通过弗洛凯理论研究二阶时滞微分方程的指数稳定性

Alexander Domoshnitsky*、Sergey Malev †、Tsahi Shavit ‡

摘要

本文基于我们提出的二阶时滞微分方程的一种弗洛凯理论版本，获得了关于二阶时滞微分方程指数稳定性的结果。我们的这一版本使研究者能够保持方程的阶数，并获得弗洛凯理论经典结果的类似结论；这些经典结果是针对常微分方程而已知的。在我们这一版本的弗洛凯理论基础上，本文提出了关于指数稳定性的新颖、原创且出人意料的结果。我们证明，在相应区间内选择系数周期和增益时滞，可以在所考虑的情形下实现指数稳定化，而在采用标准技术时，这些情形被认为是不可能实现稳定化的。

关键词：时滞方程、指数稳定性、反馈控制、作用—等待控制、弗洛凯理论、时滞的稳定化效应、通过选择增益中时滞的周期实现稳定化

引言

弗洛凯理论是常微分方程定性理论中公认的研究领域之一，其研究始于弗洛凯的经典论文 [23]。弗洛凯理论提供了解的表示公式，因此在稳定性研究中非常方便。本文基于弗洛凯理论，研究二阶时滞微分方程的稳定性。

在应用中使用记忆方程，促成了为记忆方程构建弗洛凯理论的类似理论。该理论沿以下方向发展。经典著作 [27, 30] 提出了时滞方程弗洛凯理论的基础。 [28, 29, 36] 阐述了具有周期系数的离散时间系统的弗洛凯–李雅普诺夫理论基础。 [39] 提出了带时滞微分方程的李雅普诺夫-弗洛凯表示。关于弗洛凯理论在时滞方程中的应用，还可注意以下几篇论文： [50]，提出了将布洛赫定理应用于非局域势； [49]，研究了带噬菌体动力学和季节性的霍乱流行病模型；以及将其应用于无人机飞行的控制

*阿里埃勒大学，阿里埃勒，以色列，adom@ariel.ac.il
†阿里埃勒大学，阿里埃勒，以色列，
‡阿里埃勒大学，阿里埃勒，以色列，

见 [11]。[2, 3, 9, 10], 提出了具有分布时滞的方程的弗洛凯理论，并获得了关于这些方程稳定性的结果。

齐次方程 [42, 30] 及其解的经典定义，是将每个可能的初始函数延拓为解，这使我们得到无限维基本系统。需要强调的是，无限维基本系统无法建立弗洛凯理论的完整对应形式，正如著名著作 [31] （见第236页）中所指出的。在此背景下，我们可以注意到，在常微分方程（ODEs）的弗洛凯理论中，简单的解表示以及关于转化为常系数方程组的论断都具有重要意义。

我们提出了时滞微分方程的一种弗洛凯理论。在我们的方法中，方程的阶数与单值矩阵的阶数一致。这使我们的方法类似于经典的 ODEs 弗洛凯理论 [23], 并使我们能够使用针对 ODEs 发展起来的经典理论方法。

我们方法的一个重要发展，是不仅保留常时滞微分方程的有限维基本系统，而且保留其中线性无关解的数量。通过有限维基本系统处理时滞方程，并基于“有限维基”提出弗洛凯理论类比的思想，已在近期论文 [47] 中得到发展。其中，初始函数被表示为相应函数的线性组合。弗洛凯解则通过对这些函数进行延拓而构造。半离散化概念将采样数据方法与周期性相结合，该概念已在 [32] 中提出，并由此获得了解的表示方法。在 [34] 中提出了构造有限维单值算子的思想。尽管文献 [32, 34, 33, 47] 中的基本系统是有限维的，但弗洛凯解被表示为相应非齐次方程的解，因此，单值算子的维数大于给定方程的阶数。这意味着，与方程阶数密切相关的解的性质会丢失。Stepan 和 Insperger 提出的作用-等待概念，使方程的阶数与单值算子的阶数一致，该概念已在 [48] 中进行了描述。另请参见论文 [52],，其中将作用-等待控制的思想发展并应用于时滞系统。我们的方法在相应意义下可以被视为作用-等待控制方法的发展。

另一个理念是时滞的稳定化效应：无时滞时方程是不稳定的，但加入时滞后却变得稳定。在不稳定方程的相应项中引入时滞进行稳定化的理念，在 [44], 中被指出十分重要，其中可以找到相关参考文献。还应注意与此相关的论文 [15], ，其中证明了尽管常微分方程

$$x''(t) + \left\{ \sum_{i=1}^{m} b_i(t) \right\} x(t) = 0,\ t \in [0, \infty)$$

可能发生振荡并且渐近不稳定，但时滞方程

$$x''(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i(t) x(t - \tau_i(t)) = 0,\ t \in [0, \infty) \tag{0.1}$$

在系数 $b_i(t)$ 和时滞 $\tau_i(t)$ 满足相应条件时，该方程是非振荡且指数稳定的。 [15] 中的基本思路是，不要求系数 $b_i(t)$ 对所有 $i = 1, \ldots m,$ 都满足非负性，并允许正系数项与

负系数 $b_i(t)$ 相互抵消。请注意，具有常系数和时滞的单项方程

$$x''(t) + bx(t-\tau) = 0,\ t \in [0,\infty)$$

对于任意正的 b 和 τ [42, 30]，都存在无界解。对于具有变时滞 $\tau(t)$的方程，条件

$$\int^{\infty} \tau(t)dt < \infty$$

是半轴 $t \geq 0$ [14]上所有解有界的充要条件。对于超前自变量情形，解有界性的条件见 [22]。对于满足 $\tau_1 = 0$ 和 $b_1 b_2 < 0$条件的二项自治方程（$m = 2$），指数稳定性的条件见 [13]。对于含阻尼项的方程 (1.1)，自治方程情形下的指数稳定性条件见 [13]，；对于导数项中具有常数时滞或导数项无时滞的方程，相关条件见 [37, 38]，。对于导数项中具有变时滞的方程，关于指数稳定性的首个结果见 [18]，而有关稳定性研究的各种结果和一种概念见 [8]。二阶方程稳定性的其他结果见 [13, 15, 22]。

在本文中，我们也采用采样数据控制器的思路 [24, 25, 32]，，但方向是构建一种弗洛凯理论的新版本。我们为时滞方程构建新版本弗洛凯理论的方法，目标是保留齐次方程的有限维基本解系。

我们的方法基于 Azbelev 的齐次方程定义。这使我们能够采用有限维基本解系 [4, 5]，其维数等于方程的阶数。

本文结构如下。第 1 节说明我们在发展作用-等待控制方面的思路。第 2 节概述时滞方程一般理论中的一些事实（见 [4, 5]）。第 3 节提出弗洛凯理论的概念。第 4 节列举了一些关于一致指数稳定性的意外结果。第 5 节对这些例子进行解释。我们根据第 3 节提出的弗洛凯理论和作用-等待概念，构建了用于指数稳定性分析的程序，其基础是所述算法。关于结论和开放问题的讨论见第 6 节。

