定理），但我们在此给出一个更直接的证明。我们的证明（更确切地说，是第 (6.1) 行）可用于给出 $C_m(U(n))$ 的 Poincaré 级数公式；但由于此类公式众所周知（例如参见 [24]），我们在此不再给出。

在开始证明之前，我们先引入一些记号。通过对角映射 $BS^1 \to BS^1 \times BS^1$，将 $C := H_*(BS^1; k)$ 视为一个余代数。其分次对偶 $C^\vee$ 是单个次数为 2 的变量所生成的多项式代数 $k[t]$。对于 $a \geq 0$，令

$$S^a(C) = (C^{\otimes a})_{S_a}$$

为 a 的 C 次对称幂，并赋予由 C 诱导的余代数结构。其分次对偶是对称多项式代数 $S^a(C)^\vee = k[t_1, \dots, t_a]^{S_a}$。

对于 $a \geq 0$，我们用 $\bigwedge^a(C)$ 表示 C 的第 a 外幂。其分次对偶是交错多项式的子空间 $\bigwedge^a(C)^\vee \subseteq k[t_1, \dots, t_a]$。它自然是一个 $S^a(C)^\vee$-模，这表明 $\bigwedge^a(C)$ 自然是一个 $S^a(C)$-余模。

- 对于任意 $a,\ b \geq 0$，我们可以通过商映射 $S^a(C) \otimes S^b(C) \to S^{a+b}(C)$，将 $S^a(C) \otimes S^b(C)$ 视为一个 $S^{a+b}(C)$- 余模。这是一个自由的 $S^{a+b}(C)$- 余模；事实上，对偶的说法是 $k[t_1, \dots, t_{a+b}]^{S_a \times S_b}$ 是一个自由的 $k[t_1, \dots, t_{a+b}]^{S_{a+b}}$-模，这是不变量理论中的经典事实。

- $S^a(C)$-余模 $\bigwedge^a(C)$ 也是自由的：对偶的说法是，$k[t_1, \dots, t_a]$ 中交错多项式构成的子环是对称多项式环上的自由模；确实如此，其自由生成元是范德蒙德多项式。

命题 *6.2* 的证明。我们发现，表述其对偶且等价的结论更为方便，即 $H_*^{U(n)}(C_m(U(n)); k)$ 是一个自由的 $H_*(BU(n); k)$- 余模。取一个极大环面 $T \subseteq U(n)$，并将 $H_*(BU(n); k)$ 识别为 $H_*(BT; k)^{S_n}$。包含映射 $T \subseteq U(n)$ 诱导出一个 $H_*(BU(n); k)$-余模同构

$$H_*^{U(n)}(C_m(U(n)); k) \cong H_*(BT \times T^m; k)_{S_n}.$$

对于 $\mathrm{char}(k) = 0$，引理 2.10 中给出了一个自包含的证明。如果 $\mathrm{char}(k)$ 与 $n!$ 互素，则通过 [3, 定理 3.5]，取等变上同调，并利用 Serre 谱序列进行论证，可得相同结论。

现在我们只需将右侧计算为一个 $H_*(BT; k)^{S_n}$-余模，并注意到它是自由的。首先，注意到存在一个余代数同构 $H_*(BT; k)_{S_n} \cong S^n(C)$。设 $\mathscr{B}$ 是 $H_*((S^1)^m; k)$ 作为 k-模的一个分次基。分别设 $\mathscr{B}^{\mathrm{odd}} \subseteq \mathscr{B}$ 为奇数次元素的子集，$\mathscr{B}^{\mathrm{even}} \subseteq \mathscr{B}$ 为偶数次元素的子集。设 $\mathcal{P}(\mathscr{B}, m)$ 为由 $\mathscr{B}$ 索引的分拆 $\sum_{x \in \mathscr{B}} \lambda_x = m$ 的集合，其中 $\lambda_x \geq 0$ 对所有 $x \in \mathscr{B}$ 均成立。注意到

$$H_*(BT \times T^m; k)_{S_n} \cong (H_*(BS^1 \times (S^1)^m)^{\otimes n})_{S_n}.$$

只需用 $\mathscr{B}$ 写出一组基，就可以看出它作为 $S^n(C)$-余模同构于

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}(\mathscr{B}, m)} \left(\bigotimes_{x \in \mathscr{B}^{\mathrm{odd}}} \bigwedge^{\lambda_x} (\Sigma^{|x|} C) \right) \otimes \left(\bigotimes_{x \in \mathscr{B}^{\mathrm{even}}} S^{\lambda_x} (\Sigma^{|x|} C) \right). \tag{6.1}$$

这里 $\Sigma^{|x|}$ 表示分次平移 $|x|$。根据证明前的说明，这是一个自由的 $S^n(C)$-余模。□

作为该命题的推论（例如，利用 Eilenberg-Moore谱序列），自然映射

$$k \otimes_{H^*(BU(n);k)} H^*_{U(n)}(C_m(U(n)); k) \to H^*(C_m(U(n)); k)$$

是 k-代数的一个同构。这意味着，在将系数变换为 k 后， $H^*(C_2(U(n)); k)$ 的一个表示可由定理 1.1 的表示 $A/\mathcal{J}$ 通过模去无关理想 $(e_1, \ldots, e_n) \subseteq \Lambda_n$ 得到。

现在我们将所有内容汇总起来：设 k 是一个特征为零或与 $n!$ 互素的域，并设 $\Lambda_n = k[e_1, \ldots, e_n]$。省略生成元 W_n，令 A' 为由 X_1、……、X_n、Y_1、……、Y_n 和 W_1、……、W_{n-1} 在 Λ_n 上生成的自由分次交换代数。令 $\mathcal{J}' \subseteq A'$ 为理想 $(R'_1$、……、$R'_{n-1})$ 的 Δ^2-饱和。于是， $A'/\mathcal{J}' \cong A/\mathcal{J} \otimes k$。

