arXiv:2601.00709v1 [math-ph] 2 Jan 2026

分层介质中麦克斯韦方程组并矢格林函数的计算

HENG YUAN、WENZHONG ZHANG、BO WANG

摘要。本文详细介绍了两种计算分层介质中麦克斯韦方程组并矢格林函数的方法。第一种方法基于 TE/TM 分解推导而来，众所周知，并在工程领域得到广泛应用；第二种方法基于矢势和矩阵基推导而来，近来用于建立快速多极子法。我们大幅简化了第二种方法的推导，并证明它与第一种方法等价；由于借助矢势可直接解耦界面条件，其推导过程更为简洁。矩阵基旨在分离密度函数中的所有非对称因子，从而便于推导并矢格林函数的远场近似。此外，该方法还可用于计算分层介质中弹性波动方程的并矢格林函数。

关键词：麦克斯韦方程组、分层介质、并矢格林函数、TE/TM 分解、矩阵基

1. 引言

分层介质中的电磁散射问题具有重要的科学意义和工程价值，在集成电路、地球物理勘探和超材料设计等领域有着广泛应用。基于积分方程离散化的数值方法 [4, 5, 6] 主要依赖由点源产生的分层介质并矢格林函数（DGF）。该函数严格满足介质界面处的跳跃条件以及远场辐射条件，从而能够显著减少数值离散化所需的自由度。然而，求解分层介质并矢格林函数（LMDGF）面临着一个固有难题：其 3×3 张量结构要求在介质界面处同时求解九个相互耦合的分量；要降低求解复杂度，关键在于解耦这些参数。

早期提出的 TE/TM分解[2, 7, 8] 是一种有效的正交解耦方法。该方法将电磁场分解为水平方向（xOy 平面）和垂直方向（z 轴）的分量，从而得到横电（TE）波和横磁（TM）波的耦合方程。通过在频域中引入旋转坐标系（$\hat{\mathbf{u}}$，$\hat{\mathbf{v}}$，$\hat{\mathbf{z}}$）进行解耦，最终得到分层介质的两个相互独立的标量亥姆霍兹方程，分别对应 TE 波或 TM 波，从而将未知数减少到两个。由此求得了麦克斯韦方程组的 LMDG。该方法具有很强的物理直观性。

近期提出的矩阵基方法[9]建立了一个独立于物理解释的严谨代数表示框架。该方法基于电磁场的矢势表示，其中矢势满足洛伦兹规范条件[1]。该方法在频域中构造了九个 3×3 矩阵基 $\mathbb{J}_1$，$\cdots$，$\mathbb{J}_9$ 并严谨地证明，矢量势格林函数可以展开

为前五个矩阵基 $\mathbb{J}_1$，$\cdots$，$\mathbb{J}_5$ 的线性组合，其系数具有径向对称性（仅与 k_ρ相关，而与 k_x，k_y无关）。通过调整对称展开系数，该方法最终推导出分层介质的三个标量亥姆霍兹方程（其中两个方程强耦合，因此实际上的独立未知量仍为两个），并给出了频域中电磁场关于这三个标量函数的矩阵基展开。

对频域中两种方法所得结果的比较表明：(a) 最终需要求解的两个标量亥姆霍兹方程在形式上完全相同；(b) 矩阵基方法构造的九个矩阵基，本质上对应于 TE/TM 分解中旋转坐标系所用的相互作用张量基。这一发现不仅揭示了两种方法在理论上的等价性，也表明它们在物理解释和数学表述层面实现了统一。

本文其余部分安排如下。第2节系统概述了用于求解麦克斯韦方程组的 TE/TM 分解，随后详细介绍如何利用该分解计算自由空间和分层介质中的并矢格林函数。我们阐述了分层介质中界面条件的处理方法，并最终给出分层介质并矢格林函数（LMDG）的完整解。第3节大幅简化了最初在 [9] 中引入的并矢格林函数的推导，并对所得表述与成熟的 TE/TM 表述进行了比较分析。最后，第4节总结全文，并讨论未来的研究方向。

2. 使用 TE/TM 分解计算分层介质中麦克斯韦方程的并矢格林函数

本节回顾利用麦克斯韦方程组的 TE/TM 分解推导自由空间和多层介质中的并矢格林函数（DGF）的过程（参见 [7]）。

2.1. 麦克斯韦方程组的 TE/TM 分解。

考虑时谐麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\,\mathrm{i}\omega\mu\mathbf{H}, \tag{1}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathrm{i}\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}, \tag{2}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \tag{3}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{4}$$

其中，向量量 $\mathbf{E}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$、$\mathbf{H}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$、$\mathbf{D}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ 和 $\mathbf{B}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ 分别表示电场和磁场，以及电通量密度和磁通量密度；源位于 $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ 处；向量量 ρ 和 $\mathbf{J}$ 分别表示任意外部电荷的体电荷密度和电流密度。 $e^{\mathrm{i}\omega t}$ 表示时谐麦克斯韦方程的时间因子，本文中将其省略；其中， ω 是时间角频率， ϵ, μ 分别是均匀介质的介电常数和磁导率，$k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$表示波数。电通量密度和磁通量密度 $\mathbf{D}$、$\mathbf{B}$ 与场强$\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$ 之间通过本构关系相联系，即：

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

给定 $\mathbb{R}^3$ 中的任意向量场 $\mathbf{A} = [A_x, A_y, A_z]^{\mathrm{T}}$，我们可以将其分解为水平分量（$x-y$ 平面内）和垂直分量（沿 z 方向），即:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_S + \mathbf{A}_z, \quad \text{with} \quad \mathbf{A}_S = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{A}_z = A_z\hat{\mathbf{z}}.$$

这里，$\hat{\mathbf{x}}$，$\hat{\mathbf{y}}$，$\hat{\mathbf{z}}$ 是（x，y，z）坐标系中的单位向量。定义水平梯度算子

$$\nabla_S := \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y}, \tag{5}$$

于是，旋度算子可分解为

$$\nabla \times \mathbf{A} = (\nabla_S + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}) \times (\mathbf{A}_S + \mathbf{A}_z) = \nabla_S \times \mathbf{A}_S + \nabla_S \times \mathbf{A}_z + \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \mathbf{A}_S}{\partial z}. \tag{6}$$

这里，我们用到了 $\hat{\mathbf{z}} \overset{\partial}{\underset{\partial z}{}} \times \mathbf{A}_z = 0$ 这一事实。显然，公式（6）右端的第一项是垂直的（平行于 z 方向），另外两项是水平的（垂直于 z 轴）。

Ap将上述分解应用于电磁场 $\mathbf{E}$ 和$\mathbf{H}$，即 .,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_S + \mathbf{E}_z, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_S + \mathbf{H}_z, \tag{7}$$

法拉第定律（1）可改写为

$$\nabla_S \times \mathbf{E}_S + \nabla_S \times \mathbf{E}_z + \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \mathbf{E}_S}{\partial z} = -\mathrm{i}\omega\mu\mathbf{H}_S - \mathrm{i}\omega\mu\mathbf{H}_z \tag{8}$$

将上述方程中的横向分量和纵向分量相匹配，可得

$$\begin{cases} \nabla_S \times \mathbf{E}_S = -\mathrm{i}\omega\mu\mathbf{H}_z, & \text{(9a)} \\ \nabla_S \times \mathbf{E}_z + \hat{\mathbf{z}} \times \dfrac{\partial \mathbf{E}_S}{\partial z} = -\mathrm{i}\omega\mu\mathbf{H}_S. & \text{(9b)} \end{cases}$$

同样，安培定律 (2) 可分解为

$$\begin{cases} \nabla_S \times \mathbf{H}_S = \mathrm{i}\omega\epsilon\mathbf{E}_z + \mathbf{J}_z, & \text{(10a)} \\ \nabla_S \times \mathbf{H}_z + \hat{\mathbf{z}} \times \dfrac{\partial \mathbf{H}_S}{\partial z} = \mathrm{i}\omega\epsilon\mathbf{E}_S + \mathbf{J}_S. & \text{(10b)} \end{cases}$$

分别将方程 (9a)、(10a) 代入 (10b) 和 (9b)，即可消去垂直分量，得到

$$\begin{cases} \nabla_S \times \nabla_S \times \mathbf{H}_S - k^2\mathbf{H}_S + \mathrm{i}\omega\epsilon\hat{\mathbf{z}} \times \dfrac{\partial \mathbf{E}_S}{\partial z} = \nabla_S \times \mathbf{J}_z, & \text{(11a)} \\ \nabla_S \times \nabla_S \times \mathbf{E}_S - k^2\mathbf{E}_S - \mathrm{i}\omega\mu\hat{\mathbf{z}} \times \dfrac{\partial \mathbf{H}_S}{\partial z} = -\mathrm{i}\omega\mu\mathbf{J}_S. & \text{(11b)} \end{cases}$$

因此，我们从完整的麦克斯韦方程组中提取出了关于水平分量的方程。将结果代回 (9a) 和 (10a)，即可得到垂直分量 $\mathbf{H}_z$,$\mathbf{E}_z$ 。

为了推导麦克斯韦方程的并矢格林函数的解析表达式，我们将对分解的麦克斯韦方程 (9a) 进行傅里叶变换,

(10a) 和 (11)。在 $x-y$ 平面上的傅里叶变换及其逆变换定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\mathbf{A}] =& \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{A}(x,y,z)e^{-\mathrm{i}\mathbf{k}_\rho\cdot\rho}dxdy =: \hat{\mathbf{A}}(k_x,k_y,z),\\ \mathcal{F}^{-1}[\hat{\mathbf{A}}] =& \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\mathbf{A}}(k_x,k_y,z)e^{\mathrm{i}\mathbf{k}_\rho\cdot\rho}dk_xdk_y,\end{aligned} \tag{12}$$

其中

$$\rho=\hat{\mathbf{x}}(x-x')+\hat{\mathbf{y}}(y-y'),\quad \mathbf{k}_\rho=\hat{\mathbf{x}}\cdot k_x+\hat{\mathbf{y}}\cdot k_y,\quad k_\rho=\sqrt{k_x^2+k_y^2}.$$

应用傅里叶变换可得

$$\mathcal{F}[\nabla_S\times\mathbf{A}_S]=\mathrm{i}\mathbf{k}_\rho\times\hat{\mathbf{A}}_S,\quad \mathcal{F}[\nabla_S A_z]=\mathrm{i}\mathbf{k}_\rho\hat{A}_z. \tag{13}$$

在下面的推导中，我们将使用以下两个恒等式

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}),\quad \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}. \tag{14}$$

因此，对式 (11) 中的第一个方程应用傅里叶变换，再使用公式 (13)，可得常微分方程组

$$\begin{cases}\mathrm{i}\mathbf{k}_\rho\times\mathrm{i}\mathbf{k}_\rho\times\widehat{\mathbf{H}}_S-k^2\widehat{\mathbf{H}}_S+\mathrm{i}\omega\epsilon\hat{\mathbf{z}}\times\dfrac{\partial\widehat{\mathbf{E}}_S}{\partial z}=\mathrm{i}\mathbf{k}_\rho\times\hat{\mathbf{J}}_z, & (15a)\\ \mathrm{i}\mathbf{k}_\rho\times\mathrm{i}\mathbf{k}_\rho\times\widehat{\mathbf{E}}_S-k^2\widehat{\mathbf{E}}_S-\mathrm{i}\omega\mu\hat{\mathbf{z}}\times\dfrac{\partial\widehat{\mathbf{H}}_S}{\partial z}=-\mathrm{i}\omega\mu\hat{\mathbf{J}}_S. & (15b)\end{cases}$$

左- 在式（15）两边同时乘以ˆ$\mathbf{z}\times$ ，并应用恒等式（14），可得

$$\begin{cases}\mathrm{i}\omega\epsilon\dfrac{\partial\widehat{\mathbf{E}}_S}{\partial z}=\hat{\mathbf{z}}\times\mathrm{i}\mathbf{k}_\rho\times\mathrm{i}\mathbf{k}_\rho\times\widehat{\mathbf{H}}_S-k^2\hat{\mathbf{z}}\times\widehat{\mathbf{H}}_S+\hat{\mathbf{z}}\times\mathrm{i}\mathbf{k}_\rho\times\hat{\mathbf{J}}_z, & (16a)\\ \mathrm{i}\omega\mu\dfrac{\partial\widehat{\mathbf{H}}_S}{\partial z}=-\hat{\mathbf{z}}\times\mathrm{i}\mathbf{k}_\rho\times\mathrm{i}\mathbf{k}_\rho\times\widehat{\mathbf{E}}_S+k^2\hat{\mathbf{z}}\times\widehat{\mathbf{E}}_S-\mathrm{i}\omega\mu\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{J}}_S. & (16b)\end{cases}$$