1 作用-等待控制思想的发展

本文考虑如下方程

$$x''(t) + a(t)x'(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)x(t-\tau_i(t)) = f(t),\ t \in [0,\infty) \tag{1.1}$$

$$x(\xi) = \varphi(\xi) \text{ for } \xi < 0, \tag{1.2}$$

其右端项为本质有界的博雷尔可测右端项 $f(t)$，初始函数 $\varphi(t)$，系数 $a(t)$ $b_i(t)$以及时滞 $\tau_i(t) \geq 0$ for $t \in [0,\infty)$。

我们应如何定义其齐次方程？传统方法 [42, 30]将齐次方程定义为

$$x''(t) + a(t)x'(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)x(t-\tau_i(t)) = 0,\ t \in [0,\infty) \tag{1.3}$$

初始函数由（1.2）定义。如果研究者希望将解视为每个可能的初始函数 $\varphi(t)$，的延拓，那么，根据齐次方程的这一定义，无限维基本方程组便会出现。N.V.Azbelev [4, 5] 的想法是将齐次方程定义为带有零初始函数的（1.3）

$$x(\xi) = 0 \text{ for } \xi < 0. \tag{1.4}$$

应当注意的是，这个零初始函数使我们能够针对所有可能的初始函数 $\varphi(t)$，考虑方程（1.1）、（1.2）的所有解。实际上，我们可以将方程（1.1）改写为

$$\begin{array}{l} x'(t) + a(t)x(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)\sigma(t-\tau_i(t))x(t-\tau_i(t)) = \\ f(t) - \sum_{i=1}^{m} b_i(t)\varphi(t-\tau_i(t))\left\{1-\sigma(t-\tau_i(t))\right\}, \end{array} \quad t \in [0,\infty) \tag{1.5}$$

其中

$$\sigma(t-\tau_i(t)) = \begin{cases} 1,\ t-\tau_i(t) \geq 0 \\ 0,\ t-\tau_i(t) < 0 \end{cases}. \tag{1.6}$$

方程（1.1）的齐次方程可以写成

$$x''(t) + a(t)x'(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)\sigma(t-\tau_i(t))x(t-\tau_i(t)) = 0,\ t \in [0,\infty) \tag{1.7}$$

或者也可以将其写为

$$x''(t) + a(t)x'(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)x(t-\tau_i(t)) = 0,\ t \in [0,\infty) \tag{1.8}$$

带有零初始函数（1.4）。

注 1.1. 关于右端的 (1.1) 稳定性是应用中最重要的稳定性类型。根据 Bohl-Perron定理（例如参见 [1] 第 499–501 页），在有界时滞的情况下，它等价于齐次方程 (1.7) 或带有初始函数 (1.4) 的方程 (1.8) 的一致指数稳定性（见下文定义 2.1）。

有限维基本系统这一概念使 N.V.Azbelev 及其追随者得以建立泛函微分方程理论，该理论见于著作 [4, 6, 5, 1, 8]。稳定性是这一理论的主要组成部分之一。在这一理论框架内得到的所有稳定性结果，都基于对齐次方程的这一界定。

令人惊讶的是，针对时滞方程的有限维基本系统这一相同思想，竟源于控制领域中相当务实的想法。作为

一个非常重要的例子，可以提到所谓的作用-等待控制 [48]这一概念。让我们试着描述其基本思想之一。人们考虑了以下这个简单方程

$$x''(t) + ax'(t) + B(t)x(t-\tau) = 0,\ t \in [0, \infty), \tag{1.9}$$

其中

$$B(t) = \begin{cases} 0,\ 0 \le t < \tau \\ b,\ \tau \le t < \omega \end{cases};\ B(t) = B(t-\omega) \text{ for } t \in [\omega, \infty), \tag{1.10}$$

其中常数为 a, b且 τ。控制项 $B(t)x(t-\tau)$ 仅在区间$[\tau, \omega], [\tau+\omega, 2\omega], \ldots, [\tau+n\omega, (n+1)\omega], \ldots$.内起作用。这些区间称为“作用”区间，其余区间称为“等待”区间。该方法因此得名：作用-等待控制。其目标是避免解依赖于初始函数，从而保持二维基本解系。“等待”区间可能会给许多应用带来问题（例如，参见基于视觉的无人机导航器项目 [16] 以及基于上方视角的地面机器人导航项目 [17] ，这些项目基于[7, 11]中描述的模型）。是否可以在不假设控制 $B(t)x(t-\tau)$ 中存在“等待”区间的情况下，得到有限维方程? E.Fridman及其合作者 [25, 24] 提出以 $\tau(t) = t$,（其中 $t \in [0, \omega)$ $\tau(\omega) = 0$）的形式使用时滞，并将其延拓为 ω–周期函数，这一想法可以视为实现该目标的一种方式。该想法为得到有限维时滞方程开辟了另一条途径。这一想法的广义形式由他人独立提出，并作为一阶时滞方程的一个概念发表于 [11, 19, 21] 。

因此，获得有限维基本解系的一种可能方法不是改变式 (1.3) 中的系数，而是改变时滞。在方程 (1.8) 中，我们可以假设

$$t - \tau_i(t) \ge 0,\ t \in [0, \omega],\ i = 1, ..., m. \tag{1.12}$$

现在，初始函数不再对方程 (1.8) 的解 $x(t)$ 产生任何影响。因此，我们得到二维时滞方程 (1.8)。为了得到弗洛凯理论的一种形式，我们假设系数和时滞作周期延拓

$$a(t) = a(t-\omega),\ b_i(t) = b_i(t-\omega),\ \tau_i(t) = \tau_i(t-\omega) \text{ for } t \in [\omega, \infty). \tag{1.13}$$

我们可以从这一点继续讨论，而不只局限于“动作并等待”控制方案。举例来说，考虑方程

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t-\tau(t)) = 0,\ t \in [0, \infty) \tag{1.14}$$

其中

$$\tau(t) = \begin{cases} t,\ 0 \le t < \tau \\ \tau,\ \tau \le t < \omega \end{cases};\ \tau(t) = \tau(t-\omega) \text{ for } t \in [\tau, +\infty), \tag{1.15}$$

其中 a, b 和 τ 是常数。方程 (1.14) 看起来类似于式 (1.9)，而它们二者都类似于具有常系数和时滞的自治方程

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t-\tau) = 0,\ t \in (-\infty, +\infty), \tag{1.16}$$

这被视为时滞微分方程理论中的基础内容。但方程 (1.9) 和 (1.14) 是一维的，因此它们的渐近性质

当然，稳定性条件可能与无限维方程 (1.16) 的稳定性条件截然不同。在方程 (1.16) 的不稳定区域内研究方程 (1.9) 和 (1.14) 的系数 a, b 和τ（例如，通过 D分割法 [37]得到这些区域），我们发现，时滞发生微小变化的方程也可能是指数稳定的。将 ω 作为参数，使我们得以观察到总体的定性图景。为了实现稳定化，我们已朝着理解这一总体定性图景迈出了一些步伐。我们发现，许多情况下存在无穷多个区间 $[\alpha_n, \beta_n]$，其中 $\alpha_n \to \infty$ 当 $t \to \infty$，使得若 ω 位于其中某个区间内，方程 (1.9) 或 (1.14) 就是指数稳定的。这些区间的长度可能趋于零。如果仅凭理论推导无法确定这些区间确实存在，那么几乎不可能发现这一性质。

