赝厄米磁振子动力学

Xi-guang Wang[1], * 和 Jamal Berakdar[2], †

[1]中国长沙*410083*，中南大学物理学院[2]德国萨勒河畔哈雷*06099*，马丁·路德大学哈雷-维滕贝格校区物理研究所

arXiv:2601.00701v1 [cond-mat.mes-hall] 2 Jan 2026

（日期：2026年1月5日）

摘要

物理系统的一个定义性量是能量，它由哈密顿量表示。在封闭的量子力学系统和/或相干波系统中，哈密顿量被引入为厄米算符，从而确保能谱为实数，并保证任意状态都能在其所处空间的一组完备基集上展开。伪厄米或PT 对称系统是非厄米系统中的一个特殊类别。它们描述开放系统，但能谱仍可能为实数。然而，其本征模通常并不正交。与厄米物理的这一质性差异，会对系统在稳态下或受到外部扰动时的物理行为产生一系列影响。本文综述了伪厄米物理领域的最新进展，探讨其在磁有序材料低能激发中的应用。重点主要是长波长自旋激发（自旋波），其中磁振子是这些激发的能量量子。本文将讨论多种系统构型，包括铁磁体、反铁磁体、磁振子晶体，以及与环境存在不同类型耦合的混合结构，还包括经过时空工程设计的系统；重点关注伪厄米性带来的特定现象，例如模放大、非互易传播、磁振子隐身、非厄米皮肤效应、PT对称辅助的弗洛凯工程、拓扑能量传输以及场诱导灵敏度增强。

* wangxiguang@csu.edu.cn

† jamal.berakdar@physik.uni-halle.de

I. 非厄米与伪厄米系统简介

在传统量子系统中，哈密顿量通常是厄米算符，从而确保能谱为实数，并保证存在一组正交本征态构成的基集。分解原理意味着系统的任意状态都可表示为投影到基集所张成子空间上的分量的线性叠加，因此它是厄米性的结果。由这一原理衍生出的诸多现象已有充分记载，通常也是人们初次接触量子力学原理时会学习的内容。实际上，许多系统是开放的，或会发生能量增益或损耗；在这种情况下，哈密顿量通常不再是厄米的。这显然处于经典世界与纯粹量子能量守恒情形的边界：前者阻尼效应无处不在，后者则与环境相隔绝。

从数学角度来看，非厄米算符可能具有复本征值。本征态不一定彼此正交，甚至可能不可归一化。因此，分解原理通常无法实施。另一方面，我们可以预期，此类系统的静态和动力学行为在性质上会不同于厄米系统。早期对非厄米系统的研究主要集中于稳定性分析、环境耦合引起的谱变化，以及耗散对动力学行为的影响。[1–3]非厄米研究的一项重要里程碑，是发现了被归类为伪厄米系统的PT对称系统。[4, 5]伪厄米系统构成了介于厄米问题与非厄米问题之间的独特中间类别。对于伪厄米情形，在某种度量下，哈密顿量仍保持伴随性，从而满足伪厄米性条件 $H = \eta H^{\dagger}\eta^{-1}$。[6]伪厄米哈密顿量仍可具有实能谱，但其相应系统所表现出的特征在性质上不同于厄米物理。与非厄米系统复杂的能谱相比，伪厄米哈密顿量的本征值虚部通常遵循特定的对称性，而这种对称性可以通过外部方式调节，正如我们将在本文中讨论的那样。重要的是，伪厄米系统可能在特定参数下经历临界跃迁，这些跃迁被称为非厄米相变，会导致能谱发生显著变化，并产生类似于相变的现象，例如增强或发散的磁化率。控制相变

转变点的参数例如可以是引入系统中的增益或损耗的大小，也可以是组成要素之间的耦合强度。[7] 这些特征已被证明会产生新的物理效应，包括自发对称性破缺、例外点（EP，即本征值与本征模合并的非厄米谱简并）、非互易或非对称波传播，以及违背直觉的功率振荡——能量在增益区域与损耗区域之间循环。[8–12] 迄今积累的研究成果凸显了 PT 对称系统在光学、凝聚态物理和量子信息等领域的巨大应用潜力。

伪厄米概念已在多种经典系统中成功实现，包括光学、机械、电路和超材料平台，人们可以在其中有意引入增益与损耗。[8, 9, 13, 14]例如，光学提供了理想的研究平台，因为可以通过设置具有光放大的区域和吸收区域，来设计复折射率分布。[13]同样，机械和声学谐振器可以与有源元件（用于增益）和阻尼器（用于损耗）耦合，从而形成 PT 对称振荡器。[8, 13]配备放大器和电阻器的电路，以及含有有源夹杂物的电磁／超材料结构，进一步拓展了伪厄米物理的研究。[14, 15] 这些研究既出于对基础问题的兴趣，也受到新兴应用的推动。例如，例外点物理催生了超灵敏传感器和单模激光器，而 PT 对称结构则实现了诸如隐形传感器和单向波导等新型器件，能够以非传统方式操控波流。[16–21]

A. 伪厄米性的数学表述

为了概述不同类型的动力学，我们从一个能量量子化系统 S_1 出发，考察实频率为 a 的能级附近一个较小能量范围（小于能级间距）内的动力学。我们假设 S_1 遵循薛定谔型运动方程，其中 H 对应“能量”算符（下文称为哈密顿量），而 t 在薛定谔型波动方程中扮演“时间”的角色。如果有两个相同的系统 S_1 和 S_2，且它们相距很远，那么在感兴趣的能量范围内，H 为 $H = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$，并且我们有两个相互独立的

（正交归一）态 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，其频率为 a；任意给定态 $\psi(t_0)$ 在时间 t_0 的动力学，均可由其在时间 t 时的状态 $\psi(t) = U(t,t_0)\psi(t_0)$ 完全确定，其中 $U = \begin{pmatrix} e^{-ia(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{-ia(t-t_0)} \end{pmatrix}$，这意味着 S_1 和 S_2 完全独立地传播。如果将 S_1 和 S_2 靠近，使它们能够通过某种机制交换信息，并将信息传输的振幅命名为 b（它与 S_1 和 S_2 之间跃迁的矩阵元成正比），那么耦合后的 H_c 会出现非对角元 b。二重简并的频率 a 能级分裂为 $\omega^{\pm} = a \pm \frac{1}{2}\sqrt{4bb^*} = a \pm b$ 和 U_c 变为 $U_c = \begin{pmatrix} e^{-i\omega^+(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega^-(t-t_0)} \end{pmatrix}$。$H_c$ 的本征模（常称为声学（+）模或光学 –模）为 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$。如果我们在$t = t_0$ 时将整个系统 S 制备在 S_2 中（且 S_1 未被布居），那么在之后的某个时刻，系统将演化为 $\psi(t) = U_c(t,t_0)\psi(t_0)$，而 S_2 的布居为 $|\langle\psi(t)|\psi(t_0)\rangle|^2 = \frac{1}{2}[1+\cos(2|b|t)]$。模式布居或模功率在 S_1 和 S_2 之间产生拍频，拍频的时间尺度由 b决定。如果 S_1 和 S_2 之间的耦合矩阵元呈谐波变化，即若 $b = b_0\cos(\omega_0 t)$，那么当 $b_0 \gg a$ 时，我们还可以通过对角化依赖于 t 的 H_c，利用 $R^{-1}H_cR$ 和 $R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，得到解析解；此时演化算符为

$$U_c(t, t=0) = \begin{pmatrix} e^{-ib_0\int_0^t cos(\omega_0 t')dt'} & 0 \\ 0 & e^{ib_0\int_0^t cos(\omega_0 t')dt'} \end{pmatrix}.$$

根据公式

$$e^{-i\frac{b_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(b_0/\omega_0)e^{-in\omega_0 t},$$

其中，J_n 是阶数为 n的第一类贝塞尔函数。由此可见，动力学呈准周期性，这意味着演化会包含多个频率，具体取决于系统与驱动耦合场之间交换了多少个 $n\omega_0$ 量子；但该动力学并非耗散性的，也就是说总功率没有损耗或增益。我们可以根据关系式推知交换了多少个$n\omega_0$

$$\lim_{|n|\gg 1} J_n(b_0/\omega_0) \to \frac{1}{2n\pi}(\frac{b_0\, e}{2n\omega_0})^n$$

这意味着，如果 $\frac{b_0}{\omega_0} \ll 1$ （且 $a/b_0 < 1$），那么动力学中仅涉及少数额外频率 $n\omega_0$（相对于无场情形）。本文将讨论上述三种情形（$b_0 = 0$， $b_0 \neq 0 \wedge \omega_0 = 0$， $b_0 \neq 0 \wedge \omega_0 \neq 0$），它们在 t中均呈现幺正演化，动力学具有 t 反演对称性，且输入信息不会丢失。若存在与 S_1和/或 S_2 耦合的环境，情况则有所不同，此时信息在系统内不再守恒。在我们的情形中，耦合机制的影响可以用最简单的方式表示为

$$H = \begin{pmatrix} a - i\gamma_1 & b \\ b^* & a + i\gamma_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

$\gamma_{1,\ 2}/\hbar \in \mathbb{R}$ 描述了非耦合的 S_1 和 S_2的能量耗散或放大率（无论 $b = 0$ 还是通常为复数）。当$\gamma_{1,\ 2} \neq 0$时，哈密顿量变为非厄米 $H \neq H^\dagger$。本征值

$$\lambda_\pm = a + [i(\gamma_2 - \gamma_1) \pm \sqrt{4|b|^2 - (\gamma_1 + \gamma_2)^2}]/2$$

通常为复数，而本征矢

$$\boldsymbol{\psi}_\pm = ((-i(\gamma_2 + \gamma_1) \pm \sqrt{4|b|^2 - (\gamma_2 + \gamma_1)^2})/(2|b|), 1)^T$$

不再正交。

在增益与损耗平衡（$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$）这一特殊情况下，这意味着整个系统 S_1 和 S_2 不会通过与环境的耦合而获得或损失能量，尽管各个子系统会如此；在一定范围内，能量本征值 $\lambda_\pm$ 可能变为实数，此时哈密顿量 H 称为伪厄米或PT对称。在我们的具体情形中，当 $|\gamma| < |b|$时，两个本征值 $\lambda_\pm$ 均为实数。

从数学上讲，伪厄米 H 是一个非自伴算子，它通过相似变换与 $H^\dagger$相关联，即 $H^\dagger = \eta H \eta^{-1}$ 其中 η 是一个厄米算子 [22, 23]。如果 η 是正定的，那么 H 的谱是实数。引入 η-内积 $\langle \phi,\ H\psi \rangle_\eta$ 其中 η 在任意非欧空间上，充当内积度量的角色。由于 $H^\dagger \eta = \eta H$ ，我们有 $\langle \phi,\ H\psi \rangle_\eta = \langle H\phi,\ \psi \rangle_\eta$ 根据谱定理可知 H 具有实数本征值。通常的厄米算子是伪厄米算子的一种，其 $\eta = \mathbb{1}$。

伪厄米算子也称为宇称（P）-时间（T）对称算子，因为

其中 T为反线性算符，$(PT)H - H(PT) = 0$意味着 $PTHT^{-1} = PH^{\dagger} = HP$或 $H^{\dagger} = P^{-1}HP = PHP = PHP^{-1}$（注意 $P^2 = \mathbb{1}$）。

对于上文讨论的例子，宇称操作在物理上通常意味着交换S_1与 S_2。若使用泡利矩阵 σ_i，$i = x,\ y,\ z$，那么宇称操作相当于 σ_x。根据上面对哈密顿量（1）及其本征函数的讨论，我们可以得出，当 $|\gamma| < |b|$时，宇称对称性成立，此时 η 相当于 σ_x。相反，当 $|\gamma| > |b|$时，本征值 $\lambda_{\pm}$ 为复数，PT对称性遭到破坏。随着 t增大，虚部为正（负）的模式振幅会增强（减弱）。在转变点 $|\gamma| = |b|$，也称为例外点（EP），两个本征值和本征矢合并。这种非厄米简并在EP处的阶数由同时合并的本征值和本征矢的数量决定。因此，在上述例子中，我们有一个二阶EP。相变也体现在本征矢的变化上。在EP以下，本征矢可以表示为

$$\boldsymbol{\psi}_{\pm} = (\pm \exp(\mp i\theta), 1)^T,$$

其中

$$\sin\theta = \gamma/b$$

and

$$\cos\theta = \sqrt{b^2 - \gamma^2}/b.$$

两个本征模都分布在 S_1 和 S_2中。不过，它们的行为与厄米情形有本质区别：当$\gamma \neq 0$时，两个本征矢并不正交，尽管仍可观测到相干性。在例外点处，两个本征矢平行。越过例外点后，动力学呈耗散性。非正交本征矢可表示为

$$\boldsymbol{\psi}_{\pm} = (i \exp(\pm\theta), 1)^T$$

with

$$\cosh\theta = \gamma/b.$$

在此状态下，本征模关于 S_1 和 S_2 的对称性被破缺。模式振幅或功率主要集中在一个子系统中。这种行为是一般情形的一个特例，在一般情形中，不仅有 $H \neq H^{\dagger}$，而且还有一个非正规 H，即 $\left[H, H^{\dagger}\right] \neq 0$；在这种情况下，人们将右本征态 $|R_{\alpha}\rangle$ 与左本征态 $\langle L_{\alpha}|$ 区分开来，其中

α 是定义这些状态的一组量子数。从数学上讲，涉及非正规本征值和伪谱的问题已经得到了深入研究 [24, 25]。在这里，我们寻求对非正规行为影响的量化 $\left[H, H^{\dagger}\right] \neq 0$，这通过彼得曼因子 [26–30] ($\langle|.|\rangle \equiv \langle|.|\rangle_{\eta=\mathbb{1}}$)

$$K_{\alpha}=\frac{\langle R_{\alpha}|R_{\alpha}\rangle\langle L_{\alpha}|L_{\alpha}\rangle}{|\langle L_{\alpha}|R_{\alpha}\rangle|^{2}}. \tag{2}$$

相位刚性 [31–33]表示为

$$r_{\alpha}=\frac{|\langle L_{\alpha}|R_{\alpha}\rangle|}{\sqrt{\langle R_{\alpha}|R_{\alpha}\rangle\langle L_{\alpha}|L_{\alpha}\rangle}}. \tag{3}$$

根据柯西-施瓦茨不等式 $|\langle L_{\alpha}|R_{\alpha}\rangle|^{2} \leq \langle R_{\alpha}|R_{\alpha}\rangle\langle L_{\alpha}|L_{\alpha}\rangle$ ，我们推知，当左态与右态等价时，$K_{\alpha}=1$ ；否则， $K_{\alpha}>1$ ，甚至可能发散。相位刚性 $r_{\alpha}=1/\sqrt{K_{\alpha}}$ 的取值范围为 $0 \leq r_{\alpha} \leq 1$。 ——

上文讨论了一个由两个耦合的 PT 对称系统构成的例子，其中增益与损耗平衡，代表了伪厄米系统中的一个特定类别。伪厄米性还有其他形式，它们由运算 η 的不同形式定义，并由此产生多样的光谱特性。[34, 35]。

II. 伪厄米系统的物理性质 MS

本章旨在简要概述光学、机械、电气和超材料平台中的伪厄米系统，并阐明各个平台中增益与损耗的实现机制。关于深入论述，请参阅针对具体主题的相关文献。

一般而言，PT 对称条件通过空间分布且轮廓对称的增益与损耗来实现。例如，折射率为 $n(r) = n^{*}(-r)$ 的光学结构，其实部为偶函数、虚部为奇函数，便可实现形式上的 PT 对称性。[13] 这意味着一个区域提供光学增益，而镜像区域提供等量的损耗。同样，在机械或电振子中，一个元件可以提供能量（增益），另一个元件则以相同程度耗散能量（损耗）。[8, 14] 在这些平衡条件下，可以观察到新奇的物理现象。在未破缺相中，能量可以在增益与损耗元件之间振荡而不产生净损耗，从而形成振荡动力学。PT 对称结构可以表现出非互易波传播，例如单向隐身：

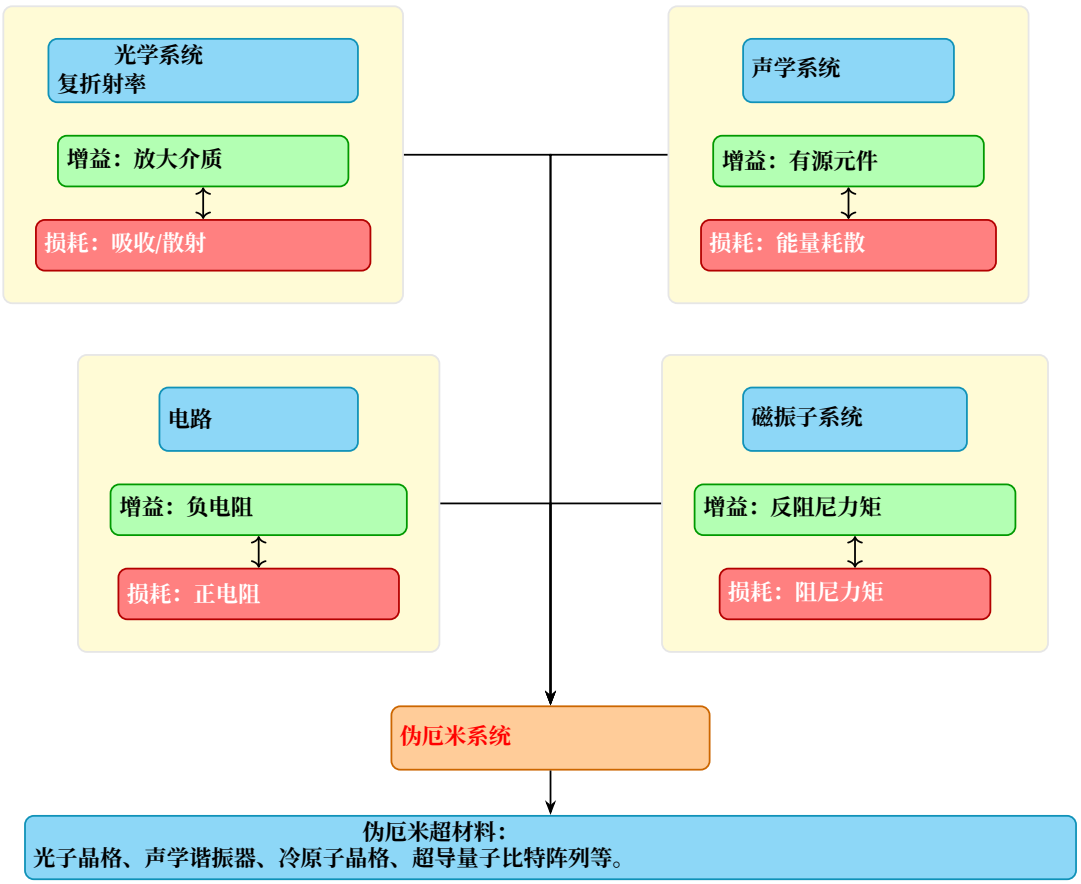


图1. 不同物理领域中的伪厄米系统。

从一侧入射的波会完全透射且没有反射，而从另一侧入射时则会发生反射。[11] 这种效应出现在例外点附近。[11, 36]此外，例外点可以极大地放大对微小扰动的响应，此时频率分裂与扰动的 n 次方根成正比，而 n表示例外点阶数。[16, 37]此外，通过放大一种模式并抑制其他模式，选择性 PT 对称性破缺已被用于提升激光器的单模运行能力。[38]

A. 伪厄米光学系统

光学一直是实现和操控伪厄米系统特性的理想平台，尤其是具有PT对称性 [39, 40]的系统。

在PT对称光学中，通过调制复折射率，可在耦合波导或微腔中实现光功率增益与损耗平衡，

复折射率表示为 $n(x) = n_{\mathrm{R}}(r) + in_{\mathrm{I}}(r)$，其中 n_{R}和 n_{I}分别是实部（相干相位折射）和虚部（增益/损耗）。PT对称性要求 n_{R} 为$n_{\mathrm{R}}(r) = n_{\mathrm{R}}(-r)$，且 $n_{\mathrm{I}}(r) = -n_{\mathrm{I}}(-r)$。光学增益可通过放大介质实现（例如泵浦掺杂光纤、半导体光放大器或激光泵浦晶体）。光学损耗则源于吸收或散射（通过使用本征损耗材料或调节至辐射泄漏状态）。例如，Guo等人使用两条平行介质波导，其中一条经过涂覆以引入损耗，另一条则通过泵浦获得增益；他们观察到，随着增益/损耗强度的变化，系统发生了PT对称性破缺相变。[40] C. R¨uter等人报道了光学中首次观测到PT对称性：他们使用一对耦合波导，其中一条波导在掺铁铌酸锂中通过光折变双波混频获得光学增益，另一条则经历等量吸收。[13]他们的实验验证了自发PT对称性破缺。超过临界增益/损耗强度后，导模本征态从传播常数为实数的区域转变到传播常数变为复数的区域。即使在相变发生之前，增益与损耗平衡的存在也会在波导之间引起不对称能流。

自这些开创性研究以来，伪厄米性的光学实现取得了长足进展。典型平台采用耦合微谐振器或微环，其中一个谐振器具有损耗，另一个则提供增益。例如，Hodaei等人和Feng等人分别展示了PT对称微环激光系统。[20, 38] 通过将有源微环（由电泵浦的InGaAsP半导体提供增益）与一个相同的无源环（引入损耗）耦合，在例外点处，激光器的频率选择显著简化。其中一个超模被放大至激射，而另一模式则受到损耗抑制，从而克服了激光器中常见的多模竞争，为无需传统隔离器或滤波器的单模激光器铺平了道路。

另一种光学赝厄米装置涉及光学晶格和超材料，这些装置可通过具有交替增益与损耗或复折射率调制的周期结构实现。Feng等人展示了一种工作在例外点附近的单向隐形光学超材料。[11] 通过精心设计具有图案化损耗与增益区段的绝缘体上硅波导阵列，从一端入射的光会经历平衡的增益-损耗，并在无反射的情况下完全透射。从另一端入射时，对称性会被有效打破，并产生显著反射，这意味着实现了单向无反射。

在这些光学平台中，可以发现几种共同的PT对称性相关物理现象。通过调节耦合或增益–损耗对比，可以使两个共振在例外点处的频率和线宽趋于一致。这一特性对于开发新型光学传感器十分重要。例如，周围介质折射率的微小变化，会导致工作在例外点附近的耦合光学微腔的光谱发生可测量的偏移，从而实现超高灵敏度传感器。 [19] 这种灵敏度增强源于例外点附近本征值对微扰强度呈分数次幂依赖。对于 n 阶例外点 R，本征值分裂与外部微扰的 R次方根成比例。[16, 17, 41] 这种标度关系意味着，即使外部参数发生微小变化，也可能导致光谱特性显著改变，包括共振频率或透射系数。基于例外点的此类传感器已被开发用于检测温度、质量的微小变化，甚至探测单分子的存在。

在例外点附近，平衡增益与额外损耗会导致非互易光传播。A. Guo等人在波导中集成光学增益介质和损耗材料，形成复杂的伪厄米势；相关相变会带来损耗诱导的光学透明性 [40]。B. Peng等人通过在达到例外点的耦合腔中设计增益与损耗，实现了近乎完美的单向透射。[42] 在这种情况下，光从一个方向传播时会受到放大并实现强透射，而从相反方向入射的光则会遭受损耗，透射较弱。非互易性还体现在具有PT对称性的散射势所产生的反射中，这一特性被用于实现单向隐身。[36, 43] 此外，若在PT对称光学系统中引入非线性或时间周期调制，就能实现真正的光学隔离和单向传播。[44–46] 例如，PT二聚体中的可饱和增益会使有效增益-损耗平衡依赖于强度，从而导致不同入射光束方向下出现非互易跃迁。[44] 近来，人们还探索了Floquet PT对称光子学（采用时间周期驱动），以实现模式之间的非对称能量传递。[47–49]

伪厄米物理与非线性光学的结合带来了新现象。具体而言，例外点提供了增强非线性光学过程的独特契机。在例外点附近，系统的态密度显著增加，从而增强了光-物质相互作用，并产生新的孤子解等非线性效应 [50, 51]。

将伪厄米性与拓扑能带结构相结合是一个新兴的研究领域。PT对称光子晶格可被设计为具有非平庸拓扑性质，并可呈现拓扑边缘态等特征；在PT对称的情况下，这些态会因增益-损耗配置而增强或受到保护。[9, 52] 在子晶格上交替设置增益与损耗的光子Su–Schrieffer–Heeger（SSH）链表明，拓扑界面态保持稳健，而连续谱模式则受到衰减。这为选择性增强拓扑态，甚至诱导拓扑相变提供了一种新手段。若干关于非厄米拓扑激光器和单向边缘激光器的方案，将拓扑与PT对称性结合起来。

B. 伪厄米机械系统

在机械系统中，实现伪厄米结构通常需要一个有源元件提供能量增益，并配备一个等效的耗散元件造成损耗。一个例子是一对耦合振荡器，其中一个振荡器连接到一个向系统输入能量的执行器，另一个则连接到一个耗散能量的阻尼器。如果增益与损耗的强度相等，则可以证明其动力学表现出类PT对称性行为，并呈现例外点、非互易波传播和单向隐身 [8, 53, 54]。

Carl Bender 等人通过一项使用两个耦合摆的桌面机械实验展示了这一概念。[7] 其中一个摆装有一个小型电机，用于提供恒定驱动（增益）；另一个摆则装有摩擦制动器，以提供等效阻尼（损耗）。两个摆通过一根弹簧连接，从而实现耦合。通过调节增益与损耗的水平，他们观察到了典型的PT相变和例外点。

Zhu等人提出了声学中的PT对称性概念，并从理论上表明，经过精心设计、具有复密度和复模量的声学介质可以实现单向透明。[8]声学领域面临的挑战在于如何实现有效的声学增益，以补偿声学损耗，因为典型材料只会耗散能量。通过使用有源压电元件，这一问题已得到解决。例如，可以为声学谐振器配备反馈控制电路，以放大声波，起到负电阻（增益）的作用。Fleury、Sounas等人展示了一种隐形声学传感器，它由两个耦合的声学腔体组成，其中一个加载了吸收元件，而另一个

则配备了提供增益的有源电网络。[10] 在某一频率下，该系统能够完美吸收入射声波，且不产生反射。

C. 伪厄米电路

电路是模拟伪厄米哈密顿量的直接平台。有源（负电阻）和无源（正电阻）元件构成增益-损耗元件，与几何对称的耦合配置（例如匹配的电感（L）和电容（C）对）相结合，满足伪厄米系统的判据。[14, 15]Schindler 等人开展了一项实验，将两个相互耦合的 RLC 谐振电路连接在一起，其中一个包含有源负电阻（增益），另一个包含正电阻器（损耗）。[14]结果表明，该电子二聚体严格遵循 PT 对称条件，呈现出伪厄米性的典型特征。

电学系统的优势在于易于重新配置和测量。通过使用可调电路元件（如可变电阻器和半导体二极管）对电学参数进行调制，可以实现对伪厄米相变的动态控制，从而能够实时操纵非厄米系统。此后，研究人员利用集总电路网络探索了高阶及更为奇特的非厄米效应。通过级联多个具有交替增益与损耗的谐振 LC 单元，模拟出了高阶例外点（EP3、EP4 等），例如验证了理论所预测的对微扰的敏感依赖性。[55] 此外，电路不仅被用于实现 PT 对称性，也被用于实现反PT对称性。近期研究展示了一对采用电容耦合的反PT对称 RLC 谐振器，呈现出一种保持两个谐振器能量差不变的例外点跃迁。[56]

D. 伪厄米超材料

超材料是经过工程设计的结构，旨在呈现与组成材料的光学性质可能大相径庭的光学特性。通常，通过周期性或非周期性的排列来调节介电常数或磁导率，从而实现这一目标。超材料的可调性使其成为实现和控制非厄米现象的理想平台。伪厄米超材料可以通过

多种设计策略实现，包括采用特定的增益与损耗元件排列、集成有源元件，或利用超材料结构中的对称性。伪厄米超材料能够在不同物理领域实现波操控功能，涵盖光子系统、声学谐振器、冷原子晶格、等离激元系统和超导量子比特阵列。[57–59]此类功能的示例包括单向波传播、增强的传感能力，以及非常规激光源的设计。

实现光学增益与损耗的可行性，加上超材料设计所提供的精确控制，推动了该领域取得重大进展。通过设计由增益与损耗梯度或非对称单元胞诱导出非互易耦合的超材料，研究人员观察到光在超材料结构边界处聚集。[60] Liang Feng等人采用电子束光刻，并依次蒸镀Ge/铬和Si，制备出一种无源PT对称超材料。该非厄米系统展现出例外点增强的单向反射抑制：正向传播时完全光学透明，同时在反向传播时保持传统反射。[11] Ye Geng等人设计了人工光子超材料结构，可将理想外尔点转变为非厄米例外环。[61]研究人员构建了PT对称光子晶体、光栅乃至超表面，以实现非对称衍射、相干完美吸收、激射模式和拓扑边缘态等效应。

在电磁领域，通过在谐振超原子中引入增益，人们设计出了微波超材料。研究采用加载晶体管的开口环谐振器提供增益，并与另一个带有电阻器、用于产生损耗的环配对，形成一个PT对称晶胞。[62] 将这些晶胞排列成阵列后，便制成了一种超材料：在一种偏振下，它具有异常透射带；而在相反的传播方向上，则具有反射带。

超材料也可应用于声学与机械实现。通过集成压电换能器等有源元件以及电子反馈控制系统，可以引入伪厄米性。Yangyang Chen 等人设计了有源反馈回路，以方向相关的方式放大或衰减机械振动，从而有效打破时间反演对称性，并得到伪厄米有效哈密顿量。[63] Yanghao Fang 等人提出了新型宇称-时间对称

弹性动力学超材料，可用于超灵敏传感和弹性波控制。[64] V. Achilleos 等人展示了声学赝厄米超材料在例外点处增强的吸收。[65] 此外，Xinhua Wen 等人采用时空调制赝厄米超材料，实现了高效频率转换和放大，可用于先进声学器件。[66]

在拓扑方面，非厄米超材料（包括伪厄米材料）可以呈现超越布洛赫能带理论的拓扑相，并产生非厄米皮肤效应。Di Zhou 等人展示了这种非厄米皮肤效应在一维和二维晶格中的表现，以及其在各种有源材料和生物系统中的应用。[67]PT对称材料中的非线性会带来更多有趣现象，例如 N. Lazarides 等人介绍的离散呼吸子，其在光学器件和能量收集方面具有潜在应用。 [68]

III. 磁振子学

本综述的主要目的是探讨 PT对称性与自旋有序材料的低能激发或自旋波之间的联系。磁振子是自旋波的能量量子；自旋波是围绕基态有序排列的横向集体小振幅振荡。磁振子具有自旋但不带电荷，磁振子的传输通常不涉及电荷输运，因此不会产生焦耳热，这使磁振子成为信息传输、处理和存储的理想载体。[69]磁振子器件具有诸多潜在优势，例如低能耗、可在吉赫兹至太赫兹频率下运行，以及可集成到纳米尺度器件和自旋电子学中。[70,71] 如何产生、操控和检测磁振子流，并利用它们开发高性能器件，是一个迅速发展的跨学科领域，即磁振子学。[72–75]

A. 磁激发

考虑一个局域自旋 s_1，并让另一个自旋 s_1靠近它，根据冯·诺伊曼运动方程 [76]，我们发现 s_1 会受到力矩作用，其强度取决于 s_1 与 s_2之间的相互作用，而这种相互作用通常源于