令 X_1，……，X_n、Y_1，……，Y_n 以及 W_1，……，W_{n-1} 为次数分别为 $|W_l| = 2l$ 和 $|X_l| = |Y_l| = 2l-1$的生成元。我们将它们视为生成元 X_l，Y_l 和 W_l 在 A'中的模（e_1，……，e_n）约化 $\subseteq\Lambda_n$。令 A' 为 k-代数

$$\bar{A}' = k[\bar{W}_1, \ldots, \bar{W}_{n-1}] \otimes \bigwedge\nolimits_k (\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n, \bar{Y}_1, \ldots, \bar{Y}_n)\,.$$

令 $\mathcal{J}' \subseteq A'$为 $\mathcal{J}'$模（e_1，……，e_n）约化后的结果。

定理6.3。设 k 为特征为零或不被 $n!$整除的域。对于每个$n \geq 0$，存在一个 k-代数同构

$$H^*(C_2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})); k) \cong \bar{A}'/\bar{\mathcal{J}}'\,.$$

现在我们将介绍一种简单的方法，用来计算关系理想 $\mathcal{J}'$ 的一个 k-线性基（见推论6.5）。为此，我们在 $A'/\mathcal{J}'$上引入一个双分次。为了将它与完全无关的上同调分次区分开来，我们称之为权重。生成元的权重为

$$\mathsf{w}(e_l) = (0,0), \quad \mathsf{w}(X_l) = (1,0), \quad \mathsf{w}(Y_l) = (0,1), \quad \mathsf{w}(W_l) = (1,1)\,,$$

且与 l无关。于是，命题 6.1 的关系 R'_l 是权重为 (1，1) 的齐次式。因此，理想 $\mathcal{J}'$ 关于权重是齐次的。因此， $A'/\mathcal{J}'$ 继承了一个双分次，$A'/\mathcal{J}'$ 也一样，其中 $\mathsf{w}(X_l) = (1, 0)$，$\mathsf{w}(Y_l) = (0, 1)$，而 $\mathsf{w}(W_l) = (1, 1)$。

引理 6.4。生成元 X_l、Y_l和 W_l 中的每个单项式，若其总权重为(a, b)，且具有 $a > n$ 或 $b > n$，则在 $A'/\mathcal{J}'$中为零。

证明。我们可以将 $A'/\mathcal{J}'$ 视为 $B \otimes k$的一个子环。于是，根据 (3.7) 和引理 5.2，“权重 (a, b)”可转换为“在变量 $u_1, \ldots, u_n$中次数为 a 的齐次项，且在变量 $v_1, \ldots, v_n$ 中次数为 b的齐次项”。由于它们是 $B \otimes k$的外代数部分的生成元，在这两组变量中的任一组里，次数为 $> n$ 的任何单项式都为零。□

现在我们可以分两步构造商 $A'/\mathcal{J}'$：设 $\mathcal{M} \subseteq A'$ 为由所有总权重为 (a, b) 且满足 $a > n$ 或 $b > n$的单项式生成的理想。引理 6.4 表明 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{J}'$，因此 $A'/\mathcal{J}' \cong (A'/\mathcal{M})/(\mathcal{J}'/\mathcal{M})$。设 π: $A' \to A'/\mathcal{M}$ 为投影，并设 $\mathcal{I} \subseteq A'/\mathcal{M}$ 为 $(\pi(R'_1), \ldots, \pi(R'_{n-1}))$ 的 Δ^2- 饱和。设 $\bar{\mathcal{I}}$ 为其模 $(e_1, \ldots, e_n)$ 约化。则 $\mathcal{I} = \mathcal{J}'/\mathcal{M}$ 并

$$\bar{A}'/\bar{\mathcal{J}}' \cong (\bar{A}'/\bar{\mathcal{M}})/\bar{\mathcal{I}}\,.$$

由于多项式生成元 W_1、……、W_{n-1}在 $A'/\mathcal{M}$中已变为幂零，因此理想 $(\pi(R'_1)$……、$\pi(R'_{n-1}))$ 是有限生成的 Λ_n-模。随后可以使用 Macaulay2 [8] 等计算机代数系统计算其饱和 $\mathcal{I}$。

固定 $n \geq 1$。对于 a，$b \geq 0$ 令 $\mathscr{B}_{a,\,b}$ 为变量 $X_1, \ldots, X_n$、$Y_1, \ldots, Y_n$ 和 $W_1, \ldots, W_{n-1}$ 中权重为 $(a,\ b)$ 的所有单项式组成的有序集合。我们有如下算法：

(1) 对于所有权 $1 \le a \le n$ 和 $1 \le b \le n$，执行以下操作：(i) 对所有 $M \in \mathscr{B}_{a-1,b-1}$ 以及所有 $i \in \{1,\dots,n-1\}$，将 MR_i' 展开为 Λ_n-线性组合，其基元素取自 $\mathscr{B}_{a,b}$。将系数向量排列成一个大小为 $|\mathscr{B}_{a,b}| \times (n-1)\,|\mathscr{B}_{a-1,b-1}|$ 的矩阵 $T_{a,b}$。(ii) $T_{a,b}$ 的像是一个有限生成的 Λ_n-子模 $\mathrm{im}(T_{a,b}) \subseteq \Lambda_n^{\mathscr{B}_{a,b}}$。令 $G_{a,b}$ 为 $\mathrm{im}(T_{a,b})$ 关于 Δ^2 的饱和。(iii) 令 $\varepsilon\colon \Lambda_n^{\mathscr{B}_{a,b}} \to k^{\mathscr{B}_{a,b}}$ 为模 $(e_1,\dots,e_n)$ 约化。设 $\bar{G}_{a,b} := \varepsilon(G_{a,b})$。(2) 对所有 $1 \le a,b \le n$，返回 $G_{a,b}$。

对于单项式 $M \in \mathscr{B}_{a,b}$，令 M 表示它在 A' 中的像；因此 M 是由生成元 $X_1,\dots,X_n, Y_1,\dots,Y_n$ 和 $W_1,\dots,W_{n-1}$ 构成的单项式。

推论6.5。设 k 是一个特征为零或与 $n!$ 互素的域。那么，定理*6.3*中的理想 $\mathcal{J}'$ 是以下元素的 k-线性张成：

(i) all $\bar{M}$ for $M \in \mathscr{B}_{a,b}$ with $a > n$ or $b > n$;
(ii) all $\sum_{M \in \mathscr{B}_{a,b}} f(M)\bar{M}$ for $f \in \bar{G}_{a,b}$ with $1 \le a,b \le n$.