在我们的方法中，方程的阶数与其基本解系中的解的数量相一致。对于二阶方程，它们是二维的。我们认为，这是我们方法的一个重要优势，使我们能够保留二阶方程的特有性质。我们这一简单版本的弗洛凯理论与常微分方程的情形完全类似。

基于我们这一版本的弗洛凯理论，我们提出了关于指数稳定性的新颖且出人意料的结果。我们证明，在相应区间内选择系数周期和增益时滞，可以在采用标准技术时被认为不可能的情形下实现指数稳定化。我们的目标是基于弗洛凯理论，为标准稳定性研究难以处理的情形提出新的稳定化可能性。在我们的方法框架下，在稳定性分析中，只有点 ω 处的解值及其一阶导数变得重要；该点等于系数和时滞的周期。我们希望，我们的方法能够发展时滞的稳定化效应这一思想 [44] ，并为 [32, 34, 48, 47]相关研究中发展起来的稳定性研究增添新的可能性。

2 预备知识

考虑方程

$$x''(t) + a(t)x'(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)x(t - \tau_i(t)) = f(t),\ t \in [0, \infty) \tag{2.1}$$

$$x(\xi) = 0,\ \xi < 0, \tag{2.2}$$

其中系数 $b_i(t)$ 和时滞 $\tau_i(t) \geq 0$ for $t \in [0, \infty)$。均本质有界且可测。其通解在论文 [40] 中得到（随后也见于书籍[4, 5]）

$$x(t) = \int_0^t C(t, s)f(s)ds + x_1(t)x(0) + x_2(t)x'(0),\ t \in [0, \infty), \tag{2.3}$$

其中， $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是齐次方程的两个线性无关解

$$x''(t) + a(t)x'(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)x(t - \tau_i(t)) = 0,\ t \in [0, \infty) \tag{2.4}$$

满足零初始函数 (1.4)，使得

$$x_1(0) = 1,\ x_1'(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ x_2'(0) = 1, \tag{2.5}$$

下面我们使用基本解系的朗斯基行列式

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}. \tag{2.6}$$

该表示中积分项的核 $C(t,\ s)$ 称为方程（2.1）、（2.2）的柯西函数（也称基本函数）。它定义为所谓的“s截断”齐次方程的解

$$x''(t) + a(t)x'(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)x(t - \tau_i(t)) = 0,\ t \in [s, \infty), \tag{2.7}$$

$$x(\xi) = 0,\ \xi < s, \tag{2.8}$$

对每个固定的 $s \geq 0$，满足初始条件 $x(s) = 0,\ x'(s) = 1$.

定义 2.1。如果存在 $N > 0$ 和 $\gamma > 0$，使得问题（*2.4*）的解（其初始函数为

$$x(\xi) = \psi(\xi) \text{ for } \xi < t_0, \tag{2.9}$$

where $\psi : (-\infty, t_0)$ 是有界博雷尔可测函数，并满足估计式 e

$$|x(t)| \leq Ne^{-\alpha(t-t_0)}\text{esssup}_{\xi \leq t_0} |\psi(\xi)|,\ t \geq t_0, \tag{2.10}$$

其中常数 N 和 α 不依赖于 t_0 和 ψ.

定义 2.2. 如果存在这样的正数 N 和 α，使得

$$|C(t,s)| \leq Ne^{-\alpha(t-s)} \text{ for } 0 \leq s \leq\ t < \infty. \tag{2.11}$$

注 2.1. 众所周知，对于任意有界时滞，这两个定义是等价的 [4, 6]。

注 2.2. 显然，柯西函数的指数估计 (2.11) $C(t,\ s)$。蕴含关于右端项的稳定性。

3 方法：二阶时滞微分方程的弗洛凯理论

本节提出二阶时滞微分方程的一种弗洛凯理论。在弗洛凯理论框架下，假设系数和时滞均以相应的周期 ω，为周期，即满足以下条件。

假设 1：

$$a(t + \omega) = a(t),\ b_i(t + \omega) = b_i(t),\ \tau_i(t + \omega) = \tau_i(t),\ t \in [0, \infty), \tag{3.1}$$

为了保留弗洛凯理论的有限维版本，我们需要对时滞附加一些条件。

假设2:

$$t - \tau_i(t) \geq 0,\ t \in [0, \omega],\ i = 1, ..., m. \tag{3.2}$$

在弗洛凯理论的框架下，我们尝试求得满足等式的解

$$x(t + \omega) = \lambda x(t). \tag{3.3}$$

定理 3.1. 设假设*1*和假设*2*成立。则存在满足等式（*3.3*）的方程（*2.4*）的解，且数值 λ 是下列二次方程的根

$$\lambda^2 - (x_1(\omega) + x_2'(\omega))\lambda + W(\omega) = 0. \tag{3.4}$$

这一论断可视为时滞微分方程（2.4）的弗洛凯定理的一个类似结果。

证明。考虑由函数 z 组成的集合 $Z:\ [0, \infty) \to \mathbb{R}$，这些函数在每个有限区间 $[0, T]$ 上均具有绝对连续导数 z'，并且每个函数 $z \in Z$ 都可以表示为

$$z(t + k\omega) = c_{1k}x_1(t) + c_{2k}x_2(t),\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ t \in [0, \omega], \tag{3.5}$$

其中， $x_1(t)$ $x_2(t)$是方程（2.4）的两个线性无关解，满足初始条件（2.5），而 c_{1k}， c_{2k} 是常数。根据 [45] 或 [46], 第268–286页，假设1和假设2意味着存在这样的解，使得等式（3.3）成立。

现在我们来推导用于求解 λ. 的方程（3.4）。考虑关于 $k = 1$的等式（3.5），利用此类解 x, 的存在性，我们得到方程组

$$\begin{cases} x(t + \omega) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \\ x'(t + \omega) = c_1x_1'(t) + c_2x_2'(t) \end{cases}. \tag{3.6}$$

令 $t = 0$, 并代入等式（3.3），我们得到方程组

$$\begin{cases} x(\omega) = \lambda\,(c_1x_1(0) + c_2x_2(0)) \\ x'(\omega) = \lambda\,(c_1x_1'(0) + c_2x_2'(0)) \end{cases}. \tag{3.7}$$

现在，代入初始条件（2.5），并对 $t = 0$, 使用（3.6），我们得到方程组

$$\begin{cases} \lambda c_1 = c_1x_1(\omega) + c_2x_2(\omega) \\ \lambda c_2 = c_1x_1'(\omega) + c_2x_2'(\omega) \end{cases}. \tag{3.8}$$

进而得到方程组

$$\begin{cases} c_1(x_1(\omega) - \lambda) + c_2x_2(\omega) = 0 \\ c_1x_1'(\omega) + c_2(x_2'(\omega) - \lambda) = 0 \end{cases}. \tag{3.9}$$