交换相互作用。从物理上说， s_1 会产生进动运动 [75, 77, 78]。对于有序排列的自旋集合，这种进动会汇聚成集体波；但在条带这类有限尺寸系统中，交换能的能标远高于（通常高出一个数量级）其他相互作用的能标，其中最重要的是磁静力偶极相互作用。 [79–81] 这种运动在局部表现为进动，并逐渐形成集体色散波；其能量在铁磁体中为吉赫兹量级，在反铁磁体中则为太赫兹量级。实际上，由于各种自旋相关散射事件，进动会受到阻尼。能谱十分密集，即使在相当低的温度下，通常也存在大量激发；此时可以使用相应的相干态，而相干态又可以用经典方法很好地描述。实际上，这些波可能是量子化的，但对于相干态，这种量子化通常是由（经典的）有限尺寸效应导致的。从磁振子福克态出发构造相干态是一种方法，但更实际的做法是从（半）经典角度入手，这样更容易纳入磁静力相互作用、几何结构和闭合场效应。具体而言，可以从每个格点上局域化的经典自旋所构成的原子晶格入手（这种方法称为原子自旋模拟），也可以对（量子或经典）磁矩进行粗粒化，并转而采用连续体方法来定义磁化矢量场 $\mathbf{m}(\mathbf{r}\ t)$，其中 $\mathbf{r}$ 是粗粒化单元的中心。这种方法通常称为微磁模拟，适用于研究波长远大于原子晶格常数的相关现象。自旋波的时间演化和空间传播由朗道-利夫希茨-吉尔伯特方程在数学上描述，[82]

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{m} \times \mathbf{H}_{\text{eff}} + \alpha \mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t}. \tag{4}$$

该方程将材料属性、几何结构以及外场纳入有效磁场 $\mathbf{H}_{\text{eff}}$。各种阻尼机制统合在参数 α 中，该参数称为吉尔伯特阻尼； γ 为旋磁比。要确定$\mathbf{H}_{\text{eff}}$，可从磁能密度 E_{m} 的泛函入手

$$E_{\text{m}}[\mathbf{m}] = A_{\text{ex}}(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{m})^2 + E_{\text{K}} - \mu_0 M_{\text{s}}(\mathbf{H}_{\text{a}} \cdot \mathbf{m}) - \frac{1}{2}\mu_0 M_{\text{s}}(\mathbf{H}_{\text{d}} \cdot \mathbf{m}), \tag{5}$$

其中包括交换能，交换系数为 A_{ex}；以及由外磁场 $\mathbf{H_a}$产生的塞曼能。 E_{K} 是磁各向异性能。该能量是磁化矢量场$\mathbf{m}$ 的泛函；为方便起见，通常将其归一化为单位长度

。静磁能由退磁场 H_{d}决定，该退磁场源于体电荷 $\rho = -\mu_0 M_{\mathrm{s}}(\nabla \cdot \mathbf{m})$ 和表面电荷 $\sigma_{\mathrm{s}} = \mu_0 M_{\mathrm{s}}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})$（其中$M_{\mathrm{s}}$ 为饱和磁化强度，$\mathbf{n}$为表面法线，μ_0 为真空磁导率）。退磁场由[77, 78]决定

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\mathrm{d}}(\mathbf{r}) &= -\nabla \Psi_{\mathrm{d}}(\mathbf{r}), \\ \Psi_{\mathrm{d}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\mu_0}\left[\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' + \int \frac{\sigma_{\mathrm{s}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^2\mathbf{r}'\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

平衡磁化通过最小化泛函 $\delta E_{\mathrm{m}}[\mathbf{m}] = 0$得到，也可以表示为力矩方程 $\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{\mathrm{eff}} = 0$。有效场为

$$\mathbf{H}_{\mathrm{eff}} = -\frac{1}{\mu_0 M_{\mathrm{s}}} \frac{\delta E_{\mathrm{m}}}{\delta \mathbf{m}} = \frac{2A_{\mathrm{ex}}}{\mu_0 M_{\mathrm{s}}} \nabla^2 \mathbf{m} + \mathbf{H}_{\mathrm{a}} + \mathbf{H}_{\mathrm{d}} - \frac{1}{\mu_0 M_{\mathrm{s}}} \frac{\delta E_{\mathrm{K}}}{\delta \mathbf{m}}. \tag{7}$$

为清晰起见，我们采用沿着定义为$\mathbf{H_a} = H_0 \mathbf{y}$ 方向的均匀磁场 $+y$。为简化起见，忽略退磁场和各向异性场的贡献（将在后续章节中加入并讨论）。磁振子或自旋波（SW）激发由相对于平衡态（$\mathbf{m}_0 = (0,1,0)$)的小偏离$\delta m_{\mathrm{x}} = m_{\mathrm{x,s}} e^{i(kr-\omega t)}$和$\delta m_{\mathrm{z}} = m_{\mathrm{z,s}} e^{i(kr-\omega t)}$。将我们的假设代入LLG方程（4），并寻求关于 $\delta m_{\mathrm{x}}, \delta m_{\mathrm{z}}$的线性运动方程，可得

$$\begin{aligned} \omega m_{\mathrm{x,s}} + i\alpha(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}} k^2) m_{\mathrm{x,s}} - i(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}} k^2) m_{\mathrm{z,s}} = 0, \\ \omega m_{\mathrm{z,s}} + i\alpha(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}} k^2) m_{\mathrm{z,s}} + i(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}} k^2) m_{\mathrm{x,s}} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

决定频率为 $\omega_{\mathrm{H}} = \frac{\gamma H_0}{1+\alpha^2}$，以及 $\omega_{\mathrm{ex}} = \frac{2\gamma A_{\mathrm{ex}}}{(1+\alpha^2)\mu_0 M_{\mathrm{s}}}$。引入$\psi = m_{\mathrm{x,s}} + i m_{\mathrm{z,s}}$后，方程变为，

$$\omega\psi - (1 - i\alpha)(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}} k^2)\psi = 0. \tag{9}$$

磁激发的本征频率由 $\omega = (1 - i\alpha)(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}} k^2)$ 得出。负的虚部描述磁激发的衰减，这由 α 项决定。其实部 $\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}} k^2$ 表示高于截止频率 ω_{H} 的色散关系。这种抛物线色散关系是交换作用主导的自旋波的典型特征，因此这类磁振子称为交换自旋波，或磁振子。

对于扩展铁磁介质，偶极相互作用可由 Herrings-Kittle公式描述，[83]

$$\omega = \sqrt{(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}} k^2)(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}} k^2 + \omega_{\mathrm{M}} \sin^2 \theta_{\mathrm{k}})}. \tag{10}$$

我们引入了以下定义 $\omega_{\mathrm{M}}=\gamma M_{\mathrm{s}}$，以及 θ_{k}，它表示波矢与磁化之间的夹角。在长波长极限下，即 k较小的情况下，交换作用的影响较弱，激发频率 $\omega=\sqrt{\omega_0(\omega_0+\omega_{\mathrm{M}}\sin^2\theta_{\mathrm{k}})}$ 主要由偶极相互作用决定，并且具有传播方~~向各向异性（~~示例见图2~~）~~。

B. 受限几何结构中的自旋波

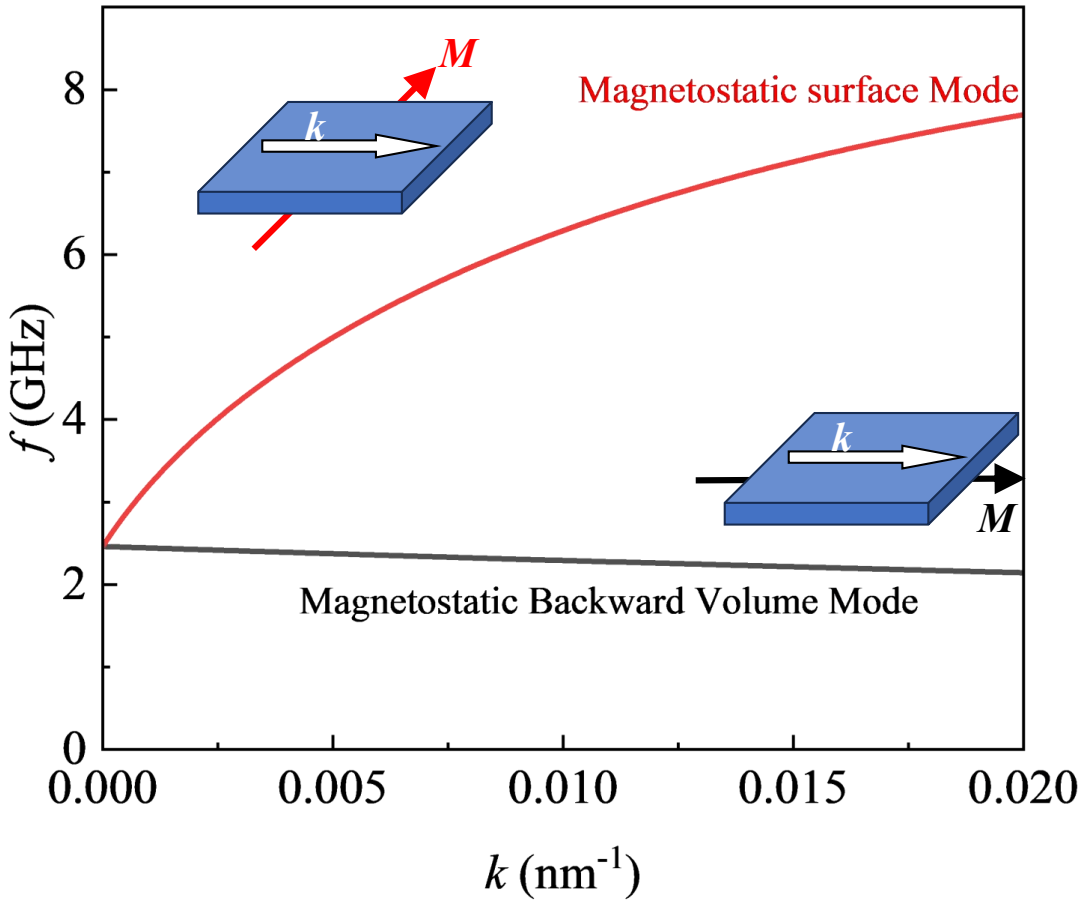


图 2. 薄铁磁条带中典型的偶极表面自旋波（波矢**k** 垂直于磁化**M**）和后向体自旋波（波矢**k**平行于磁化**M**）的色散。

磁静力自旋波的性质会受到几何结构以及

材料内部主导相互作用的强烈影响。首先，我们考虑仅在厚度方向（即 y 方向）受限的铁磁性薄膜中自旋波的性质。薄带的厚度 d远小于宽度w时，也会遇到这种情况。磁化在平面内沿着施加于 z 方向的磁场 $\mathbf{H_a} = H_0\mathbf{z}$ 达到饱和。在这种情况下，薄膜边界会产生磁表面电荷，并影响偶极场。偶极场可近似为 [84]

$$\mathbf{H}_{\mathrm{d}} = -[f(kd)\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{m}}{k^2}\mathbf{k} + (1 - f(kd)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})\mathbf{n})]. \tag{11}$$

此处，$f(kd) = 1-(1-e^{-kd})/kd$与 $k^2 = k_{\mathrm{x}}^2 + k_{\mathrm{z}}^2$。将薄膜偶极场代入线性化 LLG 方程，可得自旋波色散关系

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2)(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2 + \omega_{\mathrm{M}}F_{\mathrm{m}})}, \\ F_{\mathrm{m}} &= 1 - f(kd)\cos^2(\theta) + \frac{\omega_{\mathrm{M}}f(kd)(1 - f(kd))\sin^2(\theta)}{\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2}. \end{aligned} \tag{12}$$

此处，θ 是静态磁化强度与波矢之间的夹角。在大波矢的交换极限下，色散关系简化为 $\omega = \omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2$，适用于无限制系统。在小 k 的偶极极限下，当波矢平行于平衡磁化（$\theta = 0$）时，色散关系 $\omega = \sqrt{\omega_{\mathrm{H}}[\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{M}}(1 - f(kd))}$对应典型的后向体磁振子模（图 2），其中自旋波频率随 k降低。后向体波的群速度与波矢及相速~~度方向相反。另一方面，~~当 $\theta = \pi/2$ 时，我们得到磁静力表面磁振子，其振幅沿厚度方向呈指数衰减，其色散关系为 $\omega = \sqrt{\omega_{\mathrm{H}}(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{M}}) + \omega_{\mathrm{M}}^2 f(kd(1 - f(kd))}$，见图 2。表面自旋波的群速度和相速度均为正。[85]。M. Mohseni 等人研究了含缺陷薄膜中表面磁振子的传播，并发现偶极场对称性破缺所诱导的免背向散射特性，揭示了磁静力表面磁振子的鲁棒性和手性特征。[86]

对于在两个方向上受限的系统（例如 y z 方向），退磁张量描述了偶极场引起的形状效应。这种情形尤其适用于受限纳米条带。考虑形状函数 D（$\mathbf{r}$）（在磁体内部等于 1，在外部等于 0），磁化场表示为$\mathbf{M}$（$\mathbf{r}$）$= M_{\mathrm{s}}D$（$\mathbf{r}$）$\mathbf{m}$（$\mathbf{r}$）。D（$\mathbf{r}$）的傅里叶变换可写为，[87]

$$D(\mathbf{k}) = \int D(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r}. \tag{13}$$

通过计算　通过逆傅里叶变换，可得到退磁场，

$$\mathbf{H}_{\mathrm{d}} = -\frac{M_{\mathrm{s}}}{8\pi^3}\int d^3\mathbf{k}\frac{D(\mathbf{k})}{k^2}\mathbf{k}(\mathbf{m}\cdot(k))e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{14}$$

借助点函数退磁张量 N_{ij}，退磁张量场定义为 $\mathbf{H}_{\mathrm{d,\ i}} = -N_{\mathrm{ij}}M_{\mathrm{j}}$ 其中，

$$N_{\mathrm{ij}}(\mathbf{k}) = \frac{D(\mathbf{k})}{k^2}k_{\mathrm{i}}k_{\mathrm{j}}. \tag{15}$$

实空间因子 $N_{\mathrm{ij}}(\mathbf{r})$ 可通过傅里叶逆变换获得。沿着高度恒为 k_{z} 的 z 轴对 d 积分后，可得张量 $\mathbf{N}(\mathbf{k})$，其形式为：[87–89]

$$\mathbf{N}((\mathbf{k}) = \frac{|\sigma_{\mathrm{k}}|^2}{w}\begin{pmatrix} \frac{k_{\mathrm{x}}^2}{k^2}f(kd) & \frac{k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{y}}}{k^2}f(kd) & 0 \\ \frac{k_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{y}}}{k^2}f(kd) & \frac{k_{\mathrm{y}}^2}{k^2}f(kd) & 0 \\ 0 & 0 & 1-f(kd) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

这里，$\sigma_{\mathrm{k}} = \int_{-}^{w/2}{}_{\mathrm{w}/2}\, e^{-ik_{\mathrm{y}}y}dy$ 是系统沿宽度方向的磁体形状的傅里叶变换w 。然后，可使用傅里叶空间方法确定退磁张量 $\mathbf{N}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\int\mathbf{N}((\mathbf{k})e^{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}d\mathbf{k}$ [88, 89]。以沿 $+y$ 方向的平衡磁化为例，将退磁场代入线性化 LLG 方程（4），即可得到自旋波色散关系

$$\omega = \sqrt{(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2 + \omega_{\mathrm{M}}N_{\mathrm{xx}})(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2 + \omega_{\mathrm{M}}N_{\mathrm{zz}})}. \tag{17}$$

C. 混合材料中的磁振子

在引言中，我们讨论了两个系统S_1 与 S_2 之间的耦合对于特定激发下展开动力学的重要性。若将S_1 和 S_2 视为磁振子子系统，我们就需要说明这种耦合如何产生，以及如何以符合实际的方式将其纳入理论，使预测具有实验意义。

耦合机制本质上取决于具体装置。例如，可以考虑两个条带，如图（2）所示，将它们制备成中间夹有一层纳米厚金属层的结构。在这种情况下，两层之间的耦合由鲁德曼–基特尔–胜义–吉泽（RKKY）相互作用引起。RKKY相互作用源于间隔层中巡游电子在

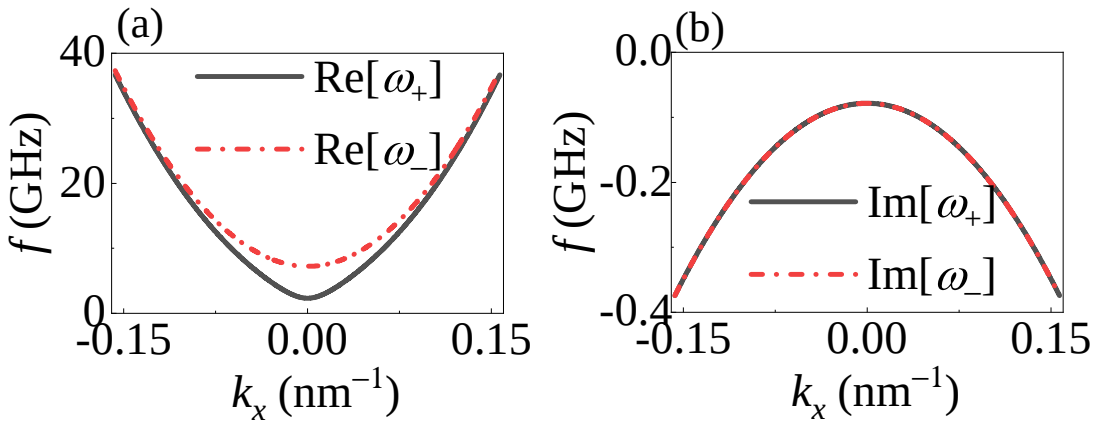


图3. 在合成反铁磁体中（参见图5(c)中的模型），两个磁振子频率的(a)实部和(b)虚部随波矢的变化 k_x。[90]

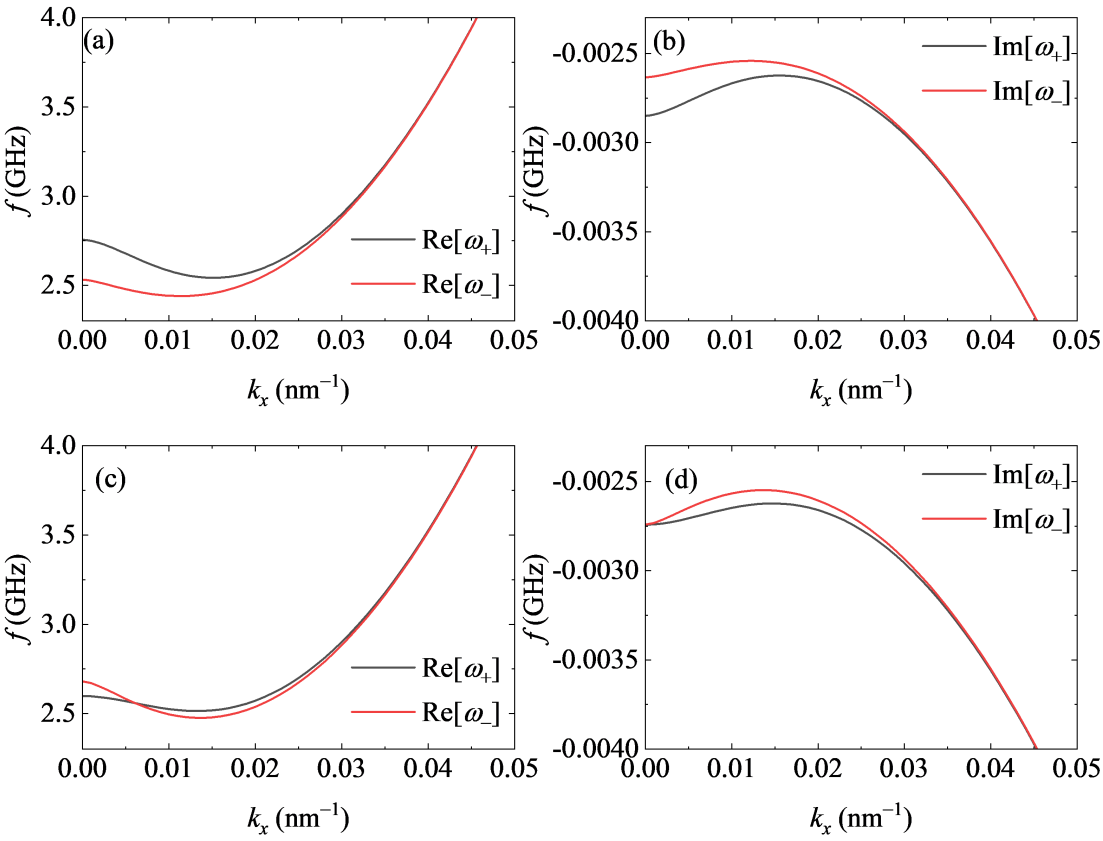


图4. 对于磁化方向反平行和平行的偶极耦合波导（参见图5(d)中的模型），两个磁振子频率的(a)实部和(b)虚部随波矢 k_x的变化。[91]

两个磁性层之间的界面，尤其是磁性层磁化方向的影响。这使形成的驻波电子波依赖于磁性条带的磁性态，并最终在它们之间产生有效耦合。[92–95]层间 RKKY 耦合远弱于磁体的层内交换耦合，但其优势在于可以通过多种方式加以调控，这对实际应用显然有利。通过设计层间耦合，可以调节耦合磁振子模。RKKY相互作用会影响耦合磁体在基态下磁矩的优选相对取向，例如，铁磁耦合时为平行取向，反铁磁耦合时为反平行取向。基态的性质直接决定了磁振子的起始状态。此外，额外的 RKKY 耦合能会直接改变磁振子色散关系，其贡献通常是各向同性的。

另一种耦合是偶极性质的。经典偶极耦合源于退磁场。即使在真空或绝缘体中，这种偶极相互作用也依然存在；它具有长程性和高度各向异性，在塑造磁振子的长波长特性和方向性方面发挥着关键作用。通过材料工程和结构设计，可以在一定程度上对其进行调控。

尽管 RKKY 相互作用和偶极相互作用可能同时存在并产生影响，但对于平面条带和纳米厚间隔层，RKKY 相互作用通常占主导地位。因此，我们首先忽略偶极相互作用，并分析 RKKY 相互作用的影响。对于通过铁磁性 RKKY 耦合耦合的两个薄磁性层，有效耦合场

$$\mathbf{H}_{\mathrm{c,p}} = \frac{J_{\mathrm{RKKY}}}{\mu_0 M_{\mathrm{s}} t_{\mathrm{p}}} \mathbf{m}_{\mathrm{p}'}$$

偏好平行磁化方向（$\mathbf{m}_1$ =$\mathbf{m}_2$），其取决于间隔层的厚度和 t_{p}、磁性层的厚度，$J_{\mathrm{RKKY}} > 0$ 为层间交换耦合强度，$p = 1$，2表示两个磁性层，且 $p' \neq p$。在沿 $+y$ 方向施加均匀磁场$\mathbf{H_a} = H_0\mathbf{y}$ 的情况下，平衡磁化为$\mathbf{m}_{0,\ \mathrm{p}}$ = (0，1，0)。同样地，我们寻求小幅磁振子偏差的波动解

$$\mathbf{m}_{\mathrm{s,p}} = (\delta m_{\mathrm{x,p}}, 0, \delta m_{\mathrm{z,p}}) e^{i(kr - \omega t)}.$$

通过对 LLG 方程（4）进行线性化并引入$\psi_{\mathrm{p}} = \delta m_{\mathrm{x,\ p}} + i\delta m_{\mathrm{z,\ p}}$，磁振子方程可表示为

$$\begin{aligned} \omega\psi_1 - (1 - i\alpha)(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2)\psi_1 + (1 - i\alpha)q\psi_2 = 0, \\ \omega\psi_2 - (1 - i\alpha)(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2)\psi_2 + (1 - i\alpha)q\psi_1 = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

耦合强度表示为

$$q = \frac{\gamma J_{\mathrm{RKKY}}}{(1 + \alpha^2)\mu_0 M_{\mathrm{s}} t_{\mathrm{p}}}.$$

上述方程由本征值问题得出

$$\omega\boldsymbol{\psi} = H_{\mathrm{m}}\boldsymbol{\psi}$$

其中 $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1,\ \psi_2)$。 2×2 具有如下形式的非厄米哈密顿量，

$$H_{\mathrm{m}} = (1 - i\alpha)\begin{pmatrix} \omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2 & -q \\ -q & \omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

磁振子模的本征值为

$$\omega_{\pm} = (1 - i\alpha)(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2 \pm q), \tag{20}$$

这也表示磁振子色散关系。如引言中所述，两个磁振子模分别为光学模和声学模，它们由耦合 q 分隔。该分隔始终与波矢无关。[96]

对于反铁磁耦合 $J_{\mathrm{RKKY}} < 0$，相邻磁性层的磁化方向相反，此类异质结构称为合成反铁磁体（SAFS）。[97–99] 这里，我们考虑两个耦合的磁性层，其易轴沿 y 方向（各向异性常数为 K_{y}），且在 x-y 平面内存在面内各向异性（各向异性常数为 K_{z}）。总有效场为 $\mathbf{H}_{\mathrm{eff,\ p}} = \frac{2A_{\mathrm{ex}}}{\mu_0 M_{\mathrm{s}}}\nabla^2\mathbf{m}_{\mathrm{p}} - \frac{J_{\mathrm{AF}}}{\mu_0 M_{\mathrm{s}} t_{\mathrm{p}}}\mathbf{m}_{\mathrm{p'}} + \frac{2K_{\mathrm{y}}}{\mu_0 M_{\mathrm{s}}} m_{\mathrm{p,\ y}}\mathbf{y} - \frac{2K_{\mathrm{z}}}{\mu_0 M_{\mathrm{s}}} m_{\mathrm{p,\ z}}\mathbf{z}$。在这种情况下，稳定的平衡磁化为 $\mathbf{m}_{0,\ 1} = -\mathbf{m}_{0,\ 2} = (0,\ 1,\ 0)$，磁振子色散关系为，

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\omega_0^2 - (1 + \alpha^2)(\omega_{\mathrm{z}} \pm q)^2} - i\alpha\omega_0, \tag{21}$$

在上式中，我们定义

$$\omega_0 = \omega_{\mathrm{ex}}k^2 + \omega_{\mathrm{Ky}} + \omega_{\mathrm{Kz}}$$

and

$$\omega_{\mathrm{Ky,Kz}} = \frac{\gamma K_{\mathrm{y,z}}}{(1 + \alpha^2)\mu_0 M_{\mathrm{s}}}.$$

与上述铁磁耦合的情况不同，间距 $\omega_+ - \omega_-$ 不再是常数，且两个模式的虚部相同，如图3所示。

接下来讨论偶极耦合磁性层，它们将作为磁振子的平面波导。我们注意到，偶极耦合强度较弱且依赖于波矢，例如图2所示的情况。对于间距为d_{s}的两条纳米条带，使用傅里叶空间方法可得$\mathbf{N}_{\mathrm{d}} = \frac{1}{2\pi}\int \mathbf{N}((\mathbf{k})e^{ik_{\mathrm{y}}d_{\mathrm{s}}}d\mathbf{k}$，耦合自旋波色散关系为：[89, 91, 100]

—

$$\omega = \sqrt{(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2 + \omega_{\mathrm{M}}N_{\mathrm{xx}} \pm \omega_{\mathrm{M}}N_{\mathrm{d,xx}})(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2 + \omega_{\mathrm{M}}N_{\mathrm{zz}} \pm \omega_{\mathrm{M}}N_{\mathrm{d,zz}})}. \tag{22}$$

与每条条带内部的偶极相互作用相比，不同条带之间的耦合较弱。由于偶极相互作用的特性，随着波矢和间距增大，耦合强度会减弱。图4的结果表明，在较低波矢范围内，两种模式之间的间隔较大。此处，磁化方向与磁振子传播方向相同，对应于耦合后向体磁振子模式。色散关系取决于磁化分布。与两个耦合层中反平行磁化的情况（图4(c)）不同，在平行磁化时，两条色散曲线会在较低波矢处出现一个交叉点。

Q. Wang 等人利用偶极耦合后向体磁振子的特性，将其应用于定向耦合器。[89, 101] 两个耦合磁振子模之间的干涉会在两个磁性波导之间周期性地传输，而传输长度取决于两条色散曲线之间的间隔。回想引言中两个耦合系统的例子，我们注意到传播距离扮演着 t （薛定谔型方程中的时间）的角色；这一点也适用于光波导，尤其是在近轴极限下。通过施加外磁场、改变两个波导之间的距离，或在平行与反平行磁化之间切换，可以重新配置磁振子传输，从而实现可动态重构的信号定向耦合器。此外，耦合磁静力表面磁振子模式也可用于类似的周期性传输。磁静力表面磁振子的手性特征可能导致非互易色散关系和传输长度。通过施加电场或改变平衡磁化，可以控制磁振子传播。

所选波导。[100]

D. 电流控制的磁振子阻尼与反阻尼

磁振子阻尼描述磁振子振幅随时间或距离的衰减率。由于我们所关注区域中的磁振子激发基本上呈进动状态，这种阻尼意味着角动量的损失。因此，这种阻尼的直接成因是外部力矩。这一观察对于下文的讨论具有重要意义。虽然环境耦合通常被视为能量损耗，且系统与外部谐振子浴耦合，但力矩作为矢量具有方向，因此能够产生方向性阻尼。

在磁振子器件中，通常倾向于采用低阻尼，以实现更强的磁振子激发和更长的磁振子传播距离。磁振子阻尼的描述通常由 α 项来体现，该项位于 LLG 方程（4）中。[82] 在这一框架下，阻尼常数 α 以现象学方式描述磁化向其平衡方向的弛豫，而无需明确其潜在机制，例如磁振子-声子耦合、多磁振子散射过程（如三磁振子散射）、杂质等。[102–109] 铁磁绝缘体钇铁石榴石（YIG）等材料因其本征低吉尔伯特阻尼而备受青睐，其阻尼范围可从 10^{-5} 到 10^{-2}，具体取决于样品质量。[110–118]

近期研究进展揭示了利用电流主动控制磁振子阻尼方向的能力，这主要通过自旋力矩实现。这使得人们能够调节磁振子寿命、补偿损耗（反阻尼），甚至驱动自振荡。[119–126]

在自旋极化电流流经或注入磁性层的结构中，角动量可以转移至局域磁化，从而产生自旋转移力矩（STT）。[127–129] 根据自旋极化方向与磁化方向的相对取向，STT既可以表现为有效阻尼（增强能量耗散），也可以表现为反阻尼（降低有效阻尼）。[121, 130] STT通常需要导电材料，因此无法作用于绝缘体（例如YIG）。除STT之外，在由重金属（HM）或拓扑绝缘体（TI）与铁磁体构成的双层结构中，HM或TI层中的面内电荷电流可以通过自旋霍尔效应或Rashba-Edelstein效应产生纯自旋流，并使其流入相邻的

铁磁层，并对其磁化施加力矩。[131–138] 这种力矩源于自旋轨道相互作用效应，称为自旋轨道力矩（SOT）。SOT通常以两种方式作用：类阻尼力矩和类场力矩。类阻尼SOT可以直接改变有效磁振子阻尼，从而提供一种电学调控磁振子密度损耗或增益的机制；其效果取决于电流方向、几何结构和磁化。与STT不同，SOT能够有效作用于绝缘磁体。通过提供足够的反阻尼力矩，SOT可以抵消本征阻尼，从而使自旋霍尔纳米振荡器实现持续自振荡，或有效地实现磁化翻转。[132, 136, 139–145] STT和SOT能够通过施加电流对磁振子性质进行动态调控，使磁振子电路具备信号放大、调制和非互易传播等功能。[143, 146–150]

我们特别关注如何将自旋轨道力矩应用于赝厄米磁振子物理。这是通过利用类阻尼自旋轨道力矩的方向性实现的。当电荷电流 $\mathbf{J}_c$ 流经重金属层时，自旋霍尔效应会使自旋相反的电子沿垂直于 $\mathbf{J}_c$的相反方向偏转，从而产生自旋流 $\mathbf{J}_s$ ，其自旋极化 $\boldsymbol{\sigma}$ 垂直于 $\mathbf{J}_c$ 和界面法线。注入的自旋流作用于附着磁性层中的局域磁化 $\mathbf{m}$ ，传递自旋角动量并施加自旋轨道力矩

$$\mathbf{T} = \tau(\mathbf{m} \times (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{m}))$$