当然，只需从 $G_{a,b}$ 的一组基中取 f，因此只需考虑 (ii) 中有限多个关系。我们使用 Macaulay2 计算以下例子。

例 6.6。$C_2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}))$ 的有理上同调环是以下商：

$$\left(\mathbb{Q}[\bar{W}_1] \otimes \bigwedge\nolimits_{\mathbb{Q}}(\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{X}_2, \bar{Y}_2)\right)/K$$

其中 K 是以下元素的 $\mathbb{Q}$-线性张成：

- 权重为 $(a,\ b)$ 的单项式，其中包含 $a > 2$ 或 $b > 2$；
- 权重为 $(1,\ 1)$ 时：X_2Y_2；
- 权重为 $(2,\ 1)$ 时：$X_1X_2Y_2,\ X_1X_2Y_1 + 2X_2W_1$；
- 权重为 $(1,\ 2)$ 时：$X_2Y_1Y_2,\ X_1Y_1Y_2 - 2Y_2W_1$；
- 权重为 $(2,\ 2)$ 时：$X_1X_2Y_1Y_2,\ X_1Y_2W_1,\ X_2Y_1W_1,\ X_2Y_2W_1$。

对于 $C_2(\mathrm{GL}_3(\mathbb{C}))$，在次数双重度为 (a,b) 且满足 $a \le 3$ 和 $b \le 3$ 的关系向量空间已经是 150 维的。与其寻找关系的向量空间，不如寻找关系理想的一个显式生成集，这将很有意思。

注记 6.7。Kishimoto 和 Takeda [16] 首先证明了，当 k 是特征为零或特征不整除 $n!$ 的域时，$H^*(C_2(U(n)); k)$ 由 $3n-1$ 个元素极小生成。但他们未能系统地确定这些关系。下面我们说明他们的生成元与我们的生成元之间的关系，并给出其关于陈特征的一种解释。由 (3.7) 中的公式和引理 5.3 可知，这些生成元相同：

$$\bar{X}_l = z(l,\{1\}), \quad \bar{Y}_l = z(l,\{2\}), \quad \bar{W}_l = z(l,\{1,2\})$$

对所有 l 均成立，其中他们的生成元所用的记号 $z(d,I)$ 是在引理 6.7] 之前引入的。现在回想一下第3节中的内容，存在一个映射

$$C_2(U(n)) \to C_2(U) \simeq U^2 \times BU$$

使得 $H^*(U^2; k)$ 的本原生成元在拉回下分别对应于 $\bar{X}_l$ 和 $\bar{Y}_l$，而 $H^*(BU; k)$ 中的陈类拉回为 Z_l（即将整数生成元 Z_l 模 $(e_1, \dots\dots, e_n)$ 约化）。若 $c_1,\ c_2,\ \dots\dots$ 是万有陈类，则 $s_l(c_1, \dots\dots, c_l)/l! = ch_l$ 是陈特征的第 l 个分量。由于 W_l 由 $s_l(Z_1, \dots\dots, Z_l)/l$ 定义，因此生成元 W_l 是 $(l-1)!ch_l \in H^{2l}(BU; k)$ 的拉回。

7. Integral surjectivity of the Atiyah-Bott map

作为证明的副产品，我们获得了 Atiyah 和 Bott 所考虑的一类映射的一些有趣信息。设 $M = (S^1)^2$，并令 $\mathcal{A}^\flat(n)$ 表示平凡主 $U(n)$-丛在 M 上的平坦联络空间。令 $\mathscr{G} = \mathrm{map}(M, U(n))$ 表示规范群。将 $\mathcal{A}^\flat(n)$ 包含到所有联络构成的仿射空间 $\mathcal{A}(n)$ 中所诱导的映射为

$$\alpha_n \colon \mathcal{A}^\flat(n)_{h\mathscr{G}} \to \mathcal{A}(n)_{h\mathscr{G}} \simeq B\mathscr{G}\,.$$

命题 7.1. 对于每个 $n \geq 0$，诱导映射

$$\alpha_n^* \colon H^*_{\mathscr{G}}(\mathcal{A}(n); \mathbb{Z}) \to H^*_{\mathscr{G}}(\mathcal{A}^\flat(n); \mathbb{Z})$$

是满射。

在 [2] Atiyah 和 Bott 的研究中，他们考察了闭可定向曲面上主 $U(n)$-丛的平坦联络空间上的这类映射，其中曲面的亏格为 $g \geq 2$，且丛的秩 n与丛的次数互质。他们证明，相应的等变上同调环是无挠的，并且该映射在有理系数下是满射（见 [2, 定理 7.14]）。在亏格为 1 的情形下，我们证明该映射在整系数下是满射。从这一角度看，我们的主定理（定理 1.1）可以视为对该映射的核的描述。