其行列式为

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} x_1(\omega) - \lambda & x_2(\omega) \\ x_1'(\omega) & x_2'(\omega) - \lambda \end{vmatrix}. \tag{3.10}$$

等式 $\Delta(\omega) = 0$ 导出了二次方程（3.4）。

定理 3.1 的证明已完成。

注 3.1. 如果方程（3.4）的根 λ_1 和 λ_2 满足不等式$|\lambda_{1,2}| < 1$,那么例如在论文 [39] 中得到的解的表示公式表明，方程（2.4）具有一致指数稳定性。值得注意的是，借助经典著作 [45], [46]中的简短说明，也可以直接得出这一结论。

4 个例子

例4.1. 考虑方程

$$x''(t) + ax(t) + bx(t - \tau(t)) = 0,\ t \in [0, \infty) \tag{4.1}$$

对于: $a = 1,\ b = -0.5,$ 以及

$$\tau(t) = \begin{cases} t,\ 0 \le t < 0.5 \\ 0.5,\ 0.5 \le t < \omega \end{cases};\ \tau(t) = \tau(t - \omega) \text{ for } t \in [\tau, +\infty). \tag{4.2}$$

当 ω 位于区间 $[0.51,0.6]$ 或 $[2.8,20.0]$之一时，该方程是一致指数稳定的。请注意， [15] 和 [8] 中的定理6.1（另请参见其中第115页的例6.1）指出，不等式 $0 < 4(a - |b|) \le e^2$ 意味着方程 (4.1) 指数稳定。在本例中, $\frac{1}{(\max \tau(t))^2}$ 该不等式不成立。

例4.2。 考虑方程 (4.1)，其中 $a = 1,\ b = -1$ 以及由 (4.2) 定义的 $\tau(t)$。

当 $\omega \in [0.51, 1.2].$ 时，该方程是一致指数稳定的。请注意，与 [8], 第6章中的断言相反，不等式 $a > |b|$ 在此处不成立。

例4.3。 考虑方程

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t - \tau(t)) = 0,\ t \in [0, \infty) \tag{4.3}$$

对于: $a = 0.5,\ b = 1$ 以及由式（4.2）定义的 $\tau(t)$。当 $\omega \in [0.5, 6].$ 时，该方程一致指数稳定。请注意，式（4.3）的一致指数稳定性是在 [18] 中通过基于正性的途径得到的。那里的主要条件是存在正的 α，使得不等式 $\alpha^2 + be^{\alpha \text{最大值} \tau\ (t)} \le \alpha/2$成立。由于得到不等式 $\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha + e^{\alpha/2} \le 0.$，这些条件无法满足。即使在“非常小”的 α 情况下，我们也无法使该不等式成立。

例4.4。 考虑时滞定义如下的方程（4.3）

$$\tau(t) = \begin{cases} t,\ 0 \le t < 1 \\ 1,\ 1 \le t < \omega \end{cases};\ \tau(t) = \tau(t - \omega) \text{ for } t \in [\tau, +\infty). \tag{4.5}$$

对于这种 $\tau(t)$ 情况，当满足以下条件时，方程（4.3）一致指数稳定：1） $a = 2,\ b = 2.5$，若周期 ω 位于以下区间之一： $[2.05,3.4],[5.0,6.25],[8.0,9.05],[10.95,11.9],[13.9,14.75],[16.85,17.6],[19.8,20.4],[22.75,23.25],[25.7,26.1],[28.65,28.95],[31.65,31.8]$； 2） $a = 2, b = 3$，若周期 ω 位于 $[2.35,2.75]$； 3） $a = 2, b = 3.3$，若周期 ω 位于 $[2.45,2.55]$； 4） $a = 2.5, b = 4.6$，若周期 ω 位于 $[2.25,2.3]$。据我们所知，结果 [37, 38, 13, 8] 在这里并不适用。

5 种求解方程的算法：例子详解

我们方法的思路是在相应区间上构造时滞方程（1.1）的解 $x_1(t)$ $x_2(t)$，然后构建方程（3.4）。当根 λ_1 和 λ_2满足不等式 $|\lambda_{1,\ 2}| < 1,$ 时，我们可以得到时滞方程的指数稳定性。解的构造如下。

5.1 方程 $x''(t) + ax'(t) + bx(t-\tau(t)) = 0$。

本节将考虑方程 $x''(t) + ax'(t) + bx(t-\tau(t)) = 0$，其中

$$\tau(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < \tau, \\ \tau, & t \ge \tau. \end{cases} \tag{5.1}$$

函数 $x(t)$ 在 $t \ge 0$ 上定义，并具有两组不同的初始条件，即，

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases} \text{ and } \begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}.$$

我们将考虑定义在区间 $[0,\tau]$ 上的函数 $X_n(t): [0,\tau] \to \mathbb{R}$，它们以螺旋方式定义函数 $x(t)$，即

$$x(t) = X_n(t - n\tau),\ t \in [n\tau, (n+1)\tau],\ n \ge 0.$$

对于 $n = 0$，我们有 $X_0''(t) + aX_0'(t) = -bX_0(0)$，并有两组不同的初始条件。解为 $X_0(t) = A + Bt + Ce^{-at}$，其中第一个任务中 $A = \frac{1}{a}$，$B = 0$，$C = -\frac{1}{a}$，第二个任务中 $A = 1 + \frac{b}{a^2}$，$B = -\frac{b}{a}$，$C = -\frac{b}{a^2}$。

对于 $n > 0$，方程为 $X_n''(t) + aX_n'(t) = -bX_{n-1}(t)$，并有两组初始条件：$X_n(0) = X_{n-1}(\tau)$ 和 $X_n'(0) = X_{n-1}'(\tau)$。

该解的形式为 $X_n(t) = P_n(t) + Q_n(t)e^{-at}$，其中 $P_n(t)$ 是次数不超过 $n+1$ 的多项式，而 $Q_n(t)$ 是次数不超过 n 的多项式。我们可以定义

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \alpha[n,i]t^i,\ Q_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \beta[n,i]t^i.$$

注意，$X_n'(t) = P_n'(t) + (Q_n'(t) - aQ_n(t))e^{-at}$ 以及 $X_n''(t) = P_n''(t) + (Q_n''(t) - 2aQ_n'(t) + a^2Q_n(t))e^{-at}$. 因此，$X_n''(t) + aX_n'(t) = P_n''(t) + aP_n'(t) + (Q_n''(t) - aQ_n'(t))e^{-at}$，这正如我们所知，等于 $-bX_{n-1}(t) = -bP_{n-1}(t) - bQ_{n-1}(t)e^{-at}$。因此，$P_n''(t) + aP_n'(t) = -bP_{n-1}(t)$，并且 $Q_n''(t) - aQ_n'(t) = -bQ_{n-1}(t)$。提醒一下，

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \alpha[n,i]t^i,$$

因此

$$P_n'(t) = \sum_{i=0}^{n} (i+1)\alpha[n,i+1]t^i,$$

and

$$P_n''(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (i+2)(i+1)\alpha[n,i+2]t^i.$$