于其上。[132, 135] 在此，单位向量 $\boldsymbol{\sigma}$ 表示注入自旋流的自旋极化。对于重金属层中沿 x 流动、且该层附着于磁性层的电流 $\mathbf{J}_c$ （界面法线沿 z），自旋流沿 z 流动，其偏振 $\boldsymbol{\sigma}$ 通常沿 y，即$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{z}\mathbf{j}_c$，其中电流单位向量 $\mathbf{j}_c = \mathbf{J}_c/|J_c|$。[131] 自旋轨道力矩幅度

$$\tau = \frac{\theta_{\mathrm{SH}} J_c \gamma \hbar}{2e\mu_0 M_s t}$$

与自旋霍尔角 θ_{SH}有关。自旋轨道力矩的方向$\mathbf{m} \times (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{m})$ 与吉尔伯特阻尼项类似，因此会产生额外的有效阻尼或反阻尼。若$\mathbf{T}$ 抵消（增强）总阻尼，这种现象称为反阻尼（阻尼）效应。对于单个磁性层，引入沿 $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{y}$ 方向的自旋轨道力矩后，式（9）变为：

$$\omega\psi - (1 - i\alpha)(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2 - i\omega_{\mathrm{J}})\psi = 0. \tag{23}$$

磁激发的本征频率变为

$$\omega = (1 - i\alpha)(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2 - i\omega_{\mathrm{J}})$$

with

$$\omega_{\mathrm{J}} = \frac{\tau}{1 + \alpha^2}.$$

方程清楚地表明，正向 ω_{J} 会增大磁振子频率的虚部，这意味着磁振子振幅会进一步降低，而 $\alpha\omega_0$ 项则是吉尔伯特阻尼导致的本征损耗。反转电流方向（$\omega_{\mathrm{J}} < 0$）后，自旋轨道力矩会转变为反阻尼力矩，并发挥增益作用，增强磁振子振幅。

IV. 伪厄米磁振子学

磁振子系统为研究伪厄米物理提供了一个独特平台：磁性材料本身具有本征阻尼过程，例如吉尔伯特阻尼，这些过程构成了天然的损耗机制。这种固有损耗意味着磁振子系统从根本上说是开放的非厄米系统。此外，正如运动方程（4）所示，动力学可能具有高度非线性（$\mathbf{H}_{\mathrm{eff}}$ 取决于所寻求的解$\mathbf{m}$）。因此，可以在现实系统中研究非线性伪厄米物理。重要的是，非线性可通过外部电场和磁场进行调节，而阻尼和反阻尼的程度则可通过注入的电荷电流密度加以控制。此外，正如下文将详细讨论的，实验上生长具有交替磁序的多层膜的可能性 [98, 155–157] 使实现高阶例外点和反PT对称系统成为可能。另一个有趣的方面涉及特定类型的反对称交换相互作用所导致的本征非互易性，与上述伪厄米效应所导致的非互易性之间的相互作用。

在实验方面，自旋电子学的发展 [158–163]提供了强大的工具，能够主动调控磁振子布居，并将其集成到纳米尺度电路中，同时还可制造具备有效增益与损耗的所需结构。STT 和 SOT 等机制能够通过电学方式控制磁振子阻尼——既可以增强损耗（通过类阻尼力矩），也可以补偿损耗以实现增益（通过反阻尼转矩）。这一

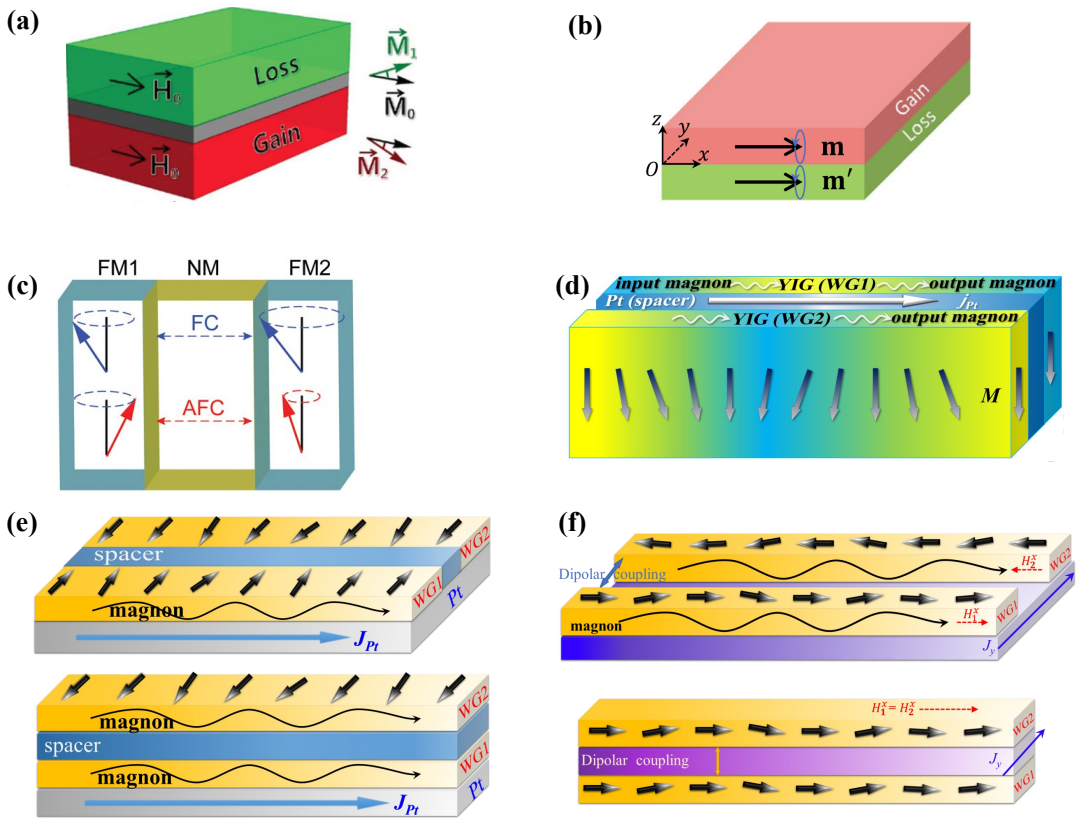


图 5. 模型磁振子赝厄米设置的若干示意图。(a) 两个耦合磁体，其磁振子振幅具有对称的增益与损耗。[151] (b) 耦合铁磁双层，其中增益（红色层）与损耗（绿色层）平衡，平衡磁化强度沿着 x方向。[152] (c) 两个阻尼不同的耦合铁磁层。[153] (d) 两个 RKKY耦合磁振子波导。间隔层中的电荷电流产生自旋轨道力矩（SOT），从而使波导中的磁振子密度产生增益与损耗。[154] (e) 具有增益-损耗以及损耗-更大损耗的合成反铁磁异质结构示意图。[90](f) 两个偶极耦合磁振子波导 WG1 和 WG2 在自旋轨道力矩作用下产生增益与损耗的示意图。[91]

本征损耗与可控增益的结合，使磁振子学特别适合用于设计具有定制非厄米性质的哈密顿量。2015年的开创性理论研究将PT对称性引入磁性领域，采用两个耦合铁磁体——一个具有损耗，另一个具有等量增益——并预测了一个自发PT对称性破缺的例外点，此处磁振子模发生并合。[151] 此后，该领域在理论和实验方面都发展迅速。[164]

混合磁振子系统的出现进一步拓展了可能性。通过耦

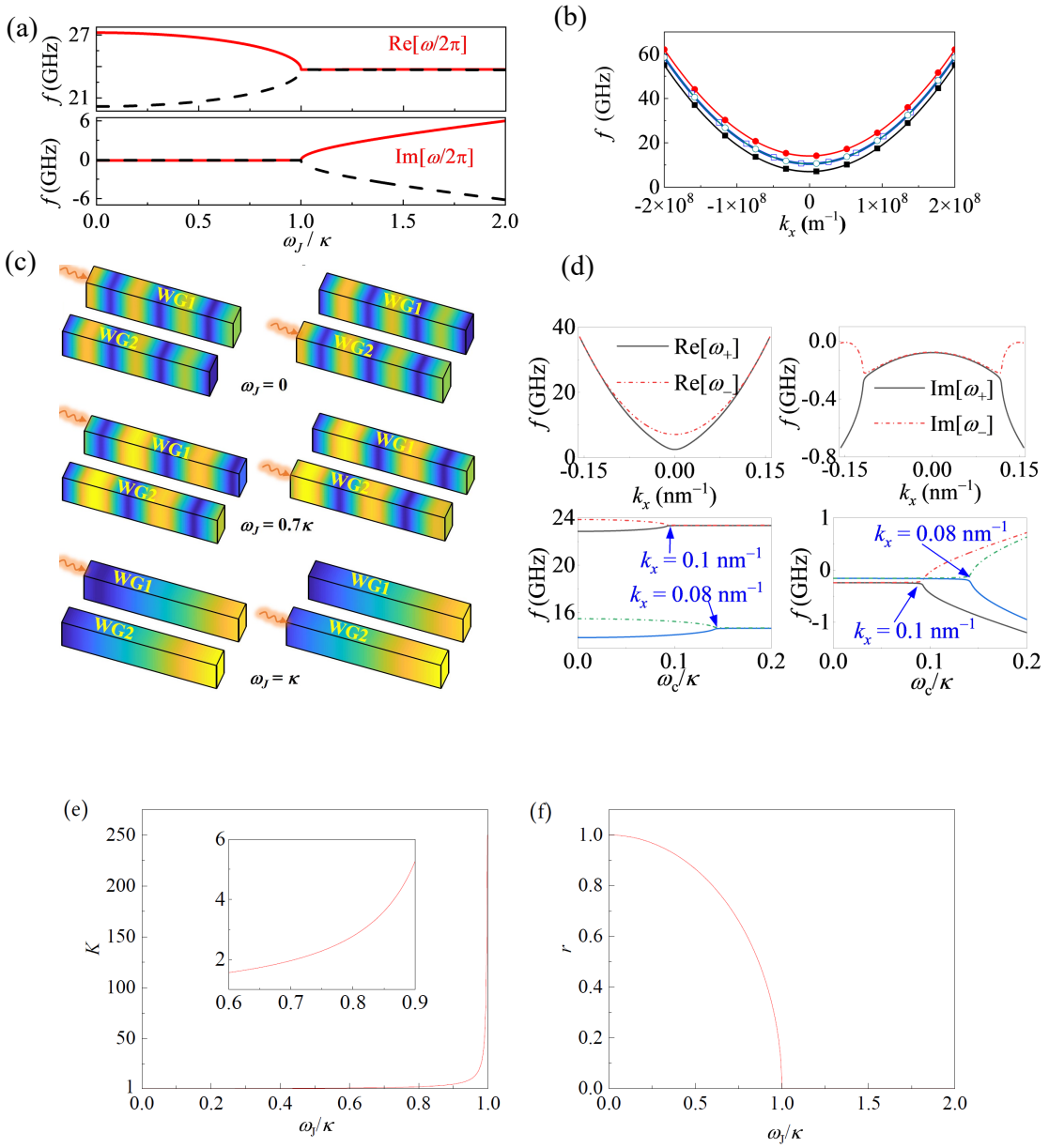


图6。（a）对于图5（d）所示的系统，两个磁振子本征频率的实部和虚部 $f = \omega/(2\pi)$ 随间隔层中电荷电流密度的变化 $J_c \propto \omega$ 相对于层间耦合强度 κ。（b）在 $\omega_J = 0$ 和例外点处，两个磁振子模的磁振子色散。（c）不同平衡磁振子损耗/增益强度下传播磁振子振幅的空间分布。[154]（d）对于图5（e）所示的反铁磁异质结构，在有限 ω_J下的磁振子色散关系，以及两个磁振子本征频率的实部和虚部$f = \omega/(2\pi)$ 随ω_J扫描的变化。[90]（e）彼得曼因子（公式（2）；插图显示了小平衡磁振子增益/损耗区域）。（f）与（a）中模式相对应的相位刚性（公式（3）。

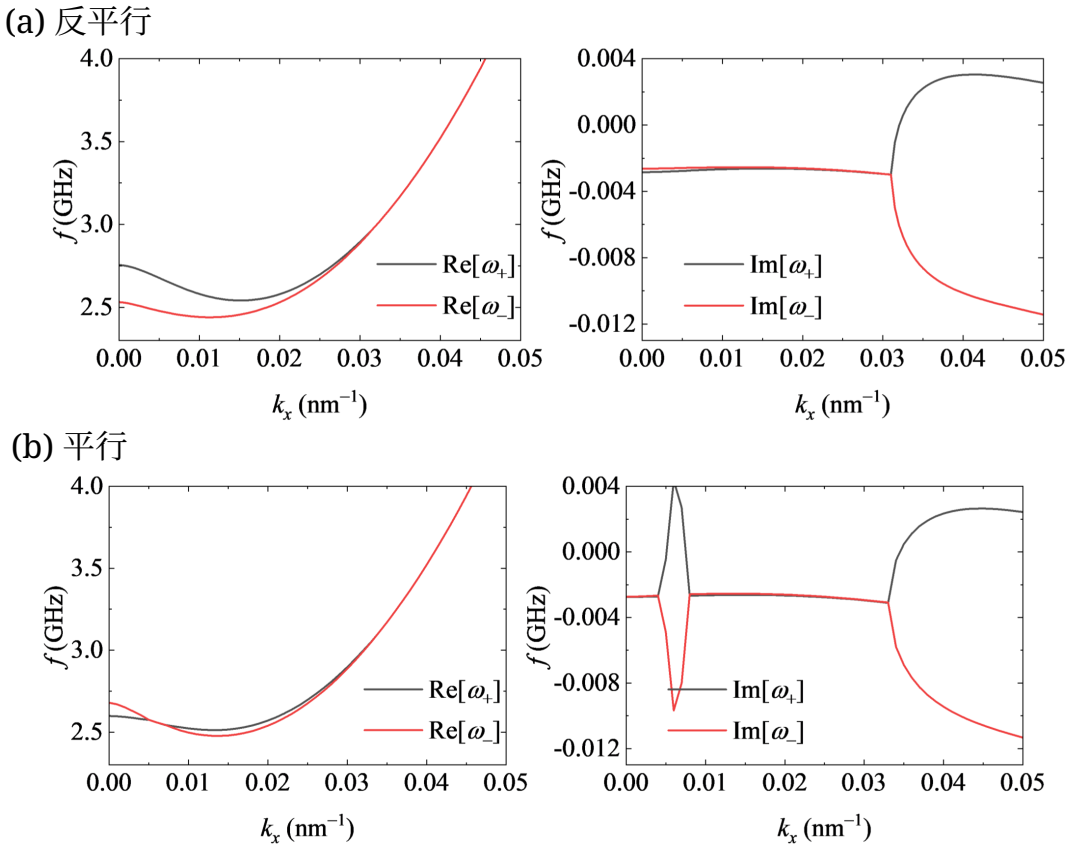


图 7. 对于图 5（f）所示的装置，当磁性层中的磁化反平行或平行时，两个磁振子本征频率的实部（色散）和虚部$f = \omega/(2\pi)$。[91]

将磁振子耦合到其他自由度，例如腔中的微波光子（腔磁振子学）[165, 166], 、机械振动（磁振子力学）[167], 或超导量子比特，[168–170] 混合平台提供了更强的可调性和控制能力，有助于实现并探索应用于其他研究领域的赝厄米磁振子学现象。

A. 铁磁体和合成反铁磁体中的赝厄米磁振子

基于波导或薄膜构建的赝厄米磁振子，其设计方式是让一个元件具有本征阻尼或增强阻尼（损耗），而另一个元件则获得增益。实现磁振子 PT 对称性的直接方法，是让两个直接耦合的磁体具有刻意设置的不平衡阻尼。[171] 这一概念由 Lee 等人提出。

在2015年，他们采用了两个耦合的宏观磁结构（图 5(a)）。[151] 其中一个磁体因本征阻尼而产生磁振子损耗，另一个磁体则通过自旋转移力矩（STT）或参数泵浦获得等量增益。具有正阻尼和负阻尼的耦合宏观自旋（$\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$）的磁化动力学可由下列方程描述：[151]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{m}_1}{\partial t} &= -\gamma \mathbf{m}_1 \times \mathbf{H}_1 - \gamma K \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 + \alpha \mathbf{m}_1 \times \frac{\partial \mathbf{m}_1}{\partial t}, \\ \frac{\partial \mathbf{m}_2}{\partial t} &= -\gamma \mathbf{m}_2 \times \mathbf{H}_2 - \gamma K \mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1 - \alpha \mathbf{m}_2 \times \frac{\partial \mathbf{m}_2}{\partial t}.\end{aligned} \tag{24}$$

这里，带正（负） α 的第一个（第二个）方程用于描述损耗（增益）机制。在增益与损耗对称的情况下，系统在宇称和时间反演操作的组合下保持不变，从而产生赝厄米磁振子。

随后，A. Galda 和 V. M. Vinokur 在宏自旋模型和链模型中，为耦合的吉尔伯特阻尼诱导损耗与自旋转移力矩诱导增益构造了非厄米哈密顿量，由此出现了 PT 对称性及其破缺相。[172, 173] H. Yang 等人从理论上将具有增益/损耗的铁磁体映射为具有损耗/增益的反铁磁体（图5（b）），并发现当系统的 PT 对称性破缺时，增益层中会出现反铁磁性和反铁磁斯格明子。[152]对于部分具有增益、部分具有损耗的磁体，有效哈密顿量为：[152]

$$H = c \begin{pmatrix} \chi_1(\mathbf{k}) + \alpha[\chi_2^*(\mathbf{k}) - 2iK'] & \chi_2(\mathbf{k}) + \alpha\chi_1(\mathbf{k}) & \alpha\chi_0^* & \chi_0 \\ -\alpha\chi_1(\mathbf{k}) + [\chi_2^*(\mathbf{k}) - 2iK'] & -\alpha\chi_2(\mathbf{k}) + \chi_1(\mathbf{k}) & \chi_0^* & \alpha\chi_0^* \\ \alpha\chi_0 & \chi_0 & \chi_1(\mathbf{k}) - \alpha[\chi_2^*(\mathbf{k}) - 2iK'] & \chi_2(\mathbf{k}) - \alpha\chi_1(\mathbf{k}) \\ \chi_0^* & \alpha\chi_0 & \alpha\chi_1(\mathbf{k}) + [\chi_2^*(\mathbf{k}) - 2iK'] & \alpha\chi_2(\mathbf{k}) + \chi_1(\mathbf{k}) \end{pmatrix}. \tag{25}$$

这里，作者将 $c = \gamma/[(1+\alpha^2)\mu_0 M_s a^3]$, $\chi_0 = i\gamma J$, $\chi_1(\mathbf{k}) = 2D \sin k_y a$, $\chi_2(\mathbf{k}) = 2iJ(\cos k_x a + \cos k_y a) - i(4+\gamma)J - 2iK'$和 $K' = K + \mu_0 M_s^2 a^3/2$定义为易平面各向异性和退磁能。该哈密顿量允许存在 PT 对称相及其破缺相。

Liu等人通过被动 PT 对称磁体对，实现了对赝厄米磁振子的实验研究。[153]他们制备了两个铁磁层（NiFe，具有 $\mathbf{m}_1^0$，以及 Co，具有 $\mathbf{m}_2^0$），两层之间由一个薄间隔层隔开，且本征阻尼率不同，并通过层间交换作用（RKKY）耦合，如图 5（c）所示。这种非对称损耗双层结构以被动方式实现了 PT 对称性，即没有外部增益

被引入，而是其中一层的损耗低于另一层。被动 PT 对称系统中的磁振子可用线性化方程描述，[153]

$$\begin{aligned} -i\omega\mathbf{m}_1^0 &= (\omega_{\mathrm{H}} + \omega_2^K - i\alpha_1\omega)\mathbf{z}\times\mathbf{m}_1^0 - \omega_1^K\mathbf{z}\times\mathbf{m}_2^0, \\ -i\omega\mathbf{m}_2^0 &= (\omega_{\mathrm{H}} + \omega_1^K - i\alpha_2\omega)\mathbf{z}\times\mathbf{m}_2^0 - \omega_2^K\mathbf{z}\times\mathbf{m}_1^0. \end{aligned} \tag{26}$$

通过改变间隔层厚度，可以调控磁体之间的 RKKY 相互作用，从而操控被动 PT对称。

对于通过层间耦合（RKKY 或偶极耦合）耦合的波导，在两个波导之间插入重金属间隔层（例如铂层）后，自旋轨道力矩可同时调节两个波导中磁振子振幅的增益或损耗，并控制 PT对称磁振子出现的位置。如图 5(d) 所示，沿 x 轴流动的电荷电流会产生自旋轨道力矩 $\mathbf{T}_1 = \tau(\mathbf{m}_1\times(\mathbf{y}\times\mathbf{m}_1))$，使第一条波导 WG1 中的有效磁振子阻尼（损耗）增大；而作用于 WG2 的自旋轨道力矩 $\mathbf{T}_2 = -\tau(\mathbf{m}_2\times(\mathbf{y}\times\mathbf{m}_2))$ 则会减小有效阻尼（增益）。假设层间耦合由 RKKY相互作用主导，则包含自旋轨道力矩的磁振子方程（18）为：[154]

$$\begin{aligned} &\omega\psi_1 - (1-i\alpha)(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2 - i\omega_{\mathrm{J}})\psi_1 + (1-i\alpha)q\psi_2 = 0, \\ &\omega\psi_2 - (1-i\alpha)(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2 + i\omega_{\mathrm{J}})\psi_2 + (1-i\alpha)q\psi_1 = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

当本征阻尼很小（$\alpha\to 0$）时，WG1中的磁振子导模受到PT对称约束复势 $V(z) = V_{\mathrm{R}}(z) + iV_{\mathrm{I}}$ 的作用，其中 $V_{\mathrm{R}}(z_0) = \omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2$ 和 $V_{\mathrm{I}}(z_0) = -\omega_{\mathrm{J}}$。在 WG2 中，势为 $V_{\mathrm{R}}(-z_0) = \omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2$ 和$V_{\mathrm{I}}(-z_0) = \omega_{\mathrm{J}}$。此时，哈密顿算符可写为：

$$H = \begin{pmatrix} \omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2 - i\omega_{\mathrm{J}} & -q \\ -q & \omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2 + i\omega_{\mathrm{J}} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

与PT对称哈密顿量方程（1）类似，经过变换 $\eta = \sigma_{\mathrm{x}}$ 可得赝厄米条件 $\eta H = H^{\dagger}\eta$，这表明该系统具有伪厄米性。我们注意到，较小的阻尼 α 会轻微影响PT对称性，因此系统无法严格满足赝厄米条件。根据波导的材料和品质， α 可达到 10^{-5}的量级。当 α 较小时，其影响可以忽略，系统仍表现出伪厄米特性。[154]

图 5(e) 展示了在合成反铁磁体中利用自旋轨道力矩驱动增益与损耗的另一种设计。[90]合成反铁磁体沉积在重金属薄膜上（位于 x-y 平面内）。其两个磁性层

均位于 x-y 平面内，且局部磁化方向相反$\mathbf{m}_{1,2}$。重金属层中的电荷电流施加自旋轨道力矩$\mathbf{T}_{1,\ 2}\tau(\mathbf{m}_{1,\ 2}\times(\mathbf{y}\ \times\mathbf{m}_{1,2}))$，并同时驱动耦合增益与损耗$\mathbf{m}_1=-\mathbf{m}_2$。这种设置还会产生由耦合增益-损耗诱导的磁振子PT对称性。此外，在没有RKKY耦合的情况下，采用偶极相互作用也可以将两个波导耦合起来，并产生由对称的自旋轨道力矩诱导的增益与损耗，从而实现PT对称条件。

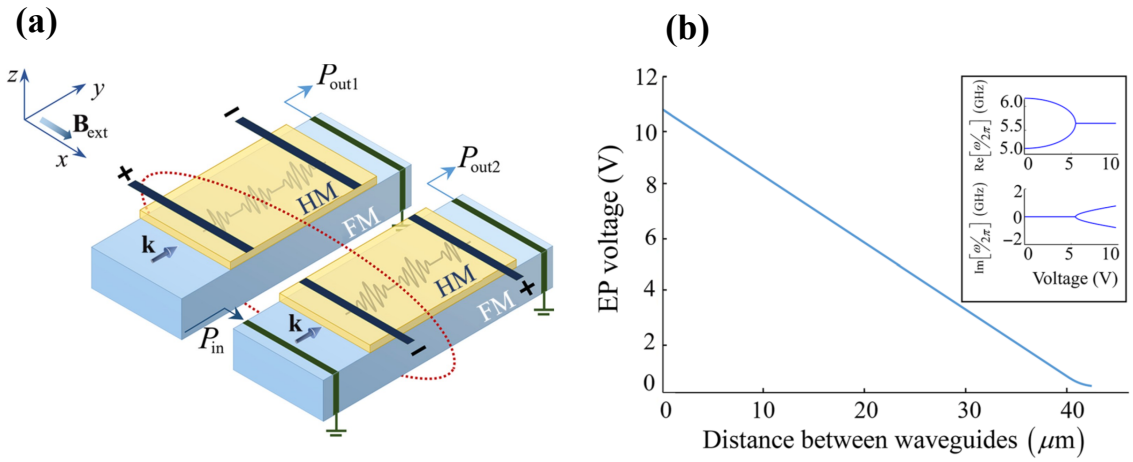


图8. (a) 具有相反自旋轨道力矩的PT对称平面偶极耦合铁磁波导示意图。(b) 例外点电压随两个耦合波导间距的变化关系，插图显示法向节点随施加电压的变化。[174]

O. O. Temnaya等人还提出了另一种PT对称平面偶极耦合铁磁波导设计，如图8(a)所示。[174] 在此，借助附加的金属层中强烈的自旋轨道相互作用以及方向相反的电流，平衡磁振子增益与损耗，从而实现PT对称性。相应的、具有相反有效阻尼的磁振子方程写为：

$$\dot{c}_{\mathrm{v}}=-i\Omega c_{\mathrm{v}}-\Gamma_{\mathrm{v}}c_{\mathrm{v}}-i\Omega_{\mathrm{c}}c_{\mathrm{v}'}. \tag{29}$$

$v,v'=1,2,\quad v\neq v'\ \dot{c}=am_{\mathrm{y}}+ibm_{\mathrm{z}}$是复振幅，其中$a=\sqrt{\Omega_{\mathrm{xx}}/\Omega}$和$b=\sqrt{\Omega_{\mathrm{zz}}/\Omega}$。两个波导的有效阻尼系数为$\Gamma_{1,2}=\alpha(\Omega_{\mathrm{xx}}+\Omega_{\mathrm{zz}})/2\pm\Gamma_{\mathrm{I}}$。$\Omega_{\mathrm{xx}}$和$\Omega_{\mathrm{zz}}$与偶极相互作用张量相关。$\Gamma_{\mathrm{I}}$描述了自旋轨道力矩在波导中诱导的增益与损耗。

上述设计为实验实现提供了合适的基础；先进的多层结构沉积技术可以赋予介电函数所需的变化。磁振子实现提供了一种无需永久性材料改性的变通方案；只需改变重金属导线两端的电压，并将电流密度调节到特定比例，即可接近例外点附近。这种灵活性不仅便于控制与PT对称性相关的特征。

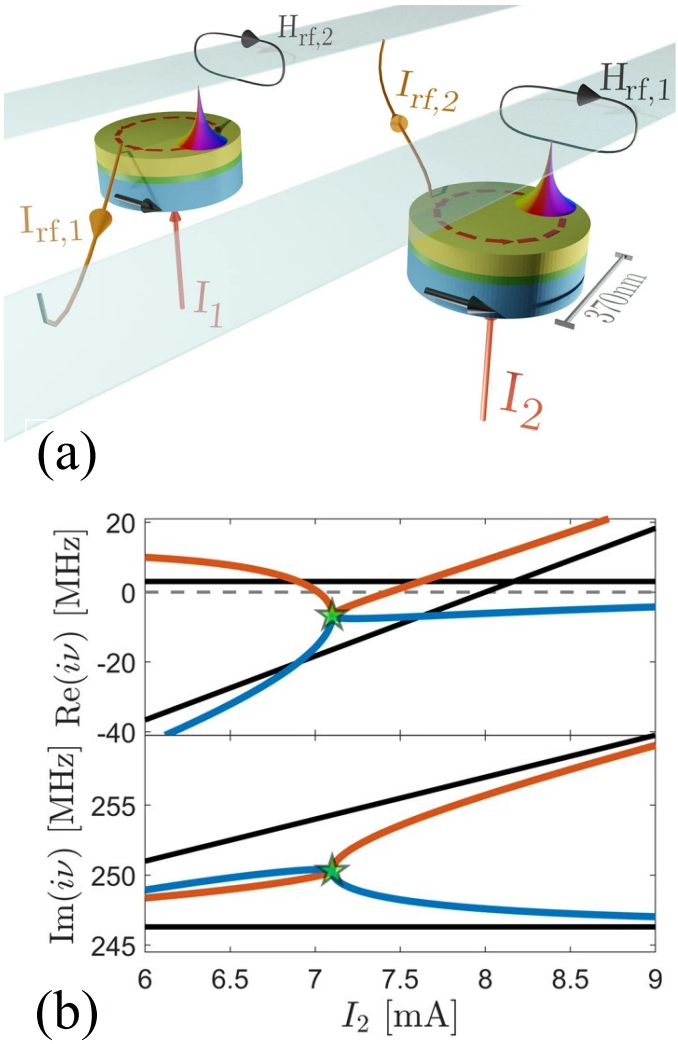


图 9. (a) 带有涡旋的伪厄米耦合自旋转矩纳米振荡器示意图。通过调节各自的驱动电流，可以实现 PT对称性和例外点条件。(b) 在固定 I_1 的情况下，两个耦合磁振荡器的本征频率随 I_2 的变化关系（红线和蓝线）。黑线表示未耦合情况下的计算结果。[175]

随后，S. Wittorck 等人将伪厄米磁振子学引入自激振荡

磁性系统。[175] 通过感应耦合两个带有磁涡旋的自旋转矩纳米振荡器，并调节各自的驱动电流，他们实现了 PT 对称性所特有的增益与损耗平衡条件。伪厄米磁化动力学可由Thiele方程描述，

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = iA \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \text{with} \quad A = \begin{bmatrix} \omega_1 - i\beta_1 & k \\ k & \omega_2 - i\beta_2 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

耦合振子将非线性效应与伪厄米特性结合，可应用于实际自旋电子器件，成为控制振荡器磁化动力学的工具。

另一种平台是腔磁振子学，其中磁振子模与微波腔模耦合。[176] 通常，将铁磁样品（通常是以低阻尼著称的高品质YIG球）置于微波腔内。YIG中的磁振子模与腔光子模耦合。通过主动泵浦腔模引入增益，并使其与磁振子损耗相平衡，或者利用耗散耦合机制，使模式经由公共损耗通道相互作用，便可实现PT对称性。实验可精确控制外磁场（用于调节磁振子频率，进而控制失谐）、微波泵浦功率（用于控制增益）以及YIG球在腔内的位置（用于调节磁振子-光子耦合强度）等参数。

B. Wang等人通过将YIG磁振子耦合到两个光学回音壁模（一个具有增益，另一个具有损耗），在腔光磁系统中设计了一种PT对称磁振子激光器。[177] 在PT对称区间内，当光学超模的劈裂与磁振子频率共振匹配时，磁振子在超过阈值泵浦功率后会发生相干受激发射。PT平衡的光学模式使磁振子激光器能够以更低的泵浦功率达到阈值，其振荡频率还可通过外磁场调谐，这展示了由PT对称性实现的频率可调相干磁振子源。腔磁振子学中的另一种机制，是将磁振子-光子耦合从厄米型调谐为耗散型。Yang等人（2020年）通过精确控制磁振子阻尼，构建了一个反PT对称腔磁振子极化激元系统

在微波腔中。[178] 通过借助外部阻尼控制增大磁振子损耗，使其相对于腔损耗更高，他们先后达到两个例外点；在这两个例外点之间，系统保持反PT对称性。此外，微波透射与反射光谱是探测系统光谱特性并识别伪厄米特征的标准工具。[179]