证明。 映射 α_n 还有如下另一种描述： $\mathscr{G}$的分类空间是映射空间 $\mathrm{map}(M, BU(n))$ 的一个连通分支，该分支由零伦映射组成（见 [2, 命题 2.4]）。我们将其记为

$$B\mathscr{G} \simeq \mathrm{map}^0(M, BU(n))\,.$$

将表示 $\pi_1(M) = \mathbb{Z}^2 \to U(n)$ 映到其所表示的平坦丛的分类映射 $M \to BU(n)$，得到一个在同伦意义下的映射

$$C_2(U(n)) \to \mathrm{map}_*(M, BU(n))\,.$$

由于空间 $C_2(U(n))$ 是连通的，该映射的像包含在零同伦映射所在的连通分支中。取同伦轨道空间，并利用

$$\mathrm{map}^0_*(M, BU(n))_{hU(n)} \simeq \mathrm{map}^0(M, BU(n))\,,$$

我们得到一个映射

$$\alpha_n \colon C_2(U(n))_{hU(n)} \to \mathrm{map}^0(M, BU(n)) \simeq B\mathscr{G}\,.$$

命题断言诱导映射

$$\alpha_n^* \colon H^*(\mathrm{map}^0(M, BU(n)); \mathbb{Z}) \to H^*_{U(n)}(C_2(U(n); \mathbb{Z})$$

是满射。现在有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} C_2(U(n))_{hU(n)} & \xrightarrow{\alpha_n} & \mathrm{map}^0(M, BU(n)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_2(U)_{hU} & \xrightarrow[\sim]{\alpha_\infty} & \mathrm{map}^0(M, BU) \end{array}$$

其中竖直映射由包含映射 $U(n) \to U$诱导。Ramras 已证明底部水平映射是等价（见 [23, 定理 3.4]）。根据推论 3.2，左侧竖直映射在整上同调中是满射。因此，顶部水平映射在整上同调中也是满射。□

Appendix A. Γ-spaces and the spectral sequence

本附录旨在解释命题 2.7 中谱序列的起源，尤其是其乘法结构。

我们回顾一下 Γ-空间的概念（例如参见 [26]的附录）。令 Top 表示紧生成空间范畴。令 Fin_* 表示由形如 $\langle n\rangle = \{*, 1, \dots, n\}$, $n \geq 0$ 且基点为 $*$的有限基点集构成的范畴。

定义 A.1。 A Γ-空间 是一个函子 $F\colon \mathsf{Fin}_* \to \mathsf{Top}$，使得 $F(*) = *$。

对于 $n \geq 1$ 和 $1 \leq i \leq n$，令 $\rho^i\colon \langle n\rangle \to \langle 1\rangle$ 为由 $\rho^i(j) = 1$（若 $i = j$）以及 $\rho^i(j) = *$（若 $i \neq j$）定义的基点映射。

定义 A.2. 若一个 Γ-空间 $F\colon \mathsf{Fin}_* \to \mathsf{Top}$ 对每个 $n \geq 1$ 都满足：由 $\rho^1, \dots, \rho^n$ 诱导的映射 $F(\langle n\rangle) \to F(\langle 1\rangle)^n$ 是弱同伦等价，则称其为特殊 的。

设 F 是一个特殊的 Γ-空间，并令 $\nabla\colon \langle 2\rangle \to \langle 1\rangle$ 表示满足$\nabla(1) = \nabla(2) = 1$的基点映射。那么存在一个折线

$$F(\langle 1\rangle)^2 \xleftarrow[\sim]{F(\rho^1)\times F(\rho^2)} F(\langle\langle 2\rangle\rangle) \xrightarrow{F(\nabla)} F(\langle 1\rangle) \tag{A.1}$$

其中指向左侧的箭头是弱等价。由于 ∇ 在翻转 $1, 2 \in \langle 2\rangle$的 C_2-作用下保持不变，这个折线表明 $F(\langle 1\rangle)$ 是同伦范畴中的交换幺半群。设 k 是一个交换环。在系数为 k 的同调上，我们得到一个乘积

$$H_*(F(\langle 1\rangle); k)^{\otimes 2} \to H_*(F(\langle 1\rangle); k)\,,$$

使 $H_*(F(\langle 1\rangle);\, k)$ 成为分次交换的 k-代数。

例 A.3. 令 $\mathbb{C}^\infty$ 配备标准厄米内积。令 $\mathsf{Gr}(n, \mathbb{C}^\infty)$ 表示 n维复子空间构成的格拉斯曼流形$\mathbb{C}^\infty$。定义 $ku\colon \mathsf{Fin}_* \to \mathsf{Top}$，令 $ku(\langle 1\rangle) = \bigsqcup_{n\geq 0} \mathsf{Gr}(n, \mathbb{C}^\infty)$，并且

$$ku(\langle n\rangle) \subseteq ku(\langle 1\rangle)^n$$

由那些 n-元组 $(V_1, \dots, V_n)$ 构成的子空间，其中 V_i 两两正交。对于基点映射 $\alpha\colon \langle n\rangle \to \langle m\rangle$，定义 $ku(\alpha)\colon ku(\langle n\rangle) \to ku(\langle m\rangle)$ 如下：

$$ku(\alpha)(V_1, \dots, V_n) = (W_1, \dots, W_m)\,,$$

其中 $W_j = \bigoplus_{i\in\alpha^{-1}(j)} V_i$（因此若 $\alpha^{-1}(j) = \emptyset$，则 $W_j = 0$）。这是一个特殊的 Γ- 空间（参见例如 [26, 定理 6.3.19]）。其底层分次交换 k- 代数 $H_*(ku(\langle 1\rangle);\, k)$ 是一个多项式代数 $k[x_0, x_1, x_2, \dots]$，其中 $|x_i| = 2i$。

一个 Γ-空间 F 可以延拓为定义在带基点单纯集合上的函子：令 X 为一个带基点单纯集合。我们可以逐层对 X 计算 F（当 X_n 为无限集时，则取滤过余极限）。这给出了一个单纯空间 $F(X)$，随后我们可以取其几何实现 $|F(X)|$。