因此，

$$P_n''(t) + aPn'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} ((i+2)(i+1)\alpha[n,i+2] + a(i+1)\alpha[n,i+1])t^i + a(n+1)\alpha[n,n+1]t^n,$$

且它等于

$$-bP_{n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n} -b\alpha[n-1,i]t^i.$$

因此，$\alpha[n,n+1] = -\frac{b\alpha[n-1,n]}{a\ n+1\ ()\circ}$ 现在令 k 从 n 递减到 1，我们有

$$(k+1)k\alpha[n,k+1] + ak\alpha[n,k] = -b\alpha[n-1,k-1]$$

从而我们计算得到

$$\alpha[n,k] = \frac{1}{ak}\left(-b\alpha[n-1,k-1] - (k+1)k\alpha[n,k+1]\right)$$

$Q_n(t)$ 的系数可使用 $Q_n''(t) - aQ_n'(t) = -bQ_{n-1}(t)$ 计算得到。

多项式 $Q_n(t)$ 等于 $\sum_{i=0}^{\Gamma} \beta[n,i]t^i$，因此

$$Q_n'(t) = \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\beta[n,i+1]t^i,$$

and

$$Q_n''(t) = \sum_{i=0}^{n-2}(i+2)(i+1)\beta[n,i+2]t^i.$$

因此，

$$Q_n''(t) - aQ_n'(t) = \sum_{i=0}^{n-2}\left((i+2)(i+1)\beta[n,i+2] - a(i+1)\beta[n,i+1]\right)t^i + (-an)\beta[n,n]t^{n-1}$$

这等于

$$-bQ_{n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -b\beta[n-1,i]t^i.$$

因此，$\beta[n,n] = \frac{b\beta[n-1,n-1]}{an}\circ$ 现在令 k 从 $n-1$ 递减至 1，我们有 $(k+1)k\beta[n,k+1] - ak\beta[n,k] = -b\beta[n-1,k-1]$，因此

$$\beta[n,k] = \frac{b\beta[n-1,k-1] + (k+1)k\beta[n,k+1]}{ak}.$$

现在我们将使用初始条件 $X_n(0) = X_{n-1}(\tau)$ 和 $X_n'(0) = X_{n-1}'(\tau)$。一旦 $X_n(t) = P_n(t) + Q_n(t)e^{-at}$，

$$X_n(0) = P_n(0) + Q_n(0) = \alpha[n,0] + \beta[n,0] = X_{n-1}(\tau) \tag{5.2}$$

以及

$$X_n'(0) = P_n'(0) + Q_n'(0) - aQ_n(0) = X_{n-1}'(\tau). \tag{5.3}$$

方程 (5.3) 给出

$$\beta[n,0] = Q_n(0) = \frac{-X_{n-1}'(\tau) + P_n'(0) + Q_n'(0)}{a}.$$

方程 (5.2) 给出

$$\alpha[n,0] = P_n(0) = X_{n-1}(\tau) - \beta[n,0].$$

由此，得到了递推公式。

5.2 方程 $x''(t) + ax(t) + bx(t-\tau(t)) = 0$。

本节中，我们将求解方程

$$x''(t) + ax(t) + bx(t-\tau(t)) = 0, \quad (a > 0)$$

其中

$$\tau(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < \tau, \\ \tau, & t \ge \tau. \end{cases} \tag{5.4}$$

并满足两种不同的边界条件，即

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases} \text{ and } \begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}.$$

这里我们再次使用函数的螺旋表示

$$X(t) = X_n(t - n\tau), \quad t \in [n\tau, (n+1)\tau], \ n \ge 0.$$

与前面的情形一样，所有函数 $X_n(t) : [0,\tau] \to \mathbb{R}$ 都定义在区间 $[0,\tau]$上，其依赖关系由方程给出

$$X_n''(t) + aX_n(t) = -bX_{n-1}(t).$$

也就是说，每一步我们都必须求解一个调和微分方程。

在初始阶段，我们得到方程

$$X_0''(t) + aX_0(t) = -bX_0(0)$$

以及相应的初始条件。在第一个问题中，我们得到

$$\begin{cases} X_0''(t) + aX_0(t) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(0) = 1 \end{cases},$$

其解为函数 $X_0(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\sin(\sqrt{a}t)$。

在第二个问题中，我们得到

$$\begin{cases} X_0''(t) + aX_0(t) = -b \\ X(0) = 1 \\ X'(0) = 0 \end{cases},$$

其解为 $X_0(t) = \left(\frac{b}{a} + 1\right)\cos(\sqrt{a}t) - \frac{b}{a}$.

因此，假设以下条件，便可将这两个问题统一为一个问题

$$X_0(t) = A\cos(\sqrt{a}t) + B\sin(\sqrt{a}t) + C,$$

对于第一个问题，取 $A = C = 0$, $B = \frac{1}{\sqrt{a}}$；对于第二个问题，取 $A = \frac{b}{a} + 1$, $B = 0$, $C = -\frac{b}{a}$.

因此，问题如下：给定函数

$$X_0(t) = A\cos(\sqrt{a}t) + B\sin(\sqrt{a}t) + C,$$

对于三元系数 A， B， C，我们必须求解以下微分方程序列

$$\begin{cases} X_n''(t) + aX_n(t) = -bX_{n-1}(t) \\ X_n(0) = X_{n-1}(\tau) \\ X_n'(0) = X_{n-1}'(\tau) \end{cases}.$$

这类方程在微分方程普通课程中经常出现，众所周知，其解的形式为

$$X_n(t) = P_n(t)\cos(\sqrt{a}t) + Q_n(t)\sin(\sqrt{a}t) + C_n,$$

其中 P_n， Q_n 是次数至多为 n 的多项式，且 C_n 是一个常数。这些多项式定义如下

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha[n,i]t^i, \quad Q_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \beta[n,i]t^i.$$

由于 $X_n(t) = P_n(t)\cos(\sqrt{a}t) + Q_n(t)\sin(\sqrt{a}t) + C_n$,

$$X_n'(t) = (P_n'(t) + Q_n(t)\sqrt{a})\cos(\sqrt{a}t) + (Q_n'(t) - P_n(t)\sqrt{a})\sin(\sqrt{a}t),$$

因此

$$X_n''(t) = (P_n''(t) + 2Q_n'(t)\sqrt{a} - aP_n(t))\cos(\sqrt{a}t) + (Q_n''(t) - 2P_n'(t)\sqrt{a} - aQ_n(t))\sin(\sqrt{a}t).$$

所以,

$$X_n''(t) + aX_n(t) = (P_n''(t) + 2Q_n'(t)\sqrt{a})\cos(\sqrt{a}t) + (Q_n''(t) - 2P_n'(t)\sqrt{a})\sin(\sqrt{a}t) + aC_n.$$

由方程可知，这等于

$$-bX_{n-1}(t) = -bP_{n-1}(t)\cos(\sqrt{a}t) - bQ_{n-1}(t)\sin(\sqrt{a}t) - bC_{n-1}.$$