B. 电磁控制的例外点

伪厄米磁振子学呈现出一系列在其他系统中没有直接对应物的现象。尤其是具有非厄米简并的例外点，不仅本征值会合，相应的本征矢也会合，是最引人注目的效应。对于文献 [151, 172, 173]，中的宏自旋模型和链模型，通过改变增益/损耗强度或耦合，耦合磁振子模的本征值会逐渐靠拢并形成例外点。

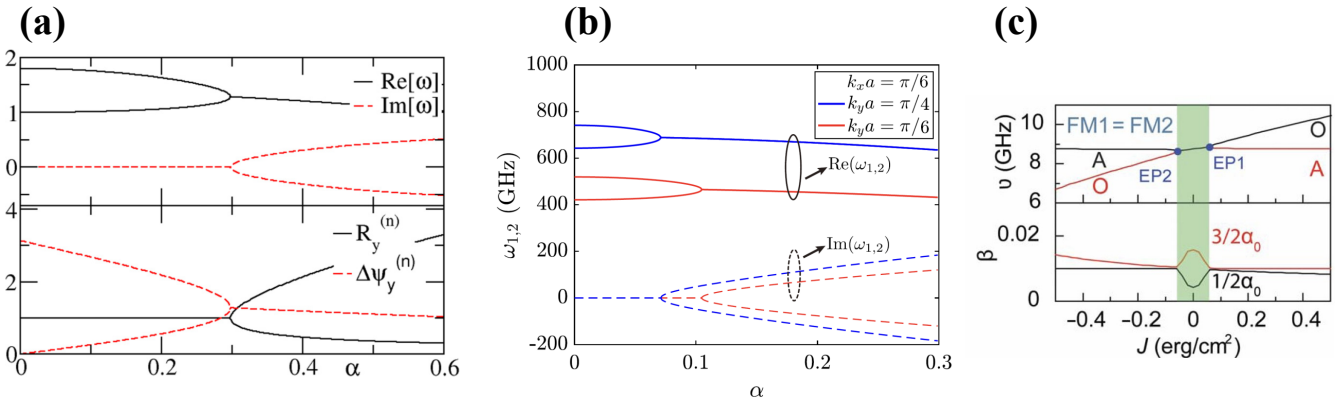


图 10. (a) PT对称模型的本征频率和本征矢（见图 5(a)）随 α 的变化。[151](b) 对于不同的磁振子模，图 α 5(b) 所示模型中的本征频率随 α 的变化。[152](c) 图 5(c) 所示模型的本征频率和阻尼率随两个磁体之间的耦合强度 J 变化。[153]

例如，对于上述具有平衡正阻尼和负阻尼的耦合宏自旋模型，其本征频率为：[151]

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{1+\alpha^2}(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{K}} \pm \sqrt{\omega_{\mathrm{K}}^2 - \alpha^2\omega_{\mathrm{H}}(\omega_{\mathrm{H}} + 2\omega_{\mathrm{K}})}). \tag{31}$$

将增益与损耗参数 α 增大至临界值 $\alpha_{\rm cr}=\omega_{\rm K}/\sqrt{\omega_{\rm H}(\omega_{\rm H}+2\omega_{\rm K})}$，两个本征频率会合并为同一值（如图 10(a) 所示），这表明例外点的存在。在例外点处，本征矢发生简并。

在 PT 对称性诱导的映射反铁磁模型中（图 5(b)），两个逆时针进动的磁振子模式表示为：[152]

$$\omega_{1,2}(\mathbf{k})=\frac{\gamma J[\lambda+2\xi(\mathbf{k})\pm\sqrt{\lambda^2-4a^2\xi(\mathbf{k})[\lambda+\xi(\mathbf{k})]}]}{(1+\alpha^2)\mu_0 M_{\rm s}a^3}, \tag{32}$$

with

$$\xi(\mathbf{k})=2-\cos k_{\rm x}a-\cos k_{\rm y}a+(D/J)\sin k_{\rm y}a.$$

随着增益与损耗参数（α）增大，系统会在某个临界值处出现例外点，其值取决于波矢 $\mathbf{k}$。他们发现，PT对称性破缺后会出现反铁磁性；当系统进入非线性振荡不稳定性区域时，越过例外点后会出现两个方向相反的进动模。这一发现指出了通过增益与损耗改变磁序和激发的一种途径。

在图 5(c) 所示的被动 PT 对称系统中，通过调节间隔层厚度来改变耦合强度，可使系统在临界耦合处达到例外点。令$\alpha_1=\delta-\alpha$ 和 $\alpha_2=\delta+\alpha$，本征频率表示为：[153]

$$\omega_{1,2}=\frac{(1+i\delta)^2[\omega_{\rm H}+\omega_{\rm K}\pm\sqrt{\omega_{\rm K}^2-\alpha^2\omega_{\rm H}(\omega_{\rm H}+2\omega_{\rm K})/(1+i\delta)^2}]}{(1+\alpha^2)(1+i\delta)}. \tag{33}$$

如图 10(c) 的结果所示，例外点以下有两个彼此不同的耦合模。例外点出现在临界耦合强度处。越过例外点后，被动 PT 对称性遭到破缺，一个磁振子模式变为过阻尼，而另一个仍为欠阻尼。这些现象在实验中得到验证，为磁振子器件中的 PT 对称破缺提供了直接证据。

通过 SOT 电控增益与损耗的耦合波导，其例外点的特性将在下文进一步讨论。对于图 5(d) 所示的模型，磁振子方程（27）对应的有限阻尼哈密顿量为：[154]

$$H=(1-i\alpha)\begin{pmatrix}\omega_{\rm H}+\omega_{\rm ex}k^2+q-i\omega_{\rm J} & -q\\ -q & \omega_{\rm H}+\omega_{\rm ex}k^2+q+i\omega_{\rm J}\end{pmatrix}. \tag{34}$$

本征值和本征矢通常为复数,

$$\begin{aligned}\omega_{\pm} &= (1-i\alpha)(\omega_{\mathrm{H}}+\omega_{\mathrm{ex}}k^2+q\pm\sqrt{q^2-\omega_{\tau}^2}),\\ \boldsymbol{\psi}_{\pm} &= (\frac{\mp\sqrt{q^2-\omega_{\tau}^2}+i\omega_{\mathrm{J}}}{q},1).\end{aligned} \tag{35}$$

在 $\alpha\to 0$ 的极限下，低于增益/损耗平衡阈值 $\omega_{\mathrm{J}}/q<1$ 的 PT对称区域中，两个不同的本征值始终为实数且彼此不同，本征矢可表示为 $\boldsymbol{\psi}_{\pm}=(\mp\exp(\mp i\theta),1)$，其中 $\sin(\theta)=\omega_{\mathrm{J}}/q$。在 $\omega_{\mathrm{J}}=q$ 处，该哈密顿量的本征值和本征矢在 $\omega_{\pm}=\omega_{\mathrm{H}}+\omega_{\mathrm{ex}}k^2$ 和 $\boldsymbol{\psi}_{\pm}=(i,1)$ 处合并，这是例外点的标志。超过例外点（$\omega_{\mathrm{J}}>q$）后，本征值变为复数 $\omega_{\mathrm{H}}+\omega_{\mathrm{ex}}k^2\pm i\sqrt{\omega_{\mathrm{J}}^2-q^2}$，系统进入 PT对称系统中典型的 PT对称性破缺相。$\omega_{\pm}$ 的两个实部均为 $\omega_{\mathrm{H}}+\omega_{\mathrm{ex}}k^2$，两个虚部则彼此分离，本征矢为 $\boldsymbol{\psi}_{\pm}=(i^{\frac{\omega_{\mathrm{J}}\mp\sqrt{\omega_{\mathrm{J}}^2-q^2}}{q}},1)$。本征模的这些变化会带来非互易响应和功率振荡。没有自旋轨道力矩（$\omega_{\mathrm{J}}=0$）时，两个本征模的叠加 $\boldsymbol{\psi}_{\pm}=(\mp1,1)$（两个波导中的自旋波模分别呈反对称和对称）会导致互易波传播。两个模式之间的干涉会使能量在两个波导之间周期性转移，~~而自旋波~~分布遵循两个波导的对称性（见图6）。界面图样取决于两个模式的波矢差。如果电流项 ω_{J} 增大但仍低于例外点，相位角会从初始值 $\theta=0$ 变化，并最终在例外点处达到 $\theta=\pi/2$。在此范围内，两个非对称自旋波模的叠加会导致非互易波传播，此时，将输入从一个波导换到另一个波导，输出端的自旋波分布可能完全不同（图6）。在例外点处，两个自旋波模合并为同一模式，两个波导中的自旋波同时传播。超过例外点后，磁振子总是在具有增益的波导中传播，并在具有损耗的波导中迅速衰减。这些观察结果与光学系统中的发现相似；这并不令人意外，因为在所讨论的极限下，这两个系统遵循相似的运动方程。在磁振子情形中，可通过调节电流项 ω_{J} 来重新配置例外点和 PT对称破缺强度。注意，即使在 PT对称性保持的情形下，也就是说磁振子密度守恒时，动力学也并非简单的厄米动力学。这一点可从模式的非正规行为推知，该行为可由彼得曼因子或相位刚性量化，如图6(e,f)所示。只有在电荷电流密度为零时，我们

才有两个正交归一模，且彼得曼因子为 1。

在例外点（EP）之上，当本征值的虚部变为正值时，系统会失稳，即 $\sqrt{\omega_\tau^2 - q^2 - \alpha\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2} \geq 0$。对于极小的阻尼，失稳的临界值由例外点决定，而非零的 α 会使失稳范围略微移至例外点之上。超过失稳临界值后，磁振子振荡很快会被放大，从而产生非线性效应，最终使带有增益的波导中的平衡磁化反转。随后，磁振子振荡很快衰减，无法维持。

考虑小阻尼 α 并不会改变模态行为。在这种情况下，两个复本征值仍会在同一个简并例外点 $\omega_{\mathrm{J}} = q$ 处完美合并。在例外点（$\omega_{\mathrm{J}} < q$）之下，由于 α 很小，两个本征值虚部的振幅和间距都很小。在例外点（$\omega_{\mathrm{J}} > q$）之上，间距则会突然变得明显。类似地，$\omega_\pm$ 的实部在例外点之下明显不同，而在例外点之上，它们的差异很小。此外，我们发现，依赖于 α 的项不会影响两个本征模的本征矢量$\boldsymbol{\psi}_\pm$。

在例外点附近，系统对微扰表现出极高的灵敏度。首先，我们讨论依赖于 PT 的磁导率，它在例外点附近表现出显著的灵敏度增强。施加外部微波场 $\mathbf{h}_{\mathrm{p}}$，该场会叠加到 LLG方程中的有效场上。在$\widetilde{\quad\quad\quad\quad}$频域中，我们推导出 $\psi_{\mathrm{p}} = \sum_{\mathrm{p}\prime} \chi_{\mathrm{pp}\prime}\gamma h_{\mathrm{m,p}\prime}$，其中 $h_{\mathrm{m,p}} = h_{\mathrm{x,p}} + ih_{\mathrm{z,p}}$，而 $\chi_{\mathrm{pp}\prime}$是动态磁化率，其矩阵形式为，[154]

$$\chi = \frac{1}{(\omega_{\mathrm{k}} - i\alpha\omega - \omega)^2 + \tau^2 - \kappa^2} \begin{pmatrix} (\omega_{\mathrm{k}} - i\alpha\omega) + (i\tau - \omega) & \kappa \\ \kappa & (\omega_{\mathrm{k}} - i\alpha\omega) - (i\tau - \omega) \end{pmatrix}, \tag{36}$$

其中 $\omega_{\mathrm{k}} = \gamma(H_0 + \frac{2A_{\mathrm{ex}}k_{\mathrm{x}}^2}{\mu_0 M_{\mathrm{s}}} + \frac{J_{\mathrm{RKKY}}}{\mu_0 M_{\mathrm{s}} t_{\mathrm{p}}})$。在例外点附近，系统会变得高度敏感，例如对电荷电流项 τ 的变化，磁化率显然会发生改变。

此外，接近例外点（EP）的系统对磁场的微小变化十分敏感。这一特性有助于传感磁环境的变化，或增强光子学应用中的磁响应。例如，在上述系统中，在 WG1 中施加微小扰动 ϵ，其中微扰 $\epsilon \ll 1$对耦合的影响可以忽略不计。在例外点（EP） $\omega_{\mathrm{J}} = q$处，所得本征频率可用牛顿-普伊瑟级数 [17]进行微扰展开，该级数以平方根项开头，其前三项

该系列的

$$\begin{aligned}\omega_{\pm} &\approx q(c_0 \pm c_1\epsilon^{1/2} + c_2\epsilon),\\ c_0 &= (1-i\alpha)(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2)/q,\\ c_1 &= (1-i\alpha)e^{-i\pi/4}, \text{and } c_2 = (1-i\alpha)/2.\end{aligned} \tag{37}$$

这些表达式表明，本征频率的实部以施加的微扰的平方根为依赖关系发生分岔，即

$$\mathrm{Re}[\omega_+ - \omega_-] = (1-\alpha)\sqrt{2\epsilon}\kappa,$$

这量化了灵敏度增强。

上述分析忽略了偶极相互作用的影响；当 RKKY 相互作用占主导时，其影响较弱。为证明其作用，文献 [154]讨论了考虑偶极相互作用时的结果。在两个波导之间同时存在 RKKY 耦合和偶极耦合的情况下，仍会形成声学模和光学模。由于偶极耦合的性质，在波长较长的低频范围内，两个模式之间的间隙更加明显。因此，要在例外点处合并两个分离的本征频率实部，较低的 k_{x}对应的电流密度需要更大。

对于自旋轨道力矩驱动合成反铁磁体中的增益与损耗，按照上述方法并在 $\alpha \to 0$,[90]的极限下可得到本征值

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_{\mathrm{z}}^2 - q^2 - \omega_{\mathrm{J}}^2 \pm \sqrt{(\omega_{\mathrm{J}}^2 + q^2)\omega_{\mathrm{z}}^2 - \omega_{\mathrm{J}}^2\omega_0^2}}. \tag{38}$$

For

$$\omega_{\mathrm{J}} = \frac{q\omega_{\mathrm{z}}}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_{\mathrm{z}}^2}},$$

两个磁振子模彼此分离，且由于 $\alpha \to 0$ 的极限，虚部可以忽略。在

$$\omega_{\mathrm{J}} = \frac{q\omega_{\mathrm{z}}}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_{\mathrm{z}}^2}}$$

，两者 $\omega_{\pm}$ 在同一数值处合并，这是例外点的标志。超过例外点后， $\omega_{\pm}$ 的实部相同，而两个虚部分离。不同于铁磁情形，例外点的数值取决于 ω_0中的波矢 k_{x} ，这意味着频率不同的磁振子具有不同的例外点。此外，例外点不仅由耦合项 q决定，各向异性项 ω_{z} 也会影响其数值。有限阻尼会略微影响例外点处的合并，如图所示。低于例外点时，虚部较弱

且两个模式的虚部相同；当实部几乎相同时，它们在超过例外点后仍明显分离。没有面内各向异性 ω_z 项时，只存在正、负本征值。在这种情况下，通过改变层间耦合项，可以达到反PT对称性的例外点，如图所示。11。[180] 作者将磁振子方程线性化，并推导出哈密顿量，

$$H = \begin{pmatrix} H_k(1-i\alpha) & J(1-i\alpha) \\ -J(1+i\alpha) & -H_k(1+i\alpha) \end{pmatrix}. \tag{39}$$

得到了磁振子本征频率，

$$\omega_\pm = H_k\left(-i\alpha \pm \sqrt{1-\xi_k^2}\right), \tag{40}$$

with

$$\xi_k = \frac{J\sqrt{1+\alpha^2}}{H_k}.$$

在临界耦合下

$$J_c = \frac{|H_k|}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

光谱从反PT对称相转变为反PT对称破缺相，此时两层中不相等的锥角会产生有限的净磁化强度。通过引入界面Dzyaloshinskii–Moriya相互作用，可以观察到Friedrich–Wintgen连续谱束缚态的出现，并证明这些态受到反PT对称性的保护。此外，反PT对称性还可用于模拟高能场论预言的效应，例如克莱因悖论，以及跨越势垒的粒子-反粒子对产生；不过，这些现象在此处发生于 meV 能量尺度，并处于实验上可行的实验室环境中。[181]

通过改变施加的磁场，可以调控磁体中的磁化分布，并调节例外点的位置。例如，在合成反铁磁体中，施加一个垂直于平衡磁化$H_x\mathbf{x}$的磁场，可形成自旋翻转态，其中平衡磁化为$\mathbf{m}_{0,1} = -\mathbf{m}_{0,2} = (0,1,0)$。无自旋轨道力矩 $\omega_J = 0$时，$\mathbf{m}^{0,1}$ 和$\mathbf{m}^{0,2}$ 呈现对称变化，且 x 和 z 分量趋于一致。在这种情况下，施加 H_x会提高较低的磁振子模频率，并降低另一个模的频率。当 H_x达到某个特定值时，两个模式以相同频率交叉。越过交叉点后，两个模式再次分离。在存在有限自旋轨道力矩时，$\mathbf{m}^{0,1}$ 和$\mathbf{m}^{0,2}$的变化会产生轻微的不对称。研究发现， H_x 诱导的自旋翻转态可以显著降低例外点所需的电荷电流密度

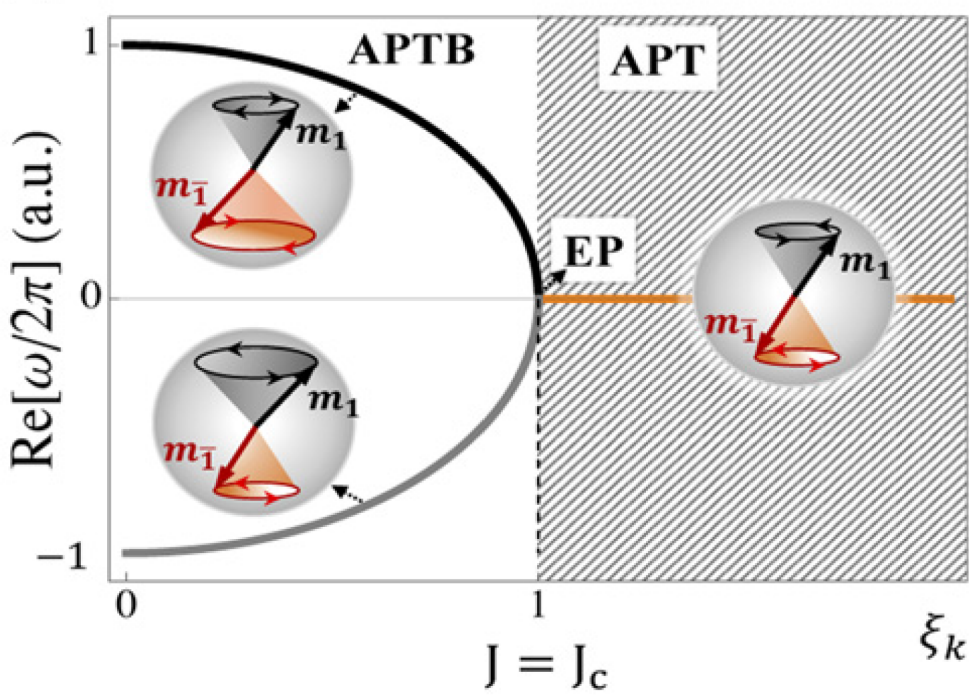


图11. 具有反PT对称性和例外点的合成反铁磁体示意图。在例外点 $J = J_c$ 之上，正、负本征频率的实部合并为 0.[180]

以达到例外点。特别是，在两个模式的交叉点附近，例外点电流密度趋近于 0，只需极小的 ω_J 即可达到例外点。因此，只需相对较小的电压，就能以非线性方式控制 PT对称性。[90]

在没有 RKKY 相互作用的情况下，SOT 驱动的增益与损耗仍可使偶极耦合磁振子模式呈现 PT 对称特征。[91] 对于图 7(a) 中反平行磁化的情况，色散曲线呈现出与后向体磁振子模相似的特征，在低波矢范围内具有负群速度。WG1 与 WG2 之间的偶极耦合形成了较低的声学模和较高的光学模。在较大的波矢范围内，交换项占主导地位；在偶极相互作用较弱的情况下，两种磁振子模之间的差异变得非常小。采用上述针对偶极耦合波导的相同方法，并考虑 SOT 产生的耦合增益与损耗效应，仍可实现例外点（EP），此时两个模式在振幅达到临界值 ω_J 时合并。由于较高波矢下的偶极耦合强度较弱，EP 处的 ω_J 值较小。因此，当 ω_J具有有限振幅时，低波矢磁振子仍低于 EP，而高波矢磁振子已经

超过 EP 并进入 PT 对称性破缺相。尽管如此，在 EP 附近发生 PT 对称性跃迁期间，耦合波导中仍可实现电可重构非互易传播。

对于偶极耦合波导中的平行构型（图 7(b)），光学模与声学模之间仍存在分裂。与反平行情形相比，平行构型下的模式分裂略小。在这种情况下，两个模式之间的分裂与上述反平行情形相比略小。尽管如此，仍可实现电流驱动的PT对称相变和例外点。在某个 k_{x}处，两个实部交叉，交叉模降低了所需的例外点密度。对于较小的 ω_{J}，在交叉点附近，例外点以上的磁振子模具有分离的虚部和合并的实部。对于更高的 k_{x}，两个磁振子模与例外点之间的差异变得很小，而较小的 ω_{J} 会驱动例外点以上的磁振子。[91]

利用例外点附近两个波导之间可通过电流重新配置的磁振子传输，提出了二极管和逻辑器件方面的潜在应用。[91]在某一频率下，不通电流（$\omega_{\mathrm{J}}=0$）时，通过在两个波导之间切换磁振子注入（输入），可以检测到两个相等的磁振子输出。接通电流后，由于非互易传播，WG1输入对应的磁振子输出是WG2输入输出的两倍，这是实现电控可重构磁振子二极管的一项重要发现。WG1输入代表振幅较大的“开”输出，而WG2输入则表示振幅明显较小的“关”状态。同样，将注入电流与不同波导中的磁振子输入相结合，可在例外点附近实现电控可重构的磁振子逻辑运算。此外，通过磁振子诱导的加热效应，热信息可体现在PT对称磁激发中，并由电荷电流驱动的磁振子例外点加以控制，从而实现非互易热流、热二极管和逻辑门操作。

在图中的 PT对称平面偶极耦合铁磁波导中8(a) 中，本征值表示为以下形式：[174]

$$\omega_{1,2}=\omega_0-i\Gamma_0\pm\sqrt{\Omega_{\mathrm{c}}^2-\Gamma_{\mathrm{I}}^2}. \tag{41}$$

当电流项 $\Gamma_{\mathrm{I}}=\Omega_{\mathrm{c}}$时，两个本征值并合为相同的值 $\omega_0=\omega_0-i\Gamma_0$，表明出现了例外点。随着两个波导之间的间距增大，耦合减弱，使例外点电压降低，如图 8所示。

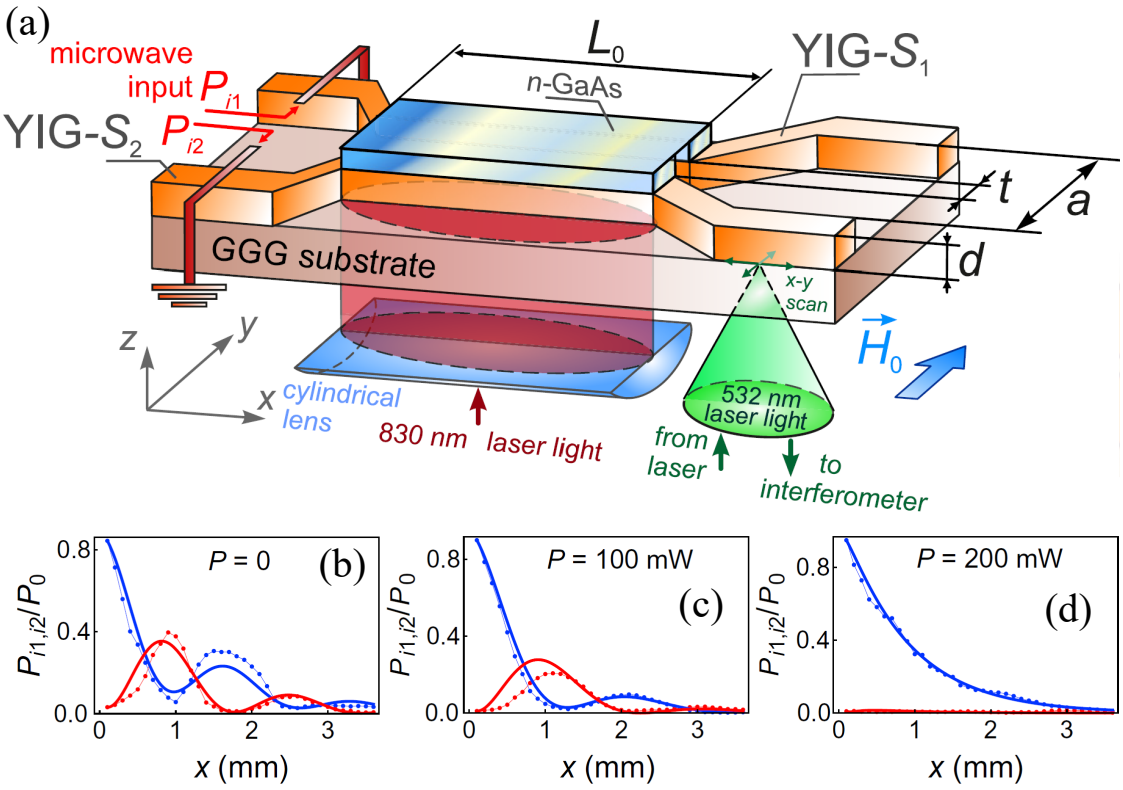


图 12. (a) 两条耦合磁振子波导实验结构示意图。其中一条波导中的额外损耗由红外激光照射产生。(b-d) 不同激光功率下两条磁振子波导中的磁振子强度分布。[182]

A. V. Sadovnikov 等人在偶极耦合波导中通过实验确认了磁振子例外点及相关传播行为（图 12），其中一个波导中的磁振子损耗通过红外激光照射进行控制。 [182] 通过增大激光诱导损耗幅度，系统逐渐接近例外点，从而导致耦合波导的本征频率和磁振子模发生变化，如图 12(b-d)所示。实验结果证实了关于例外点附近磁振子非互易传播的理论预测。磁振子系统中的非互易性可以实现主动控制，即通过外部刺激进行调控。这一优势可用于主动非互易隐身等应用，以隐藏磁振子信号。 [183]

在图 9所示的赝厄米耦合自旋振子中，一个振荡器的增益和另一个振荡器的增强损耗使其谱中出现例外点物理。[175] 该

方程（30）的本征频率为:

$$v_{1,2} = \bar{\omega} - i\bar{\beta} \pm \sqrt{k^2 + (\tilde{\omega} - i\tilde{\beta})^2}, \\ \bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2, \bar{\beta} = (\beta_1 + \beta_2)/2, \tilde{\omega} = (\omega_1 - \omega_2)/2, \tilde{\beta} = (\beta_1 - \beta_2)/2, \tag{42}$$

通过将例外点定义为两个本征频率合并至同一数值，˜可得到例外点的条件： $k_c - ik_d = \pm(\beta + i\tilde{\omega})$ 。如图9(b)所示，固定其中一个电流并改变另一个电流，即可达到例外点条件。在例外点处，他们观察到两个振荡器均停止振荡；这是一种显著的非线性效应，主动振荡会相互抑制。稍微偏离例外点时，他们还报告了其他复杂动力学现象，例如频率牵引和非对称模式跳跃。作者强调，例外点处的振荡死亡可用于构建高灵敏度探测器，而且该装置采用兼容 CMOS 的材料，因而适合集成到（自旋）电子电路中。[175, 184]

对于腔磁振子系统，调节例外点通常涉及调整磁振子-光子失谐以改变耦合强度。例如，Zhang等人使用了由磁振子模耦合到共面波导谐振器的致密顺磁自旋系综，通过泵浦其中一部分自旋来改变耦合，从而达到例外点。[185] 研究发现，无论泵浦哪些自旋，观察到的例外点都具有稳健性，这表明内禀的自旋-自旋交叉弛豫能够稳定非厄米简并。在更传统的磁体/腔装置中，研究人员通过改变相对阻尼观察到了极化激元模式合并；这一机制可通过向腔中增加一个损耗通道，或施加能有效放大磁振子的微波驱动来实现。[176, 178, 186–188] 此外，也有研究提出，通过在腔中耦合多个磁振子模和光子模来实现高阶例外点（三阶或更高阶）。Can和Yan从理论上预言，腔磁振子-极化激元系统可被调控至三阶例外点；此时透射谱会呈现阶跃函数式响应，同时出现超窄模式，并对外部扰动表现出显著增强的灵敏度，例如可用于热二极管。 [189]他们提出了一种实验方案，即额外驱动光子和磁振子。[190]

C. 磁振子超材料

磁振子晶体的能带结构也可用于操控例外点。例如，通过周期性纳米结构化，使相邻的铂条带以距离 L分隔

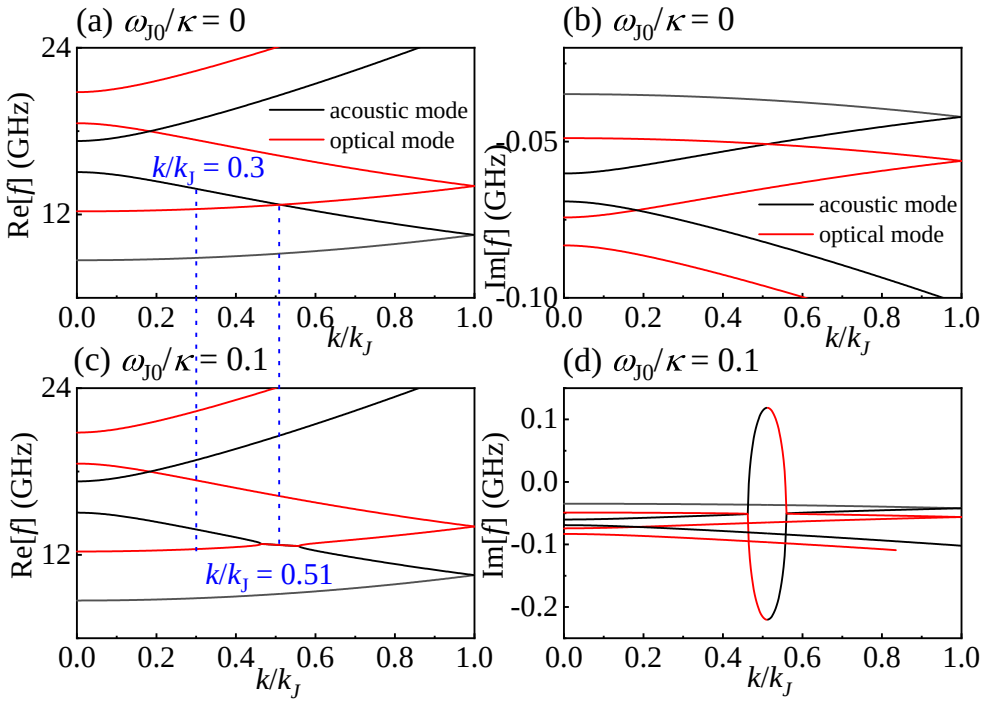


图1 13. 对于周期性耦合的波导，折叠到布里渊区后的磁振子本征频率的实部和虚部：(a-b) 无增益与损耗光栅；(c-d) 有增益与损耗光栅。[191]

沿相反方向传输电荷电流密度 y轴。波导WG1和WG2均沿 $+x$ 方向磁化，并具有周期性变化的耦合强度，从而形成磁振子晶体。在这种设置下，自旋轨道力矩为 $\mathbf{T}^{1(2)} = \gamma c_{\mathrm{J}}(x)$ $\mathbf{m}_{1(2)} \times (\pm\mathbf{x}) \times \mathbf{m}_1$(2)，为磁振子晶体产生增益/损耗光栅。[191] 利用布洛赫定理，我们得到折叠到第一布里渊区中的不同能带的本征值，如图13所示。比较无增益/损耗和有增益/损耗的情况后，我们发现，空间周期性自旋轨道力矩 $\omega_{\mathrm{J}}(x)$的影响在两个磁振子模于 $k/k_{\mathrm{J}} = 0.51$处相互接近时尤为显著。在此， $\omega_{\mathrm{J}}(x)$扩大了实部塌缩的交叉区域，同时在相同范围内，虚部明显分离。这些特征表明该范围位于例外点之上。在交叉点附近，两个模式在 $\omega_{\mathrm{J0}} = 0$附近的例外点处塌缩。远离交叉点时，例外点的取值变大。在偶极耦合的PT对称磁振子晶体 [91]中也发现了这一特征。