注意

$$\hat{\mathbf{z}}\times\mathrm{i}\mathbf{k}_\rho\times\mathrm{i}\mathbf{k}_\rho\times\mathbf{A}=-\mathbf{k}_\rho\otimes\mathbf{k}_\rho{}^T[\mathbf{A}\times\hat{\mathbf{z}}],\quad \mathbf{A}=\widehat{\mathbf{E}}_S,\widehat{\mathbf{H}}_S,$$

其中，$\otimes$ 为克罗内克积。式（16）可写为

$$\frac{\partial\widehat{\mathbf{E}}_S}{\partial z}=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\epsilon}\left[k^2\mathbb{I}-\mathbf{k}_\rho\otimes\mathbf{k}_\rho^T\right][\widehat{\mathbf{H}}_S\times\hat{\mathbf{z}}]-\frac{\hat{J}_z}{\omega\epsilon}\mathbf{k}_\rho, \tag{17}$$

$$\frac{\partial\widehat{\mathbf{H}}_S}{\partial z}=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\left[k^2\mathbb{I}-\mathbf{k}_\rho\otimes\mathbf{k}_\rho^T\right][\hat{\mathbf{z}}\times\widehat{\mathbf{E}}_S]-\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{J}}_S, \tag{18}$$

其中，$\mathbb{I}$ 为 3×3 单位矩阵。同样地，频域中的垂直分量$\mathbf{H}_z$，$\mathbf{E}_z$ 表示为

$$\widehat{\mathbf{H}}_z=-\frac{1}{\omega\mu}\mathbf{k}_\rho\times\widehat{\mathbf{E}}_S,\quad \widehat{\mathbf{E}}_z=\frac{1}{\omega\epsilon}\mathbf{k}_\rho\times\widehat{\mathbf{H}}_S-\frac{\hat{\mathbf{J}}_z}{\mathrm{i}\omega\epsilon}. \tag{19}$$

为了将方程 (17)-(18) 解耦，我们引入正交基

$$\hat{\mathbf{u}}=\frac{k_x}{k_\rho}\hat{\mathbf{x}}+\frac{k_y}{k_\rho}\hat{\mathbf{y}}=\frac{1}{k_\rho}\mathbf{k}_\rho,\quad \hat{\mathbf{v}}=-\frac{k_y}{k_\rho}\hat{\mathbf{x}}+\frac{k_x}{k_\rho}\hat{\mathbf{y}}=\frac{1}{k_\rho}\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{k}_\rho, \tag{20}$$

位于 $x-y$ 平面内。在 (18) 两边取叉积 $\times\hat{}\,\mathbf{z}$，然后利用以下事实

$$\left[(\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T)(\hat{\mathbf{z}}\times\widehat{\mathbf{E}}_S)\right]\times\hat{\mathbf{z}}=(\hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T)\widehat{\mathbf{E}}_S,$$

给出

$$\frac{\partial}{\partial z}[\widehat{\mathbf{H}}_S\times\hat{\mathbf{z}}]=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\left[k^2\mathbb{I}-k_\rho^2\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T\right][\hat{\mathbf{z}}\times\widehat{\mathbf{E}}_S]\times\hat{\mathbf{z}}-\hat{\mathbf{J}}_S=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\left[k^2\mathbb{I}-k_\rho^2\hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T\right]\widehat{\mathbf{E}}_S-\hat{\mathbf{J}}_S. \tag{21}$$

$\hat{}$ $\hat{}\hat{}$ 假设水平分量 $\mathbf{E}_S$、$\mathbf{H}_S$、$\mathbf{J}_S$ 具有如下表达式

$$\widehat{\mathbf{E}}_S=\hat{\mathbf{u}}V^e+\hat{\mathbf{v}}V^h,\quad \widehat{\mathbf{H}}_S\times\hat{\mathbf{z}}=\hat{\mathbf{u}}I^e+\hat{\mathbf{v}}I^h,\quad \hat{\mathbf{J}}_S=\hat{\mathbf{u}}\hat{J}_u+\hat{\mathbf{v}}\hat{J}_v. \tag{22}$$

代入方程（17）和（21），可得

$$\frac{\partial V^e}{\partial z}\hat{\mathbf{u}}+\frac{\partial V^h}{\partial z}\hat{\mathbf{v}}=\frac{k^2}{\mathrm{i}\omega\epsilon}I^h\hat{\mathbf{v}}+\left[\frac{k^2-k_\rho^2}{\mathrm{i}\omega\epsilon}I^e-\frac{k_\rho\hat{J}_z}{\omega\epsilon}\right]\hat{\mathbf{u}}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial I^e}{\partial z}\hat{\mathbf{u}}+\frac{\partial I^h}{\partial z}\hat{\mathbf{v}}=\left(\frac{k^2}{\mathrm{i}\omega\mu}V^e-\hat{J}_u\right)\hat{\mathbf{u}}+\left[\frac{k^2-k_\rho^2}{\mathrm{i}\omega\mu}V^h-\hat{J}_v\right]\hat{\mathbf{v}}. \tag{24}$$

这里使用了恒等式

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}^{\mathrm{T}})\mathbf{a}=\mathbf{a},\quad (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}^{\mathrm{T}})\mathbf{b}=\mathbf{0},$$

对于任意 或 正交单位向量$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$。因此，我们得到了两个解耦系统

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V^e}{\partial z}=\dfrac{k_z^2}{\mathrm{i}\omega\epsilon}I^e-\dfrac{k_\rho}{\omega\epsilon}\hat{J}_z, & \text{(25a)}\\[2ex] \dfrac{\partial I^e}{\partial z}=\dfrac{k^2}{\mathrm{i}\omega\mu}V^e-\hat{J}_u, & \text{(25b)}\end{cases}$$

and

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V^h}{\partial z}=\dfrac{k^2}{\mathrm{i}\omega\epsilon}I^h, & \text{(26a)}\\[2ex] \dfrac{\partial I^h}{\partial z}=\dfrac{k_z^2}{\mathrm{i}\omega\mu}V^h-\hat{J}_v. & \text{(26b)}\end{cases}$$

其中 $k_z=\sqrt{k^2-k_\rho^2}$ 带有支割线 $\Im(k_z)\geq 0$。显然，我们可以将它们化简为以下两个亥姆霍兹方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 I^e}{\partial z^2}+k_z^2I^e&=\mathrm{i}k_\rho\hat{J}_z-\frac{\partial\hat{J}_u}{\partial z},\\ \frac{\partial^2 V^h}{\partial z^2}+k_z^2V^h&=-\frac{k^2}{\mathrm{i}\omega\epsilon}\hat{J}_v.\end{aligned} \tag{27}$$

另外两个系数 V^e 和 I^h 可通过以下方式计算

$$V^e=\frac{\mathrm{i}\omega\mu}{k^2}\left[\frac{\partial I^e}{\partial z}+\hat{J}_u\right],\quad I^h=\frac{\mathrm{i}\omega\epsilon}{k^2}\frac{\partial V^h}{\partial z} \tag{28}$$

将（22）代入（19），并利用（14）中的恒等式对结果进行化简，可得

$$\widehat{E}_z=\frac{k_\rho I^e}{\omega\epsilon}-\frac{\hat{J}_z}{\mathrm{i}\omega\epsilon},\quad \widehat{H}_z=-\frac{k_\rho V^h}{\omega\mu}.$$

Th傅里叶谱域中的电磁场表示为

$$\widehat{\mathbf{E}} = \widehat{\mathbf{E}}_S + \widehat{\mathbf{E}}_z = \hat{\mathbf{u}}V^e + \hat{\mathbf{v}}V^h + \hat{\mathbf{z}}\frac{\mathrm{i}k_\rho I^e - \hat{J}_z}{\mathrm{i}\omega\epsilon}, \quad \widehat{\mathbf{H}} = \widehat{\mathbf{H}}_S + \widehat{\mathbf{H}}_z = \hat{\mathbf{v}}I^e - \hat{\mathbf{u}}I^h - \hat{\mathbf{z}}\frac{\mathrm{i}k_\rho V^h}{\mathrm{i}\omega\mu}. \quad (29)$$

2.2. 自由空间中的麦克斯韦方程组的并矢格林函数。考虑位于$\mathbf{r}'$处、电流矩为 $^{-1}$ $_{\mathrm{i}\omega\mu}$的有向赫兹偶极子所产生的电磁场。并矢一 ·格林函数$\mathbf{G}^{\mathbf{t}}_{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$、$\mathbf{G}^{\mathbf{t}}_{\mathbf{H}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$满足麦克斯韦方程(1)-(2)，其中

$$\mathbf{J} = -\frac{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\mathrm{i}\omega\mu}\hat{\mathbf{t}}, \quad \hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}} \quad (30)$$

或者相应地满足式(15)，其中

$$\hat{\mathbf{J}} = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\delta(z-z')\hat{\mathbf{t}}, \quad \hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}} \quad (31)$$

在频域中。这里， $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$和 $\delta(z-z')$分别为三维和一维狄拉克函数。根据上述分析，可得表达式

$$\widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\mathbf{t}}}_{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{u}}\widehat{G}^{\hat{\mathbf{t}}}_{V^e} + \hat{\mathbf{v}}\widehat{G}^{\hat{\mathbf{t}}}_{V^h} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\mathrm{i}k_\rho \widehat{G}^{\hat{\mathbf{t}}}_{I^e}}{\mathrm{i}w\epsilon} - \hat{\mathbf{z}}\frac{\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{t}}}{k^2}\delta(z-z'), \quad \widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\mathbf{t}}}_{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{v}}\widehat{G}^{\hat{\mathbf{t}}}_{I^e} - \hat{\mathbf{u}}\widehat{G}^{\hat{\mathbf{t}}}_{I^h} - \hat{\mathbf{z}}\frac{\mathrm{i}k_\rho \widehat{G}^{\hat{\mathbf{t}}}_{V^h}}{\mathrm{i}w\mu}, \quad (32)$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$其中系数 $G^{\mathbf{t}}_{I^e}, G^{\mathbf{t}}_{V^h}$ 满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \widehat{G}^{\hat{\mathbf{t}}}_{I^e}}{\partial z^2} + k_z^2 \widehat{G}^{\hat{\mathbf{t}}}_{I^e} &= -\frac{k_\rho}{\omega\mu}\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{t}}\delta(z-z') + \frac{\hat{\mathbf{u}}\cdot\hat{\mathbf{t}}}{\mathrm{i}\omega\mu}\delta'(z-z'), \\ \frac{\partial^2 \widehat{G}^{\hat{\mathbf{t}}}_{V^h}}{\partial z^2} + k_z^2 \widehat{G}^{\hat{\mathbf{t}}}_{V^h} &= -\hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{t}}\delta(z-z'), \end{aligned} \quad (33)$$

另外两个可通过下式计算

$$\widehat{G}^{\hat{\mathbf{t}}}_{V^e} = \frac{\mathrm{i}\omega\mu}{k^2}\left[\frac{\partial \widehat{G}^{\hat{\mathbf{t}}}_{I^e}}{\partial z} - \frac{\hat{\mathbf{u}}\cdot\hat{\mathbf{t}}}{\mathrm{i}\omega\mu}\delta(z-z')\right], \quad \widehat{G}^{\hat{\mathbf{t}}}_{I^h} = \frac{\mathrm{i}\omega\epsilon}{k^2}\frac{\partial \widehat{G}^{\hat{\mathbf{t}}}_{V^h}}{\partial z}. \quad (34)$$

显然，式（33）中的方程是三维亥姆霍兹方程的傅里叶变换。根据索末菲恒等式

$$\frac{e^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\int_\infty^\infty\int_\infty^\infty \frac{e^{\mathrm{i}k_z|z-z'|}}{k_z}e^{\mathrm{i}\mathbf{k}_\rho\cdot\rho}dk_x dk_y \quad (35)$$

傅里叶变 换后的三维亥姆霍兹格林函数 $G^f(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{e^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|-'|}\mathbf{rr}$为 ———

$$\widehat{G}^f(k_\rho, z, z') = \frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}k_z|z-z'|}}{2k_z}, \quad (36)$$