因此可立即得出

$$-\tfrac{b}{a}C_{n-1} = C_n,$$

也就是说， $C_n = \left(-\frac{b}{a}\right)^n C$，这不需要递推关系。

此外，我们有

$$\begin{cases} P_n''(t) + 2\sqrt{a}Q_n'(t) = -bP_{n-1}(t) \\ Q_n''(t) - 2\sqrt{a}P_n'(t) = -bQ_{n-1}(t) \end{cases}.$$

这是关于多项式 $P_n'(t)$ 和$Q_n'(t)$ 的微分方程组。为方便起见，引入记号 $R(t) = P_n'(t)$ 和 $S(t) = Q_n'(t)$。于是

$$\begin{cases} R'(t) + 2\sqrt{a}S(t) = -bP_{n-1}(t) \\ S'(t) - 2\sqrt{a}R(t) = -bQ_{n-1}(t) \end{cases}.$$

由第一行可得

$$S(t) = \tfrac{1}{2\sqrt{a}}(-bP_{n-1}(t) - R'(t)).$$

代入第二行可得

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}(-bP'_{n-1}(t) - R''(t)) - 2\sqrt{a}R(t) = -bQ_{n-1}(t).$$

两边乘以 $-2\sqrt{a}$ ，得到

$$R''(t) + 4aR(t) = -bP'_{n-1}(t) + 2\sqrt{a}bQ_{n-1}(t).$$

严格来说，这又是一个调和方程，但我们不会按这种方式求解它。由于 $R(t)$是一个多项式，我们只考虑多项式解。若 $R(t) = \sum r_i t^i$，则

$$R''(t) = \sum_{i=0}^{n-3} r_{i+2}(i+2)(i+1)t^i.$$

由此可得

$$R''(t) + 4aR(t) = \sum_{i=0}^{n-3}(r_{i+2}(i+2)(i+1) + 4ar_i)t^i + 4ar_{n-2}t^{n-2} + 4ar_{n-1}t^{n-1}.$$

右端是多项式 $-bP'_{n-1}(t) + 2\sqrt{a}bQ_{n-1}(t)$，等于

$$\sum_{i=0}^{n-2}\left(-b\alpha[n-1,i+1](i+1) + 2\sqrt{a}b\beta[n-1,i]\right)t^i + 2\sqrt{a}b\beta[n-1,n-1]t^{n-1}.$$

为简化这些表达式，定义

$$\gamma_i = -b\alpha[n-1,i+1](i+1) + 2\sqrt{a}b\beta[n-1,i], \quad 0 \le i \le n-2,$$

and

$$\gamma_{n-1} = 2\sqrt{a}b\beta[n-1,n-1].$$

显然，这些系数每次都会重新定义。因此，我们有 n 个数 $\gamma_i, 0 \le i \le n-1$ 以及方程组

$$\begin{cases} r_{i+2}(i+2)(i+1) + 4ar_i = \gamma_i, \ 0 \le i \le n-3 \\ 4ar_{n-2} = \gamma_{n-2} \\ 4ar_{n-1} = \gamma_{n-1} \end{cases}.$$

为了解出该问题，我们还需要内部递推关系:

$$r_{n-1} = \frac{1}{4a}\gamma_{n-1}, \quad r_{n-2} = \frac{1}{4a}\gamma_{n-2},$$

然后，对于所有 r_k，当 k 从 $n-3$ 递减至 0 时，我们得到

$$r_k = \frac{1}{4a}(\gamma_k - r_{k+2}(k+2)(k+1)).$$

因此，多项式 $R(t)$已确定。

回想一下，$S(t) = \frac{1}{2\sqrt{a}}(-bP_{n-1}(t) - R'(t))$。因此，$S(t) = \sum_{i=0} s_i t^i$的系数为

$$s_i = \frac{1}{2\sqrt{a}}(-b\alpha[n-1,i] - (i+1)r_{i+1}), \quad 0 \le i \le n-2,$$

and

$$s_{n-1} = -\frac{b}{2\sqrt{a}}\alpha[n-1, n-1].$$

现在回到我们的问题，我们要寻找多项式 $P_n(t)$ $Q_n(t)$。除了自由系数之外，我们实际上已经找到了它们。事实上，由于 $P_n'(t) = R(t)$ $Q_n'(t) = S(t)$，我们得到

$$\alpha[n, i] = \frac{r_{i-1}}{i}, \quad \beta[n, i] = \frac{s_{i-1}}{i}, \quad 1 \le i \le n.$$

还需计算 $\alpha[n, 0]$、$\beta[n, 0]$，它们分别等于 $P_n(0)$ 和 $Q_n(0)$。

回顾一下，$X_n(t) = P_n(t)\cos(\sqrt{a}t) + Q_n(t)\sin(\sqrt{a}t) + C_n$，其中 $C_n = \left(-\frac{b}{a}\right)^n C$。此外，

$$X_n'(t) = (P_n'(t) + Q_n(t)\sqrt{a})\cos(\sqrt{a}t) + (Q_n'(t) - P_n(t)\sqrt{a})\sin(\sqrt{a}t).$$

由于 $X_n(0) = X_{n-1}(\tau)$ 且 $X_n'(0) = X_{n-1}'(\tau)$，我们得到

$$\begin{cases} P_n(0) + C_n = P_{n-1}(\tau)\cos(\sqrt{a}\tau) + Q_{n-1}(\tau)\sin(\sqrt{a}\tau) + C_{n-1}, \\ P_n'(0) + Q_n(0)\sqrt{a} = (P_{n-1}'(\tau) + Q_{n-1}(\tau)\sqrt{a})\cos(\sqrt{a}\tau) + (Q_{n-1}'(\tau) - P_{n-1}(\tau)\sqrt{a})\sin(\sqrt{a}\tau). \end{cases}$$

由上面的方程我们得到

$$\alpha[n, 0] = P_n(0) = P_{n-1}(\tau)\cos(\sqrt{a}\tau) + Q_{n-1}(\tau)\sin(\sqrt{a}\tau) + C_{n-1} - C_n.$$

在下面的方程中，我们注意到 $P_n'(0) = \alpha[n, 1]$，这在此阶段已经计算出来。因此，由于 $\beta[n, 0] = Q_n(0)$，我们得到其值：

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\left[(P_{n-1}'(\tau) + Q_{n-1}(\tau)\sqrt{a})\cos(\sqrt{a}\tau) + (Q_{n-1}'(\tau) - P_{n-1}(\tau)\sqrt{a})\sin(\sqrt{a}\tau) - P_n'(0)\right].$$

由此得到递推关系。

5.3 例子的说明

我们的方法旨在先在相应区间上构造时滞方程（1.1）的解 $x_1(t)$ $x_2(t)$，然后建立方程（3.4）。当根 λ_1 andλ_2 满足不等式$|\lambda_{1,2}| < 1$, 时，我们便可得到时滞方程的一致指数稳定性。解的构造可按我们所述的方法进行。

利用递推关系，我们可以求解每个有限区间上的方程。我们编写了一个构建方程（3.4）的程序。然后对方程（3.4）进行求解。$|\lambda_{1,\ 2}| < 1$这些区间为我们提供了一致指数稳定性的区域。我们的程序可在此处查看：
https://drive.google.com/drive/folders/10vyYZhaiy6OVugsmxn6jL-Dx90ByGG8e，也可以使用二维码查看：