D. 杂化材料

X. Li 等人提出了一种基于范德华

铁磁双层。在第一布里渊区的较大范围内可以出现多个例外点。[192]。T. Yu 等人将非厄米系统与磁振子晶体相结合。在铁磁薄膜上排列铁磁元件构成一维阵列，各元件的基特尔磁振子与单向薄膜自旋波之间存在手性耦合，由此产生非厄米皮肤效应，使模式局域于一侧边缘，并带来极高的微波灵敏度。[193] B. Flebus 等人采用串联连接的自旋转矩振荡器阵列，使每个振荡器将部分阻尼传递给一个相邻振荡器。这种设计可以模拟非厄米 Su-Schrieffer-Heeger模型，并呈现拓扑保护边缘态。[194]

E. 金属波导中的赝厄米磁振子

在图 5（d）的上述电控例外点模型中，采用了绝缘波导。对于带有铂间隔层的耦合金属铁磁波导，沿 x 轴的电流仍会施加相同的增益与损耗转矩

$$\mathbf{T}_{1(2)} = +(-)\tau(\mathbf{m}_{1(2)} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{m}_{1(2)})).$$

此外，金属铁磁层中还可能存在面内自旋转移力矩（STT） $b_{\mathrm{J}}\partial_{\mathrm{x}}\mathbf{m}_{\mathrm{P}}$ 。[127–129] 这里，

$$b_{\mathrm{J}} = \frac{g\mu_{\mathrm{B}}PJ_{\mathrm{e}}}{2eM_{\mathrm{s}}},$$

g 是朗德因子，$\acute{e}$ 是玻尔磁子， P 是自旋极化效率， e 是电子电荷。在LLG方程中加入SOT和额外的STT后，两个耦合磁振子模的本征频率变为，

$$\omega_{\pm} = (1 - i\alpha)(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2 + \omega_{\mathrm{bJ}}k_{\mathrm{x}} + q \pm \sqrt{q^2 - \omega_{\tau}^2}), \tag{43}$$

with

$$\omega_{\mathrm{bJ}} = b_{\mathrm{J}}/(1 + \alpha^2).$$

例外点出现在 $\omega_{\mathrm{J}} = \kappa$。额外的STT b_{J} 项会导致两个模式的色散出现微弱的不对称性（图 14 ）。在例外点以上，STT 振幅的增加 b_{J} 可以提高频率。此外，例外点处的磁振子传播特征仍然成立，如图14（e-f）所示。特别是，相位刚性以及所谓左态与右态之间的差异，即表明 $[H^{\dagger}, H] \neq 0$ 动力学并不对应于具有厄米算符的系统，尽管本征值为实数（参见图14 （g、h））。

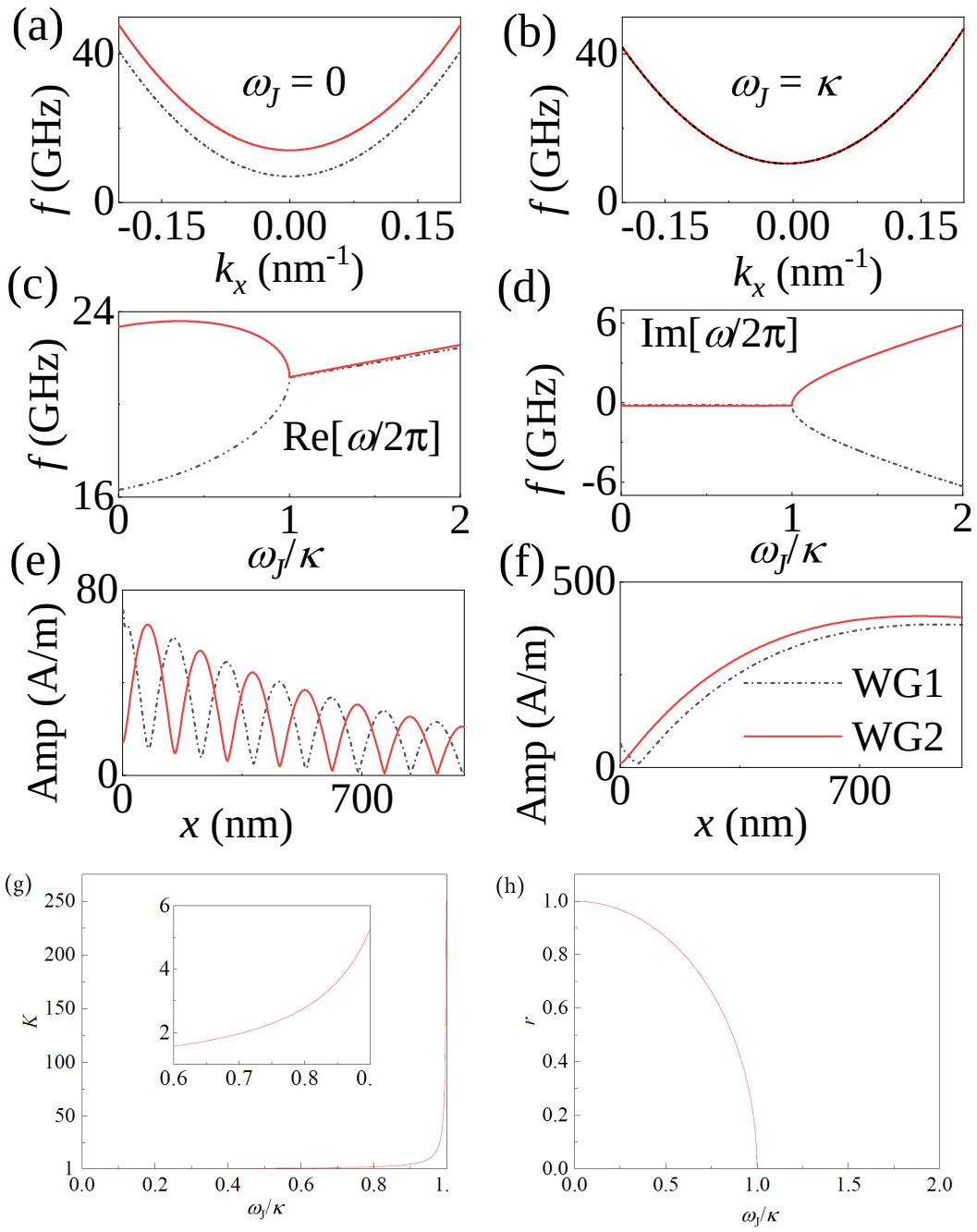


图 14. 对于两个耦合金属波导，(a-b) 在 $\omega_J = 0$和例外点 $\omega_J = \kappa$处两个磁振子模的色散。(c-d) 两个磁振子模的实部和虚部随 ω_J/κ的变化。(e-f) 在 $\omega_J = 0$ 和例外点 $\omega_J = \kappa$处磁振子振幅的空间分布。[154] (g) 为彼得曼因子（式（2））（插图显示了小电流密度区域），(h) 为 (c,f) 中对应模式的相位刚性（式（3））。

F. 具有DMI的铁磁体中的类厄米磁振子

除了上文讨论的交换相互作用和偶极相互作用外，还可能存在一种特殊类型的反对称交换相互作用，称为Dzyaloshinskii-Moriya相互作用（DMI）。[195, 196]DMI的物理起源在于相对论自旋轨道耦合与相邻磁矩之间的反对称交换相互作用。当反演对称性被破坏时，无论是在界面、表面，还是在缺少反演中心的块体材料中，DMI都会起作用，并与对称的海森堡交换相互作用竞争，共同决定磁基态。DMI有利于形成非共线自旋构型，并能稳定斯格明子和自旋螺旋等手性磁织构。[197, 198] 对于两个相邻自旋S_i 和S_j ，反对称交换相互作用的能量可表示为$D_{ij} \cdot (S_i \times S_j)$，其中$D_{ij} = -D_{ji}$ 是表征相互作用强度和方向的矢量。矢量D取决于系统的对称性。在具有特定晶体学对称性的系统中，DMI可分为不同类型。对于薄磁性薄膜的界面DMI，相互作用的形式为 $D e_z \cdot (S_i \times S_j)$，其中DMI强度为 D，e_z 垂直于薄膜界面。在连续介质极限下，体相DMI能量密度可用连续磁化m(r)表示，

$$\epsilon_{\mathrm{DMI}} = D\mathbf{m} \cdot (\nabla \times \mathbf{m}).$$

体相DMI存在于不具有反演对称性的材料中，例如 B20化合物。对于薄膜中的界面DMI，能量密度变为 [197, 199, 200]

$$\epsilon_{\mathrm{DMI}} = D\left[m_z(\nabla \cdot \mathbf{m}) - (\mathbf{m} \cdot \nabla)m_z\right].$$

此外，DMI使磁化与外电场**E** 以及施加电压之间能够耦合。耦合能量密度表示为 $\epsilon_{\mathrm{elec}} = -\mathbf{E} \cdot$**偏振**，其中自旋驱动极化

$$\mathbf{P} = c_E[(\mathbf{m} \cdot \nabla) - \mathbf{m}(\nabla \cdot \mathbf{m})].$$

[201, 202] 将有效场

$$\mathbf{H}_{\mathrm{elec}} = -\frac{1}{\mu_0 M_s}\frac{\delta E_{\mathrm{elec}}}{\delta \mathbf{m}}$$

代入 LLG方程（4）后，可以分析电场诱导的有效 DMI 对磁振子动力学的作用。对施加了均匀磁场 $\mathbf{E}=(0,\ 0,\ E_z)$ 的单个磁体施加电场 $\mathbf{H_a}=H_0\mathbf{y}$ 沿着 $+y$ 方向，此时 DMI 作用下的磁振子色散关系为：

$$\omega=(1-i\alpha)(\omega_H+\omega_{ex}k^2-\omega_{dmi}k_x), \tag{44}$$

其中 $\omega_{dmi}=\frac{2\gamma c_E E_z}{(1+\alpha^2)\mu_0 M_{s0}}$ 色散关系揭示了 DMI 引入的若干重要特征。与不含 DMI 的方程（9）相比，$k=0$ 处的能隙发生了变化，且沿 x 轴的色散关于传播方向呈非对称性。这种非对称性导致非互易磁振子传播，即 $\omega(+k_x)\neq\omega(-k_x)$，其中波矢方向相反的磁振子具有不同的频率。[203–205]

在两个耦合波导中（图 5(d)），对两个波导施加相同的电场时，诱导产生的 DMI 会改变磁振子色散关系，如下所示：[154]

$$\omega_\pm=(1-i\alpha)(\omega_H+\omega_{ex}k^2-\omega_{dmi}k_x+q\pm\sqrt{q^2-\omega_\tau^2}). \tag{45}$$

与方程 35相比，PT对称性和例外点的条件不受影响。电场使磁振子色散呈现非对称性，如图 15(a-b)所示。这里，正的 E_z 会使磁振子色散向正 k_x方向移动，而负的 E_z 则产生相反的效果。

对于两个波导中的相反电场，WG1 和 WG2 中的磁振子色散关系会分别向不同方向变化，导致磁振子势发生不对称变化。因此，PT 对称条件不满足，在这种情况下无法严格确定例外点，如图 15(c-d) 所示。此外，如果仅在单波导中施加电场，则该波导中的磁振子色散关系会发生选择性偏移。如图 15(e) 所示，磁振子只能传播至施加了电场的波导，而另一波导中的磁振子则受到抑制。[154]

此外，研究发现，结合 DMI 和空间非局域耗散项会导致有效的非厄米不对称性。Deng 等人研究了一条一维链，其中每个自旋都具有均匀的本征阻尼，但与公共衬底耦合，从而引入非局域耗散项。[206] DMI 使耦合具有方向性，而衬底使阻尼具有非局域性；他们发现，开放边界条件下的体磁振子模都偏向一端，即出现磁振子非厄米趋肤效应。

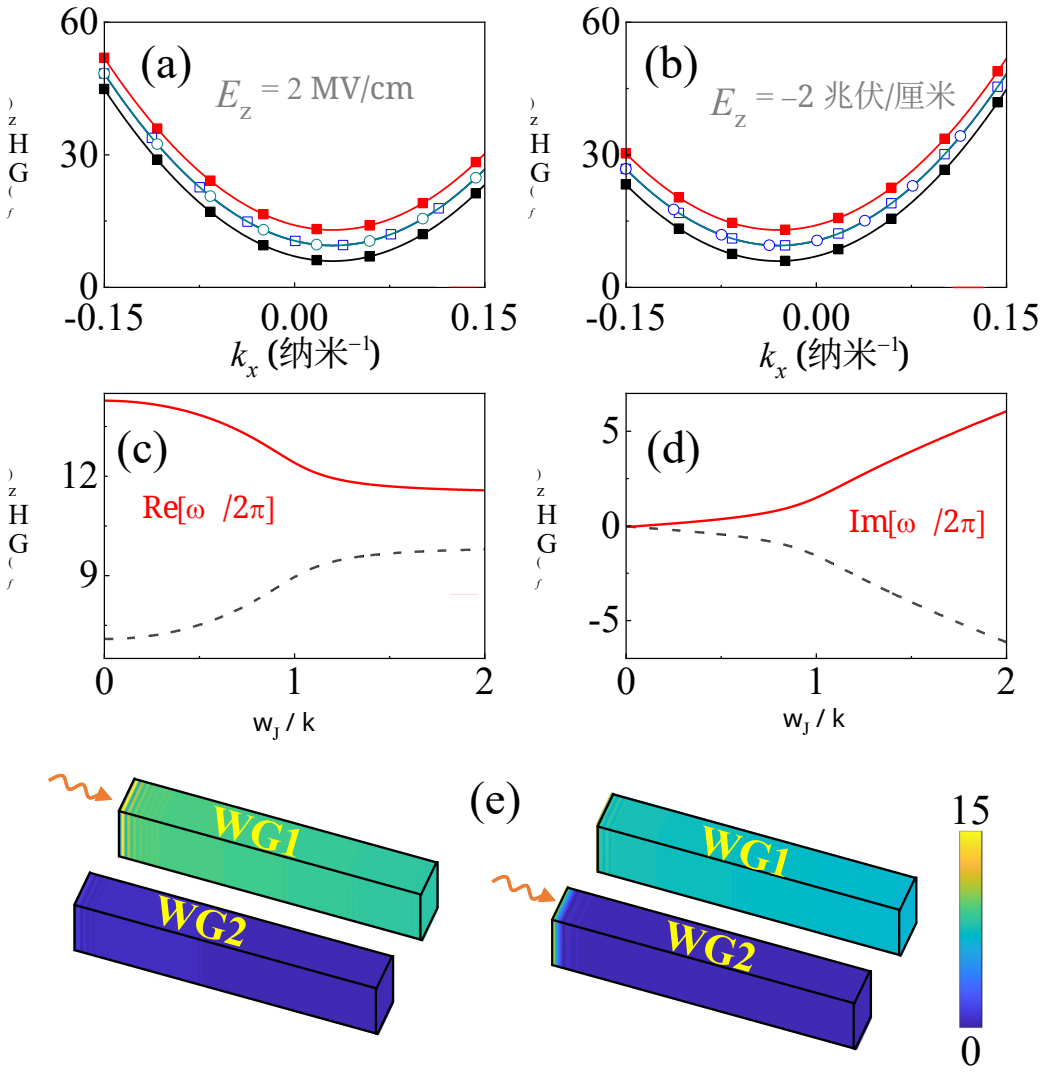


图 15. (a-b) 在对两个耦合波导施加均匀电场 $(0,0,E_z)$ 时，例外点处存在和不存在电流时的磁振子色散关系。(c-d) 对于两个耦合波导中的相反电场，WG1 中的 $\mathbf{E}_1=(0,0,E_z)$ 和 WG2 中的 $\mathbf{E}_2=(0,0,-E_z)$，磁振子本征模的实部和虚部随电流项 ω_J 的变化。(e) 仅在 WG1 中施加电场 $(0,0,E_z)$ 时，两个耦合波导中的磁振子空间分布。[154]

G. Floquet磁振子系统中的例外点

在引言中，我们讨论了两个耦合系统中周期驱动系统动力学的一般预期。在这里，我们将这一讨论扩展到 PT 对称系统。例如，可以利用交流电流产生时间调制自旋轨道力矩来实现这一点。Floquet工程允许对 PT 进行动态操控

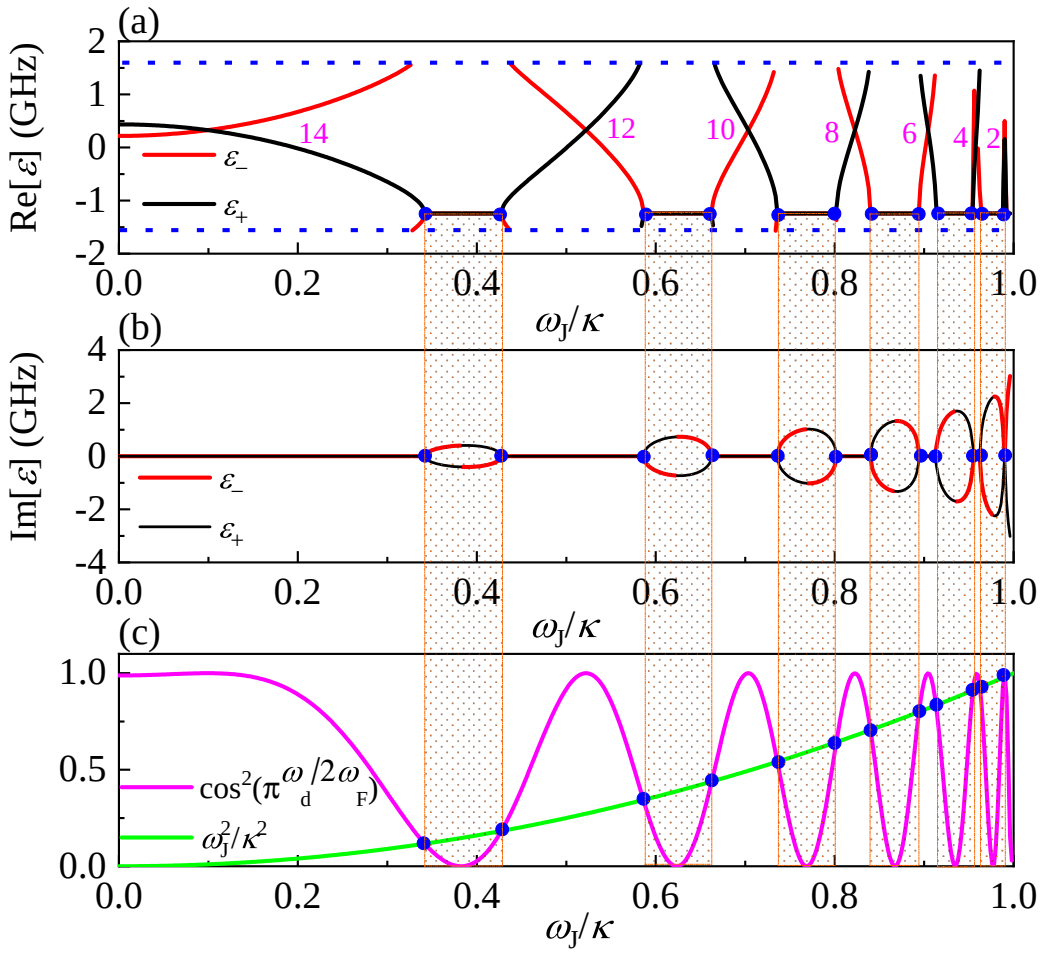


图16. （a）Floquet准能量的实部和（b）虚部，随周期性自旋轨道力矩的振幅 ω_{J} 变化，其中 $\alpha \to 0$。在区域 $-\omega_{\mathrm{F}}/2$ 和 $\omega_{\mathrm{F}}/2$（以蓝色虚线标出）内， $\epsilon_{\pm}$ 的实部，其中 $T = 2\pi/\omega_{\mathrm{F}}$ 为交流电荷电流周期。（a）中的整数（14、12、.....）表示 $\frac{\omega_{\mathrm{d}}}{\omega_{\mathrm{F}}}$ 的比值，其中 $\epsilon_{\pm}$ 交叉。（c） $\frac{\omega_{\mathrm{J}}^2}{\kappa^2}$ 和 $\cos^2(\frac{\pi}{2}\frac{\omega_{\mathrm{d}}}{\omega_{\mathrm{F}}})$。蓝色实心圆点标示 Floquet 例外点条件。阴影区域标示 PT 对称性破缺相的范围。[191]

相变，从而能够控制参数空间中例外点的位置和数量。这种动态控制不仅与可重构磁振子器件相关，也涉及基础层面上时变伪厄米系统的动力学。

为了实现具有随时间变化的增益与损耗的赝厄米 Floquet 磁振子系统，在图 5（a）[191]在时间交替变化 $\omega_{\tau,\,\mathrm{t}}$（$0 \le t \le t_{\mathrm{s}}$） $= \omega_{\mathrm{J}}$ 和 $\omega_{\tau,\,\mathrm{t}}$（$t_{\mathrm{s}} \le t \le T$） $= -\omega_{\mathrm{J}}$ 且周期为 $T = 2t_{\mathrm{s}}$。将随时间变化的函数代入方程（27）。系统状态的时间演化

在时间 t_{s} 后具有正（负）时的系统状态如下:

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = M_{\mathrm{P(N)}}(t_{\mathrm{s}}) \begin{pmatrix}\psi_1^0\\ \psi_2^0\end{pmatrix}. \tag{46}$$

(ψ_1^0, ψ_2^0) 是每次演化的初始状态，而传播矩阵 $M_{\mathrm{P(N)}}(t_{\mathrm{s}})$ 由磁振子函数式（27）确定。经过一个完整周期后的总传播矩阵为 $M(T) = M_{\mathrm{P}}(t_{\mathrm{s}})M_{\mathrm{N}}(t_{\mathrm{s}})$。在周期性驱动下，Floquet定理指出，解 $e^{i\epsilon_{\pm}t}\phi_{\pm}(t)$ 可表示为周期函数 $\phi_{\pm}(t) = \phi_{\pm}(t+T)$ 与 Floquet准能量 $\epsilon_{\pm} \in [0, \omega_{\mathrm{F}}]$ 的形式，其中准能量定义到相差 $\omega_{\mathrm{F}} = \pi/t_{\mathrm{s}}$ 的整数倍。对于满足 $t \to \infty$ 的恒定自旋轨道力矩，其 Floquet准能量 $\epsilon_{\pm} = (1 - i\alpha)(\omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2 \pm \sqrt{q^2 - \omega_\tau^2})$ 与上述情况完全相同。

对于时间周期性自旋轨道力矩，可推导出两个复准能量：[191]

$$\begin{aligned}\epsilon_{\pm} = -\ln\Big\{ &\frac{e^{-2iw_{\mathrm{e}}}}{2d^2}\left[(e^{-2id_{\mathrm{e}}} + e^{2id_{\mathrm{e}}})\kappa^2 - 2\omega_{\mathrm{J}}^2\right.\\ &\left.\pm 2\kappa\sinh(id_{\mathrm{e}})[2(\kappa^2 + \kappa^2\cosh(2id_{\mathrm{e}}) - 2\omega_{\mathrm{J}}^2)]^{1/2}\right]\Big\}\,\omega_{\mathrm{F}}/(2\pi i).\end{aligned} \tag{47}$$

在此，我们引入了

$$d = \sqrt{q^2 - \omega_\tau^2},$$

$$w_{\mathrm{e}} = \pi(1 - i\alpha)\omega_0/\omega_{\mathrm{F}},$$

and

$$d_{\mathrm{e}} = \pi(1 - i\alpha)d/\omega_{\mathrm{F}}.$$

当阻尼较小时，二者 $\epsilon_{\pm}$ 均可简化为

$$\epsilon_{\pm} = -\ln\left\{\frac{e^{-2iw_{\mathrm{e}}}\kappa^2}{d^2}[\cos(\frac{\pi\omega_{\mathrm{d}}}{\omega_{\mathrm{F}}}) - \frac{\omega_{\mathrm{J}}^2}{\kappa^2} \pm 2i\sin(\frac{\pi\omega_{\mathrm{d}}}{2\omega_{\mathrm{F}}})\,[\cos^2(\frac{\pi\omega_{\mathrm{d}}}{2\omega_{\mathrm{F}}}) - \frac{\omega_{\mathrm{J}}^2}{\kappa^2}]^{1/2}]\right\}\frac{\omega_{\mathrm{F}}}{2\pi i}. \tag{48}$$

由上述方程可确定以下可通过电流调节的情况:

a) 当　驱动电流的频率 ω_{F} 和振幅 ω_{J} 满足

$$\cos^2(\frac{\pi}{2}\frac{\omega_{\mathrm{d}}}{\omega_{\mathrm{F}}}) > \frac{\omega_{\mathrm{J}}^2}{\kappa^2},$$

准能量 $\epsilon_{\pm}$ 为实数且彼此不同，表明系统处于 PT对称保持相。

b) 即使在这一相中，当能级间距是驱动频率的整数倍时，Floquet态也可能变得简并，即:

$$\omega_{\mathrm{d}} = 2n\omega_{\mathrm{F}}$$

且 n 是一个整数，这类似于弱驱动下的标准多光子共振[207]，如图16所示。

c) 在

$$\cos^2(\frac{\pi}{2}\frac{\omega_{\mathrm{d}}}{\omega_{\mathrm{F}}}) = \frac{\omega_{\mathrm{J}}^2}{\kappa^2}$$

这些模式合并，表明 Floquet 模中出现了例外点（下文称为 Floquet 例外点）。d) 在 Floquet例外点以上（$\cos^2(\frac{\pi}{2}\frac{\omega_{\mathrm{d}}}{\omega_{\mathrm{F}}}) < \frac{\omega_{\mathrm{J}}^2}{\kappa^2}$），$\epsilon_{\pm}$ 变为复数，$\epsilon_{\pm}$ 的两个实部简并，而两个虚部不同，这表明系统处于 PT 对称性破缺相。由于 $\frac{\omega_{\mathrm{J}}^2}{\kappa^2}$ 是单调的，而 $\cos^2(\frac{\pi}{2}\frac{\omega_{\mathrm{d}}}{\omega_{\mathrm{F}}})$ 关于 ω_{J} 具有周期性，因此随着我们改变电流间隔层强度（从而改变 ω_{J}），会出现多个 PT 对称性破缺岛（图 16中的阴影区域）。Floquet例外点标示了这些岛的边界。值得注意的是，Floquet例外点出现时的 ω_{J} 值（与电流密度成正比）远小于常规例外点对应的值（在 $\omega_{\mathrm{J}} = q$处）。

阻尼较大时，在 PT 对称性破缺相中，实部之间会出现小间隙，两个 Re$[\epsilon_{\pm}]$ 仅在中心处合并，而两个虚部 Im$[\epsilon_{\pm}]$ 在该处相距更远。（图17(a-b)）此外，在 PT 对称性破缺相之外，阻尼会导致 Im$[\epsilon_{\pm}]$具有有限值。这些由较大有限阻尼引起的特征使 Floquet例外点不如小阻尼时清晰，但仍可根据 Im$[\epsilon_{\pm}]$间距较大的区域辨认出 Floquet例外点区域和 PT 对称性破缺相。

通过改变电荷电流强度（即增益/损耗强度），可以调控系统的稳定性。在Floquet例外点附近，虚部转为正值，表明系统发生受驱不稳定性。与恒定自旋轨道力矩不同，磁化振荡在达到最大值后仍会持续很长时间。诱导产生的磁振子频率不同于间隔层电流的频率，因此提供了一种全新的方法：利用频率极低的电流产生高频磁振子。伪厄米性诱导的磁振子自振荡与单波导中的情况截然不同，后者始终需要电极化相对于平衡磁化方向具有倾斜角。上述分析忽略了偶极相互作用。考虑偶极相互作用后，准能量和准例外点的数值仅略有变化，Floquet破缺PT对称相和自振荡的主要特征仍保持不变。

电流周期较短时，产生 Floquet 例外点所需的电流密度可能非常低，Floquet 例外点的数量也会发生变化。例如，在 $\tau = 0.07$ ns 时，$\omega_{\mathrm{J}} = 0.03\kappa$ 附近只有一个 Floquet 例外点（图17(c-d)），它远小于 $\tau = 1$ ns 时的最小例外点。此外，τ - ω_{J} 处的稳定性图为

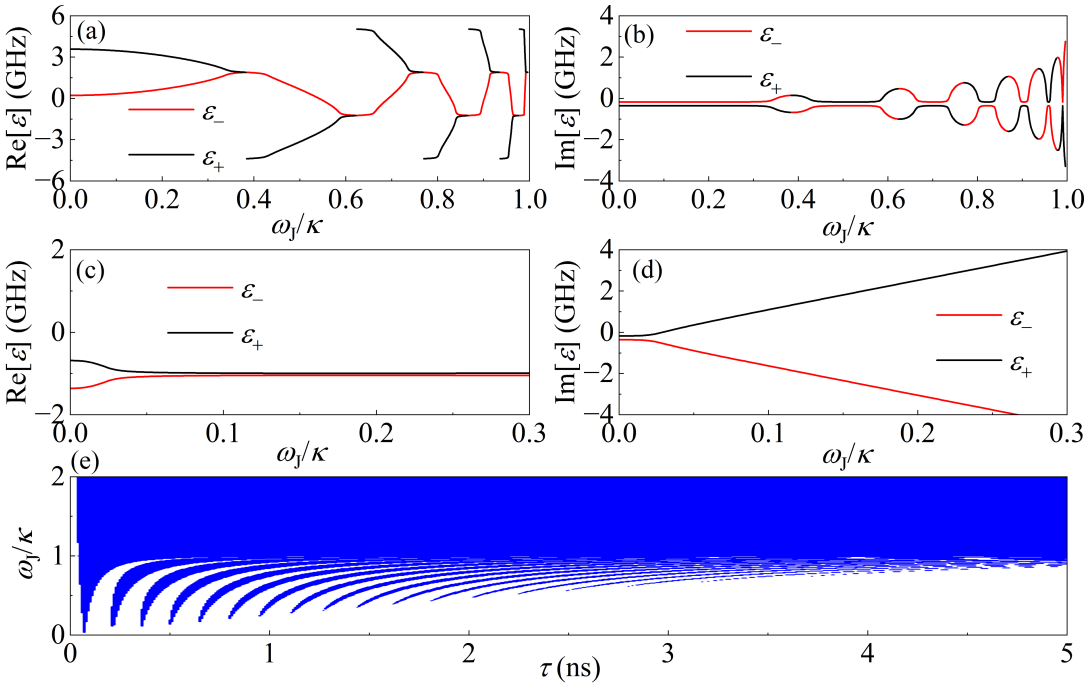


图 17. 对于 $\alpha = 0.004$，准能量 $\epsilon_{\pm}$ 的实部和虚部随振幅ω_{J} 的变化关系，其中周期参数为 (a-b) $\tau = 1$ ns 和 (c-d) $\tau = 0.07$ ns。(e) τ - ω_{J} 空间中的稳定性相图。阴影区域对应 $\mathrm{Im}[\epsilon_{\pm}] > 0$。

见图17(e)。在 Floquet 例外点附近， $\epsilon_{\pm}$ 的虚部可能变为正值，而且可以根据稳定性图推断不同 τ 下例外点电流密度和例外点数量的变化。

Floquet伪厄米性在时域中得以实现。在由自旋轨道力矩驱动的空间周期性增益与损耗系统中，由于磁振子在传播过程中也经历周期性变化的增益与损耗，因此仍存在类似的低阶例外点以及例外点以上的自振荡。[191]此外，具有耦合周期性损耗/更大损耗的系统也揭示了类似的Floquet例外点特征，展现了磁振子学与伪厄米性结合时的多样性。