其满足

$$\partial_{zz}\widehat{G}^f(k_\rho,z,z') + k_z^2\widehat{G}^f(k_\rho,z,z') = -\delta(z-z'). \quad (37)$$

对（37）两边关于 z求导，可直接验证 $\phi(k_\rho,z,z') = \partial_z\widehat{G}^f(k_\rho,z,z')$ 满足

$$\partial_{zz}\phi(k_\rho,z,z') + k_z^2\phi(k_\rho,z,z') = -\delta'(z-z'). \quad (38)$$

因此，根据叠加原理，方程（33）的解为:

$$\widehat{G}^{\hat{\mathbf{t}}}_{I^e} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\left[\mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{t}} - \hat{\mathbf{u}}\cdot\hat{\mathbf{t}}\partial_z\right]\widehat{G}^f(k_\rho,z,z'), \quad \widehat{G}^{\hat{\mathbf{t}}}_{V^h} = \hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{t}}\widehat{G}^f(k_\rho,z,z'). \quad (39)$$

将（39）代入（34），并利用方程（37）消去二阶导数，得

$$\widehat{G}^{\hat{\mathbf{t}}}_{V^e}=\frac{1}{k^2}\left[\mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{t}}\partial_z+k_z^2\hat{\mathbf{u}}\cdot\hat{\mathbf{t}}\right]\widehat{G}^f(k_\rho,z,z'),\quad \widehat{G}^{\hat{\mathbf{t}}}_{I^h}=\frac{\mathrm{i}\omega\epsilon}{k^2}\hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{t}}\partial_z\widehat{G}^f(k_\rho,z,z'). \tag{40}$$

此外，将表达式 (39)-(40) 代入 (32)，然后应用恒等式

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})=(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}^{\mathrm{T}})\mathbf{c}, \tag{41}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\mathbf{t}}}_{\mathbf{E}}=&\frac{1}{k^2}\left[k_z^2\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T+k^2\hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T-\mathrm{i}k_\rho\left(\mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T-(\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T+\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T)\partial_z\right)\right](\widehat{G}^f\hat{\mathbf{t}})\\&-\frac{\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T}{k^2}\hat{\mathbf{t}}\delta(z-z'),\end{aligned} \tag{42}$$

$$\widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\mathbf{t}}}_{\mathbf{H}}=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\left[\mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T-\hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T\partial_z-\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T\partial_z-\mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T\right](\widehat{G}^f\hat{\mathbf{t}}).$$

因此，并矢格林函数

$$\widehat{\mathbb{G}}^f_{\mathbf{E}}=\left[\widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\mathbf{x}}}_{\mathbf{E}},\widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\mathbf{y}}}_{\mathbf{E}},\widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\mathbf{z}}}_{\mathbf{E}}\right],\quad \widehat{\mathbb{G}}^f_{\mathbf{H}}=\left[\widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\mathbf{x}}}_{\mathbf{H}},\widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\mathbf{y}}}_{\mathbf{H}},\widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\mathbf{z}}}_{\mathbf{H}}\right] \tag{43}$$

可表示为

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{G}}^f_{\mathbf{E}}=&\frac{1}{k^2}\left[\mathrm{i}k_\rho(\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T+\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T)\partial_z+k_z^2\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T+k^2\hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T+k_\rho^2\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T\right]\widehat{G}^f\\&-\frac{\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T}{k^2}\delta(z-z'),\end{aligned} \tag{44}$$

$$\widehat{\mathbb{G}}^f_{\mathbf{H}}=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\left[\mathrm{i}k_\rho(\hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T-\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T)-(\hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T+\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T)\partial_z\right]\widehat{G}^f, \tag{45}$$

利用式 (37) 替换 (44) 中的 $\delta(z-z')$，并利用恒等式$\mathbb{I}=\hat{}\mathbf{u}\otimes\hat{}\mathbf{u}^T+\hat{}\mathbf{v}\otimes\hat{}\mathbf{v}^{\mathbf{T}}+\hat{}\mathbf{z}\otimes\hat{}\mathbf{z}^T$ 化简表达式，我们得到

$$\widehat{\mathbb{G}}^f_{\mathbf{E}}=\mathbb{I}\widehat{G}^f+\frac{1}{k^2}\left[\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T\partial_{zz}+\mathrm{i}k_\rho(\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T+\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T)\partial_z-k_\rho^2\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T\right]\widehat{G}^f. \tag{46}$$

接下来，我们将表达式（45）和（46）变换回物理域。利用（6）、（13）和（20），可以证明

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\nabla G^f\right]&=\left(\mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{u}}+\hat{\mathbf{z}}\partial_z\right)\widehat{G}^f,\quad \mathcal{F}\left[\nabla\times(G^f\hat{\mathbf{u}})\right]=\hat{\mathbf{v}}\partial_z\widehat{G}^f\\ \mathcal{F}\left[\nabla\times(G^f\hat{\mathbf{v}})\right]&=\left(\mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{z}}-\hat{\mathbf{u}}\partial_z\right)\widehat{G}^f,\quad \mathcal{F}\left[\nabla\times(G^f\hat{\mathbf{z}})\right]=-\mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{v}}\widehat{G}^f\\ \mathcal{F}[\nabla\nabla G^f]&=\left(\mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{u}}+\hat{\mathbf{z}}\partial_z\right)\otimes\left(\mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{u}}^T+\hat{\mathbf{z}}^T\partial_z\right)\widehat{G}^f\\&=\left[\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T\partial_{zz}+\mathrm{i}k_\rho(\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T+\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T)\partial_z-k_\rho^2\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T\right]\widehat{G}^f\\ \mathcal{F}[\nabla\times(G^f\mathbb{I})]&=\sum_{\hat{\mathbf{t}}=\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{v}},\hat{\mathbf{z}}}\mathcal{F}[\nabla\times(G^f\hat{\mathbf{t}})]\otimes\hat{\mathbf{t}}^T\\&=\left[-\mathrm{i}k_\rho(\hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T-\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T)+(\hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T+\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T)\partial_z\right]\widehat{G}^f.\end{aligned} \tag{47}$$

因此，并矢格林函数 (45) 和 (46) 可写为

$$\widehat{\mathbb{G}}^f_{\mathbf{E}}=\mathcal{F}\left[\left(\mathbb{I}+\frac{\nabla\nabla}{k^2}\right)G^f\right],\quad \widehat{\mathbb{G}}^f_{\mathbf{H}}=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\mathcal{F}\left[\nabla\times(G^f\mathbb{I})\right], \tag{48}$$

应用逆傅里叶变换 (12)，得到并矢格林函数 s

$$\mathbb{G}_{\mathbf{E}}^{f}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=-\mathrm{i}\omega\left(\mathbb{I}+\frac{\nabla\nabla}{k^{2}}\right)\mathbb{G}_{\mathbf{A}}^{f}(\mathbf{r},\mathbf{r}'),\quad \mathbb{G}_{\mathbf{H}}^{f}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbb{G}_{\mathbf{A}}^{f}(\mathbf{r},\mathbf{r}'). \tag{49}$$

with

$$\mathbb{G}_{\mathbf{A}}^{f}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega}G^{f}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbb{I}, \tag{50}$$

它们是带有点源（30）且满足洛伦兹规范的麦克斯韦方程的解（参见 [1]）。

如本章所述，TE/TM分解的本质在于通过切向分解与解耦，将矢量电磁问题（式（1）–（2））转化为标量方程（式（25a）–（26b））。该过程概述如下:

- 场分解：将电磁场拆分为水平分量和垂直分量，从而得到均匀介质中的耦合方程（式（9）–（10））。
- 谱变换：应用水平傅里叶变换（式（12）），将系统转换到频率-波数域（式（17）–（18））。
- 坐标重构与解耦：建立与傅里叶矢量$\mathbf{k}_{\rho}$对齐的水平旋转坐标系（式（20）），并推导 TE 波和 TM 波（式（17）和（21））以及场的 z 分量（式（19））的方程，进一步将方程（17）和（21）解耦，从而将问题简化为求解标量亥姆霍兹方程（式（25a）–（26b）或等价的式（27）–（28））。

2.3. 分层介质中麦克斯韦方程组的并矢格林函数。考虑一个沿 z 方向分为$L+1$层的介质，其中界面位于 $z=d_{\ell}$处， $\ell=0$、1、.....、 $L-1$。每层的介电常数和磁导率为 $\{\epsilon_{\ell},\mu_{\ell}\}_{\ell=0}^{L}$。定义第 ℓ 层中的波数为

$$k_{\ell}=\omega\sqrt{\epsilon_{\ell}\mu_{\ell}},\quad \ell=0,\cdots,L.$$

在此分层介质中，假设第 ℓ'-ˆ ˆ 层内存在一个定向赫兹电流源（30）。与点源 **J** 对应的并矢格林函数 $\mathbf{G}_{\mathbf{E}}^{\hat{\mathbf{t}}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ 和 $\mathbf{G}_{\mathbf{H}}^{\hat{\mathbf{t}}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ 是分段光滑函数，并满足

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{G}_{\mathbf{E}}^{\hat{\mathbf{t}}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=&-\mathrm{i}\omega\mu_{\ell}\mathbf{G}_{\mathbf{H}}^{\hat{\mathbf{t}}}(\mathbf{r},\mathbf{r}'),\quad d_{\ell}<z<d_{\ell-1},\\ \nabla\times\mathbf{G}_{\mathbf{H}}^{\hat{\mathbf{t}}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=&\mathrm{i}\omega\epsilon_{\ell}\mathbf{G}_{\mathbf{E}}^{\hat{\mathbf{t}}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')-\frac{\delta(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\mathrm{i}\omega\mu_{\ell'}}\widehat{\mathbf{t}}.\quad d_{\ell}<z<d_{\ell-1},\end{aligned} \tag{51}$$

在每一层中成立。跨越界面 $\{z=d_{\ell}\}_{\ell=0}^{L}$ 时，施加传输条件

$$[\![\mathbf{n}\times\mathbf{G}_{\mathbf{E}}^{\hat{\mathbf{t}}}]\!]=\mathbf{0},\quad [\![\mathbf{n}\cdot\varepsilon\mathbf{G}_{\mathbf{E}}^{\hat{\mathbf{t}}}]\!]=0,\quad [\![\mathbf{n}\times\mathbf{G}_{\mathbf{H}}^{\hat{\mathbf{t}}}]\!]=\mathbf{0},\quad [\![\mathbf{n}\cdot\mu\mathbf{G}_{\mathbf{H}}^{\hat{\mathbf{t}}}]\!]=0, \tag{52}$$

其中 $\mathbf{n}=\hat{\mathbf{z}}$， $[\![\cdot]\!]$ 表示分段光滑函数跨越界面时的跳跃，即

$$[\![f]\!]=\lim_{z\to d_{\ell}^{+}}f-\lim_{z\to d_{\ell}^{-}}f.$$

显然，我们可以在每一层中对麦克斯韦方程组（51）应用傅里叶变换和 TE/TM 分解技术。根据上述分析，每一层中并矢格林函数的傅里叶变换可表示为

$$\widehat{\mathbf{G}}_{\mathbf{E}}^{\hat{\mathbf{t}}}(k_x,k_y,z,z')=\hat{\mathbf{u}}V_{\ell\ell'}^{e,\hat{\mathbf{t}}}+\hat{\mathbf{v}}V_{\ell\ell'}^{h,\hat{\mathbf{t}}}+\hat{\mathbf{z}}\frac{\mathrm{i}k_{\rho}I_{\ell\ell'}^{e,\hat{\mathbf{t}}}}{\mathrm{i}\omega\epsilon_{\ell}}-\frac{\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^{T}}{k_{\ell}^{2}}\hat{\mathbf{t}}\delta_{\ell\ell'}\delta(z-z'),\quad d_{\ell}<z<d_{\ell-1}, \tag{53}$$

$$\widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\mathbf{t}}}_{\mathbf{H}}(k_x,k_y,z,z') = \hat{\mathbf{v}} I^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'} - \hat{\mathbf{u}} I^{h,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'} - \hat{\mathbf{z}} \frac{k_\rho V^{h,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}}{\omega\mu_\ell}, \quad d_\ell < z < d_{\ell-1}, \tag{54}$$

whe其中 $\{V^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}, I^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}, V^{h,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}, I^{h,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}\}_{\ell=0}^{L}$ 是在每一层中定义的函数，并满足y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 I^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}}{\partial z^2} + k_{\ell z}^2 I^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'} &= -\frac{k_\rho}{\omega\mu_{\ell'}} \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{t}}\,\delta_{\ell\ell'}\delta(z-z') + \frac{\hat{\mathbf{u}}\cdot\hat{\mathbf{t}}}{\mathrm{i}\omega\mu_{\ell'}}\delta_{\ell\ell'}\delta'(z-z'),\\
\frac{\partial^2 V^{h,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}}{\partial z^2} + k_{\ell z}^2 V^{h,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'} &= -\hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{t}}\,\delta_{\ell\ell'}\delta(z-z'),
\end{aligned} \tag{55}$$

and

$$V^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'} = \frac{\mathrm{i}\omega\mu_\ell}{k_\ell^2}\left[\frac{\partial I^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}}{\partial z} - \frac{\hat{\mathbf{u}}\cdot\hat{\mathbf{t}}}{\mathrm{i}\omega\mu_{\ell'}}\delta_{\ell\ell'}\delta(z-z')\right], \quad I^{h,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'} = \frac{\mathrm{i}\omega\epsilon_\ell}{k_\ell^2}\frac{\partial V^{h,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}}{\partial z}, \tag{56}$$