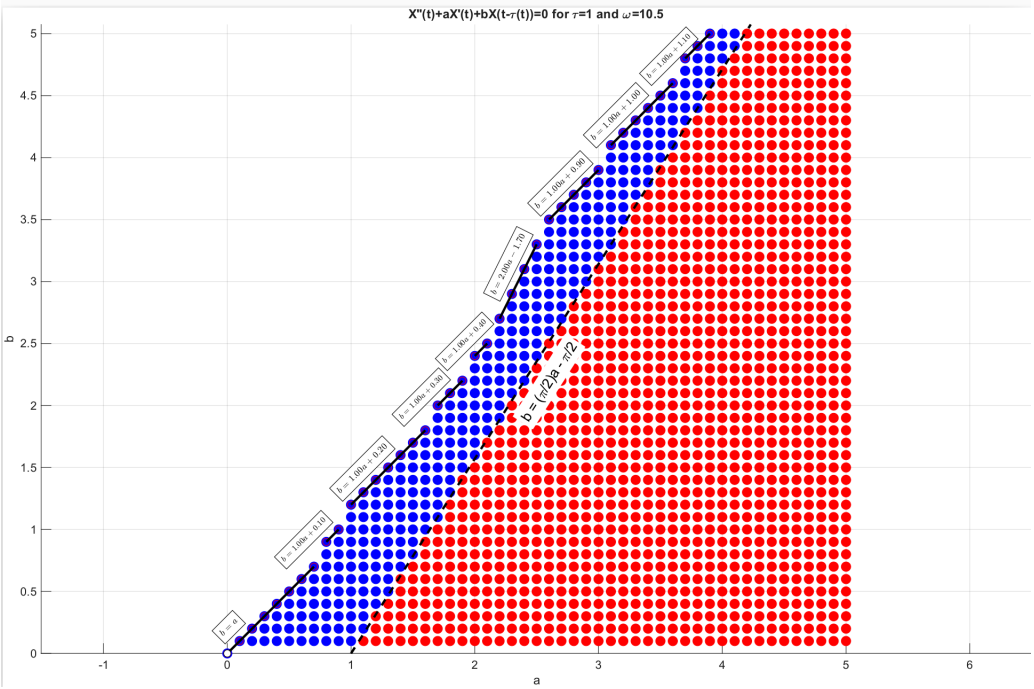
6 讨论：结论与开放问题

在本文中，我们提出了适用于二阶时滞微分方程的弗洛凯理论版本。基于齐次方程的标准定义，研究者得到了无限维基本系统。这使得我们无法获得弗洛凯理论的完整类比，正如 [31]中所指出的那样。许多研究提出了构建弗洛凯理论有限维版本的各种思路 [32, 34, 33, 47]。值得注意的是，我们的版本不仅保留了时滞方程的有限维基本解系，而且不会增加单值算子的阶数。我们的方法发展了作用-等待控制的概念 [48]。在我们的方法中，得到了存在无穷多个周期 ω 区间，使得方程具有一致指数稳定性。

未来研究还可以考虑以下方向。文献 [33]研究了周期小于时滞的情形。将其中的思路与我们的思路结合起来，可以为未来的研究奠定基础。可以借鉴文献 [48]中的思路，将我们提出的弗洛凯理论版本推广到时滞方程组。近期文献 [52],提出了时滞系统的作用-等待控制，也可为未来研究提供相应的基础。在文献 [52] 中，“作用”阶段根据开环系统的维数被划分为多个区段。

利用 Azbelev W变换 [4, 6, 8], 的思路，我们可以为具有足够一般的变时滞的方程构造稳定性的充分判据。看来，我们可以针对系数和时滞近似为常数的方程获得相关结果。还请注意，在假设1和假设2不成立时，也存在一种可能的研究方向。实现这一目标的方法可以是为相应的采样数据方程构造柯西函数 [4, 1, 8] 。

为将我们的结果与已有结果进行比较，我们给出了以下方程的图示：通过 D-分割法 [37] 对自治方程得到的稳定区域以红色表示，而我们的方法还给出了一致稳定性的蓝色区域。



7 致谢

第一作者的研究工作部分得到了以色列国创新、科学与技术部科学前沿项目“振荡性质作为稳定性研究的关键”资助，项目编号为 0008174。本文是第三作者博士论文的一部分。

参考文献

[1] R.P.Agarwal、L.Berezansky、E.Braverman、A.Domoshnitsky，《泛函微分方程的非振荡理论及其应用》，施普林格，纽约，2012年。[2] Agarwal R、Bohner M、Domoshnitsky A、Goltser Y. 弗洛凯理论与非线性积分微分方程的稳定性。《匈牙利数学学报》2005年；109–4：305–330。[3]R.P. Agarwal、V. Lupulescu、D. O’Regan 和 A. Younus，Volterra积分动力系统的弗洛凯理论，《应用分析》，2014年，http://dx.doi.org/10.1080/00036811.2013.867019。[4] N.V.Azbelev、V.P.Maksimov 和 L.F.Rakhmatullina。泛函微分方程理论导论，科学出版社，莫斯科，1991年。[5] N.V.Azbelev、V.P.Maksimov、L.F.Rakhmatullina，《泛函微分方程理论导论：方法与应用》，Hindawi Publishing Corporation，纽约、开罗，2007年。[6] N.V. Azbelev、P. M. Simonov，带后效微分方程的稳定性，《稳定性与控制：理论、方法与应用》第20卷，泰勒与弗朗西斯，伦敦，2003年。[7] S. Avasker、A. Domoshnitsky、M. Kogan、O. Kupervasser、H. Kutomanov、Y. Rofsov 等，采用时滞自动驾驶仪控制的无人机飞行稳定化方法，《SN应用科学》，2（2020年），1–12。https://doi.org/10.1007/s42452-020-1962-6。[8] L.Berezansky、A.Domoshnitsky、R.Koplatadze，《二阶及高阶泛函微分方程的振荡、稳定性与渐近性质》，CRC出版社、泰勒与弗朗西斯集团，2020年。[9] Becker LC、Burton TA、Krisztin T. Volterra方程的弗洛凯理论。《伦敦数学学会杂志》1988年；37–2：141–147。[10] S.A.Belbas，积分方程与积分微分方程的弗洛凯理论。《经典分析与常微分方程》，《应用数学与计算》，第223卷，2013年10月15日，第327–345页。[11] M.Bohner、A.Domoshnitsky、O.Kupervasser、A.Sitkin，一阶时滞方程的弗洛凯理论及其在无人机飞行高度稳定化中的应用，《电子研究档案》（ERA），2025年，33(5)：2840–2861，DOI：10.3934/era.2025125