伪厄米Floquet工程通过低频电流为控制高频磁振子提供了一种机制。这一特性可能有助于控制反铁磁体（AFM）中的磁振子。在反铁磁体中，磁振子通常处于太赫兹频率范围，且寿命为亚纳秒，因此需要在皮秒时间尺度上实现控制。此外，在净磁化强度消失的共线反铁磁体中，具有相反圆偏振的两个磁振子模是简并的，因此需要一种能够以相反方式影响这两个模式的反铁磁体磁振子控制手段。[208–210] 伪厄米Floquet工程可以帮助

通过周期性调制增益与损耗参数来控制超高频反铁磁体磁振子，并且其所需阈值远低于静态系统。此外，在例外点附近，两个磁振子模发生塌缩，因此增益与损耗或耦合的微小变化就能引起反铁磁体中快速且大幅度的偏振旋转。这些理念和方案有望应用于偏振编码反铁磁体太赫兹磁振子逻辑。

H. 高阶例外点与拓扑能量传输

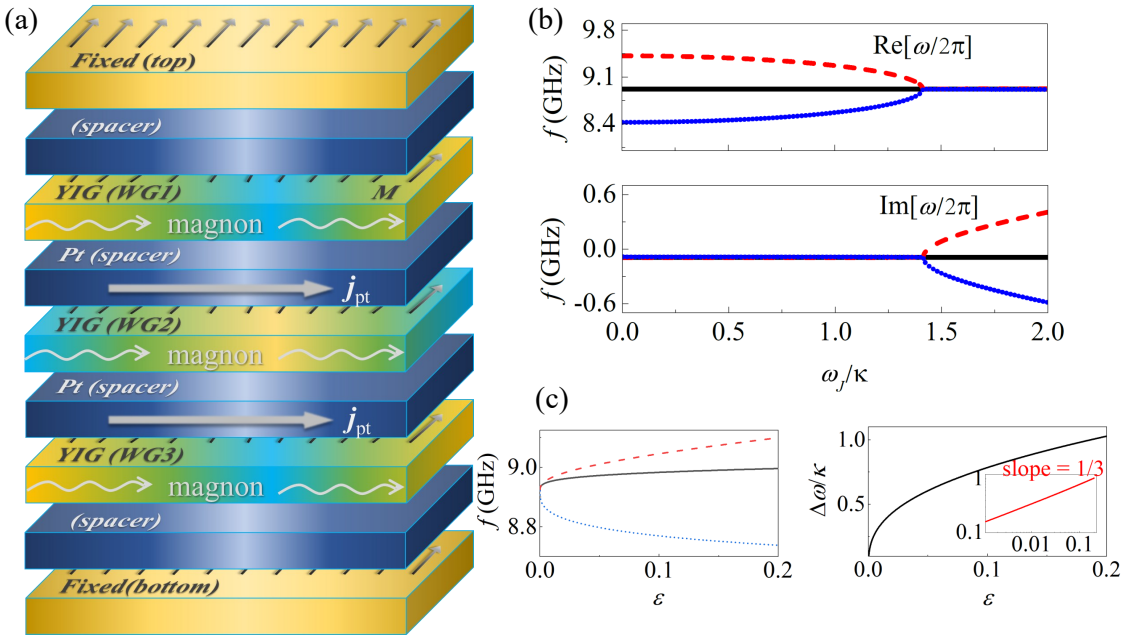


图18。（a）三个耦合磁振子波导的示意图。顶部和底部各设有一层硬磁性覆盖层。相邻层通过 RKKY 耦合。在 WG1、WG2 和 WG3 之间的间隔层中注入电荷电流，会产生自旋轨道力矩，从而驱动 WG1 和 WG3 中的磁振子损耗与增益，而 WG2 中的自旋轨道力矩则被抵消。（b）三个本征频率 $\omega_{T1、T2、T3}/(2\pi)$ 的实部和虚部随 ω_J/κ 变化的关系。（c）在三阶例外点处，三个本征频率的实部随扰动 ϵ，$\Delta\omega/\kappa = \mathrm{Re}[\omega_{T2} - \omega_{T3}]/\kappa$ 变化的关系；插图展示其在对数 $_{10}$ 尺度上的取值。[211]

根据上述分析，我们得出结论：两个耦合磁振子波导会产生二阶例外点，两个磁振子模在此合并。通过精心设计系统的结构和参数，若干证据也表明，实现更高阶例外点是可能的。[190, 211] 例如，在腔磁振子-极化激元系统中，Cao 和 Yan 预测

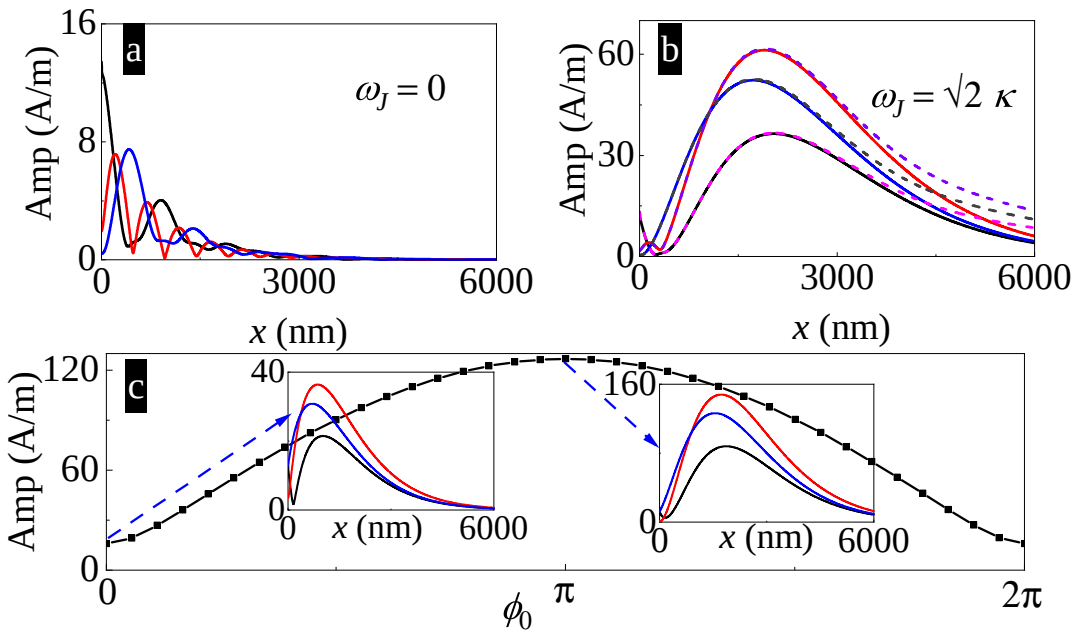


图19. 在(a) $\omega_J = 0$ 和(b) 例外点处磁振子振幅的空间分布。黑色（红色、蓝色）实线和洋红色（紫色、灰色）虚线分别表示扰动为 $\epsilon = 0$和0.01时的磁振子振幅。(c) 在例外点处，WG2的磁振子振幅随WG1和WG3输入之间相位差的变化。[211]

通过将一个腔光子与两个磁振子模耦合，可产生三阶例外点，此时三个本征频率会合并。[190] 他们发现，在例外点处，透射光谱呈“Z”形，具有两个边带，以及一个线宽极窄、近乎平坦的中心带。随着系统接近三阶例外点，中心模的线宽趋于零；而在例外点处，光谱会突然跳变。这些预测表明，系统可能具有更高的灵敏度增强效果，以及参数空间中的非平庸拓扑等丰富物理现象。他们还提出了一种实验方案，通过额外驱动使光子与磁振子实现三模耦合。

Yu等人针对铁磁三层结构中的三阶磁振子例外点，建立了基于宏自旋的朗道-利夫希茨-吉尔伯特方程，其中负阻尼 α对应增益，阻尼为0时为中性，正阻尼 α对应损耗。[212] 由此获得了PT对称 3×3 磁振子羞辱

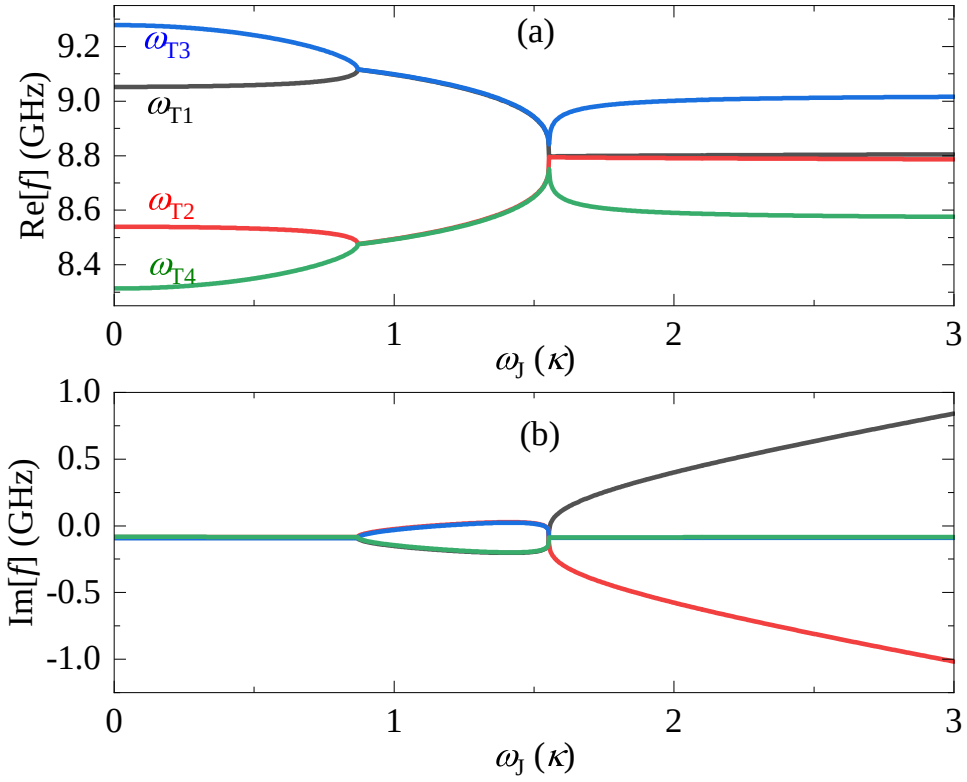


图 20. 对于四个耦合磁振子波导，(a) 实部和 (b) 虚部表示四个本征频率随 ω_J/κ 的变化关系。[211]

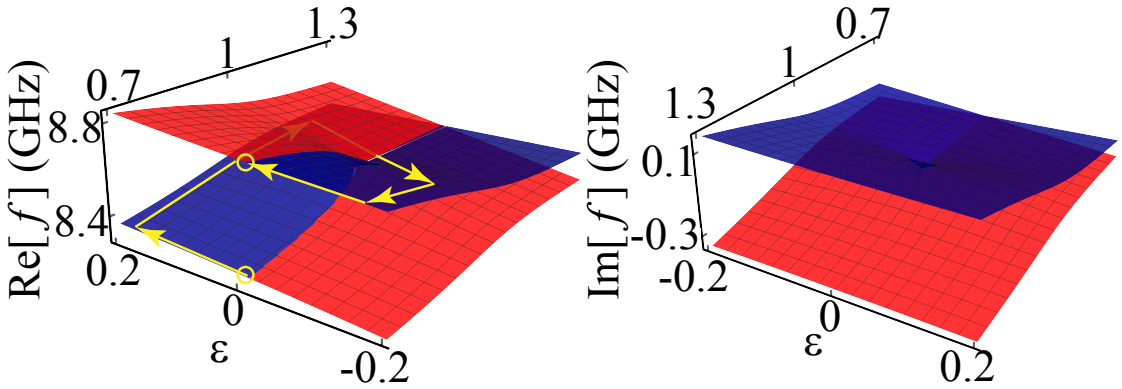


图 21. 对于两个 RKKY耦合磁振子波导，本征频率的实部和虚部随 ω_J 和 ϵ 的变化关系。环绕例外点的环路以黄色环路表示。[211]

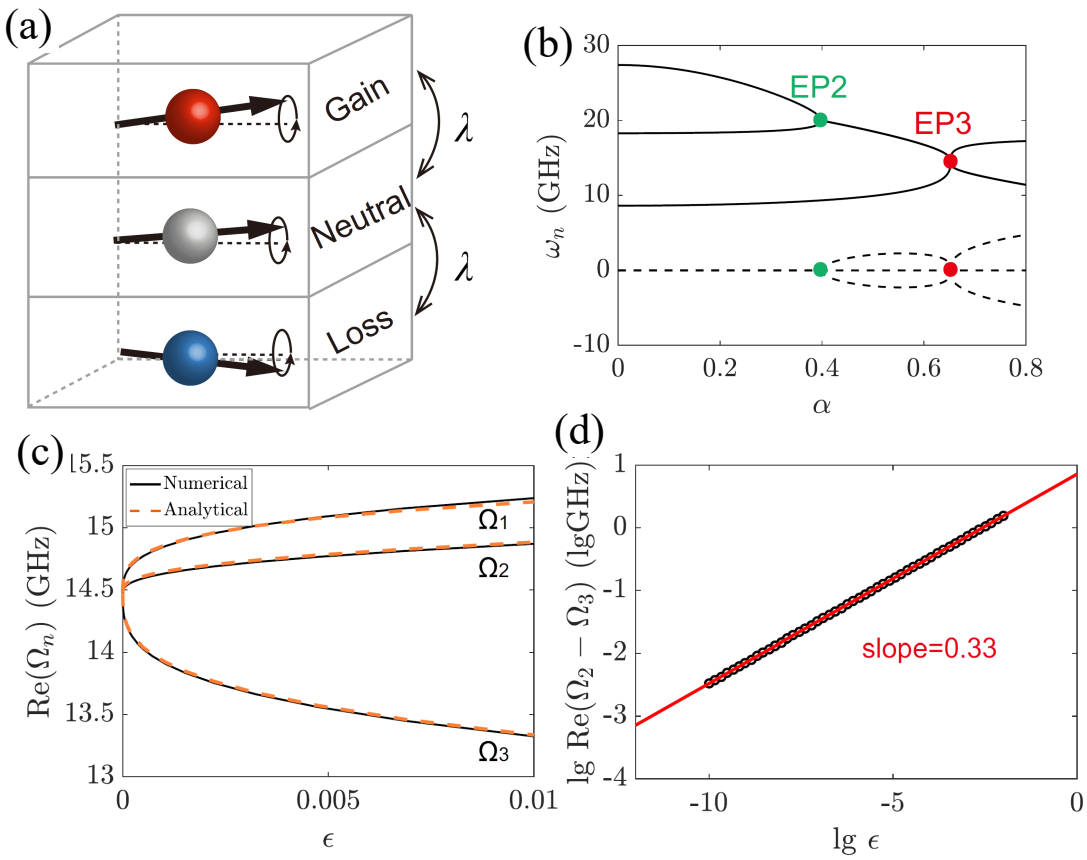


图22. (a) 具有三阶例外点的铁磁三层异质结构示意图。(b) 三层系统的本征频率随常数 α 的变化。(c) 本征频率随扰动 ϵ 的变化。(d) Re($\Omega_2 - \Omega_3$) 的频率分裂对数标度图。[212]

as,

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\omega_{B1}}{1-i\alpha} & -\frac{\omega_{\lambda 2}}{1-i\alpha} & 0 \\ -\omega_{\lambda 1} & \omega_{B2} & -\omega_{\lambda 1} \\ 0 & -\frac{\omega_{\lambda 2}}{1+i\alpha} & \frac{\omega_{B1}}{1+i\alpha} \end{pmatrix}. \tag{49}$$

通过精确平衡吉尔伯特增益 ($+\alpha$) 和损耗 ($-\alpha$)，实现了 PT 对称性。通过调节层间交换常数 λ、外场 B 和 α，作者推导出三阶例外点条件，

$$\begin{aligned} (2\omega_{B1} + \omega_{B2} + \alpha^2\omega_{B2})^2 + 3(1+\alpha^2)\left(2\omega_{\lambda 1}\omega_{\lambda 2} - \omega_{B1}^2 - 2\omega_{B1}\omega_{B2}\right) = 0, \\ (2\omega_{B1} + \omega_{B2} + \alpha^2\omega_{B2})\left(2\omega_{\lambda 1}\omega_{\lambda 2} - \omega_{B1}^2 - 2\omega_{B1}\omega_{B2}\right) + 9(1+\alpha^2)(\omega_{B1}^2\omega_{B2} - 2\omega_{B1}\omega_{\lambda 1}\omega_{\lambda 2}) = 0. \end{aligned} \tag{50}$$

该方程表明，三阶和二阶例外点会在同一系统中出现，见图 22(b)。数值结果揭示了典型的次线性响应：在此过程中，磁振子的

频率分裂尺度在三阶例外点处呈现如下标度（图 22(c-d)），即 $\Delta\Omega_{\mathrm{EP3}} = c\omega_{\lambda 2}\epsilon^{1/3}$，其中扰动参数 ϵ 极小。将模型扩展至实波矢磁振子后，研究绘制了一个 k依赖于...的相图，其中 PT 对称性破缺驱动铁磁到反铁磁转变，从而将伪厄米磁振子学与高阶例外点物理联系起来。[212]

考虑图 18所示的三个耦合波导，可以使 WG1 和 WG3 分别与顶部和底部的硬偏置层发生 RKKY 耦合。两个 PT 间隔层中的相同电荷电流会使 WG1 和 WG3 中分别产生损耗与增益，即 $\mathbf{T}^{1(3)} = \pm\tau(\mathbf{m}_{1(3)} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{m}^{1(3)}))$。带有补偿自旋轨道力矩的中间波导 WG2 与 WG1 和 WG3 均耦合。对于三个耦合波导模型，其磁振子哈密顿量为，[211]

$$H = (1 - i\alpha)\begin{pmatrix} \omega_3 - i\omega_{\mathrm{J}} & -q & 0 \\ -q & \omega_3 & -q \\ 0 & -q & \omega_3 + i\omega_{\mathrm{J}} \end{pmatrix}, \tag{51}$$

是非厄米的，我们定义 $\omega_3 = \omega_{\mathrm{H}} + \omega_{\mathrm{ex}}k^2 + 2q$。该哈密顿量的三个本征频率为 $\omega_{\mathrm{T,\ p}}$

$$\begin{aligned} \omega_{\mathrm{T1}} &= (1 - i\alpha)\omega_3, \\ \omega_{\mathrm{T2}} &= (1 - i\alpha)(\omega_3 + \sqrt{2q^2 - \omega_{\mathrm{J}}^2}), \\ \omega_{\mathrm{T3}} &= (1 - i\alpha)(\omega_3 - \sqrt{2q^2 - \omega_{\mathrm{J}}^2}). \end{aligned} \tag{52}$$

在没有自旋轨道力矩时，即对于 $\omega_{\mathrm{J}} = 0$，本征矢

$$V_{\mathrm{T1}} = A_1(-1, 0, 1),$$

$$V_{\mathrm{T2}} = A_2(1, -\sqrt{2}, 1),$$

and

$$V_{\mathrm{T3}} = A_3(1, \sqrt{2}, 1)$$

描述导引磁振子模的空间分布。将自旋轨道力矩幅度增大至临界值 $\omega_{\mathrm{J}} = \sqrt{2}q$ 时，三个本征频率会合并为同一数值，从而形成三阶例外点；三个本征矢也会在 A_0 处合并为 -1, $i\sqrt{2}$, 1)。

与二阶例外点相比，三阶例外点表现出更高的灵敏度增强。仅对 WG1 施加扰动 ϵ，在例外点 $\omega_{\mathrm{J}} = \sqrt{2}\kappa$ 处，三个本征频率

通过牛顿-普伊瑟级数进行扰动展开，得到

$$\omega_{\mathrm{T1}} \approx (1-i\alpha)q(\frac{\omega_3}{q} + e^{i\pi/3}\epsilon^{1/3} - \frac{i\sqrt{2}}{3}e^{-i\pi/3}\epsilon^{2/3}),$$
$$\omega_{\mathrm{T2}} \approx (1-i\alpha)q(\frac{\omega_3}{q} + e^{-i\pi/3}\epsilon^{1/3} - \frac{i\sqrt{2}}{3}e^{i\pi/3}\epsilon^{2/3}),$$
$$\omega_{\mathrm{T3}} \approx (1-i\alpha)q(\frac{\omega_3}{q} - \epsilon^{1/3} + \frac{i\sqrt{2}}{3}\epsilon^{2/3}).$$

在 $\omega_{\mathrm{T1,\ T2}}$ 和 ω_{T3}之间，频率分裂的实部遵循 ϵ 的立方根关系。例如，

$$\mathrm{Re}[\omega_{\mathrm{T2}} - \omega_{\mathrm{T3}}] \approx (\frac{3-\sqrt{3}\alpha}{2})\epsilon^{1/3},$$

而 ω_{T1} 和 ω_{T2} 的实部之间的分裂量级为 $\epsilon^{2/3}$。扰动因子的这种立方根行为是灵敏度增强的来源。本征频率的实部和虚部都会受到影响，从而导致自旋波波长和衰减明显变化。

还可以检验扰动 ϵ作用于 SOT中性的WG2 时的情形。在这种情况下，本征频率产生的分岔为：[211]

$$\omega_{\mathrm{T1}} \approx (1-i\alpha)q(\frac{\omega_3}{q} - 2^{1/3}e^{i\pi/3}\epsilon^{1/3}),$$
$$\omega_{\mathrm{T2}} \approx (1-i\alpha)q(\frac{\omega_3}{q} + 2^{1/3}\epsilon^{1/3}),$$
$$\omega_{\mathrm{T3}} \approx (1-i\alpha)q(\frac{\omega_3}{q} - 2^{1/3}e^{-i\pi/3}\epsilon^{1/3}).$$

立方根频率分裂发生在 $\omega_{\mathrm{T1,\ T3}}$ 和 ω_{T2}之间。例如，

$$\mathrm{Re}[\omega_{\mathrm{T2}} - \omega_{\mathrm{T1}}] = (\frac{3+\sqrt{3}\alpha}{2^{2/3}})\epsilon^{1/3}.$$

ω_{T1} 和 ω_{T3} 之间的分裂非常小，直接由 α (Re$[\omega_{\mathrm{T3}} - \omega_{\mathrm{T1}}] = 2^{1/3}\sqrt{3}\alpha\epsilon^{1/3}$) 确定。

这些特性也会影响波导中的磁振子传播。在无自旋轨道力矩（SOT） $\omega_{\mathrm{J}} = 0$的情况下，施加于WG1的局部微波场会同时激发三个模式中的传播自旋波。三种不同磁振子模之间的相互作用会导致功率在三个波导之间周期性传输。在例外点（EP）处，WG2（无SOT）中的磁振子功率是WG1和WG3中的两倍。磁振子同时在三个波导中传播。对于同时从WG1和WG3输入的情况，所激发的自旋波振幅会对两个输入之间的相位差变得敏感。与两个相位相同的输入相比

相位相反的输入会激发强得多的自旋波。磁振子振幅对两个输入之间的相位差很敏感。图19所示，这种例外点（EP）处的特性可用于实现灵敏的磁振子逻辑运算。

类似地，在具有四个自由层的系统中，可以识别出一个四阶例外点（四个本征频率合并），并伴有四次根增强。例如，考虑四个耦合的自由层（WG1、WG2、WG3 和 WG4），其中顶部波导 WG1 与一个固定层（通过耦合常数 $\kappa_{\mathrm{b}}=\sqrt{\sqrt{2}-1}q$）以及 WG2（通过耦合常数 $\kappa_{\mathrm{a}}=q$）耦合，~~WG2 通~~过 κ_{b} 与 WG3 耦合，WG3 通过 κ_{a} 与 WG4 耦合，而底部WG4 还通过 κ_{b} 与一个固定层耦合。在这种情况下，“哈密顿量”变为：[211]

$$H_0=(1-i\alpha)\begin{pmatrix}(\omega_4-i\omega_{\mathrm{J}} & -\kappa_{\mathrm{a}} & 0 & 0\\ -\kappa_{\mathrm{a}} & \omega_4 & -\kappa_{\mathrm{b}} & 0\\ 0 & -\kappa_{\mathrm{b}} & \omega_4 & -\kappa_{\mathrm{a}}\\ 0 & 0 & -\kappa_{\mathrm{a}} & \omega_4+i\omega_{\mathrm{J}}\end{pmatrix}. \tag{53}$$

With

$$\omega_4=\omega_{\mathrm{H}}+\omega_{\mathrm{ex}}k^2+\kappa_{\mathrm{a}}+\kappa_{\mathrm{b}}.$$

哈密顿量的四个本征频率 $\omega_{\mathrm{T,\ p}}$ 可表示为

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathrm{T1}}&=(1-i\alpha)(\omega_4+\sqrt{\kappa_{\mathrm{a}}^2+\frac{\kappa_{\mathrm{b}}^2-\omega_{\mathrm{J}}^2}{2}-\sqrt{\kappa_{\mathrm{a}}^2(\kappa_{\mathrm{b}}^2-\omega_{\mathrm{J}}^2)+\frac{(\kappa_{\mathrm{b}}^2+\omega_{\mathrm{J}})^2}{4}}}),\\
\omega_{\mathrm{T2}}&=(1-i\alpha)(\omega_4-\sqrt{\kappa_{\mathrm{a}}^2+\frac{\kappa_{\mathrm{b}}^2-\omega_{\mathrm{J}}^2}{2}-\sqrt{\kappa_{\mathrm{a}}^2(\kappa_{\mathrm{b}}^2-\omega_{\mathrm{J}}^2)+\frac{(\kappa_{\mathrm{b}}^2+\omega_{\mathrm{J}})^2}{4}}}),\\
\omega_{\mathrm{T3}}&=(1-i\alpha)(\omega_4+\sqrt{\kappa_{\mathrm{a}}^2+\frac{\kappa_{\mathrm{b}}^2-\omega_{\mathrm{J}}^2}{2}+\sqrt{\kappa_{\mathrm{a}}^2(\kappa_{\mathrm{b}}^2-\omega_{\mathrm{J}}^2)+\frac{(\kappa_{\mathrm{b}}^2+\omega_{\mathrm{J}})^2}{4}}}),\\
\omega_{\mathrm{T4}}&=(1-i\alpha)(\omega_4-\sqrt{\kappa_{\mathrm{a}}^2+\frac{\kappa_{\mathrm{b}}^2-\omega_{\mathrm{J}}^2}{2}+\sqrt{\kappa_{\mathrm{a}}^2(\kappa_{\mathrm{b}}^2-\omega_{\mathrm{J}}^2)+\frac{(\kappa_{\mathrm{b}}^2+\omega_{\mathrm{J}})^2}{4}}}).
\end{aligned} \tag{54}$$

在

$$\kappa_{\mathrm{a}}=q$$

and

$$\kappa_{\mathrm{b}}=\sqrt{\sqrt{2}-1}q$$

我们发现，当平衡增益/损耗趋近临界值时，四个本征频率中有两个会在同一数值处合并

$$\omega_{\mathrm{J}} = \frac{\sqrt{7}q}{\sqrt{5+3\sqrt{2}}} = 0.87q,$$

意味着 $\omega_{\mathrm{T1}} = \omega_{\mathrm{T3}}$ 和 $\omega_{\mathrm{T2}} = \omega_{\mathrm{T4}}$，表明存在一个二阶例外点。将增益/损耗比提高到更大的临界值

$$\omega_{\mathrm{J}} = \frac{q}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} = 1.55q$$

我们发现四个本征频率在同一数值处同时合并，从而产生一个四阶例外点（图 20）。

为分析四阶例外点处的灵敏度增强，我们在波导中施加一个扰动 ϵq（其中 $\epsilon \ll 1$）。随着 ϵ增大，四个本征频率的实部明显分裂。通过分析 Re$[\omega_{\mathrm{T1}} - \omega_{\mathrm{T4}}]$的对数行为，可识别出斜率为 1/4，证实了例外点处的四次根增强（图 20）。

例外点处模式的合并可用于模式管理。利用例外点处色散的拓扑结构，绕例外点一周即可在不同模式之间转移能量。[17, 213] 例如，对于双层结构，两个本征频率（光学和声学磁振子模式）在例外点处重合，并对磁扰动呈现平方根响应。例外点附近呈现出自交黎曼面的特征结构（图 21）。如果 ϵ和 ω_{J} 作为一个包围例外点的单一闭合回路进行变化，本征值的平滑演化会形成一条从一个片层出发、最终到达另一片层的轨迹，这意味着不同磁振子模式之间发生了能量转移。要实现完全的拓扑转移，ϵ和 ω_{J} 的振幅必须足够大。扫描回路必须包含例外点，且回路持续时间应足够长，以实现这一转变。

Glada和Vinokur展示了单个经典自旋在面内场（23(a)）和Slonczewski型自旋转矩 h_{x}，h_{y}作用下的例外点环绕动力学，并将其作为PT对称哈密顿量，β [214]

$$H_0 = h_{\mathrm{x}} S_{\mathrm{x}} + (h_{\mathrm{y}} + i\beta) S_{\mathrm{y}}, \tag{55}$$

而光谱的表达式与二能级系统相同，

$$E_{1,2} = \pm\sqrt{h_{\mathrm{x}}^2 + (h_{\mathrm{y}} + i\beta)^2}. \tag{56}$$

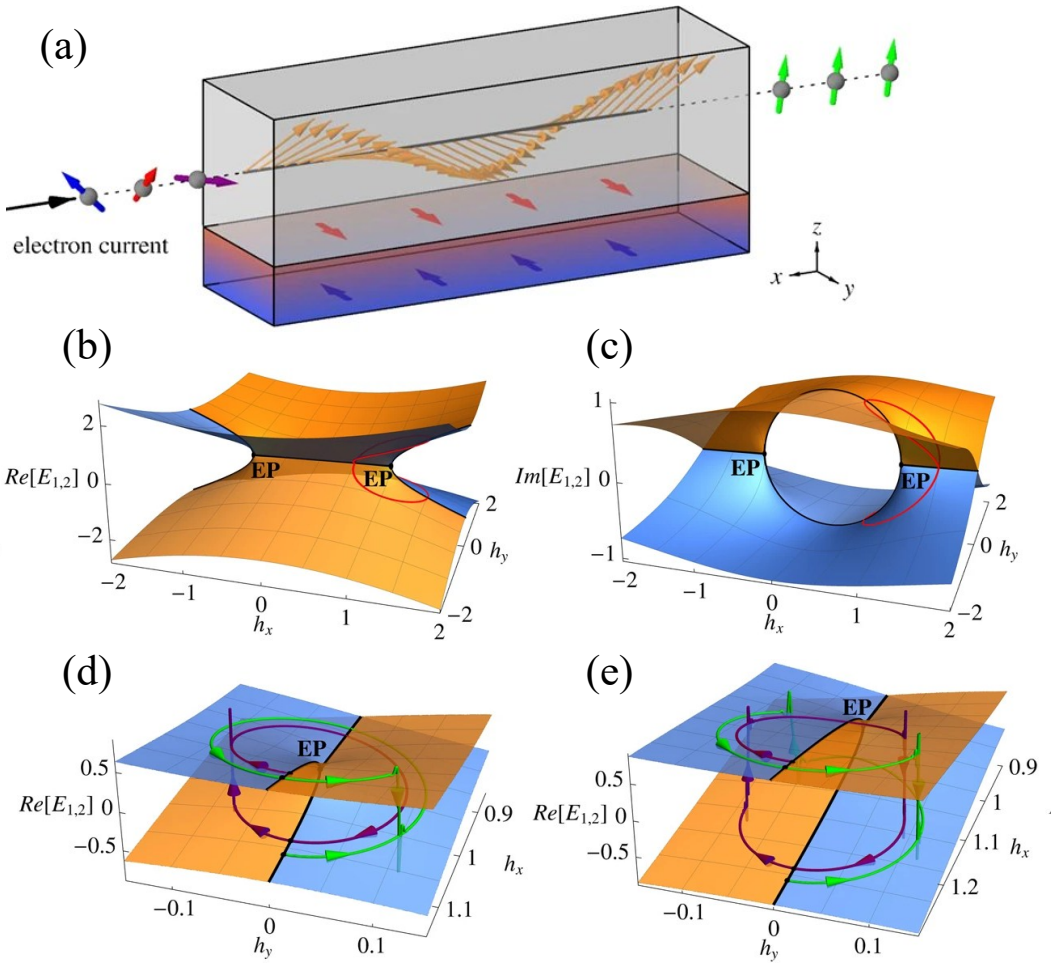


图23. (a) 含有磁振子和自旋转矩的磁性层示意图。(b-c) 本征谱的实部和虚部。(d-e) 演化过程：(d) 围绕单个例外点；(e) 在例外点附近。[214]