对于 $d_\ell < z < d_{\ell-1}$。在本文中，

$$k_{\ell z} = \sqrt{k_\ell^2 - k_\rho^2}, \tag{57}$$

支割线为 $\Im(k_{\ell z}) \geq 0$，下标 ℓ 和 ℓ' 分别表示源层和目标层的索引。

现在，我们使用界面条件 (52) 推导关于 $I^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}, V^{h,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}$ 的频域对应式为

$$[\![\mathbf{n}\times\widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\mathbf{t}}}_{\mathbf{E}}]\!] = \mathbf{0}, \quad [\![\mathbf{n}\cdot\varepsilon\widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\mathbf{t}}}_{\mathbf{E}}]\!] = 0, \quad [\![\mathbf{n}\times\widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\mathbf{t}}}_{\mathbf{H}}]\!] = \mathbf{0}, \quad [\![\mathbf{n}\cdot\mu\widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\mathbf{t}}}_{\mathbf{H}}]\!] = 0. \tag{58}$$

将表达式 (53) 代入 $\mathbf{G}^{\mathbf{t}}_{\mathbf{E}}$ 的界面条件，可得

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{z}}\times\Big(V^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}\hat{\mathbf{u}} + V^{h,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}\hat{\mathbf{v}} + \frac{k_\rho}{\omega\epsilon_\ell} I^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}\hat{\mathbf{z}} - V^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell-1,\ell'}\hat{\mathbf{u}} - V^{h,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell-1,\ell'}\hat{\mathbf{v}} - \frac{k_\rho}{\omega\epsilon_{\ell-1}} I^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell-1,\ell'}\hat{\mathbf{z}}\Big) = 0,\\
\hat{\mathbf{z}}\cdot\Big[\epsilon_\ell\Big(V^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}\hat{\mathbf{u}} + V^{h,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}\hat{\mathbf{v}} + \frac{k_\rho}{\omega\epsilon_\ell} I^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}\hat{\mathbf{z}}\Big) - \epsilon_{\ell-1}\Big(V^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell-1,\ell'}\hat{\mathbf{u}} + V^{h,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell-1,\ell'}\hat{\mathbf{v}} + \frac{k_\rho}{\omega\epsilon_{\ell-1}} I^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell-1,\ell'}\hat{\mathbf{z}}\Big)\Big] = 0,
\end{aligned}$$

i.e.

$$V^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell-1,\ell'}\hat{\mathbf{v}} - V^{h,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell-1,\ell'}\hat{\mathbf{u}} - V^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}\hat{\mathbf{v}} + V^{h,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}\hat{\mathbf{u}} = 0, \quad I^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell-1,\ell'} - I^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'} = 0, \quad \ell = 1,2,\cdots,L.$$

显然，传输条件已解耦。定义分段光滑函数

$$\begin{aligned}
V^{e,\hat{\mathbf{t}}}(k_x,k_y,z,z') &= V^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}(k_x,k_y,z,z'), \quad I^{e,\hat{\mathbf{t}}}(k_x,k_y,z,z') = I^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}(k_x,k_y,z,z'), \quad d_\ell < z < d_{\ell-1},\\
V^{h,\hat{\mathbf{t}}}(k_x,k_y,z,z') &= V^{h,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}(k_x,k_y,z,z'), \quad I^{h,\hat{\mathbf{t}}}(k_x,k_y,z,z') = I^{h,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}(k_x,k_y,z,z'), \quad d_\ell < z < d_{\ell-1},
\end{aligned}$$

We have interface conditions for $V^{e,\hat{\mathbf{t}}}$ and $V^{h,\hat{\mathbf{t}}}$ as follows

$$[\![V^{e,\hat{\mathbf{t}}}]\!] = 0, \quad [\![V^{h,\hat{\mathbf{t}}}]\!] = 0, \quad [\![I^{e,\hat{\mathbf{t}}}]\!] = 0, \quad z = d_{\ell-1}, \quad \ell = 1,2,\cdots,L. \tag{59}$$

同样，$\mathbf{G}^{\mathbf{t}}_{\mathbf{H}}$ 的透射条件给出

$$\hat{\mathbf{z}}\times\Big(-I^{h,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}\hat{\mathbf{u}} + I^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}\hat{\mathbf{v}} - \frac{k_\rho}{\omega\mu_\ell} V^{h,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'}\hat{\mathbf{z}} + I^{h,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell-1,\ell'}\hat{\mathbf{u}} - I^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell-1,\ell'}\hat{\mathbf{v}} + \frac{k_\rho}{\omega\mu_{\ell-1}} V^{h,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell-1,\ell'}\hat{\mathbf{z}}\Big) = 0,$$

i.e.

$$[\![I^{h,\hat{\mathbf{t}}}]\!] = 0, \quad [\![I^{e,\hat{\mathbf{t}}}]\!] = 0, \quad [\![V^{h,\hat{\mathbf{t}}}]\!] = 0, \quad z = d_{\ell-1}, \quad \ell = 1,2,\cdots,L. \tag{60}$$

此外，将定义 (56) 与 (59) 中关于 $I^{e,\hat{\mathbf{t}}}, V^{h,\hat{\mathbf{t}}}$ 的界面条件结合，可得

$$\left[\!\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial V^{h,\hat{\mathbf{t}}}}{\partial z}\right]\!\right]=0,\ \left[\!\left[\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial I^{e,\hat{\mathbf{t}}}}{\partial z}\right]\!\right]=0,\quad z=d_{\ell-1},\quad \ell=1,2,\cdots,L. \tag{61}$$

总之，我们得到了两个界面问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 I^{e,\hat{\mathbf{t}}}}{\partial z^2}+k_{\ell z}^2 I^{e,\hat{\mathbf{t}}}=-\dfrac{k_\rho}{\omega\mu_{\ell'}}\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{t}}\delta_{\ell\ell'}\delta(z-z')+\dfrac{\hat{\mathbf{u}}\cdot\hat{\mathbf{t}}}{\mathrm{i}\omega\mu_{\ell'}}\delta_{\ell\ell'}\delta'(z-z'),\quad d_\ell<z<d_{\ell-1}\\ [\![I^{e,\hat{\mathbf{t}}}]\!]=0,\quad \left[\!\left[\dfrac{1}{\epsilon}\dfrac{\partial I^{e,\hat{\mathbf{t}}}}{\partial z}\right]\!\right]=0,\quad \text{at}\ \ z=d_\ell,\ \ \ell=0,1,\cdots,L-1,\end{cases} \tag{62}$$

and

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 V^{h,\hat{\mathbf{t}}}}{\partial z^2}+k_{\ell z}^2 V^{h,\hat{\mathbf{t}}}=-\hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{t}}\delta_{\ell\ell'}\delta(z-z'),\quad d_\ell<z<d_{\ell-1}\\ [\![V^{h,\hat{\mathbf{t}}}]\!]=0,\quad \left[\!\left[\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial V^{h,\hat{\mathbf{t}}}}{\partial z}\right]\!\right]=0,\quad \text{at}\ \ z=d_\ell,\ \ \ell=0,1,\cdots,L-1,\end{cases} \tag{63}$$

对于 $I^{e,\hat{\mathbf{t}}}$ 以及 $V^{h,\hat{\mathbf{t}}}$，并在最上层和最下层满足出射条件。为求解问题 (62)-(63)，我们引入以下界面问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 \widehat{G}_1(k_\rho,z,z')}{\partial z^2}+k_{\ell z}^2\widehat{G}_1(k_\rho,z,z')=-\delta(z-z'),\quad d_\ell<z<d_{\ell-1},\\ [\![\widehat{G}_1(k_\rho,z,z')]\!]=0,\quad \left[\!\left[\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial\widehat{G}_1(k_\rho,z,z')}{\partial z}\right]\!\right]=0,\end{cases} \tag{64}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 \widehat{G}_2(k_\rho,z,z')}{\partial z^2}+k_{\ell z}^2\widehat{G}_2(k_\rho,z,z')=-\delta(z-z'),\quad d_\ell<z<d_{\ell-1},\\ [\![\widehat{G}_2(k_\rho,z,z')]\!]=0,\quad \left[\!\left[\dfrac{1}{\epsilon}\dfrac{\partial\widehat{G}_2(k_\rho,z,z')}{\partial z}\right]\!\right]=0,\end{cases} \tag{65}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 \widehat{G}_3(k_\rho,z,z')}{\partial z^2}+k_{\ell z}^2\widehat{G}_3(k_\rho,z,z')=-\delta'(z-z'),\quad d_\ell<z<d_{\ell-1},\\ [\![\widehat{G}_3(k_\rho,z,z')]\!]=0,\quad \left[\!\left[\dfrac{1}{\epsilon}\dfrac{\partial\widehat{G}_3(k_\rho,z,z')}{\partial z}\right]\!\right]=0.\end{cases} \tag{66}$$

显然，问题 (64) 和 (65) 是分层介质中含点源的亥姆霍兹方程的傅里叶变换。其解析解可求得，详细推导见附录 A。问题 (66) 的解析解可由问题 (65) 的解导出。事实上，对等式两边以及 (65) 中的跳跃条件关于 z' 求导，可得

$$(\partial_{zz}+k_{\ell z}^2)(\partial_{z'}G_2(k_\rho,z,z'))=\frac{\mathrm{i}}{\mu\omega}\delta'(z-z') \tag{67}$$

and

$$[\![\partial_{z'}G_2(k_\rho,z,z')]\!]=0,\quad \left[\!\left[\frac{1}{\varepsilon}\partial_z\partial_{z'}G_2(k_\rho,z,z')\right]\!\right]=0, \tag{68}$$

这意味着

$$G_3(k_\rho,z,z')=-\partial_{z'}G_2(k_\rho,z,z').$$

一般而言，我们有

$$\begin{aligned}
\widehat{G}_1(k_\rho,z,z') &= \delta_{\ell\ell'}\widehat{G}^f(k_\rho,z,z') + \frac{\mathrm{i}}{2k_{\ell' z}}\sum_{*,\star=\uparrow,\downarrow}\phi^{**}_{\ell\ell'}(k_\rho)Z^{**}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z'),\\
\widehat{G}_2(k_\rho,z,z') &= \delta_{\ell\ell'}\widehat{G}^f(k_\rho,z,z') + \frac{\mathrm{i}}{2k_{\ell' z}}\sum_{*,\star=\uparrow,\downarrow}\psi^{**}_{\ell\ell'}(k_\rho)Z^{**}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z'),\\
\widehat{G}_3(k_\rho,z,z') &= \delta_{\ell\ell'}\partial_z\widehat{G}^f(k_\rho,z,z') + \frac{1}{2}\sum_{*,\star=\uparrow,\downarrow}s^{\star\star}_{\ell\ell'}\psi^{**}_{\ell\ell'}(k_\rho)Z^{**}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z'),
\end{aligned} \tag{69}$$

对于 $d_\ell < z < d_{\ell-1}$，指数函数 $Z^{**}_{\ell\ell'}(k_\rho,\ z,\ z')$、密度 $\phi^{**}_{\ell\ell'}(k_\rho)$、 $\psi^{**}_{\ell\ell'}(k_\rho)$ 的表达式已汇总于附录 A，符号 $s^{\star\star}_{\ell\ell'}$ 定义如下

$$s^{*\downarrow}_{\ell\ell'} = \begin{cases} 1, & \ell \le \ell', \\ -1, & \ell > \ell', \end{cases}, \quad s^{*\uparrow}_{\ell\ell'} = \begin{cases} 1, & \ell < \ell', \\ -1, & \ell \ge \ell', \end{cases} \quad * = \uparrow,\downarrow . \tag{70}$$