Loday 构造（见第 2.2 节）与 Γ-空间的关系如下。在每个单纯次数上取同调，我们得到一个函子 $H_* \circ F$，它从 sSet_* 映射到单纯分次交换 k-代数。

引理 A.4。 令 F 为一个特殊 Γ-空间，令 k 为一个交换环，使得$H_*(F(\langle 1\rangle);\, k)$ 作为 k-模是平坦的。则存在一个自然同构

$$\mathcal{L}(H_*(F(\langle 1\rangle); k); k) \cong H_* \circ F$$

从单纯集合范畴$_*$ 到单纯分次交换 k-代数的函子。

证明。 只需在有限带基点集合 $\langle n\rangle \in$Fin$_*$上验证这一点，其中同构

$$H_*(F(\langle n\rangle);k) \cong H_*(F\langle 1\rangle);k)^{\otimes n} \cong \mathcal{L}(H_*(F(\langle 1\rangle);k);k)(\langle n\rangle)$$

由 $\rho^1,\dots,\rho^n$ 通过 K¨unneth 同构诱导。 □

设 $X \in$sSet$_*$ 是一个有限带基点单纯集合，即对所有 n， X_n 都是有限的。设 F 是一个特殊的 Γ-空间。那么，对于每个 n ，都存在一条折线

$$F(X_n)\times F(X_n) \xleftarrow{\sim} F(X_n\vee X_n) \to F(X_n)\,. \tag{A.2}$$

指向左侧的映射由两个映射 $X_n\vee X_n \to X_n$ 诱导，它们在一个直和项上是恒等映射，在另一个直和项上是常值映射；这是一个弱同伦等价，因为 F 是特殊的。指向右侧的映射由折叠映射诱导。这条折线关于单纯结构是自然的，因此给出一条单纯空间的折线。

对 Γ-空间有一个称为余纤维性 的技术条件（见 [26, 定义 B.33]），它保证 $F(X)$ 是一个 Reedy 余纤维单纯空间。

例 A.5. 例 A.3 中的 Γ-空间 ku 是余纤维的（参见 [26, 例 6.3.16]）

Reedy 余纤维单纯空间之间的逐层弱等价，在几何实现上给出弱等价；因此，如果 F 是余纤维的，就存在一条折线

$$|F(X)|\times|F(X)| \xleftarrow{\sim} |F(X\vee X)| \to |F(X)|\,;$$

取同调后，我们看到 $H_*(|F(X)|;k)$ 成为一个分次交换 k-代数。

注记 A.6。 若 X 是有限的带基点单纯集合，且 F 是余纤维的特殊 Γ-空间，则 $\langle n\rangle \mapsto |F(X\wedge\langle n\rangle)|$ 仍是余纤维的特殊 Γ-空间（[26, 命题 B.54]），而 $|F(X)|$ 就是其底空间。

我们认为，以下陈述专家们早已熟知，但我们未能找到一篇参考文献，其中包含关于谱序列乘法性的陈述。

命题 A.7。 设 F是一个余纤维特殊 Γ-空间。将 $H_*(F(\langle 1\rangle);k)$ 视为一个增广 k-代数，其中结构映射为 $F(\langle 1\rangle) \to *$，并假设它是平坦的 k-模。设 X是一个有限的带基点单纯集合。那么存在一个代数的第一象限谱序列，

$$E^2 = \mathrm{HH}_*^X(H_*(F(\langle 1\rangle);k);k) \implies H_*(|F(X)|;k)\,.$$

一个 Γ-空间的态射 $f\colon\ F\to G$ 会诱导谱序列之间的映射。在E^2页上，这个映射与由代数映射诱导的映射一致

$$f_*\colon\ H_*(F(\langle 1\rangle);k) \to H_*(G(\langle 1\rangle);k)\,.$$

本附录余下部分将用于证明该命题。以下，k 表示一个交换环，同调群取 k 系数。我们首先说明 [19, 定理 11.14] 的内容。设 X 是一个单纯空间，$F_*|X|\subseteq|X|$ 是其几何实现的骨架过滤。该过滤对应一个谱序列

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(F_p|X|, F_{p-1}|X|) \Longrightarrow H_{p+q}(|X|)\,.$$

微分 $d^1\colon\ E^1_{p,q} \to E^1_{p-1,q}$ 是三元组 $(F_p|X|, F_{p-1}|X|, F_{p-2}|X|)$ 的长正合调序列中的边界同态。

对于固定的 q，令 $H_q(X)$ 表示从 X 逐级取 q 阶同调所得到的单纯 k-模。按照惯例，我们可以将 $H_q(X)$ 视为一个由

k-模构成的链复形，其微分取面映射的交错和。对于每个 q，存在一个链映射

$$f_q\colon\ H_q(X) \to E^1_{*,q}$$

其在次数 p 上是复合映射

$$H_q(X_p) \xrightarrow{\times\Delta^p} H_{p+q}(X_p \times \Delta^p, X_p \times \partial\Delta^p) \xrightarrow{\pi_*} E^1_{p,q}\,.$$

第一个映射是悬挂同构，由与一个 p-单纯形的交叉积给出；第二个映射由投影诱导

$$\pi\colon\ X_p \times \Delta^p \to F_p|X|\,.$$

如果 X 是 Reedy 余纤维的（或适当的，具体含义见 [19, 定义 11.2]），那么将 f_q 限制到归一化链复形 $NH_q(X_*) \subseteq H_q(X_*)$ 上，是到 $E^1_{*,\,q}$ 的同构，因此 f_q 是拟同构。于是谱序列具有如下形式

$$E^2_{p,q} = H_p(H_q(X)) \Longrightarrow H_{p+q}(|X|)\,.$$

现在令 Y 为另一个单纯空间，令 $F_*|Y| \subseteq |Y|$ 为骨架过滤。我们赋予乘积 $|X| \times |Y|$ 以乘积过滤

$$F_p(|X| \times |Y|) = \bigcup_{k+l=p} F_k|X| \times F_l|Y|\,.$$

令 $E^r(|X|)$、$E^r(|Y|)$ 和 $E^r(|X| \times |Y|)$ 分别表示与相应过滤相关的谱序列。同调交叉积和包含映射 $F_p|X| \times F_r|Y| \subseteq F_{p+r}(|X| \times |Y|)$ 诱导出一个自然的交叉积

$$\times\colon\ H_{p+q}(F_p|X|) \otimes H_{r+s}(F_r|Y|) \to H_{p+q+r+s}(F_{p+r}(|X| \times |Y|))\,.$$