如图 23(b-c) 所示，光谱中产生了两个二阶例外点。利用 SU(2)相干态形式，他们推导出了自旋运动方程，

$$\dot{z} = i\frac{1+\bar{z}z}{2S}\frac{\partial H_0(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}}. \tag{57}$$

通过这种方式，可以在控制参数沿环路绕行例外点时，以数值方式追踪自旋轨迹，如图 23(d-e)所示。以有限速度动态绕行会迫使黎曼片之间发生非绝热态翻转跃迁$E_{1,\ 2}$，从而产生手性且依赖方向的最终自旋取向。这相当于一种非互易磁振子/自旋电流滤波器，其效率受例外点的拓扑保护，并可通过和回路频率进行调节。

实验中已观察到一些灵敏度增强的迹象。Zhang等人发现，具有例外点的自旋系综/腔不受泵浦的自旋系综影响，且他们还指出，频率分裂（略微偏离例外点时）可用于检测系统的变化。[185]

I. 伪厄米性诱导的非互易性

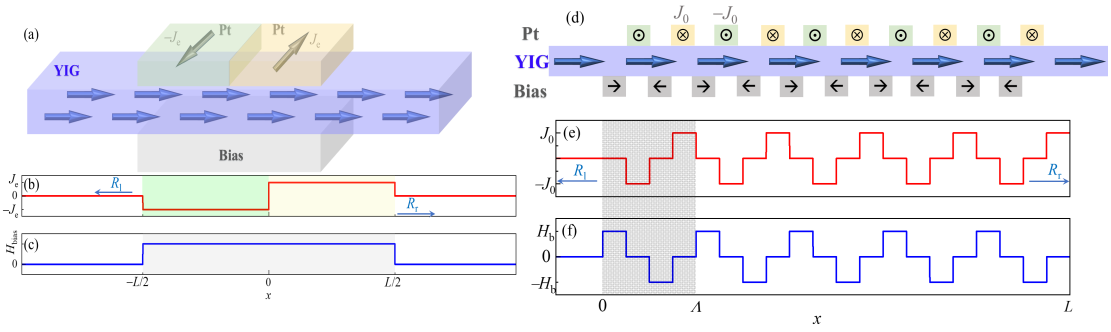


图24. 具有（a）单个和（d）周期性增益与损耗区域的磁振子波导示意图，蓝色箭头表示剩余磁化。相邻重金属层中的反平行电荷电流导致磁振子增益与损耗。电流（b、e）和偏置场（c、f）的空间分布。箭头表示从左侧（右侧）入射的反射波，其反射系数为 R_{l} （R_{r}）。[183]

伪厄米磁振子学的性质可用于实现单向隐身。通过利用自旋轨道力矩（SOT）和偏置场，在波导中构造电可调的PT对称势，该系统将变为伪厄米系统。在例外点（EP）处——该点可通过施加的电场/电流主动调节——该势对于从一个方向入射的磁振子可以变得不可见，同时反射从另一方向入射的磁振子。[183]

为展示电可重构的单向隐身磁振子势，采用具有空间变化增益与损耗的单个磁振子波导，如图24（a）所示。最初沿 $+x$ 方向磁化的波导连接到若干彼此电隔离的重金属层。金属层中的电荷电流密度J_{c}产生自旋轨道力矩（SOT）$\mathbf{T} = \tau\mathbf{m} \times （\mathbf{x} \times \mathbf{m}）$。通过使相邻重金属层中的电荷电流空间变化且方向相反，SOT 导致局域

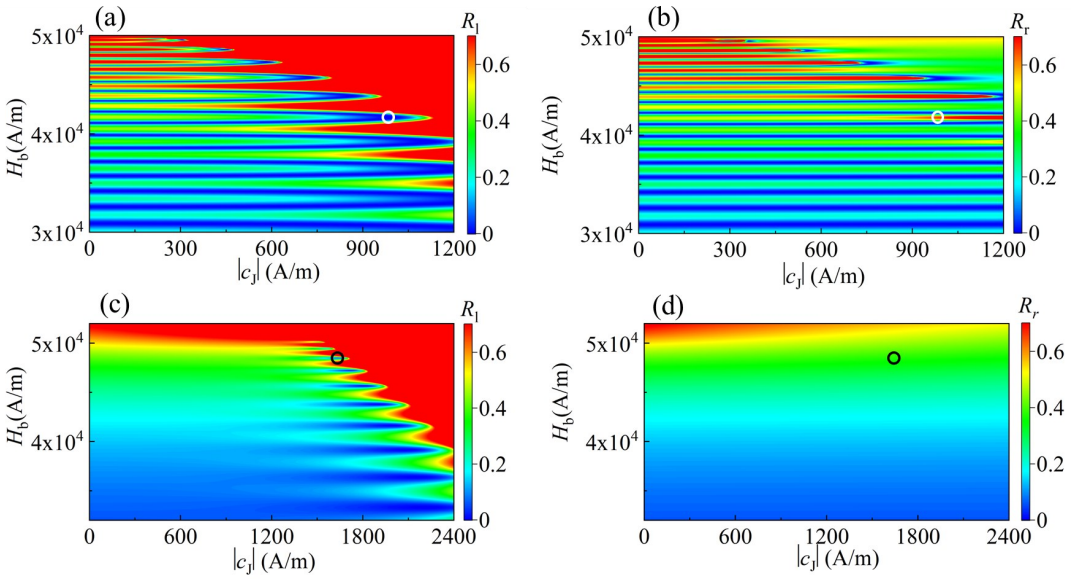


图 25. 对于单个 PT对称势， R_l 和 R_r 随 c_J 和偏置场 H_b的变化，且无残余阻尼 $\alpha = 0$ （a-b）；或者在 α 有限时（c-d）。[183]

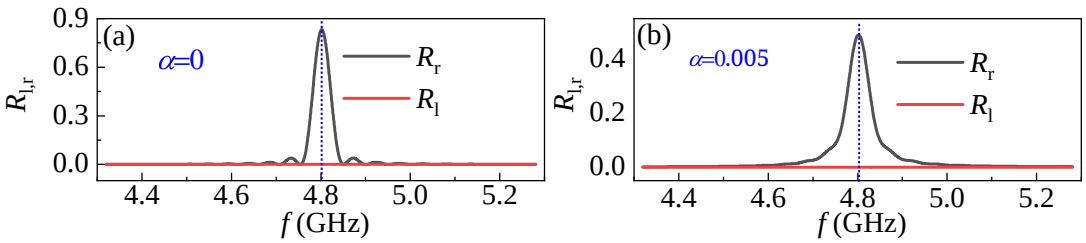


图 26. 反射系数 R_l 和 R_r 随磁振子频率 f 的变化： （a） $\alpha = 0$ 和$\alpha = 0.005$。[183]

化磁振子增益（损耗）区域的形成。同时，将偏置层连接到波导上，通过与局域势的层间交换耦合产生偏置场。

为了实现单一的PT对称势，采用电流分布（左侧区域$J(-\frac{L}{2} \leq x < 0) = -J_e$，右侧区域 $J(0 \leq x \leq \frac{L}{2}) = J_e$）来驱动对称的自旋轨道力矩诱导增益与损耗，其中偏置场 H_b 位于与（$-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$）相同的区域内。定义波函数 $\psi = \delta m_y - i\delta m_z$后，在本文的线性假设下，LLG方程可改写为亥姆霍兹方程的形式，

$$\psi''(x) + \left[\frac{\omega - \omega_H - \omega_b(x)}{\omega_k} + i\frac{\omega_J(x)}{\omega_k}\right]\psi(x) = 0. \tag{58}$$

下面引入相关概念:

$$\omega_{\mathrm{k}}=\frac{2(1-i\alpha)\gamma A_{\mathrm{ex}}}{\mu_0 M_{\mathrm{s}}(1+\alpha^2)},$$

$$\omega_{\mathrm{J}}(x)=\frac{(1-i\alpha)\tau(x)}{1+\alpha^2},$$

$$\omega_{\mathrm{H}}=\frac{(1-i\alpha)\gamma H_0}{1+\alpha^2},$$

and

$$\omega_{\mathrm{b}}(x)=\frac{(1-i\alpha)\gamma H_{\mathrm{b}}(x)}{1+\alpha^2}.$$

在非对称电流 $c_{\mathrm{J}}(x)$ 和对称偏置场 $H_{\mathrm{b}}(x)$作用下，亥姆霍兹方程的系数

$$O_{\mathrm{H}}=\frac{\omega-\omega_{\mathrm{H}}-\omega_{\mathrm{b}}}{\omega_{\mathrm{k}}}+1\frac{\omega_{\mathrm{J}}}{\omega_{\mathrm{k}}}$$

在 $\alpha\to 0$极限下满足 PT 对称条件（O_{H}^{l}）$^{*}=O_{\mathrm{H}}^{r}$，其中 O_{H}^{l} 和 O_{H}^{r}分别表示左侧和右侧区域中的 O_{H}。

单向隐身定义为从左侧（右侧）入射时的无反射散射，可通过调节 $|\tau|$ 和 H_{b}来实现。忽略吉尔伯特阻尼时（$\alpha=0$）（赝厄米情形），可以精确确定单向隐身条件，如图25所示。这些单向隐身条件标志着两个本征值

$$[1\pm\sqrt{1-M_{11}M_{22}}]/M_{22}$$

发生合并，此时 PT对称势的散射矩阵出现自发 PT 对称性破缺点，即例外点。有限的 $\alpha\neq 0$ 会对伪厄米性产生轻微影响，但仍可观察到近似单向隐身，图25中的结果证实了这一点。

通过周期性PT对称势，可以在布拉格点附近实现单向隐身。例如，我们设置一个PT对称周期性结构，其

$$\tau(x)=-c_{\mathrm{A}}\sin(2k_{\mathrm{J}}x),$$

and

$$H_{\mathrm{b}}(x)=H_{\mathrm{bA}}\cos(2k_{\mathrm{J}}x)$$

位于 $0 \leq x \leq L$ 区域内。在布拉格点 $k_{\mathrm{x}} \approx k_{\mathrm{J}}$ 附近，此时传输矩阵 M 可写为

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\beta L) + \frac{i\delta_{\mathrm{k}} \sin(\beta L)}{\beta} & -i\frac{(\kappa+\xi)\sin(\beta L)}{\beta} \\ i\frac{(\kappa-\xi)\sin(\beta L)}{\beta} & \cos(\beta L) - \frac{i\delta_{\mathrm{k}} \sin(\beta L)}{\beta} \end{pmatrix}. \tag{59}$$

With

$$\kappa = \omega_{\mathrm{bA}}/\omega_{\mathrm{k}},$$
$$\omega_{\mathrm{bA}} = \frac{(1-i\alpha)\gamma H_{\mathrm{bA}}}{1+\alpha^2},$$
$$\xi = \omega_{\mathrm{JA}}/\omega_{\mathrm{k}},$$
$$\omega_{\mathrm{JA}} = \frac{(1-i\alpha)\gamma c_{\mathrm{A}}}{1+\alpha^2}$$

,

$$\delta_{\mathrm{k}} = k_0 - k_{\mathrm{J}},$$

and

$$\beta = \sqrt{\delta_{\mathrm{k}}^2 + \xi^2 - \kappa^2}.$$

根据 M ，Can 可以通过以下公式确定左、右界面的反射系数

$$R_{\mathrm{l}} = |-e^{ik_0 L} M_{21}/M_{22}|^2$$

and

$$R_{\mathrm{r}} = |e^{ik_0 L} M_{12}/M_{22}|^2$$

.

没有电流项（$\xi = 0$）时，可恢复周期性布拉格结构中的标准反射，且周期势处的磁振子反射是互易的。含有 $\xi \neq 0$ 的周期性自旋轨道力矩会导致相反方向的反射不对称。在 $\kappa = \pm\xi$ 处，这种不对称性最为显著，从而导致单向隐身。对于 $\kappa = \xi$， R_{l} 始终为 0，而 R_{r} 在布拉格点 $\delta_{\mathrm{k}} = 0$处达到最大值，对应布拉格点 $k_0 = k_{\mathrm{J}}$。在布拉格点附近，R_{r} 会出现数个较弱的波动，如图 26 所示。反转偏置场或电流（$H_{\mathrm{bA}} = -c_{\mathrm{A}}$）后，右侧入射波将无反射（$R_{\mathrm{r}} = 0$ 和 $R_{\mathrm{l}} \neq 0$）。与上述单个 PT对称区域不同，有限的吉尔伯特阻尼 α 不会影响单向隐身条件。对于 $H_{\mathrm{bA}} = +(-)\, c_{\mathrm{A}}$，无论 α如何变化， $\kappa = +(-)$ ξ 始终都能满足。不过，周期性PT对称

区域中的单向隐身点标志着散射矩阵两个本征值的合并，代表系统的例外点。将PT对称单向隐身势置于环中，可以在铁磁体和反铁磁体中产生磁振子轨道角动量（OAM）[215, 216]。磁环中的轨道手性磁振子态可由电流触发；预计磁涡旋中的磁振子也会产生类似效应。[217]

V. 结论与未来方向

本文旨在概述伪厄米物理在磁振子系统中的实现及其当前进展。这是一个充满活力且迅速发展的研究领域。从迄今取得的成果可以看出，伪厄米概念为通过外场和环境效应操控磁振子系统提供了新工具，这些因素能够调节磁振子振幅中的增益与损耗。在基础层面，磁性/磁振子平台有望构成一种内禀非线性系统，而且非线性可通过外场加以控制。例如，强磁场能够驱动大振幅磁化振荡，使其超出线性区间。对金属铁磁体施加较大电压，也可能使磁化发生翻转。另一个特点是频率范围广泛，从反铁磁体的太赫兹到铁磁体的吉赫兹。实现拓扑PT对称磁振子系统也切实可行。具有拓扑性质的磁振子晶体是磁振子学中已有充分研究的概念，但迄今针对该领域中PT对称性和反PT对称性的研究仍然较少。伪厄米磁振子学面临的挑战在于开发磁振子系统，使磁振子密度中的阻尼与增益能够按需进行精确设计并实现时空可控。将YIG等低阻尼材料与可提供强自旋轨道力矩（重金属）或其他功能的材料集成，同时保持高质量界面和磁性层的低本征阻尼，仍然是一项挑战。探索新型材料平台（例如二维范德华磁体）前景广阔，但要实现可靠的磁振子输运和增益-损耗工程，仍需进一步发展。此外，利用非厄米磁振子学中的损耗作用（例如耦合损耗和更多损耗），可能为通过纯损耗操控磁振子增添新工具。非线性区间的研究较少，涉及不同PT对称区间中的多重磁振子-磁振子散射。相关研究可能带来新的动力学区间，例如

双稳态、自组织现象、混沌、增强的频率梳生成，以及磁振子神经形态计算的新范式。未来还可拓展至一维耦合系统之外，探索二维和三维磁振子晶体中的非厄米物理，并研究其与等离激元及超材料的耦合。这将有助于研究高阶例外点、例外面与例外线、高阶趋肤效应（角局域/铰链局域），以及磁光PT对称装置。同样，探索并利用混合磁振子平台，包括腔/电路磁振子学、磁振子力学和磁振子-量子比特系统，将为设计复杂哈密顿量、控制相互作用、调节参数及进入不同物理区间提供更多灵活性，从而有助于实现复杂的非厄米功能。

作者贡献

两位作者均对本研究作出了贡献。

致谢

本研究得到德国科学基金会项目（编号：465098690）、国家自然科学基金委员会（资助项目编号：T2495212、12274469、12174452 和 12074437）以及湖南省自然科学基金（资助项目编号：2025JJ20005）的支持。我们感谢 G.-h, Guo、C.-L. Jia、H. Jing 和 D. Schulz，感谢他们围绕本文主题的各个方面开展的多次讨论与合作。

财务披露

无。

利益冲突

作者声明不存在任何潜在利益冲突。

数据可用性声明

如有合理请求，可向作者获取有关本文内容的更多详情。

---

[1] G. Gamow，《原子核量子理论》，《物理学杂志》51，204（1928年）。[2] H. Feshbach、C. E. Porter 和 V. F. Weisskopf，《中子核反应模型》，Phys. Rev. 96，448（1954年）。[3] G. Lindblad，《量子动力学半群的生成元》，Commun.Math. Phys. 48，119（1976年）。[4] C. M. Bender 和 S. Boettcher，《具有 PT 对称性的非厄米哈密顿量的实谱》，《物理评论快报》80，5243（1998年）。[5] C. M. Bender，《理解非厄米哈密顿量》，Rep. Prog. Phys. 70，947（2007年）。[6] A. Das，《伪厄米量子力学》，J. Phys.: Conf. Ser. 287，012002（2011年）。[7] C. M. Bender、B. K. Berntson、D. Parker 和 E. Samuel，《简单机械系统中的 PT 相变观测》，Am. J. Phys. 81，173（2013年）。[8] X. Zhu、H. Ramezani、C. Shi、J. Zhu 和 X. Zhang，《$\mathcal{PT}$对称声学》，Phys. Rev. X 4，031042（2014年）。[9] H. Zhao 和 L. Feng，《宇称–时间对称光子学》，National Science Review 5，183（2018年）。[10] R. Fleury、D. Sounas 和 A. Al`u，《基于宇称–时间对称性的隐形声学传感器》，《自然·通讯》6，5905（2015年）。[11] L. Feng、Y.-L. Xu、W. S. Fegadolli、M.-H. Lu、J. E. B. Oliveira、V. R. Almeida、Y.-F. Chen 和 A. Scherer，《光学频率下单向无反射宇称–时间超材料的实验证明》，Nature Mater. 12，108（2013年）。[12] R. El-Ganainy、K. G. Makris、M. Khajavikhan、Z. H. Musslimani、S. Rotter 和 D. N. Christodoulides，《非厄米物理与 PT 对称性》，《自然·物理》14，11（2018年）。[13] C. E. R¨uter、K. G. Makris、R. El-Ganainy、D. N. Christodoulides、M. Segev 和 D. Kip，《光学中的宇称–时间对称性观测》，《自然·物理》6，192（2010年）。

[14] J. Schindler、A. Li、M. C. Zheng、F. M. Ellis 和 T. Kottos, 《具有 pt对称性的有源 LRC 电路实验研究》, 《物理评论A》84，040101（2011年）。[15] J. Schindler、Z. Lin、J. M. Lee、H. Ramezani、F. M. Ellis 和 T. Kottos, 《PT 对称电子学》, 《物理学杂志A：数学与理论》45，444029（2012年）。[16] W. Chen、S. Kaya Ozdemir、G. Zhao、J. Wiersig 和 L. Yang, 《例外点增强光学微腔中的传感》, 《自然》548，192（2017年）。[17] H. Hodaei、A. U. Hassan、S. Wittek、H. Garcia-Gracia、R. El-Ganainy、D. N. Christodoulides 和 M. Khajavikhan, 《高阶例外点处的灵敏度增强》, 《自然》548，187（2017年）。[18] R. Kononchuk、J. Cai、F. Ellis、R. Thevamaran 和 T. Kottos, 《具有增强信噪比的基于例外点的加速度计》, 《自然》607，697（2022年）。[19] J. Wiersig, 《利用例外点增强频率与能量劈裂检测的灵敏度：在单粒子检测微腔传感器中的应用》, 《物理评论快报》112，203901（2014年）。[20] L. Feng、Z. J. Wong、R.-M. Ma、Y. Wang 和 X. Zhang, 《通过宇称–时间对称性破缺实现的单模激光器》, 《科学》346，972（2014年）。[21] M.-A. Miri 和 A. Al`u, 《光学与光子学中的例外点》, 《科学》363，eaar7709（2019年）。[22] M. S. Livsic、N. Kravitsky、A. S. Markus 和 V. Vinnikov, 《交换非自伴算子理论》（施普林格，多德雷赫特，1995年）。[23] K. Schm¨udgen, 《希尔伯特空间上的无界自伴算子》（施普林格，多德雷赫特，2012年）。[24] L. N. Trefethen 和 M. Embree, 《谱与伪谱》（普林斯顿大学出版社，美国新泽西州普林斯顿，2005年）。[25] F. L. Bauer 和 C. T. Fike, 《范数与排斥定理》, 《数值数学》2，137（1960年）。[26] K. Petermann, 《具有增益诱导波导的双异质结构注入激光器的计算自发辐射因子》, 《IEEE量子电子学杂志》15，566（1979年）。[27] A. E. Siegman, 《非厄米光学系统中的过量自发辐射。I. 激光放大器》, 《物理评论A》39，1253（1989年）。

[28] A. M. van der Lee、N. J. van Druten、A. L. Mieremet、M. A. van Eijkelenborg、A. M. Lindberg、M. P. van Exter 和 J. P. Woerdman，非正交偏振模式导致的过量量子噪声，Phys. Rev. Lett. 79, 4357 (1997).[29] H. Schomerus，介电微谐振器中模式非正交性导致的过量量子噪声，Phys. Rev. A 79, 061801 (2009).[30] J. Wiersig，例外点附近的彼得曼因子与相位刚性，Phys. Rev. Res. 5, 033042 (2023).[31] K. Ding、G. Ma、M. Xiao、Z. Q. Zhang 和 C. T. Chan，多个例外点的出现、合并及拓扑性质与其实验实现，Phys. Rev. X 6, 021007 (2016).[32] S. A. van Langen、P. W. Brouwer 和 C. W. J. Beenakker，时间反演对称性部分破缺的量子混沌系统中的波动相位刚性，Phys. Rev. E 55, R1 (1997).[33] R. Jaiswal、A. Banerjee 和 A. Narayan，利用牛顿多边形表征和调控例外点，New J. Phys. 25, 033014 (2023).[34] A. MOSTAFAZADEH，量子力学的伪厄米表述，现代物理几何方法国际期刊 07, 1191 (2010).[35] F. Scholtz、H. Geyer 和 F. Hahne，量子力学中的准厄米算子与变分原理，物理年鉴 213, 74 (1992).[36] Z. Lin、H. Ramezani、T. Eichelkraut、T. Kottos、H. Cao 和 D. N. Christodoulides，由 $\mathcal{PT}$对称周期结构诱导的单向隐身，Phys. Rev. Lett. 106, 213901 (2011).[37] M.-N. Zhang、L. Dong、L.-F. Wang 和 Q.-A. Huang，例外点增强硅微机械谐振器的传感能力，微系统与纳米工程 10, 12 (2024).[38] H. Hodaei、M.-A. Miri、M. Heinrich、D. N. Christodoulides 和 M. Khajavikhan，宇称-时间对称微环激光器，《科学》346, 975 (2014).[39] L. Feng、R. El-Ganainy 和 L. Ge，基于宇称-时间对称性的非厄米光子学，自然·光子学 11, 752 (2017).[40] A. Guo、G. J. Salamo、D. Duchesne、R. Morandotti、M. Volatier-Ravat、V. Aimez、G. A. Siviloglou 和 D. N. Christodoulides，复光学势中的 $\mathcal{PT}$对称性破缺观测，《物理评论快报》103, 093902 (2009).

[41] Z. Lin、A. Pick、M. Lonˇcar 和 A. W. Rodriguez，逆向设计光子晶体中三阶狄拉克例外点处自发辐射增强，《物理评论快报》117, 107402 (2016).[42] B. Peng、S. K. Ozdemir、F. Lei、F. Monifi、M. Gianfreda、G. L. Long、S. Fan、F. Nori、C. M. Bender 和 L. Yang，宇称-时间对称回音壁微腔，《自然·物理》10, 394 (2014).[43] A. Mostafazadeh，隐身与 pt 对称性，《物理评论A》87, 012103 (2013).[44] H. Ramezani、T. Kottos、R. El-Ganainy 和 D. N. Christodoulides，单向非线性$\mathcal{PT}$对称光学结构，《物理评论A》82, 043803 (2010).[45] K. N. Reddy 和 S. D. Gupta，腔控光谱奇异点，《光学快报》39, 4595 (2014).[46] X. Zhou 和 Y. D. Chong，耦合微腔中的PT对称破缺与非线性光隔离，《光学快报》24, 6916 (2016).[47] B. Yang、X. Luo、Q. Hu 和 X. Yu，周期调制非线性光耦合器中宇称-时间对称性的精确控制，《物理评论A》94, 043828 (2016).[48] M. Chitsazi、H. Li、F. M. Ellis 和 T. Kottos，弗洛凯 $\mathcal{PT}$对称系统的实验实现，《物理评论快报》119, 093901 (2017).[49] W. Mao、F. Li、Q. Zhang、W. Xu、K. M. Awan 和 L. Yang，空间啁啾弗洛凯宇称-时间对称光子学中的片上可重构传输，《科学进展》11, eadu4653 (2025).[50] R. Driben 和 B. A. Malomed，宇称-时间对称耦合器中孤子的稳定性，《光学快报》36, 4323 (2011).[51] M. Wimmer、A. Regensburger、M.-A. Miri、C. Bersch、D. N. Christodoulides 和 U. Peschel，PT对称晶格中光学孤子的观测，《自然·通讯》6, 7782 (2015).[52]A. Regensburger、C. Bersch、M.-A. Miri、G. Onishchukov、D. N. Christodoulides 和 U. Peschel，宇称-时间合成光子晶格，《自然》488, 167 (2012).[53] J. Christensen、M. R. Haberman、A. Srivastava、G. Huang 和 G. Shmuel，非厄米弹性动力学展望，《应用物理快报》125, 230501 (2024).[54] Z. Gu、H. Gao、P.-C. Cao、T. Liu、X.-F. Zhu 和 J. Zhu，非厄米声学系统中的声波控制，《物理评论应用》16, 057001 (2021).

[55] S. Tagouegni、F. Fotsa-Ngaffo 和 A. Kenfack-Jiotsa，无增益材料的宇称-时间对称电子二聚体，《理论物理通讯》75，115101（2023年）。[56] Y. Choi、C. Hahn、J. W. Yoon 和 S. H. Song，补充说明：电路谐振器中反PT对称例外点和能量差守恒动力学的观测，《自然·通讯》10，2432（2019年）。[57] P. R. Charumathi 和 K. Senthilnathan，揭示PT对称性：在超材料中的应用，《等离激元学》10.1007/s11468-024-02414-1（2024年）。[58] X. Ni、S. Yves、A. Krasnok 和 A. Al`u，拓扑超材料，《化学评论》123，7585（2023年）。[59] H. Alaeian 和 J. A. Dionne，宇称 - 时间对称等离激元超材料，《物理评论 A 》 89，033829 （ 2014 年）。[60] H. Wang、J. Zhong 和 S. Fan，非厄米光子能带绕数与趋肤效应：教程，《先进光学与光子学》16，659（2024年）。[61] Y. Geng 和 B. Yang，非厄米理想维尔光子超材料与偏振-动量分辨超高吸收，《光学快报》49，6641（2024年）。[62] W. Xu、W. J. Padilla 和 S. Sonkusale，通过嵌入基于有源晶体管的负微分电阻电路实现超材料中的损耗补偿，《光学快报》20，22406（2012年）。[63] Y. Chen、X. Li、C. Scheibner、V. Vitelli 和 G. Huang，利用奇微极弹性实现有源超材料，《自然·通讯》12，5935（2021年）。[64] Y. Fang、T. Kottos 和 R. Thevamaran，具有展开谱对称性的PT对称超材料中例外点出现的普适路径，《新物理学杂志》23，063079（2021年）。[65] V. Achilleos、G. Theocharis、O. Richoux 和 V. Pagneux，非厄米声学超材料：例外点在吸声中的作用，《物理评论B》95，144303（2017年）。[66] X. Wen、X. Zhu、A. Fan、W. Y. Tam、J. Zhu、H. W. Wu、F. Lemoult、M. Fink 和 J. Li，利用声学非厄米时空变化超材料实现单向放大，《通讯物理》5，18（2022年）。[67] D. Zhou 和 J. Zhang，具有奇弹性的非厄米拓扑超材料，《物理评论研究》2，023173（2020年）。

[68] N. Lazarides 和 G. P. Tsironis， $\mathcal{PT}$对称非线性超材料中的增益驱动离散呼吸子，《物理评论快报》110，053901（2013年）。[69] A. V. Chumak、V. I. Vasyuchka、A. A. Serga 和 B. Hillebrands，磁振子自旋电子学，《自然·物理》11，453（2015年）。[70] B. Flebus、D. Grundler、B. Rana、Y. Otani、I. Barsukov、A. Barman、G. Gubbiotti、P. Lan- deros、J. Akerman、U. Ebels、P. Pirro、V. E. Demidov、K. Schultheiss、G. Csaba、Q. Wang、F. Ciubotaru、D. E. Nikonov、P. Che、R. Hertel、T. Ono、D. Afanasiev、J. Mentink、T. Rasing、B. Hillebrands、S. V. Kusminskiy、W. Zhang、C. R. Du、A. Finco、T. van der Sar、Y. K. Luo、Y. Shiota、J. Sklenar、T. Yu 和 J. Rao，2024年磁振子学路线图，《物理学杂志：凝聚态物质》36，363501（2024年）。[71] A. A. Serga、A. V. Chumak 和 B. Hillebrands，钇铁石榴石磁振子学，《应用物理学杂志D》43，264002（2010年）。[72] P. Pirro、V. I. Vasyuchka、A. A. Serga 和 B. Hillebrands，相干磁振子学进展，《自然·材料》6，1114（2021年）。[73] V. V. Kruglyak、S. O. Demokritov 和 D. Grundler，磁振子学，《应用物理学杂志D》43，264001（2010年）。[74]S. O. Demokritov 和 A. N. Slavin，磁振子学：从基础到应用（施普林格出版社，柏林-海德堡，2013年）。[75] S. M. Rezende，磁振子学基础（施普林格，Cham，2020年）。[76] N. Majlis，磁学量子理论，第2版（WORLD SCIENTIFIC，2007年）。[77] D. D. S. Anil Prabhakar，自旋波理论与应用（施普林格，2009年）。[78] B. Hillebrands 和 K. Ounadjela，受限磁结构中的自旋动力学 I（施普林格科学与商业媒体，2003年）。[79] A. V. Chumak、P. Kabos、M. Wu、C. Abert、C. Adelmann、A. O. Adeyeye、J. ̈Akerman、F. G. Aliev、A. Anane、A. Awad、C. H. Back、A. Barman、G. E. W. Bauer、M. Becherer、E. N. Be- ginin、V. A. S. V. Bittencourt、Y. M. Blanter、P. Bortolotti、I. Boventer、D. A. Bozhko、S. A. Bunyaev、J. J. Carmiggelt、R. R. Cheenikundil、F. Ciubotaru、S. Cotofana、G. Csaba、O. V. Dobrovolskiy、C. Dubs、M. Elyasi、K. G. Fripp、H. Fulara、I. A. Golovchanskiy、C. Gonzalez- Ballestero、P. Graczyk、D. Grundler、P. Gruszecki、G. Gubbiotti、K. Guslienko、A. Haldar、S. Hamdioui、R. Hertel、B. Hillebrands、T. Hioki、A. Houshang、C.-M. Hu、H. Huebl、M. Huth、E. Iacocca、M. B. Jungfleisch、G. N. Kakazei、A. Khitun、R. Khymyn、T. Kikkawa、M. Kl ̈aui、