根据叠加原理，可得

$$I^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu_{\ell'}}\left[\mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{t}}\widehat{G}_2 - \hat{\mathbf{u}}\cdot\hat{\mathbf{t}}\widehat{G}_3\right], \quad V^{h,\hat{\mathbf{t}}} = \hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{t}}\widehat{G}_1.$$

代入方程 (56) 得

$$I^{h,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'} = \hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{t}}\frac{\mathrm{i}\omega\epsilon_\ell}{k_\ell^2}\frac{\partial\widehat{G}_1}{\partial z}, \quad V^{e,\hat{\mathbf{t}}}_{\ell\ell'} = \frac{\mu_\ell}{\mu_{\ell'}k_\ell^2}\left[\mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{t}}\frac{\partial\widehat{G}_2}{\partial z} - \hat{\mathbf{u}}\cdot\hat{\mathbf{t}}\frac{\partial\widehat{G}_3}{\partial z}\right] - \hat{\mathbf{u}}\cdot\hat{\mathbf{t}}\frac{\delta(z-z')}{k_{\ell'}^2}.$$

然后，将这些系数代入 (53)-(54)，可得

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\mathbf{t}}}_{\mathbf{E}} =& \frac{\mu_\ell}{\mu_{\ell'}k_\ell^2}\left[-\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T\frac{\partial\widehat{G}_3}{\partial z} + \mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T\frac{\partial\widehat{G}_2}{\partial z} + \mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T\widehat{G}_3 + k_\rho^2\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T\widehat{G}_2\right]\hat{\mathbf{t}}\\
&+ (\hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T)\hat{\mathbf{t}}\widehat{G}_1 - \left[\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T + \hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T\right]\hat{\mathbf{t}}\frac{\delta(z-z')}{k_\ell^2},
\end{aligned}$$

and

$$\widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\mathbf{t}}}_{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu_{\ell'}}\left[-\hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T\widehat{G}_3 + \mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T\widehat{G}_2\right]\hat{\mathbf{t}} - \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu_\ell}\left[-\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T\frac{\partial\widehat{G}_1}{\partial z} + \mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T\widehat{G}_1\right]\hat{\mathbf{t}}.$$

此外，并矢格林函数

$$\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{E}} = \left[\widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\mathbf{x}}}_{\mathbf{E}} \quad \widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\mathbf{y}}}_{\mathbf{E}} \quad \widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\mathbf{z}}}_{\mathbf{E}}\right], \quad \widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{H}} = \left[\widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\mathbf{x}}}_{\mathbf{H}}, \widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\mathbf{y}}}_{\mathbf{H}}, \widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\mathbf{z}}}_{\mathbf{H}}\right]$$

具有表达式

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{E}} =& \frac{\mu_\ell}{\mu_{\ell'}k_\ell^2}\left[-\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T\frac{\partial\widehat{G}_3}{\partial z} + \mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T\frac{\partial\widehat{G}_2}{\partial z} + \mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T\widehat{G}_3 + k_\rho^2\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T\widehat{G}_2\right]\\
&+ \hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T\widehat{G}_1 - \left[\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T + \hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T\right]\frac{\delta(z-z')}{k_{\ell'}^2},
\end{aligned} \tag{71}$$

and

$$\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu_{\ell'}}\left[-\hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T\widehat{G}_3 + \mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T\widehat{G}_2\right] - \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu_\ell}\left[-\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T\frac{\partial\widehat{G}_1}{\partial z} + \mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T\widehat{G}_1\right], \tag{72}$$

。注意,

$$\partial_{zz}\widehat{G}^f + k_{\ell z}^2\widehat{G}^f = -\delta(z-z'), \tag{73}$$

结合表达式（69），可得

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{E}} =&\delta_{\ell\ell'}\Big[\mathbb{I} + \frac{1}{k_\ell^2}(\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T)\partial_{zz} + \frac{\mu_\ell}{\mu_{\ell'}k_\ell^2}[\mathrm{i}k_\rho[(\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T)+(\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T)]\partial_z + k_\rho^2(\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T)\Big]\widehat{G}^f \\
&+ \frac{\mathrm{i}}{2k_{\ell' z}}\sum_{*,\star=\uparrow,\downarrow}\frac{\mu_\ell}{\mu_{\ell'}k_\ell^2}\Big\{\Big[k_{\ell' z}(s_{\ell\ell'}^{\star\star}k_\rho(\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T) - s_{\ell\ell}^{**}k_{\ell z}(\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T)) \\
&+ k_\rho[k_\rho(\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T) - s_{\ell\ell}^{**}k_{\ell z}(\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T)]\Big]\psi_{\ell\ell'}^{\star\star} + (\hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T)\phi_{\ell\ell'}^{\star\star}\Big\}Z_{\ell\ell'}^{\star\star} \\
=&\delta_{\ell\ell'}[\widehat{G}^f\mathbb{I} + \mathcal{F}[\nabla\nabla G^f]] + \frac{\mathrm{i}}{2k_{\ell' z}}\sum_{*,\star=\uparrow,\downarrow}\mathbf{\Theta}_{\mathbf{E},\ell\ell'}^{\star\star}(k_x,k_y)Z_{\ell\ell'}^{\star\star}(k_\rho,z,z')
\end{aligned} \tag{74}$$

and

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{H}} =&\frac{\delta_{\ell\ell'}}{\mathrm{i}\omega\mu_{\ell'}}\left[\mathrm{i}k_\rho\left(\hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T - \hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T\right) - \left(\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T + \hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T\right)\partial_z\right]\widehat{G}^f \\
&+ \frac{1}{2\omega\mu_\ell k_{\ell' z}}\sum_{*,\star=\uparrow,\downarrow}\Big[\left(\mathrm{i}k_{\ell z}s_{\ell\ell'}^{**}\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T - \mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T\right)\phi_{\ell\ell'}^{\star\star}(k_\rho) \\
&+ \frac{\mu_\ell}{\mu_{\ell'}}\left(\mathrm{i}k_{\ell' z}s_{\ell\ell'}^{\star\star}\hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T + \mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T\right)\psi_{\ell\ell'}^{**}\Big]Z_{\ell\ell'}^{\star\star}(k_\rho,z,z') \\
=&\delta_{\ell\ell'}\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{H}}^f + \frac{1}{2\omega\mu_\ell k_{\ell' z}}\sum_{*,\star=\uparrow,\downarrow}\Theta_{\mathbf{H},\ell\ell'}^{**}(k_x,k_y)Z_{\ell\ell'}^{\star\star}(k_\rho,z,z')
\end{aligned} \tag{75}$$

其中，电磁场的新密度定义如下

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mathbf{E},\ell\ell'}^{\star\star} =&\hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T\phi_{\ell\ell'}^{\star\star} + \frac{\mu_\ell}{\mu_{\ell'}k_\ell^2}\left[s_{\ell'\ell'}^{\star\star}k_{\ell' z}\left(-s_{\ell\ell}^{**}k_{\ell z}\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T + k_\rho\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T\right)\right. \\
&\left. - s_{\ell\ell}^{**}k_\rho k_{\ell z}\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T + k_\rho^2\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T\right]\psi_{\ell\ell'}^{**}, \\
\Theta_{\mathbf{H},\ell\ell'}^{**} =&\left(\mathrm{i}k_{\ell z}s_{\ell\ell}^{**}\hat{\mathbf{u}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T - \mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{z}}\otimes\hat{\mathbf{v}}^T\right)\phi_{\ell\ell'}^{\star\star} + \frac{\mu_\ell}{\mu_{\ell'}}\left(\mathrm{i}k_{\ell' z}s_{\ell'\ell'}^{\star\star}\hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{u}}^T + \mathrm{i}k_\rho\hat{\mathbf{v}}\otimes\hat{\mathbf{z}}^T\right)\psi_{\ell\ell'}^{**},
\end{aligned} \tag{76}$$

对于 $*$，$\star=\uparrow$，$\downarrow$。进行逆傅里叶变换可得

$$\mathbb{G}_{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta_{\ell\ell'}\mathbb{G}_{\mathbf{E}}^f(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \mathbb{G}_{\mathbf{E}}^r(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \quad \mathbb{G}_{\mathbf{H}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta_{\ell\ell'}\mathbb{G}_{\mathbf{H}}^f(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \mathbb{G}_{\mathbf{H}}^r(\mathbf{r},\mathbf{r}'). \tag{77}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_{\mathbf{E}}^r(\mathbf{r},\mathbf{r}') =&\frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\sum_{*,\star=\uparrow,\downarrow}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Theta_{\mathbf{E},\ell\ell'}^{\star\star}(k_\rho)Z_{\ell\ell'}^{\star\star}(k_\rho,z,z')\frac{e^{\mathrm{i}\mathbf{k}_\rho\cdot\boldsymbol{\rho}}}{k_{\ell' z}}dk_xdk_y, \\
\mathbb{G}_{\mathbf{H}}^r(\mathbf{r},\mathbf{r}') =&\frac{1}{8\pi^2\omega\mu_\ell}\sum_{*,\star=\uparrow,\downarrow}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Theta_{\mathbf{H},\ell\ell'}^{\star\star}(k_\rho)Z_{\ell\ell'}^{\star\star}(k_\rho,z,z')\frac{e^{\mathrm{i}\mathbf{k}_\rho\cdot\boldsymbol{\rho}}}{k_{\ell' z}}dk_xdk_y
\end{aligned} \tag{78}$$

以及 $\boldsymbol{\rho}=(x-x',\ y-y')$。

3. 使用矩阵基计算分层介质中麦克斯韦方程组的并矢格林函数

在本节中，我们简化 [9] 中给出的推导，并将所得表述与上一节回顾的著名 TE/TM表述进行比较。

3.1. 并矢矢势。 考虑界面问题 (51)-(52) 的并矢形式 $\hat{}$，其中$\mathbf{t} = \mathbb{I}$。并矢矢势

$$\mathbb{G}_{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\mathbf{A}}^{\hat{\mathbf{x}}} & \mathbf{G}_{\mathbf{A}}^{\hat{\mathbf{y}}} & \mathbf{G}_{\mathbf{A}}^{\hat{\mathbf{z}}} \end{bmatrix}$$

满足

$$\nabla^2 \mathbb{G}_{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 \mathbb{G}_{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\mathrm{i}\omega} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbb{I} \quad d_\ell < z < d_{\ell-1},\ \ell = 1, 2, \cdots, L. \tag{79}$$

此外，施加洛伦兹规范，可得

$$\mathbb{G}_{\mathbf{E}} = -\mathrm{i}\omega \left(\mathbb{I} + \frac{\nabla\nabla}{k^2} \right) \mathbb{G}_{\mathbf{A}}, \quad \mathbb{G}_{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbb{G}_A, \quad d_\ell < z < d_{\ell-1},\ \ell = 1, 2, \cdots, L. \tag{80}$$

回顾方程 (79) 的右端非平凡，当且仅当$\mathbf{r}$ 与$\mathbf{r}$位于同一层，即 $\ell = \ell'$。定义

$$\mathbb{G}_{\mathbf{A}}^r(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} \mathbb{G}_{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \mathbb{G}_{\mathbf{A}}^f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & \text{if } \ \ell = \ell', \\ \mathbb{G}_{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{81}$$

其中， $\mathbb{G}^f{}_{\mathbf{A}}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')$ 是式（50）中定义的自由空间矢势并矢格林函数。于是， $\mathbb{G}_{\mathbf{A}}^r$ 满足齐次亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \mathbb{G}_{\mathbf{A}}^r(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + k_\ell^2 \mathbb{G}_{\mathbf{A}}^r(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathbf{0}, \quad d_\ell < z < d_{\ell-1}, \tag{82}$$

在每一层中。在傅里叶谱域中，该方程变换为

$$\partial_{zz} \widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}^r(k_x, k_y, z, z') + k_{\ell z}^2 \widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}^r(k_x, k_y, z, z') = \mathbf{0}, \quad d_\ell < z < d_{\ell-1}. \tag{83}$$