转到相对同调后，这诱导出一个交叉积

$$\times\colon\ E^1_{p,q}(|X|) \otimes E^1_{r,s}(|Y|) \to E^1_{p+r,q+s}(|X| \times |Y|)\,.$$

引理 A.8. 存在一个谱序列的配对

$$E^r(|X|) \otimes E^r(|Y|) \to E^r(|X| \times |Y|)\,.$$

在 E^1页上，该配对由 $\times$积给出；在 E^∞页上，它与交叉积诱导的配对一致

$$\times\colon\ H_{p+q}(|X|) \otimes H_{r+s}(|Y|) \to H_{p+q+r+s}(|X| \times |Y|)\,.$$

证明. 这是由一个众所周知的事实得出的：过滤复形的配对会产生谱序列的配对。令 C_* 表示奇异 k链复形函子。接下来只需注意，Eilenberg-Zilber 映射（它诱导 $\times$积）

$$C_*(|X|) \otimes C_*(|Y|) \to C_*(|X| \times |Y|)$$

是保持过滤的，前提是奇异链复形分别赋予由 $|X|$、$|Y|$ 和 $|X| \times |Y|$的过滤诱导的过滤，而张量积复形赋予显然的乘积过滤。□

乘积单纯空间 $X \times Y$有 p-单形

$$(X \times Y)_p = X_p \times Y_p\,.$$

如果 $|X \times Y|$ 按其骨架赋予过滤，且 $|X| \times |Y|$ 具有乘积过滤，那么由两个投影诱导的同胚 $|X \times Y| \cong |X| \times |Y|$ 一般并不保过滤，但其逆映射

$$\zeta\colon\ |X| \times |Y| \xrightarrow{\cong} |X \times Y|$$

总是保过滤（见 [19, 引理 11.15]）。因此，它诱导出一个谱序列之间的映射

$$E^r(\zeta)\colon\ E^r(|X|\times|Y|)\to E^r(|X\times Y|)\,.$$

将 $E^r(\zeta)$ 与引理 A.8 中的配对复合，得到谱序列的一个配对

$$E^r(|X|)\otimes E^r(|Y|)\to E^r(|X\times Y|)\,.$$

在 E^1-页上，此配对由 $E^1(\zeta)\circ\times$ 给出；在 E^∞-页上，它与由.....诱导的配对一致

$$\zeta_*\circ\times\colon\ H_{p+q}(|X|)\otimes H_{r+s}(|Y|)\to H_{p+q+r+s}(|X\times Y|)\,.$$

定义一个洗牌映射

$$\mathrm{sh}\colon\ H_q(X_p)\otimes H_s(Y_r)\to H_q(X_{p+r})\otimes H_s(Y_{p+r})$$

by

$$c\otimes d\mapsto\sum_{(\mu,\nu)\in\mathrm{Sh}(p,r)}\mathrm{sgn}(\mu,\nu)\,s^X_\nu(c)\otimes s^Y_\mu(d)\,.$$

这里，$\mathrm{Sh}(p,r)\subseteq\Sigma_{p+r}$ 是 (p,r)-洗牌，$\mathrm{sgn}(\mu,\nu)$ 是洗牌置换 (μ,ν) 的符号，而 $s^X_\nu=s^X_{\nu_r}\cdots s^X_{\nu_1}$ 和 $s^Y_\mu=s^Y_{\mu_p}\cdots s^Y_{\mu_1}$ 分别是单纯形自然数集-模 $H_q(X)$ 和 $H_s(Y)$ 中退化映射的复合。

引理 A.9. 谱序列的配对

$$E^r(|X|)\otimes E^r(|Y|)\to E^r(|X\times Y|)$$

使下图交换

$$\begin{array}{ccc}H_q(X_p)\otimes H_s(Y_r) & \xrightarrow{\times\circ\mathrm{sh}} & H_{q+s}((X\times Y)_{p+r})\\ \downarrow{\scriptstyle f_{q,p}\otimes f_{s,r}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{q+s,p+r}}\\ E^1_{p,q}\otimes E^1_{r,s} & \xrightarrow{E^1(\zeta)\circ\times} & E^1_{p+q,r+s}.\end{array}$$

证明。这是一次图追逐。回忆一下，标准三角剖分中的 $(q+s)$-单形 $\Delta^q\times\Delta^s$ 由如下映射表示：$l_{(\mu,\nu)}$：$\Delta^{q+s}\to\Delta^q\times\Delta^s$，这些映射对应于洗牌置换 $(\mu,\ \nu)\in\mathrm{Sh}(q,\ s)$（见 [11, 第 3.B 节]）。沿着图的右上角追逐单形 σ：$\Delta^q\to X_p$ 和 τ：$\Delta^s\to Y_r$，我们得到关于洗牌 $(\mu,\ \nu)\in\mathrm{Sh}(q,\ s)$、$(\mu',\ \nu')\in\mathrm{Sh}(p,\ r)$ 以及 $(\mu'',\ \nu'')\in\mathrm{Sh}(q+s,\ p+r)$ 的单形交错和

$$\Delta^{q+s+p+r}\to F_{p+r}|X\times Y|$$

形如

$$\pi\circ((s^X_{\nu'}(\sigma)\times s^Y_{\mu'}(\tau))\circ l_{(\mu,\nu)}\times id_{p+r})\circ l_{(\mu'',\nu'')}\,.\tag{A.3}$$