O. Klein, J. W. K-los, S. Knauer, S. Koraltan, M. Kostylev, M. Krawczyk, I. N. Krivorotov, V. V. Kruglyak, D. Lachance-Quirion, S. Ladak, R. Lebrun, Y. Li, M. Lindner, R. Macˆedo, S. Mayr, G. A. Melkov, S. Mieszczak, Y. Nakamura, H. T. Nembach, A. A. Nikitin, S. A. Niki- tov, V. Novosad, J. A. Ot´alora, Y. Otani, A. Papp, B. Pigeau, P. Pirro, W. Porod, F. Porrati, H. Qin, B. Rana, T. Reimann, F. Riente, O. Romero-Isart, A. Ross, A. V. Sadovnikov, A. R. Safin, E. Saitoh, G. Schmidt, H. Schultheiss, K. Schultheiss, A. A. Serga, S. Sharma, J. M. Shaw, D. Suess, O. Surzhenko, K. Szulc, T. Taniguchi, M. Urb´ anek, K. Usami, A. B. Usti- nov, T. van der Sar, S. van Dijken, V. I. Vasyuchka, R. Verba, S. V. Kusminskiy, Q. Wang, M. Weides, M. Weiler, S. Wintz, S. P. Wolski, and X. Zhang, 《磁学进展：自旋波计算路线图》，IEEE《磁学汇刊》58，1（2022）。[80] A. Barman, G. Gubbiotti, S. Ladak, A. O. Adeyeye, M. Krawczyk, J. Gr¨afe, C. Adelmann, S. Cotofana, A. Naeemi, V. I. Vasyuchka, B. Hillebrands, S. A. Nikitov, H. Yu, D. Grundler, A. V. Sadovnikov, A. A. Grachev, S. E. Sheshukova, J.-Y. Duquesne, M. Marangolo, G. Csaba, W. Porod, V. E. Demidov, S. Urazhdin, S. O. Demokritov, E. Albisetti, D. Petti, R. Bertacco, H. Schultheiss, V. V. Kruglyak, V. D. Poimanov, S. Sahoo, J. Sinha, H. Yang, M. M¨unzenberg, T. Moriyama, S. Mizukami, P. Landeros, R. A. Gallardo, G. Carlotti, J.-V. Kim, R. L. Stamps, R. E. Camley, B. Rana, Y. Otani, W. Yu, T. Yu, G. E. W. Bauer, C. Back, G. S. Uhrig, O. V. Dobrovolskiy, B. Budinska, H. Qin, S. van Dijken, A. V. Chu- mak, A. Khitun, D. E. Nikonov, I. A. Young, B. W. Zingsem, and M. Winklhofer, 《2021年磁振子学路线图》，《物理学杂志：凝聚态》33，413001（2021）。[81] M. Krawczyk and D. Grundler，关于可重编程能带结构的磁振子晶体和器件的综述与展望，《物理学杂志：凝聚态》26，123202（2014）。[82] T. Gilbert，铁磁材料阻尼的唯象理论，《IEEE 磁学汇刊》40，3443（2004）。[83] C. Herring and C. Kittel，铁磁介质中自旋波理论，《物理评论》81，869（1951）。[84] B. A. Kalinikos and A. N. Slavin，具有混合交换边界条件的铁磁薄膜中偶极交换自旋波谱的理论，《固体物理学杂志 C》19，7013（1986）。[85] B. Kalinikos，铁磁薄膜中传播自旋波的激发，IEE Proc. 127，4（1980）。

[86] M. Mohseni, R. Verba, T. Br¨acher, Q. Wang, D. A. Bozhko, B. Hillebrands, and P. Pirro，偶极交换磁静力表面自旋波的反向散射免疫性，《物理评论快报》122，197201（2019）。[87] M. Beleggia, S. Tandon, Y. Zhu, and M. De Graef，任意形状纳米颗粒之间的磁静力相互作用，《磁学与磁性材料杂志》278，270（2004）。[88] R. Verba, G. Melkov, V. Tiberkevich, and A. Slavin，二维耦合磁性纳米点阵列中的集体自旋波激发，《物理评论B》85，014427（2012）。[89] Q. Wang, P. Pirro, R. Verba, A. Slavin, B. Hillebrands, and A. V. Chumak，可重构纳米级自旋波定向耦合器，《科学进展》4，e1701517（2018）。[90] X.-G. Wang, G.-H. Guo, and J. Berakdar，纳米结构合成反铁磁体中自旋激发的电控转向，《应用物理快报》117，242406（2020）。[91] X.-g. Wang, D. Schulz, G.-h. Guo, and J. Berakdar，宇称-时间对称偶极耦合波导和磁振子晶体中的磁振子动力学，《物理评论应用》18，024080（2022）。[92] M. A. Ruderman and C. Kittel，传导电子介导的核磁矩间接交换耦合，《物理评论》96，99（1954）。[93] K. Yosida，铜锰合金的磁性，《物理评论》106，893（1957）。[94] P. Bruno，磁性多层膜中层间交换相互作用理论，《物理学杂志：凝聚态》11，9403（1999）。[95] S. S. P. Parkin and D. Mauri，自旋工程：钌中Ruderman-Kittel-Kasuya-Yosida 远场范围函数的直接测定，《物理评论B》44，7131（1991）。[96] J. J. Krebs, P. Lubitz, A. Chaiken, and G. A. Prinz，通过磁共振测定铬间隔铁层的反铁磁耦合，《物理评论快报》63，1645（1989）。[97] Y. Shiota, T. Taniguchi, M. Ishibashi, T. Moriyama, and T. Ono，合成反铁磁体中由动态偶极相互作用介导的可调谐磁振子-磁振子耦合，《物理评论快报》125，017203（2020）。[98] R. A. Duine, K.-J. Lee, S. S. P. Parkin, and M. D. Stiles，合成反铁磁自旋电子学，《自然·物理》14，217（2018）。[99] T. Jungwirth, J. Sinova, A. Manchon, X. Marti, J. Wunderlich, and C. Felser，反铁磁自旋电子学的多重方向，《自然·物理》14，200（2018）。

[100] X.-g. Wang, L. Chotorlishvili, G.-h. Guo, and J. Berakdar, 《用于表面自旋波的高保真磁振子门》, 《物理评论应用》12, 034015（2019年）。[101] Q. Wang, M. Kewenig, M. Schneider, R. Verba, F. Kohl, B. Heinz, M. Geilen, M. Mohseni, B. L¨agel, F. Ciubotaru, C. Adelmann, C. Dubs, S. D. Cotofana, O. V. Dobrovolskiy, T. Br¨acher, P. Pirro, and A. V. Chumak, 《用于集成磁振子半加法器的磁振子定向耦合器》, 《自然·电子学》3, 765（2020年）。[102] Y. Chen and R. H. Victora, 《高温下三磁振子散射对吉尔伯特阻尼的贡献》, J. Appl. Phys. 136, 153902（2024年）。[103] K. Zakeri, J. Lindner, I. Barsukov, R. Meckenstock, M. Farle, U. von H¨orsten, H. Wende, W. Keune, J. Rocker, S. S. Kalarickal, K. Lenz, W. Kuch, K. Baberschke, and Z. Frait, 《铁磁体中的自旋动力学：吉尔伯特阻尼与双磁振子散射》, 《物理评论B》76, 104416（2007）。[104] P. Dai, H. Y. Hwang, J. Zhang, J. A. Fernandez-Baca, S.-W. Cheong, C. Kloc, Y. Tomioka, and Y. Tokura, 《锰钙钛矿中的磁振子-声子耦合导致的磁振子阻尼》, 《物理评论B》61, 9553（2000）。[105] D. A. Bozhko, V. I. Vasyuchka, A. V. Chumak, and A. A. Serga, 《磁振子自旋电子学中的磁振子-声子相互作用》（综述）, Low Temp. Phys. 46, 383（2020年）。[106] W. K. Peria, X. Wang, H. Yu, S. Lee, I. Takeuchi, and P. A. Crowell, 《磁致伸缩 $fe_{0.7}ga_{0.3}$ 薄膜中的磁弹性吉尔伯特阻尼》, 《物理评论B》103, L220403（2021年）。[107] G. Woltersdorf, M. Kiessling, G. Meyer, J.-U. Thiele, and C. H. Back, 《$ni_{80}fe_{20}$, 中的慢弛豫稀土杂质导致的阻尼》, 《物理评论快报》102, 257602（2009年）。[108] K. Gilmore, Y. U. Idzerda, and M. D. Stiles, 《通过第一性原理计算确定fe、co和ni中的主要进动阻尼机制》, 《物理评论快报》99, 027204（2007）。[109] B. Heinrich, R. Urban, and G. Woltersdorf, 《金属多层膜中的磁弛豫》, 《IEEE 磁学汇刊》38, 2496（2002）。[110] C. Dubs, O. Surzhenko, R. Thomas, J. Osten, T. Schneider, K. Lenz, J. Grenzer, R. H¨ubner, and E. Wendler, 《通过液相外延生长的厚度小于40 nm的钇铁石榴石薄膜具有低阻尼和完善的微观结构》, Phys. Rev. Mater. 4, 024416（2020年）。[111] C. Hauser, T. Richter, N. Homonnay, C. Eisenschmidt, M. Qaid, H. Deniz, D. Hesse, M. Saw- icki, S. G. Ebbinghaus, and G. Schmidt, 《超低阻尼钇铁石榴石薄膜》

通过非晶材料再结晶制备，《科学报告》6，20827（2016年）。[112] J. Ding, T. Liu, H. Chang, and M. Wu，《低阻尼钇铁石榴石薄膜的溅射生长》，IEEE Magn. Lett. 11，1（2020年）。[113] M. C. Onbasli, A. Kehlberger, D. H. Kim, G. Jakob, M. Kl¨aui, A. V. Chumak, B. Hillebrands, and C. A. Ross，《通过脉冲激光沉积制备具有低吉尔伯特阻尼和类块体磁化的外延钇铁石榴石薄膜》，APL Mater. 2，106102（2014年）。[114] A. Mitra, O. Cespedes, Q. Ramasse, M. Ali, S. Marmion, M. Ward, R. M. D. Brydson, C. J. Kinane, J. F. K. Cooper, S. Langridge, and B. J. Hickey，《薄膜钇铁石榴石磁化受抑的界面起源》，《科学报告》7，11774（2017年）。[115] H. Qin, S. J. H¨am¨al¨ainen, K. Arjas, J. Witteveen, and S. van Dijken，《纳米厚钇铁石榴石薄膜中的传播自旋波：对波矢、磁场强度和角度的依赖性》，《物理评论B》98，224422（2018年）。[116] K. Yamada, K. Kogiso, Y. Shiota, M. Yamamoto, A. Yamaguchi, T. Moriyama, T. Ono, and M. Shima，《通过共沉淀法制备并旋涂于硅衬底上的纳米晶YIG涂层，其吉尔伯特阻尼常数对微观结构的依赖性》，《磁学与磁性材料杂志》513，167253（2020年）。[117] R. Kumar, B. Samantaray, S. Das, K. Lal, D. Samal, and Z. Hossain，《具有界面的钇铁石榴石薄膜中的阻尼》，《物理评论B》106，054405（2022年）。[118] B. Heinrich, C. Burrowes, E. Montoya, B. Kardasz, E. Girt, Y.-Y. Song, Y. Sun, and M. Wu，《磁性绝缘体（yig）/普通金属（金）界面上的自旋泵浦》，《物理评论快报》107，066604（2011年）。[119]M. Collet, X. de Milly, O. d'Allivy Kelly, V. V. Naletov, R. Bernard, P. Bortolotti, J. Ben Youssef, V. E. Demidov, S. O. Demokritov, J. L. Prieto, M. Mu˜noz, V. Cros, A. Anane, G. de Loubens, and O. Klein，《通过自旋轨道力矩在钇铁石榴石微盘中产生相干自旋波模式》，《自然·通讯》7，10377（2016年）。[120] A. Hamadeh, O. d'Allivy Kelly, C. Hahn, H. Meley, R. Bernard, A. H. Molpeceres, V. V. Nale- tov, M. Viret, A. Anane, V. Cros, S. O. Demokritov, J. L. Prieto, M. Mu˜noz, G. de Loubens, and O. Klein，《利用自旋轨道力矩全面控制磁性绝缘体中的自旋波阻尼》，《物理评论快报》113，197203（2014年）。[121] Z. Li and S. Zhang，《自旋转移力矩作用下的磁化动力学》，《物理评论B》68，024404（2003年）。

[122] N. Locatelli, V. Cros, 和 J. Grollier，自旋转矩构件，《Nature Mater.》13，11（2014年）。[123]T. Moriyama, S. Takei, M. Nagata, Y. Yoshimura, N. Matsuzaki, T. Terashima, Y. Tserkovnyak, 和 T. Ono，通过外延氧化镍实现反阻尼自旋转移转矩，《应用物理快报》106，162406（2015年）。[124] L. Liu, T. Moriyama, D. C. Ralph, 和 R. A. Buhrman，自旋霍尔效应诱导的自旋转矩铁磁共振，《物理评论快报》106，036601（2011年）。[125] H. Fulara, M. Zahedinejad, R. Khymyn, A. A. Awad, S. Muralidhar, M. Dvornik, 和 J. ˚Akerman，由自旋轨道力矩驱动的传播自旋波，《科学进展》5，eaax8467（2019年）。[126] V. E. Demidov, S. Urazhdin, 和 S. O. Demokritov，直接观测并绘制自旋转矩纳米振荡器发射的自旋波，《Nature Mater.》9，984（2010年）。[127] D. Ralph 和 M. Stiles，自旋转移力矩，《磁学与磁性材料杂志》320，1190（2008年）。[128] J. Slonczewski，电流驱动磁性多层膜的激发，《磁学与磁性材料杂志》159，L1（1996年）。[129] L. Berger，电流穿过磁性多层膜时发射自旋波，《物理评论B》54，9353（1996年）。[130] S. Urazhdin, V. E. Demidov, H. Ulrichs, T. Kendziorczyk, T. Kuhn, J. Leuthold, G. Wilde, 和 S. O. Demokritov，基于自旋转移力矩的纳米磁振子器件，《Nature Nanotechnology》9，509（2014年）。[131] J. E. Hirsch，自旋霍尔效应，《物理评论快报》83，1834（1999年）。[132] K. Garello, I. M. Miron, C. O. Avci, F. Freimuth, Y. Mokrousov, S. Bl¨ugel, S. Auffret, O. Boulle, G. Gaudin, 和 P. Gambardella，铁磁异质结构中自旋轨道力矩的对称性与大小，《Nature Nanotech.》8，587（2013年）。[133] V. Edelstein，二维非对称电子系统中电流诱导的传导电子自旋极化，《Solid State Commun.》73，233（1990年）。[134] A. Brataas, A. D. Kent, 和 H. Ohno，磁性材料中的电流诱导力矩，《Nature Mater.》11，372（2012年）。[135] A. Hoffmann，金属中的自旋霍尔效应，《IEEE 磁学汇刊》49，5172（2013年）。[136] L. Liu, C.-F. Pai, Y. Li, H. W. Tseng, D. C. Ralph, 和 R. A. Buhrman，利用钽的巨自旋霍尔效应实现自旋转矩翻转，《科学》336，555（2012年）。

[137] P. M. Haney, H.-W. Lee, K.-J. Lee, A. Manchon, 和 M. D. Stiles，电流诱导力矩与界面自旋轨道耦合：半经典建模，《物理评论B》87，174411（2013年）。[138] J. C. R. S´anchez, L. Vila, G. Desfonds, S. Gambarelli, J. P. Attan´e, J. M. De Teresa, C. Mag´en, 和 A. Fert，在非磁性材料界面利用Rashba耦合实现自旋-电荷转换，《自然·通讯》4，2944（2013年）。[139] T. Chen, R. K. Dumas, A. Eklund, P. K. Muduli, A. Houshang, A. A. Awad, P. D¨urrenfeld, B. G. Malm, A. Rusu, 和 J. °Akerman，自旋转矩与自旋霍尔纳米振荡器，《IEEE会刊》104，1919（2016年）。[140] M. Haidar, A. A. Awad, M. Dvornik, R. Khymyn, A. Houshang, 和 J. °Akerman，单层自旋轨道转矩纳米振荡器，《自然·通讯》10，2362（2019年）。[141] A. A. Awad, P. D¨urrenfeld, A. Houshang, M. Dvornik, E. Iacocca, R. K. Dumas, 和 J. °Akerman，自旋霍尔纳米振荡器的长程互同步，《自然·物理》13，292（2017年）。[142] V. E. Demidov, S. Urazhdin, H. Ulrichs, V. Tiberkevich, A. Slavin, D. Baither, G. Schmitz, 和 S. O. Demokritov，由纯自旋流驱动的磁性纳米振荡器，《Nature Mater.》11，1028（2012年）。[143] B. Divinskiy, V. E. Demidov, S. Urazhdin, R. Freeman, A. B. Rinkevich, 和 S. O. Demokri- tov，通过自旋轨道力矩激发与放大自旋波，《先进材料》30，1802837（2018年）。[144] I. M. Miron, K. Garello, G. Gaudin, P.-J. Zermatten, M. V. Costache, S. Auffret, S. Bandiera, B. Rodmacq, A. Schuhl, 和 P. Gambardella，通过面内电流注入诱导单个铁磁层垂直翻转，《自然》476，189（2011年）。[145] L. Liu, O. J. Lee, T. J. Gudmundsen, D. C. Ralph, 和 R. A. Buhrman，利用自旋霍尔效应产生的自旋转矩，实现垂直磁化磁层的电流诱导翻转，《物理评论快报》109，096602（2012年）。[146] V. E. Demidov, S. Urazhdin, R. Liu, B. Divinskiy, A. Telegin, 和 S. O. Demokritov，利用纯自旋流激发相干传播自旋波，《自然·通讯》7，10446（2016年）。[147] S.-M. Seo, K.-J. Lee, H. Yang, 和 T. Ono，电流诱导的自旋波衰减控制，《物理评论快报》102，147202（2009年）。

[148] E. Padr´on-Hern´andez、A. Azevedo 和 S. M. Rezende，通过自旋霍尔效应放大钇铁石榴石薄膜中的自旋波，《应用物理快报》99，192511（2011年）。[149] A. I. Nikitchenko 和 N. A. Pertsev，利用自旋轨道力矩控制铁磁波导中的自旋波，《物理评论B》104，134422（2021年）。[150] J. Zou、S. Bosco、E. Thingstad、J. Klinovaja 和 D. Loss，耗散型自旋波二极管与非互易磁振子放大器，《物理评论快报》132，036701（2024年）。[151] J. M. Lee、T. Kottos 和 B. Shapiro，具有平衡增益与损耗的宏观磁结构，《物理评论B》91，094416（2015年）。[152] H. Yang、C. Wang、T. Yu、Y. Cao 和 P. Yan，具有增益的铁磁体中涌现的反铁磁性，《物理评论快报》121，197201（2018年）。[153] H. Liu、D. Sun、C. Zhang、M. Groesbeck、R. Mclaughlin 和 Z. V. Vardeny，磁振子宇称-时间对称器件中例外点的观测，《科学进展》5，eaax9144（2019年）。[154] X.-g. Wang、G.-h. Guo 和 J. Berakdar，在宇称-时间对称波导的例外点处调控磁振子动力学与磁导率，《自然·通讯》11，5663（2020年）。[155] P. Gr¨unberg 和 D. E. B¨urgler，金属多层膜：层间交换耦合与巨磁电阻的发现，载于《自旋电子学手册》，Y. Xu、D. D. Awschalom 和 J. Nitta 编（施普林格荷兰，Dordrecht，2016年），第107–126页。[156] V. V. Ustinov、M. A. Milyaev 和 L. I. Naumova，金属交换耦合多层膜与自旋阀中的巨磁电阻，《金属与金相学》118，1300（2017年）。[157] L. H. Bennett 和 R. E. Watson，《磁性多层膜》（WORLD SCIENTIFIC，1994年）。[158] K. Ran、D. Song、W. Wang、H. Du 和 S. Zhang，B20手性磁体的三维磁结构，载于《自旋电子学》（John Wiley & Sons, Ltd，2022年），第8章，第203–219页。[159] M. Yang、T. Yang 和 J. Luo，用于人工神经网络的磁性隧道结，载于《自旋电子学》（John Wiley & Sons, Ltd，2022年），第7章，第179–201页。[160] H. Tu 和 Z. Zeng，自旋振荡器，载于《自旋电子学》（ John Wiley & Sons, Ltd，2022 年），第 6 章，第139–178页。[161] Y. Li、K. W. Edmonds 和 K. Wang，自旋轨道力矩（SOT）材料与器件，载于《自旋电子学》（John Wiley & Sons, Ltd，2022年），第5章，第113–138页。[162] Y. Cui 和 J. Luo，用于磁性随机存取存储器（STT-MRAM）的自旋转移力矩材料与器件，载于《自旋电子学》（John Wiley & Sons, Ltd，2022年），第4章，第93–111页。

[163] Z. Zhou、K. Zhang 和 Q. Leng，用于磁传感器的隧道磁阻（TMR）材料与器件，载于《自旋电子学》（John Wiley & Sons, Ltd，2022年），第3章，第51–92页。[164] Z. Zhang、C. Xin 和 H. Liu，磁性材料与器件中的宇称-时间对称性，《先进电子材料》10，2300674（2024年）。[165] B. Zare Rameshti、S. Viola Kusminskiy、J. A. Haigh、K. Usami、D. Lachance-Quirion、Y. Nakamura、C.-M. Hu、H. X. Tang、G. E. Bauer 和 Y. M. Blanter，腔磁振子学，《物理报告》979，1（2022年），腔磁振子学。[166] M. Harder、B. M. Yao、Y. S. Gui 和 C.-M. Hu，相干与耗散腔磁振子学，《应用物理学杂志》129，201101（2021年）。[167] C. A. Potts、E. Varga、V. A. S. V. Bittencourt、S. V. Kusminskiy 和 J. P. Davis，动态反作用磁振子力学，《物理评论X》11，031053（2021年）。[168] D. Lachance-Quirion、S. P. Wolski、Y. Tabuchi、S. Kono、K. Usami 和 Y. Nakamura，利用超导量子比特基于纠缠单次检测单个磁振子，《科学》367，425（2020年）。[169] S. P. Wolski、D. Lachance-Quirion、Y. Tabuchi、S. Kono、A. Noguchi、K. Usami 和 Y. Nakamura，利用超导量子比特基于耗散对磁振子进行量子传感，《物理评论快报》125，117701（2020年）。[170] Y. Tabuchi、S. Ishino、A. Noguchi、T. Ishikawa、R. Yamazaki、K. Usami 和 Y. Nakamura，量子磁振子学：磁振子与超导量子比特相遇，《物理评论·物理学》17，729（2016年）。[171] S. Komineas，具有 $\mathcal{PT}$ 对称性的双自旋系统的非厄米动力学，《物理评论B》107，094435（2023年）。[172] A. Galda 和 V. M. Vinokur，磁性系统中的宇称-时间对称性破缺，《物理评论B》94，020408（2016年）。[173] A. Galda 和 V. M. Vinokur，自旋链中的宇称-时间对称性破缺，《物理评论B》97，201411（2018年）。[174] O. Temnaya、A. Safin、D. Kalyabin 和 S. Nikitov，平面耦合磁振子异质结构中的宇称-时间对称性，《物理评论应用》18，014003（2022年）。[175] S. Wittrock、S. Perna、R. Lebrun、K. Ho、R. Dutra、R. Ferreira、P. Bortolotti、C. Serpico 和 V. Cros，自旋电子学中的非厄米性：涌现例外点导致耦合自旋电子纳米振荡器中的振荡死亡，《自然·通讯》15，971（2024年）。

[176] D. Zhang、X.-Q. Luo、Y.-P. Wang、T.-F. Li 和 J. Q. You，腔磁振子-极化激元中例外点的观测，《自然·通讯》8，1368（2017年）。[177] B. Wang、X. Jia、X.-H. Lu 和 H. Xiong，$\mathcal{PT}$对称磁振子激光器在腔光磁振子学中的应用，《物理评论A》105，053705（2022年）。[178] Y. Yang、Y.-P. Wang、J. W. Rao、Y. S. Gui、B. M. Yao、W. Lu 和 C.-M. Hu，反宇称-时间对称腔磁振子学中的非常规奇点，《物理评论快报》125，147202（2020年）。[179] B. Wang、Z.-X. Liu、C. Kong、H. Xiong 和 Y. Wu，𝒫𝒯对称腔-磁振子系统中的磁振子诱导透明与放大，《光学快报》26，20248（2018年）。[180] C.-W.Sui、S.-H. Yuan、X.-G. Wang、J. Berakdar 和 C.Jia，反宇称-时间对称合成反铁磁体中的涌现磁振子奇点，《新物理学杂志》24，023031（2022年）。[181] S. Yuan、C. Sui、Z. Fan、J. Berakdar、D. Xue 和 C. Jia，反铁磁体中通过破缺反宇称-时间对称性实现的磁振子克莱因隧穿与非因果隧穿，《通讯物理》6，95（2023年）。[182] A. V. Sadovnikov、A. A. Zyablovsky、A. V. Dorofeenko 和 S. A. Nikitov，耦合磁振子波导中的例外点相变，《物理评论应用》18，024073（2022年）。[183] D. Schulz、J. Berakdar 和 X.-g. Wang，赝厄米磁振子的主动非互易隐身，《物理评论应用》22，054046（2024年）。[184] A. A. Matveev、A. R. Safin 和 S. A. Nikitov，耦合涡旋自旋转矩振荡器中的例外点，《物理评论B》108，174443（2023年）。[185] G.-Q. Zhang、Z. Chen、D. Xu、N. Shammah、M. Liao、T.-F. Li、L. Tong、S.-Y. Zhu、F. Nori 和 J. Q. You，混合量子系统中的例外点与交叉弛豫效应，《PRX量子》2，020307（2021年）。[186] X. Zhang、C.-L. Zou、L. Jiang 和 H. X. Tang，强耦合磁振子与腔微波光子，《物理评论快报》113，156401（2014年）。[187] M. Harder、Y. Yang、B. M. Yao、C. H. Yu、J. W. Rao、Y. S. Gui、R. L. Stamps 和 C.-M. Hu，耗散磁振子-光子耦合导致的能级吸引，《物理评论快报》121，137203（2018年）。[188] H. Jin、Z.-B. Yang、J.-W. Jin、J.-Y. Liu、H.-Y. Liu 和 R.-C. Yang，类PT对称腔磁机械系统中的微波放大，《光学》260，169035（2022年）。

[189]X.-g. Wang、G.-h. Guo 和 J. Berakdar，PT对称性赋能的自旋电子热二极管与逻辑门，《Advanced Electronic Materials》9，2300325（2023年），https://advanced.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/aelm.202300325。[190] Y. Cao 和 P. Yan，$\mathcal{PT}$ 对称腔磁振子 - 极化激元的异常磁灵敏度，《物理评论 B 》 99，214415 （ 2019 年）。[191] X.-g. Wang、L.-l. Zeng、G.-h. Guo 和 J. Berakdar，利用Floquet工程调控宇称-时间对称磁振子学中的例外点，《物理评论快报》131，186705（2023年）。[192] X. Li、K. Deng 和 B. Flebus，范德华磁体中的大量例外点，《物理评论B》106，214432（2022年）。[193] T. Yu 和 B. Zeng，长程手性相互作用驱动的趋肤效应增强磁阵列的巨大微波灵敏度，《物理评论B》105，L180401（2022年）。[194] B. Flebus、R. A. Duine 和 H. M. Hurst，一维自旋转矩振荡器阵列的非厄米拓扑，《物理评论B》102，180408（2020年）。[195] I. Dzyaloshinsky，反铁磁体“弱”铁磁性的热力学理论，《Journal of Physics and Chemistry of Solids》4，241（1958年）。[196] T. Moriya，各向异性交换作用与弱铁磁性，《Phys. Rev.》120，91（1960年）。[197] A. Fert、V. Cros 和 J. Sampaio，轨道上的斯格明子，《Nature Nanotech.》8，152（2013年）。[198] F. Hellman、A. Hoffmann、Y. Tserkovnyak、G. S. D. Beach、E. E. Fullerton、C. Leighton、A. H. MacDonald、D. C. Ralph、D. A. Arena、H. A. D¨urr、P. Fischer、J. Grollier、J. P. Heremans、T. Jungwirth、A. V. Kimel、B. Koopmans、I. N. Krivorotov、S. J. May、A. K. Petford-Long、J. M. Rondinelli、N. Samarth、I. K. Schuller、A. N. Slavin、M. D. Stiles、O. Tchernyshyov、A. Thiaville 和 B. L. Zink，界面诱导磁现象，Reviews of Modern Physics 89，025006（2017年）。[199] S. Emori、U. Bauer、S.-M. Ahn、E. Martinez 和 G. S. D. Beach，手性铁磁畴壁的电流驱动动力学，《Nature Mater.》12，611（2013年）。[200] K.-S. Ryu、L. Thomas、S.-H. Yang 和 S. Parkin，磁畴壁处的手性自旋转矩，《Nature Nanotech.》8，527（2013年）。[201] T. Liu 和 G. Vignale，自旋流与自旋波逻辑的电控，《物理评论快报》106，247203（2011年）。

[202] V. Risingg˚ard、I. Kulagina 和 J. Linder，多铁性材料中电场调控磁振子诱导的磁化动力学，《科学报告》6，31800（2016年）。[203] J.-H. Moon、S.-M. Seo、K.-J. Lee、K.-W. Kim、J. Ryu、H.-W. Lee、R. D. McMichael 和 M. D. Stiles，界面德西特罗希斯基-莫里亚相互作用存在时的自旋波传播，《物理评论B》88，184404（2013年）。[204] D. Cort´és-Ortu˜no 和 P. Landeros，德西特罗希斯基–莫里亚相互作用对薄膜自旋波谱的影响，J. Phys.:Condens. Matter 25，156001（2013年）。[205] K. Zakeri、Y. Zhang、J. Prokop、T.-H. Chuang、N. Sakr、W. X. Tang 和 J. Kirschner，Fe(110)中的非对称自旋波色散：德西特罗希斯基-莫里亚相互作用的直接证据，《物理评论快报》104，137203（2010）。[206] K. Deng 和 B. Flebus，磁性系统中的非厄米皮肤效应，《物理评论B》105，L180406（2022年）。[207] D. M. Larsen 和 N. Bloembergen，辐射对多原子分子的激发，《光学通信》17，254（1976）。[208] C. Tzschaschel、K. Otani、R. Iida、T. Shimura、H. Ueda、S. G¨unther、M. Fiebig 和 T. Satoh，超快光激发反铁磁性氧化镍中的相干磁振子，《物理评论B》95，174407（2017年）。[209] S. P. Bayrakci、D. A. Tennant、P. Leininger、T. Keller、M. C. R. Gibson、S. D. Wilson、R. J. Birgeneau 和 B. Keimer，二维和三维中反铁磁磁振子的寿命：实验、理论和数值计算，《物理评论快报》111，017204（2013年）。[210] R. Cheng、S. Okamoto 和 D. Xiao，共线反铁磁体中的磁振子自旋能斯特效应，《物理评论快报》117，217202（2016年）。[211] X.-g. Wang、G.-h. Guo 和 J. Berakdar，磁性高阶例外点处的灵敏度增强及磁振子平面波导中的拓扑能量传输，《物理评论应用》15，034050（2021年）。[212] T. Yu、H. Yang、L. Song、P. Yan 和 Y. Cao，铁磁三层结构中的高阶例外点，《物理评论B》101，144414（2020年）。[213] J. Doppler、A. A. Mailybaev、J. B¨ohm、U. Kuhl、A. Girschik、F. Libisch、T. J. Milburn、P. Rabl、N. Moiseyev 和 S. Rotter，动态环绕例外点实现非对称模式切换，《自然》537，76（2016年）。

[214] A. Galda 和 V. M. Vinokur，经典自旋动力学中的例外点，《科学报告》**9**，17484（2019年）。[215] C. Jia、D. Ma、A. F. Sch¨affer 和 J. Berakdar，携带轨道角动量的扭曲磁振子束，《自然·通讯》**10**，2077（2019年）。[216] C. Jia、M. Chen、A. F. Sch¨affer 和 J. Berakdar，利用扭曲反铁磁磁振子模式进行手性逻辑计算，npj计算材料**7**，101（2021年）。[217] K. Schultheiss、R. Verba、F. Wehrmann、K.Wagner、L. K¨orber、T.Hula、T. Hache、A. K´akay、A. A. Awad、V. Tiberkevich、A. N. Slavin、J. Fassbender 和 H. Schultheiss，在磁涡旋中激发回音廊磁振子，《物理评论快报》**122**，097202（2019年）。