将式（83）视为关于 z 的常微分方程时，其通解为

$$\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}^r(k_x, k_y, z, z') = \widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell'}^{\uparrow}(k_x, k_y, z') e^{\mathrm{i}k_{\ell z}(z - d_\ell)} + \widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell'}^{\downarrow}(k_x, k_y, z') e^{\mathrm{i}k_{\ell z}(d_{\ell-1} - z)}, \quad d_\ell < z < d_{\ell-1}, \tag{84}$$

其中， $\{\widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell'}^{\uparrow}(k_x, k_y, z')$ $\widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell'}^{\downarrow}(k_x, k_y, z')\}$为待定系数，由界面条件和无穷远处的出射边界条件确定；向上/向下箭头表示目标点处的波传播方向。

由于解（84）在 $k_\rho \to \infty$ 趋于无穷时必须保持有界，因此

$$\widehat{\mathbb{G}}_{0\ell'}^{\downarrow}(k_x, k_y, z') = \mathbf{0}, \quad \widehat{\mathbb{G}}_{L\ell'}^{\uparrow}(k_x, k_y, z') = \mathbf{0}. \tag{85}$$

实际上，我们也可以将 $\widehat{\mathbb{G}}^f{}_{\mathbf{A}} = \frac{-\mathbb{I}}{2\omega k_{\ell' z}} e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}|z - z'|}$ 改写为类似的形式，即

$$\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}^f = -\frac{\mathbb{I}}{2\omega k_{\ell' z}} \left[e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}(z - z')} H(z - z') + e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}(z' - z)} H(z' - z) \right] \tag{86}$$

其中

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

$\widehat{}$是赫维赛德函数。因此， $\mathbb{G}_{\mathbf{A}}$ 可分解为：

$$\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}(k_x,k_y,z,z')=\widehat{\mathbb{G}}^{r}_{\mathbf{A}}+\widehat{\mathbb{G}}^{f}_{\mathbf{A}}=\widehat{\mathbb{G}}^{\uparrow}_{\mathbf{A}}(k_x,k_y,z,z')+\widehat{\mathbb{G}}^{\downarrow}_{\mathbf{A}}(k_x,k_y,z,z'),\tag{87}$$

其中

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{G}}^{\uparrow}_{\mathbf{A}}(k_x,k_y,z,z')&=\widehat{\mathbb{G}}^{\uparrow}_{\ell\ell'}(k_x,k_y,z')e^{\mathrm{i}k_{\ell z}(z-d_\ell)}-\frac{\delta_{\ell\ell'}H(z-z')\mathbb{I}}{2\omega k_{\ell' z}}e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}(z-z')},\\ \widehat{\mathbb{G}}^{\downarrow}_{\mathbf{A}}(k_x,k_y,z,z')&=\widehat{\mathbb{G}}^{\downarrow}_{\ell\ell'}(k_x,k_y,z')e^{\mathrm{i}k_{\ell z}(d_{\ell-1}-z)}-\frac{\delta_{\ell\ell'}H(z'-z)\mathbb{I}}{2\omega k_{\ell' z}}e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}(z'-z)},\end{aligned}\tag{88}$$

对于 $d_\ell<z<d_{\ell-1}$。克罗内克符号 $\delta_{\ell\ell'}$ 源于自由空间分量$\mathbb{G}^{f}{}_{\mathbf{A}}$ 仅存在于源层这一事实。

在频域中，我们使用记号 $(k_\rho,\ \alpha)$ 表示 $(k_x,\ k_y)$ 的极坐标，并且 $\widehat{\nabla}=[\mathrm{i}k_x\ \mathrm{i}k_y\ \ \partial_z]^{\mathrm{T}}$、$\widehat{\nabla}\widehat{\nabla}$、 $\widehat{\nabla}^2$分别指 $\widehat{\nabla}\widehat{\nabla}^{\mathrm{T}}$、 $\widehat{\nabla}^{\mathrm{T}}\widehat{\nabla}$。因此，对（80）进行傅里叶变换可得

$$\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{E}}=-\mathrm{i}\omega\left(\mathbb{I}+\frac{\widehat{\nabla}\widehat{\nabla}}{k_\ell^2}\right)\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}},\quad \widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{H}}=\frac{1}{\mu_\ell}\widehat{\nabla}\times\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}},\quad d_\ell<z<d_{\ell-1},\ \ell=1,2,\cdots,L.\tag{89}$$

界面条件（58）意味着

$$[\![\mathbf{n}\times\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{E}}]\!]=\mathbf{0},\quad [\![\mathbf{n}\cdot\epsilon\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{E}}]\!]=0,\quad [\![\mathbf{n}\times\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{H}}]\!]=\mathbf{0},\quad [\![\mathbf{n}\cdot\mu\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{H}}]\!]=0.\tag{90}$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$**3.2. 矩阵基。** (89) 中的公式表明， $\mathbb{G}_{\mathbf{E}}$ 和 $\mathbb{G}_{\mathbf{H}}$ 只是$\widehat{}$若干 3×3 矩阵与 $\mathbb{G}_{\mathbf{A}}$ 的乘积。为了更好地理解这些矩阵，我们引入以下矩阵基

$$\begin{aligned}&\mathbb{J}_1=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix},\ \mathbb{J}_2=\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{bmatrix},\ \mathbb{J}_3=\begin{bmatrix}0&0&\mathrm{i}k_x\\0&0&\mathrm{i}k_y\\0&0&0\end{bmatrix},\\ &\mathbb{J}_4=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\mathrm{i}k_x&\mathrm{i}k_y&0\end{bmatrix},\ \mathbb{J}_5=\begin{bmatrix}-k_x^2&-k_xk_y&0\\-k_xk_y&-k_y^2&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \mathbb{J}_6=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-\mathrm{i}k_y&\mathrm{i}k_x&0\end{bmatrix},\\ &\mathbb{J}_7=\begin{bmatrix}0&0&\mathrm{i}k_y\\0&0&-\mathrm{i}k_x\\0&0&0\end{bmatrix},\ \mathbb{J}_8=\begin{bmatrix}k_xk_y&k_y^2&0\\-k_x^2&-k_xk_y&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \mathbb{J}_9=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{91}$$

显然，这些矩阵的乘积遵循下表

$\times$	$\mathbb{J}_1$	$\mathbf{J}_2$	$\mathbb{J}_3$	$\mathbb{J}_4$	$\mathbb{J}_5$	$\mathbb{J}_6$	$\mathbb{J}_7$	$\mathbb{J}_8$	$\mathbb{J}_9$
$\mathbb{J}_1$	$\mathbb{J}_1$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_3$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_5$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_7$	$\mathbb{J}_8$	$\mathbb{J}_9$
$\mathbb{J}_2$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_2$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_4$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_6$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbb{J}_3$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_3$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_5$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_8 - k_\rho^2\mathbb{J}_9$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbb{J}_4$	$\mathbb{J}_4$	$\mathbf{0}$	$-k_\rho^2\mathbb{J}_2$	$\mathbf{0}$	$-k_\rho^2\mathbb{J}_4$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_6$
$\mathbb{J}_5$	$\mathbb{J}_5$	$\mathbf{0}$	$-k_\rho^2\mathbb{J}_3$	$\mathbf{0}$	$-k_\rho^2\mathbb{J}_5$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_8 - k_\rho^2\mathbb{J}_9$
$\mathbb{J}_6$	$\mathbb{J}_6$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$k_\rho^2\mathbb{J}_2$	$-k_\rho^2\mathbb{J}_4$	$-\mathbb{J}_4$
$\mathbb{J}_7$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_7$	$\mathbf{0}$	$-\mathbb{J}_8$	$\mathbf{0}$	$k_\rho^2\mathbb{J}_1 + \mathbb{J}_5$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbb{J}_8$	$\mathbb{J}_8$	$\mathbf{0}$	$k_\rho^2\mathbb{J}_7$	$\mathbf{0}$	$-k_\rho^2\mathbb{J}_8$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$-k_\rho^2\mathbb{J}_1 - \mathbb{J}_5$
$\mathbb{J}_9$	$\mathbb{J}_9$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_7$	$\mathbf{0}$	$-\mathbb{J}_8$	$\mathbf{0}$	$-\mathbb{J}_3$	$\mathbb{J}_5$	$-\mathbb{J}_1$

(92)

我们的目标是使用这些基矩阵和 $k_x - k_y$ 对称系数来表示并矢格林函数 $\mathbb{G}_{\mathbf{E}}$ 和 $\mathbb{G}_{\mathbf{H}}$。

注意

$$\widehat{\nabla}\widehat{\nabla} = \mathbb{J}_2\partial_{zz}^2 + (\mathbb{J}_3 + \mathbb{J}_4)\partial_z + \mathbb{J}_5. \tag{93}$$

我们有如下表示

$$\widehat{\nabla}\times = \mathbb{J}_6 + \mathbb{J}_7 - \mathbb{J}_9\partial_z, \quad \Big(\mathbb{I} + \frac{\widehat{\nabla}\widehat{\nabla}}{k_\ell^2}\Big) = \mathbb{I} + \frac{1}{k_\ell^2}(\mathbb{J}_2\partial_{zz}^2 + (\mathbb{J}_3 + \mathbb{J}_4)\partial_z + \mathbb{J}_5), \tag{94}$$

此外，给定任意函数 $f(k_x,\ k_y,\ z,\ z')$，利用表（92）直接计算可得

$$\begin{aligned}
&\widehat{\nabla}\times(f\mathbb{J}_1) = f\mathbb{J}_6 - \partial_z f\mathbb{J}_9, \quad \widehat{\nabla}\times(f\mathbb{J}_2) = f\mathbb{J}_7, \quad \widehat{\nabla}\times(f\mathbb{J}_3) = -\partial_z f\mathbb{J}_7,\\
&\widehat{\nabla}\times(f\mathbb{J}_4) = -f\mathbb{J}_8, \quad \widehat{\nabla}\times(f\mathbb{J}_5) = \partial_z f\mathbb{J}_8,
\end{aligned} \tag{95}$$

and

$$\begin{aligned}
\Big(\mathbb{I} + \frac{\widehat{\nabla}\widehat{\nabla}}{k_\ell^2}\Big)(f\mathbb{J}_1) &= f\mathbb{J}_1 + \frac{1}{k_\ell^2}\partial_z f\mathbb{J}_4 + \frac{1}{k_\ell^2}f\mathbb{J}_5,\\
\Big(\mathbb{I} + \frac{\widehat{\nabla}\widehat{\nabla}}{k_\ell^2}\Big)(f\mathbb{J}_2) &= \Big(f + \frac{1}{k_\ell^2}\partial_{zz}^2 f\Big)\mathbb{J}_2 + \frac{1}{k_\ell^2}\partial_z f\mathbb{J}_3,\\
\Big(\mathbb{I} + \frac{\widehat{\nabla}\widehat{\nabla}}{k_\ell^2}\Big)(f\mathbb{J}_3) &= -\frac{k_\rho^2}{k_\ell^2}\partial_z f\mathbb{J}_2 + \frac{k_{\ell z}^2}{k_\ell^2}f\mathbb{J}_3,\\
\Big(\mathbb{I} + \frac{\widehat{\nabla}\widehat{\nabla}}{k_\ell^2}\Big)(f\mathbb{J}_4) &= \Big(f + \frac{1}{k_\ell^2}\partial_{zz}^2 f\Big)\mathbb{J}_4 + \frac{1}{k_\ell^2}\partial_z f\mathbb{J}_5,\\
\Big(\mathbb{I} + \frac{\widehat{\nabla}\widehat{\nabla}}{k_\ell^2}\Big)(f\mathbb{J}_5) &= -\frac{k_\rho^2}{k_\ell^2}\partial_z f\mathbb{J}_4 + \frac{k_{\ell z}^2}{k_\ell^2}f\mathbb{J}_5.
\end{aligned} \tag{96}$$

3.3. 使用矩阵基表示 $\mathbb{G}_{\mathbf{A}}$。根据介质沿 z 方向分层的假设，界面上的法向为 $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z = [0,0,1]^{\mathrm{T}}$。对于任意给定的 3×3 张量 $\mathbb{F}$，有

$$\mathbf{e}_z \times \mathbb{F} = \begin{bmatrix} -F_{21} & -F_{22} & -F_{23} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_z \cdot \mathbb{F} = \begin{bmatrix} F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \tag{97}$$