[12] Cacace, F., Germani, A., & Manes, C. 具有多个时变测量时滞的非线性系统。《SIAM 控制与优化杂志》，52(3)，2014年，1862–1885。[13] B.Cahlon 和 D.Schmidt. 混合系数二阶时滞微分方程的稳定性判据，《计算与应用数学杂志》，170：79–102。[14] A.Domoshnitsky. 时滞自变量二阶微分方程解的无界性与不稳定性，《微分与积分方程》，14(2001年)，第5期，559–576。MR 2002c:34117。Zbl 0884.34074。[15] A.Domoshnitsky，关于无阻尼项二阶时滞微分方程的非振荡性、极大值原理与指数稳定性，《不等式与应用杂志》，2014年，2014:361，DOI：10.1186/1029-242X-2014-361。[16] A. Domoshnitsky、O. Kupervasser，《基于视觉的无人机导航器》，技术报告，NOFAR – 以色列创新局 / SWYFT 航空技术有限公司，私营公司，2020–2023年。[17] A. Domoshnitsky、O. Kupervasser，《从上方位置进行基于视觉的地面机器人导航》，技术报告，KAMIN – 以色列创新局，2018–2020年。[18] A.Domoshnitsky. 关于恰普雷金定理对解向量某一分量的适用性 //《微分方程》，26，1990年，1699–1705。[19]A.Domoshnitsky、E.Berenson、Sh.Levi 和 E.Litsyn，含时滞一阶微分方程的弗洛凯理论与稳定性，《格鲁吉亚数学杂志》，2024年，https://doi.org/10.1515/gmj-2023-2119。[20]A.Domoshnitsky，一阶Volterra泛函微分方程的极大值原理与非振荡区间，《连续、离散与脉冲系统动力学：A辑：数学分析》，15（2008年）769–814。[21]A.Domoshnitsky 和 T.Shavit，通过弗洛凯理论与作用-等待控制检验指数稳定化，《应用科学中的数学方法》(2025)：114，https://doi.org/10.1002/mma.70307。[22] Z.Dosla 和 I.T.Kiguradze. 含超前自变量二阶线性微分方程解的有界性与稳定性。《数学科学与应用进展》，Gakkotosho，东京，第9卷，第1期（1999年），第1–24页。[23] 弗洛凯 G. 关于 ´线性微分´方程´的周期 `系数´ [周期系数线性微分方程]。《高等师范学校年报》。1883年；12：47–49。[24] Fridman E.《时滞系统导论：分析与控制》，《系统与控制：基础与应用》，Birkhauser/施普林格，Cham，2014年。[25] Fridman E. 一种改进的采样数据控制输入时滞方法，《自动化》，46，（2014年），421–427。

[26] I.Gyori 和 G.Ladas，《时滞微分方程的振荡理论：应用》，Clarendon出版社，牛津，1991年。[27] Halanay A.《微分方程、稳定性、振荡与时滞》。纽约（NY）：学术出版社；1966年。[28] A. Halanay 和 V. Rasvan，《离散时间线性哈密顿系统的稳定性与边值问题》，Dynam. Syst. Appl. 8（1999年），第3–4期，439–459。[29] A. Halanay 和 V. Rasvan，《离散时间系统中的稳定性与稳定振荡》，Adv. Discrete Math. Appl. 2，Gordon and Breach Science，阿姆斯特丹，2000年。[30] Hale JK.《泛函微分方程理论》。第3卷，应用数学科学。纽约（NY）：施普林格出版社；1977年。[31] Jack K.Hale 和 Sjoerd M. Verduyn Lunel，《泛函微分方程导论》，应用数学科学99，施普林格出版社，1991年。[32] T. Insperger，G. Stepan，《时滞系统的半离散化：稳定性与工程应用》，施普林格·自然，2011年。[33] T.Insperger 和 G.Stepan，《通过动作—等待控制实现反馈时滞系统的降维》，IMA数学控制与信息杂志，第1–17页，2010年。[34] T. Insperger，G. Stepan，《反馈时滞系统的Brockett问题》，国际自动控制联合会第17届世界大会论文集，韩国首尔，2008年7月6日至11日，第11491–11496页。[35] T.Insperger，P.Wahi，A.Colombo，G.Stepan，M. Di Bernardo，《一阶不稳定时滞过程的动作—等待控制的完整特征描述》，振动与控制杂志，16（7–8）：1209–1233，2010年。[36] Kelley WG，Peterson AC。《差分方程：应用导论》。第2版。纽约（NY）：学术出版社；2001年。[37] V.Kolmanovskii 和 A.Myshkis，《泛函微分方程的应用理论》，克鲁维尔学术出版社，1992年。[38] Kolmanovskii, V. B. 和 Nosov, V. R.，《泛函微分方程的稳定性》，学术出版社，伦敦，1986年。[39] Yu.V.Komlenko 和 E.L.Tonkov，《带后效微分方程的李雅普诺夫-弗洛凯表示》，Russian Math.(IzVUZ)，39:10（1995年），38–43。[40] V.P.Maksimov 和 L.F.Rakhmatullina，《线性泛函微分方程解的表示》，Differe. Uravn.,1973, 9:6, 1026–1036。[41] W. Michiels，S. I. Niculescu，《时滞系统的稳定性、控制与计算：基于特征值的方法》，设计与控制进展第27卷，第2版，工业与应用数学学会（SIAM），费城，PA，2014年。

[42] A. D. Myshkis，带滞后自变量的线性微分方程。莫斯科，科学出版社，1972年。[43] S.-I. Niculescu，《时滞对稳定性的影响：一种鲁棒控制方法》，纽约，施普林格，2000年。[44] S.-I.Niculescu，Chaouki Abdallah，Keqin Gu 等，《时滞系统的稳定性与镇定》，发表于《IEEE 控制系统杂志》，2011年3月，DOI: 10.1109/MCS.2010.939135 · 来源：IEEE Xplore。[45] G.Sansone，《实数域中的微分方程 II》，Zanichelli，博洛尼亚，1949年。[46] G.Sansone，《常微分方程》，莫斯科，国际文学出版社，1953年。[47] J. Shaik，S. Tiwari 和 C. P. Vyasarayani，《利用标准正交历史函数研究线性时周期时滞微分方程的弗洛凯理论》，《计算与非线性动力学杂志》，18（2023年），1–10。[48] Gabor Stepan，Tamas Insperger，《时周期与时滞系统的稳定性——通向动作—等待控制的一种途径》，《控制年度评论》30（2006年）159–168。[49] Jianjun Paul Tian 和 JinWang，《弗洛凯理论的一些结果及其在周期性流行病模型中的应用》，《应用分析》，2014年 http://dx.doi.org/10.1080/00036811.2014.918606[50] Traversa FL，Di ventra M，Bonani F.《广义弗洛凯理论：在记忆动力系统中的应用，以及非局域势的布洛赫定理》。《物理评论快报》2013;110:170602。[51] V. A. Yakubovich，V. M. Starzhinskiı，《周期系数线性微分方程及其应用》，“科学出版社”，莫斯科，1972年。[52] Zhe Zhang，Bin Zhou，Wim Michiels，Xuefei Yang，《一种用于输入时滞系统固定时间镇定及单值矩阵配置的新型动作—等待控制方案》，《国际鲁棒与非线性控制杂志》，2022年；32：987–1003。