沿着左下角追逐 σ 和 τ，我们得到关于洗牌 $(\alpha,\ \beta)\in\mathrm{Sh}(q,\ p)$、$(\alpha',\ \beta')\in\mathrm{Sh}(s,\ r)$ 以及 $(\alpha'',\ \beta'')\in\mathrm{Sh}(q+p,\ s+r)$ 的单形交错和，形如

$$\zeta\circ(\pi\times\pi)\circ(\sigma\times id_p\times\tau\times id_r)\circ(l_{(\alpha,\beta)}\times l_{(\alpha',\beta')})\circ l_{(\alpha'',\beta'')}\,.$$

现在我们注意到

$$(l_{(\alpha,\beta)}\times l_{(\alpha',\beta')})\circ l_{(\alpha'',\beta'')}=(id\times T\times id)\circ(l_{(\mu,\nu)}\times l_{(\mu',\nu')})\circ l_{(\mu'',\nu'')}$$

对于唯一确定的 $(\mu,\nu)\in\mathrm{Sh}(q,s)$、$(\mu',\nu')\in\mathrm{Sh}(p,r)$ 和 $(\mu'',\nu'')\in\mathrm{Sh}(q+s,p+r)$，以及换位 T：$\Delta^p\times\Delta^s\to\Delta^s\times\Delta^p$。利用这一点，我们可以将前面的和改写为对如下形式的单形求和

$$\zeta\circ(\pi\times\pi)\circ(id\times T\times id)\circ((\sigma\times\tau)\circ l_{(\mu,\nu)}\times(id_p\times id_r)\circ l_{(\mu',\nu')})\circ l_{(\mu'',\nu'')}\,.$$

此时，我们可以代入 ζ Theorem 11.5] 中的定义 [19, ，从而将给定表达式准确地化为式 (A.3) 中的表达式。□

从现在起，令 X 为有限带基点单纯集合。令 F 为一个 Γ-空间，并记 $F(X)$ 为逐层对 F 求值所得到的单纯空间。折线 (A.2) 诱导出谱序列映射的折线

$$E^r(|F(X)\times F(X)|) \leftarrow E^r(|F(X\vee X)|) \to E^r(|F(X)|) \tag{A.4}$$

以及链复形图表

$$\begin{array}{ccccc} H_q(F(X)\times F(X)) & \longleftarrow & H_q(F(X\vee X)) & \longrightarrow & H_q(F(X)) \\ \downarrow{\scriptstyle f_q} & & \downarrow{\scriptstyle f_q} & & \downarrow{\scriptstyle f_q} \\ E^1_{*,q}(|F(X)\times F(X)|) & \longleftarrow & E^1_{*,q}(|F(X\vee X)|) & \longrightarrow & E^1_{*,q}(|F(X)|). \end{array}$$

该图表是交换的，因为链映射 f_q 关于单纯空间的映射是自然的。

如果 F 是特殊的，那么对于每个 $q\geq 0$，图表左上方的水平箭头都成为链复形的同构。如果 F 也是余纤维的，那么 $F(X)$ 是 Reedy 余纤维的（见 [26, 命题 B.37]），根据 [26,命题 A.50]， $F(X)\times F(X)$ 也具有这一性质。因此，图表中的垂直映射都是拟同构。于是，从 E^2-页开始，我们可以将 (A.4) 中指向左方的箭头取逆。结合引理 A.9 的配对，我们得到谱序列的一个配对

$$E^r(|F(X)|)\otimes E^r(|F(X)|)\to E^r(|F(X)|)$$

已给出 $r\geq 2$。根据构造， E^∞ 页上的乘积与由 $H_*(|F(X)|)$ 上的乘积诱导的乘积一致。

要完成证明，还需证明存在一个双分次代数的同构

$$E^2(|F(X)|)\cong \mathrm{HH}^X_*(H_*(F(\langle 1\rangle));k)\,.$$

我们回顾 Hochschild 同调中洗牌积的定义。

定义 A.10. 设 A 是 k 上的增广微分分次交换代数。洗牌积 是双分次交换双微分代数之间的配对

$$\mathcal{L}(A,k)(X)\otimes\mathcal{L}(A,k)(X)\to\mathcal{L}(A,k)(X)$$

定义为如下复合

$$\mathcal{L}(A,k)(X_p)\otimes\mathcal{L}(A,k)(X_q)\xrightarrow{\mathrm{sh}}\mathcal{L}(A\otimes A,k\otimes k)(X_{p+q})\xrightarrow{\text{mult.}}\mathcal{L}(A,k)(X_{p+q})\,;$$

第一个映射定义在 $a\in\mathcal{L}(A,k)(X_p)$ 和 $b\in\mathcal{L}(A,k)(X_q)$ 上，定义如下

$$\mathrm{sh}(a,b):=\sum_{(\mu,\nu)\in\mathrm{Sh}(p,q)}\mathrm{sgn}(\mu,\nu)(s_{\nu_q}\cdots s_{\nu_1})(a)\otimes(s_{\mu_p}\cdots s_{\mu_1})(b)\,,$$

其中， s_{ν_i} 和 s_{μ_i} 是单纯微分分次交换代数$\mathcal{L}(A,k)(X)$中的退化映射，而第二个映射由 A 和 k 中的乘法诱导。

根据引理 A.4，存在一个单纯分次交换 k-代数的同构

$$H_*(F(X_p))\cong\mathcal{L}(H_*(F(\langle 1\rangle));k)(X_p)\,. \tag{A.5}$$

根据引理 A.9，在取同调后， $E^2(|F(X)|)$ 上的乘积由以下复合映射诱导：

$$H_q(F(X_p))\otimes H_s(F(X_r))\xrightarrow{\times\circ\mathrm{sh}}H_{q+s}((F(X)\times F(X))_{p+r})$$