因此，界面条件 (90) 实际上是指 $\mathbb{G}_{\mathbf{E}}$ 和 $\mathbb{G}_{\mathbf{H}}$ 的第一行和第二行，以及 $\varepsilon\mathbb{G}_{\mathbf{E}}$ 和 $\mu\mathbb{G}_{\mathbf{H}}$ 的第三行中的所有元素都是连续的。利用置换矩阵 $\mathbb{J}_1$ 和 $\mathbb{J}_2$，(90) 中的跳跃条件等价于

$$\mathbb{J}_1[\![\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{E}}]\!] = \mathbf{0}, \quad \mathbb{J}_2[\![\varepsilon\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{E}}]\!] = \mathbf{0}, \tag{98}$$

and

$$\mathbb{J}_1[\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{H}}] = \mathbf{0}, \quad \mathbb{J}_2[\mu\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{H}}] = \mathbf{0} \tag{99}$$

利用乘法表 (92) 以及表达式 (89)、(94)，我们计算得到

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_1\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{E}} &= -\,\mathrm{i}\omega\left(\mathbb{J}_1 + \frac{\mathbb{J}_3}{k_\ell^2}\partial_z + \frac{1}{k_\ell^2}\mathbb{J}_5\right)\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}, \\ \mathbb{J}_2(\varepsilon_\ell\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{E}}) &= -\,\mathrm{i}\omega\varepsilon_\ell\Big(\mathbb{J}_2 + \frac{\mathbb{J}_2}{k_\ell^2}\partial_{zz} + \frac{\mathbb{J}_4}{k_\ell^2}\partial_z\Big)\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}, \\ \mathbb{J}_1\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\mu_\ell}(\mathbb{J}_7 - \partial_z\mathbb{J}_9)\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}, \quad \mathbb{J}_2\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_\ell}\mathbb{J}_6\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}, \end{aligned} \tag{100}$$

对于 $d_\ell < z < d_{\ell-1}$。注意，$\mathbb{J}_7$ 和 $\mathbb{J}_9$ 在界面两侧是连续的。分别将 (99) 中的两个跳跃条件乘以 $\mathbb{J}_9$ 和 $\mathbf{J}_7$, ，得到

$$\mathbb{J}_9\mathbb{J}_1[\![\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{H}}]\!] = \mathbf{0}, \quad \mathbb{J}_7\mathbb{J}_2[\![\mu\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{H}}]\!] = \mathbf{0}. \tag{101}$$

值得指出的是，由于置换矩阵 $\mathbb{J}_1$ 和 $\mathbb{J}_2$，(101) 和 (99) 中的跳跃条件分别是等价的。由 (100) 并利用恒等式

$$\mathbb{J}_9\mathbb{J}_7 = -\mathbb{J}_3, \quad \mathbb{J}_9\mathbb{J}_9 = -\mathbb{J}_1, \quad \mathbb{J}_7\mathbb{J}_6 = k_\rho^2\mathbb{J}_1 + \mathbb{J}_5 \tag{102}$$

我们得到

$$\mathbb{J}_9\mathbb{J}_1\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{H}} = -\frac{1}{\mu_\ell}(\mathbb{J}_3 - \partial_z\mathbb{J}_1)\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}, \quad \mathbb{J}_7\mathbb{J}_2\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{H}} = \left(k_\rho^2\mathbb{J}_1 + \mathbb{J}_5\right)\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}. \tag{103}$$

将（100）代入（98），可得界面条件

$$\left[\!\!\left[-\,\mathrm{i}\omega\left(\mathbb{J}_1 + \frac{\mathbb{J}_3}{k^2}\partial_z + \frac{1}{k^2}\mathbb{J}_5\right)\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}\right]\!\!\right] = 0, \quad \left[\!\!\left[-\,\mathrm{i}\omega\varepsilon_\ell\Big(\mathbb{J}_2 + \frac{\mathbb{J}_2}{k_\ell^2}\partial_{zz} + \frac{\mathbb{J}_4}{k_\ell^2}\partial_z\Big)\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}\right]\!\!\right] = 0, \tag{104}$$

关于 $\mathbb{G}_{\mathbf{A}}$。类似地，由（103）和（101）可得另外两个界面条件

$$\left[\!\!\left[-\frac{1}{\mu}(\mathbb{J}_3 - \partial_z\mathbb{J}_1)\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}\right]\!\!\right] = 0, \quad \left[\!\!\left[\left(k_\rho^2\mathbb{J}_1 + \mathbb{J}_5\right)\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}\right]\!\!\right] = 0. \tag{105}$$

记为

$$\mathbb{K}_\ell = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_1 + \dfrac{\mathbb{J}_3}{k_\ell^2}\partial_z + \dfrac{1}{k_\ell^2}\mathbb{J}_5 \\ \varepsilon_\ell\Big(\mathbb{J}_2 + \dfrac{\mathbb{J}_2}{k_\ell^2}\partial_{zz} + \dfrac{\mathbb{J}_4}{k_\ell^2}\partial_z\Big) \end{bmatrix}, \quad \mathbb{W}_\ell = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\mu_\ell}(\mathbb{J}_3 - \partial_z\mathbb{J}_1) \\ k_\rho^2\mathbb{J}_1 + \mathbb{J}_5 \end{bmatrix}.. \tag{106}$$

于是，（104）和（105）可写为

$$\begin{cases} \mathbb{K}_{\ell-1}\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}(k_x,k_y,d_{\ell-1}+0,z')-\mathbb{K}_{\ell}\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}(k_x,k_y,d_{\ell-1}-0,z')=0,\\ \mathbb{W}_{\ell-1}\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}(k_x,k_y,d_{\ell-1}+0,z')-\mathbb{W}_{\ell}\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}(k_x,k_y,d_{\ell-1}-0,z')=0, \end{cases} \tag{107}$$

对于所有 $\ell=1,\ 2,\ \cdots,\ L$。由表达式（87）和（88）可得

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{\ell}\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}(k_x,k_y,z,z') =&\mathbb{K}_{\ell}^{\uparrow}\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}^{\uparrow}(k_x,k_y,z,z')+\mathbb{K}_{\ell}^{\downarrow}\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}^{\downarrow}(k_x,k_y,z,z'),\\ \mathbb{W}_{\ell}\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}(k_x,k_y,z,z') =&\mathbb{W}_{\ell}^{\uparrow}\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}^{\uparrow}(k_x,k_y,z,z')+\mathbb{W}_{\ell}^{\downarrow}\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}^{\downarrow}(k_x,k_y,z,z'), \end{aligned} \tag{108}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{\ell}^{\uparrow}&=\begin{bmatrix} \mathbb{J}_1+\dfrac{\mathrm{i}k_{\ell z}}{k_{\ell}^2}\mathbb{J}_3+\dfrac{1}{k_{\ell}^2}\mathbb{J}_5\\ \dfrac{\varepsilon_{\ell}k_{\rho}^2}{k_{\ell}^2}\mathbb{J}_2+\dfrac{\mathrm{i}\varepsilon_{\ell}k_{\ell z}}{k_{\ell}^2}\mathbb{J}_4 \end{bmatrix},\quad \mathbb{K}_{\ell}^{\downarrow}=\begin{bmatrix} \mathbb{J}_1-\dfrac{\mathrm{i}k_{\ell z}}{k_{\ell}^2}\mathbb{J}_3+\dfrac{1}{k_{\ell}^2}\mathbb{J}_5\\ \dfrac{\varepsilon_{\ell}k_{\rho}^2}{k_{\ell}^2}\mathbb{J}_2-\dfrac{\mathrm{i}\varepsilon_{\ell}k_{\ell z}}{k_{\ell}^2}\mathbb{J}_4 \end{bmatrix},\\ \mathbb{W}_{\ell}^{\uparrow}&=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\mu_{\ell}}\mathbb{J}_3+\dfrac{\mathrm{i}k_{\ell z}}{\mu_{\ell}}\mathbb{J}_1\\ \mu_{\ell}\big(k_{\rho}^2\mathbb{J}_1+\mathbb{J}_5\big) \end{bmatrix},\quad \mathbb{W}_{\ell}^{\downarrow}=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\mu_{\ell}}\mathbb{J}_3-\dfrac{\mathrm{i}k_{\ell z}}{\mu_{\ell}}\mathbb{J}_1\\ \mu_{\ell}\big(k_{\rho}^2\mathbb{J}_1+\mathbb{J}_5\big) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{109}$$

值得指出的是，$\mathbb{K}_{\ell}$，$\mathbb{W}_{\ell}$ 中的偏导数 ∂_z，∂_{zz} 已分别替换为$\pm\mathrm{i}k_{\ell z}$ 和 $k_{\ell z}^2$。将表达式（108）代入（107），可得到线性方程组

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}_{\ell-1}^{\uparrow} & \mathbb{K}_{\ell-1}^{\downarrow}\\ \mathbb{W}_{\ell-1}^{\uparrow} & \mathbb{W}_{\ell-1}^{\downarrow} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}^{\uparrow}(d_{\ell-1}+0,z')\\ \widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}^{\downarrow}(d_{\ell-1}+0,z') \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \mathbb{K}_{\ell}^{\uparrow} & \mathbb{K}_{\ell}^{\downarrow}\\ \mathbb{W}_{\ell}^{\uparrow} & \mathbb{W}_{\ell}^{\downarrow} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}^{\uparrow}(d_{\ell-1}-0,z')\\ \widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}^{\downarrow}(d_{\ell-1}-0,z') \end{bmatrix}=\mathbf{0}, \tag{110}$$

对于所有 $\ell=1,\ 2,\ \cdots,\ L$，其中 $\widehat{\mathbb{G}}^{\uparrow}{}_{\mathbf{A}}(d_{\ell-1}\pm 0,\ z')$ 和 $\widehat{\mathbb{G}}^{\downarrow}{}_{\mathbf{A}}(d_{\ell-1}\pm 0,\ z')$ 分别是 $\widehat{\mathbb{G}}^{\uparrow}{}_{\mathbf{A}}(k_x,\ k_y,\ d_{\ell-1}\pm 0,\ z')$ 和 $\widehat{\mathbb{G}}^{\downarrow}{}_{\mathbf{A}}(k_x,\ k_y,\ d_{\ell-1}\pm 0,\ z')$ 在$z=d_{\ell-1}$处的右极限和左极限的简写。由表达式（88）可计算得

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}^{\uparrow}(k_x,k_y,d_{\ell-1}-0,z') =&\widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell'}^{\uparrow}(k_x,k_y,z')e^{\mathrm{i}k_{\ell z}D_{\ell}},\quad \ell\neq\ell',\\ \widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}^{\downarrow}(k_x,k_y,d_{\ell-1}-0,z') =&\widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell'}^{\downarrow}(k_x,k_y,z')\quad \ell\neq\ell',\\ \widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}^{\uparrow}(k_x,k_y,d_{\ell-1}+0,z') =&\widehat{\mathbb{G}}_{\ell-1,\ell'}^{\uparrow}(k_x,k_y,z'),\quad \ell\neq\ell'+1,\\ \widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}^{\downarrow}(k_x,k_y,d_{\ell-1}+0,z') =&\widehat{\mathbb{G}}_{\ell-1,\ell'}^{\downarrow}(k_x,k_y,z')e^{\mathrm{i}k_{\ell-1,z}D_{\ell-1}}\quad \ell\neq\ell'+1, \end{aligned} \tag{111}$$

与无源层相关的界面上，以及

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}^{\uparrow}(k_x,k_y,d_{\ell'-1}-0,z') =&\widehat{\mathbb{G}}_{\ell'\ell'}^{\uparrow}(k_x,k_y,z')e^{\mathrm{i}k_{\ell'z}D_{\ell'+1}}-\frac{\mathbb{I}}{2\omega k_{\ell'z}}e^{\mathrm{i}k_{\ell'z}(d_{\ell'-1}-z')},\\ \widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}^{\downarrow}(k_x,k_y,d_{\ell'-1}-0,z') =&\widehat{\mathbb{G}}_{\ell'\ell'}^{\downarrow}(k_x,k_y,z'),\\ \widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}^{\uparrow}(k_x,k_y,d_{\ell'}+0,z') =&\widehat{\mathbb{G}}_{\ell'\ell'}^{\uparrow}(k_x,k_y,z'),\\ \widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}^{\downarrow}(k_x,k_y,d_{\ell'}+0,z') =&\widehat{\mathbb{G}}_{\ell'\ell'}^{\downarrow}(k_x,k_y,z')e^{\mathrm{i}k_{\ell'z}D_{\ell'}}-\frac{\mathbb{I}}{2\omega k_{\ell'z}}e^{\mathrm{i}k_{\ell'z}(z'-d_{\ell'})}, \end{aligned} \tag{112}$$