以及乘法

$$H_{q+s}((F(X)\times F(X))_{p+r}) \xleftarrow{\cong} H_{q+s}(F(X\vee X)_{p+r}) \to H_{q+s}(F(X)_{p+r})\,.$$

在同构 (A.5) 下，它对应于 Loday 构造 $\mathcal{L}(H_*(F(\langle 1\rangle));\, k)(X)$ 上的洗牌积。

命题 A.7 的自然性陈述是显然的。

References

[1] A. C. Aitken。《行列式与矩阵》。第7版。《大学数学教材》。爱丁堡—伦敦：Oliver & Boyd, Ltd.，VII，144页。（1952年），1952年。[2] Michael F. Atiyah 和 Raoul Bott。黎曼曲面上的杨–米尔斯方程。

Philos. , ： –

Trans. R. Soc. Lond. Ser. A 308 523
615，1983年。[3] Thomas John Baird。紧李群中可交换 n元组空间的上同调。*Algebr. Geom. Topol.*，7：737–754，2007年。[4] Irina Bobkova、Ayelet Lindenstrauss、Kate Poirier、Birgit Richter 和 Inna Zakharevich。关于 $\mathbb{F}_p$ 及交换 $\mathbb{F}_p$- 群代数的高阶拓扑赫胥黎同调。载于 *Women in topology: collaborations in homotopy theory. WIT: Women in topology workshop, Banff International Research Station Banff Alberta Canada 2013 August 18–23*，第97–122页。罗德岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2015年。[5] Chi-Kwong Fok。$SU(2)$中可交换元素空间的上同调环与 K-理论环。 *Homology Homotopy Appl.*，27(2)：123–149，2025年。[6] Gr´egory Ginot、Thomas Tradler 和 Mahmoud Zeinalian。映射空间与曲面积的 Chen 模型。 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*，43(5)：811–881，2010年。[7] Jos´e Manuel G´omez、Alexandra Pettet 和 Juan Souto。关于 Hom($\mathbb{Z}^k, G$) 的基本群。 *Math. Z.*，271(1-2)：33–44，2012年。[8] Daniel R. Grayson 和 Michael E. Stillman。Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统。网址： `http://www2.macaulay2.com`。[9] Simon Gritschacher。同态空间、形式性与 Hochschild 同调。预印本，arXiv:2507.17683 [math.AT] (2025)，2025年。[10] Simon Gritschacher 和 Markus Hausmann。可交换矩阵与 Atiyah实K理论。*J. Topol.*，12(3)：833–854，2019年。[11] Allen Hatcher。《 *Algebraic topology*》。剑桥：剑桥大学出版社，2002年。[12] Ta m´as Hausel 和 Michael Thaddeus。秩2 Higgs丛模空间上同调环中的关系。 *J. Am. Math. Soc.*，16(2)：303–329，2003年。[13] Lisa C. Jeffrey。定向2 14, 2005 37 1 1 -流形上的平坦联络。 *Bull. Lond. Math. Soc.*，( )：–。[14] Lisa C. Jeffrey 和 Frances C. Kirwan。黎曼曲面上任意秩全纯丛模空间的交叉理论。 *Ann. Math. (2)*，148(1)：109–196，1998年。[15] Frances Kirwan。黎曼曲面上丛模空间的上同调环。*J. Am. Math. Soc.*，5(4)：853–906，1992年。[16] Daisuke Kishimoto 和 Masahiro Takeda。经典群中的可交换元素空间。 *Adv. Math.*，386：43，2021年。编号/条目 107809。[17] Tyler Lawson。酉变形 K-理论中的乘积公式。 *K-Theory*，37(4)：395–422，2006年。[18] Jean-Louis Loday。《 *Cyclic homology.*》， *Grundlehren Math. Wiss.* 第301卷。柏林：Springer，第2版，1998年。[19] J. P. May。《 *The geometry of iterated loop spaces*》， *Lect. Notes Math.* 第271卷。Springer，Cham，1972年。[20] D. McDuff 和 G. Segal。同调纤维化与“群完备化”定理。

Invent. , ： –。

Math. 31 279 284, 1976
[21] Alexandra Pettet 和 Juan Souto。约化群中的可交换元组及其极大紧子群。 *Geom. Topol.*，17(5)：2513–2593，2013年。[22] Teimuraz Pirashvili。高阶 Hochschild 同调的 Hodge分解。 *Ann. Sci.Éc. Norm. Supér. (4)*，33(2)：151–179，2000年。[23] Daniel A. Ramras。曲面上平坦联络的稳定模空间。

Trans. Am. , ( )： –

Math. Soc. 363 2 1061
1100，2011年。[24] Daniel A. Ramras 和 Mentor Stafa。李群中可交换元素空间的 Hilbert-Poincar´e 级数。 *Math. Z.*，292(1-2)：591–610，2019年。[25] Douglas C. Ravenel 和 W. Stephen Wilson。复配边的 Hopf 环。

J. Pure , ： –。

Appl. Algebra 9 241 280, 1977

[26] Stefan Schwede。《 *Global homotopy theory*》， *New Math. Monogr.* 第34卷。剑桥：剑桥大学出版社，2018年。[27] William M. Singer。 *BU* 上的连通纤维化与 *U*。 *Topology*，7：271–303，1968年。[28] Masahiro Takeda。秩为二的李群中可交换元素空间的上同调。 *Topology Appl.*，303：7，2021年。编号/条目107851。

Mathematisches Institut der Ludwig-Maximilians-Universität, Theresienstrasse 39,
80333 Munich Germany „ , Email: simon.gritschacher@math.lmu.de