在源层的边界处，其中

$$D_{\ell}=d_{\ell-1}-d_{\ell},\quad \ell=1,2,\cdots,L,$$

为 t 各层的厚度。将（111）和（112）代入（110）可得

$$\begin{bmatrix}\mathbb{K}_{\ell'}^{\uparrow}h_{\ell'} & \mathbb{K}_{\ell'}^{\downarrow}\\ \mathbb{W}_{\ell'}^{\uparrow}h_{\ell'} & \mathbb{W}_{\ell'}^{\downarrow}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widehat{\mathbb{G}}_{\ell'\ell'}^{\uparrow}\\ \widehat{\mathbb{G}}_{\ell'\ell'}^{\downarrow}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbb{K}_{\ell'-1}^{\uparrow} & \mathbb{K}_{\ell'-1}^{\downarrow}h_{\ell'-1}\\ \mathbb{W}_{\ell'-1}^{\uparrow} & \mathbb{W}_{\ell'-1}^{\downarrow}h_{\ell'-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widehat{\mathbb{G}}_{\ell'-1,\ell'}^{\uparrow}\\ \widehat{\mathbb{G}}_{\ell'-1,\ell'}^{\downarrow}\end{bmatrix}=\mathbb{S}_{\ell'}, \tag{113}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbb{K}_{\ell'+1}^{\uparrow}h_{\ell'+1} & \mathbb{K}_{\ell'+1}^{\downarrow}\\ \mathbb{W}_{\ell'+1}^{\uparrow}h_{\ell'+1} & \mathbb{W}_{\ell'+1}^{\downarrow}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widehat{\mathbb{G}}_{\ell'+1,\ell'}^{\uparrow}\\ \widehat{\mathbb{G}}_{\ell'+1,\ell'}^{\downarrow}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbb{K}_{\ell'}^{\uparrow} & \mathbb{K}_{\ell'}^{\downarrow}h_{\ell'}\\ \mathbb{W}_{\ell'}^{\uparrow} & \mathbb{W}_{\ell'}^{\downarrow}h_{\ell'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widehat{\mathbb{G}}_{\ell'\ell'}^{\uparrow}\\ \widehat{\mathbb{G}}_{\ell'\ell'}^{\downarrow}\end{bmatrix}=\mathbb{S}_{\ell'+1}, \tag{114}$$

and

$$\begin{bmatrix}\mathbb{K}_{\ell}^{\uparrow}h_{\ell} & \mathbb{K}_{\ell}^{\downarrow}\\ \mathbb{W}_{\ell}^{\uparrow}h_{\ell} & \mathbb{W}_{\ell}^{\downarrow}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell'}^{\uparrow}\\ \widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell'}^{\downarrow}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbb{K}_{\ell-1}^{\uparrow} & \mathbb{K}_{\ell-1}^{\downarrow}h_{\ell-1}\\ \mathbb{W}_{\ell-1}^{\uparrow} & \mathbb{W}_{\ell-1}^{\downarrow}h_{\ell-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widehat{\mathbb{G}}_{\ell-1,\ell'}^{\uparrow}\\ \widehat{\mathbb{G}}_{\ell-1,\ell'}^{\downarrow}\end{bmatrix}=\mathbf{0}, \tag{115}$$

对所有 $\ell=1$、2，$\cdots$，$\ell'-1$，$\ell'+2$，$\cdots$，L，其中 $h_\ell(k_\rho)=e^{\mathrm{i}k_{\ell z}D_\ell}$，

$$\mathbb{S}_{\ell'}=\frac{e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}(d_{\ell'-1}-z')}}{2\omega k_{\ell' z}}\begin{bmatrix}\mathbb{K}_{\ell'}^{\uparrow}\\ \mathbb{W}_{\ell'}^{\uparrow}\end{bmatrix},\quad \mathbb{S}_{\ell'+1}=-\frac{e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}(z'-d_{\ell'})}}{2\omega k_{\ell' z}}\begin{bmatrix}\mathbb{K}_{\ell'}^{\downarrow}\\ \mathbb{W}_{\ell'}^{\downarrow}\end{bmatrix}. \tag{116}$$

由矩阵基 $\{\mathbb{J}_i\}_{i=1}^{9}$ 的完备性可知，线性方程组 (113)- (115) 的解可表示为

$$\widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell'}^{\uparrow}(k_x,k_y,z')=\sum_{s=1}^{9}\beta_{\ell s}^{\uparrow}(k_x,k_y,z')\mathbb{J}_s,\quad \widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell'}^{\downarrow}(k_x,k_y,z')=\sum_{s=1}^{9}\beta_{\ell s}^{\downarrow}(k_x,k_y,z')\mathbb{J}_s, \tag{117}$$

其中 $\{\beta_{\ell s}^{\uparrow}(k_x,\ k_y,\ z')\beta_{\ell s}^{\downarrow}(k_x,\ k_y,\ z')\}_{s=1}^{9}$ 为待定系数。

矩阵空间 $\mathcal{S}=\mathrm{span}\{\mathbb{J}_1,\mathbb{J}_2,\cdots,\mathbb{J}_9\}$ 具有正交分解 $\mathcal{S}=\mathcal{S}_1\oplus\mathcal{S}_2$，其中

$$\mathcal{S}_1=\mathrm{span}\{\mathbb{J}_1,\mathbb{J}_2,\cdots,\mathbb{J}_5\},\quad \mathcal{S}_2=\mathrm{span}\{\mathbb{J}_6,\mathbb{J}_7,\mathbb{J}_8,\mathbb{J}_9\}.$$

因此，解 $\mathbb{G}_{\ell\ell'}^{*}$ 可以分解为

$$\widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell'}^{*}=\widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell' 1}^{*}+\widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell' 2}^{*},\quad *=\uparrow,\downarrow, \tag{118}$$

其中

$$\widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell' 1}^{*}=\sum_{s=1}^{5}\beta_{\ell s}^{*}(k_x,k_y,z')\mathbb{J}_s,\quad \widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell' 2}^{*}=\sum_{s=6}^{9}\beta_{\ell s}^{*}(k_x,k_y,z')\mathbb{J}_s,\quad *=\uparrow,\downarrow. \tag{119}$$

根据定义式 (109) 和乘法表 (92)，可以验证

$$\begin{aligned}&\mathbb{K}_{\ell}^{\uparrow}h_{\ell}\widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell' i}^{\uparrow},\mathbb{K}_{\ell}^{\uparrow}\widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell' i}^{\uparrow},\mathbb{K}_{\ell}^{\downarrow}h_{\ell}\widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell' i}^{\downarrow},\mathbb{K}_{\ell}^{\downarrow}\widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell' i}^{\downarrow}\in\mathcal{S}_i,\quad i=1,2,\\ &\mathbb{W}_{\ell}^{\uparrow}h_{\ell}\widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell' i}^{\uparrow},\mathbb{W}_{\ell}^{\uparrow}\widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell' i}^{\uparrow},\mathbb{W}_{\ell}^{\downarrow}h_{\ell}\widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell' i}^{\downarrow},\mathbb{W}_{\ell}^{\downarrow}\widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell' i}^{\downarrow}\in\mathcal{S}_i,\quad i=1,2.\end{aligned} \tag{120}$$

记

$$\mathbb{P}_{\ell}^{(1)}=\begin{bmatrix}\mathbb{K}_{\ell}^{\uparrow}h_{\ell} & \mathbb{K}_{\ell}^{\downarrow}\\ \mathbb{W}_{\ell}^{\uparrow}h_{\ell} & \mathbb{W}_{\ell}^{\downarrow}\end{bmatrix},\quad \mathbb{P}_{\ell}^{(2)}=\begin{bmatrix}\mathbb{K}_{\ell}^{\uparrow} & \mathbb{K}_{\ell}^{\downarrow}h_{\ell}\\ \mathbb{W}_{\ell}^{\uparrow} & \mathbb{W}_{\ell}^{\downarrow}h_{\ell}\end{bmatrix}.$$

方程 (113)–(115) 可改写为

$$\mathbb{P}_{\ell}^{(1)}\begin{bmatrix}\widehat{\mathbb{G}}_{\ell,\ell' 1}^{\uparrow}\\ \widehat{\mathbb{G}}_{\ell,\ell' 1}^{\downarrow}\end{bmatrix}+\mathbb{P}_{\ell}^{(1)}\begin{bmatrix}\widehat{\mathbb{G}}_{\ell'\ell' 2}^{\uparrow}\\ \widehat{\mathbb{G}}_{\ell'\ell' 2}^{\downarrow}\end{bmatrix}-\mathbb{P}_{\ell-1}^{(2)}\begin{bmatrix}\widehat{\mathbb{G}}_{\ell-1,\ell' 1}^{\uparrow}\\ \widehat{\mathbb{G}}_{\ell-1,\ell' 1}^{\downarrow}\end{bmatrix}-\mathbb{P}_{\ell-1}^{(2)}\begin{bmatrix}\widehat{\mathbb{G}}_{\ell-1,\ell' 2}^{\uparrow}\\ \widehat{\mathbb{G}}_{\ell-1,\ell' 2}^{\downarrow}\end{bmatrix}=\begin{cases}\mathbb{S}_{\ell}, & \ell=\ell',\ell'+1,\\ \mathbf{0}, & \text{else},\end{cases} \tag{121}$$

对于所有 $\ell = 1, 2, \cdots, L$。注意到 $\mathbb{S}_\ell$, $\mathbb{S}_{\ell'+1}$ 的所有元素均属于 $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_1$，且

$$\mathbb{P}_\ell^{(1)} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbb{G}}^{\uparrow}_{\ell,\ell' j} \\ \widehat{\mathbb{G}}^{\downarrow}_{\ell,\ell' j} \end{bmatrix} - \mathbb{P}_{\ell-1}^{(2)} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbb{G}}^{\uparrow}_{\ell-1,\ell' j} \\ \widehat{\mathbb{G}}^{\downarrow}_{\ell-1,\ell' j} \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_j, \quad j = 1, 2; \quad \ell = 1, 2, \cdots, L. \tag{122}$$

因此，线性方程组 (121) 等价于

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\ell^{(1)} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbb{G}}^{\uparrow}_{\ell,\ell' 1} \\ \widehat{\mathbb{G}}^{\downarrow}_{\ell,\ell' 1} \end{bmatrix} + \mathbb{P}_{\ell-1}^{(2)} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbb{G}}^{\uparrow}_{\ell-1,\ell' 1} \\ \widehat{\mathbb{G}}^{\downarrow}_{\ell-1,\ell' 1} \end{bmatrix} &= \begin{cases} \mathbb{S}_\ell, & \ell = \ell', \ell'+1, \\ \mathbf{0}, & \text{else}, \end{cases} \\ \mathbb{P}_\ell^{(1)} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbb{G}}^{\uparrow}_{\ell,\ell' 2} \\ \widehat{\mathbb{G}}^{\downarrow}_{\ell,\ell' 2} \end{bmatrix} + \mathbb{P}_{\ell-1}^{(2)} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbb{G}}^{\uparrow}_{\ell-1,\ell' 2} \\ \widehat{\mathbb{G}}^{\downarrow}_{\ell-1,\ell' 2} \end{bmatrix} &= \mathbf{0}, \quad \ell = 1, 2, \cdots, L. \end{aligned} \tag{123}$$

现在，在表示 (117) 中保留前五项，并记 by

$$\widehat{\mathbb{G}}^{\uparrow}_{\ell\ell'}(k_x, k_y, z') = \sum_{s=1}^{5} \beta^{\uparrow}_{\ell s}(k_x, k_y, z') \mathbb{J}_s, \quad \widehat{\mathbb{G}}^{\downarrow}_{\ell\ell'}(k_x, k_y, z') = \sum_{s=1}^{5} \beta^{\downarrow}_{\ell s}(k_x, k_y, z') \mathbb{J}_s. \tag{124}$$

(123) 中的方程表明，由于子空间 $\mathcal{S}_2$ 中的分量被直接设为零，它们也满足方程 (113)-(115)。

由 (86) 可知， $\mathbb{G}^f{}_{\mathbf{A}}(k_\rho,\ z,\ z')$ 可以写成如下形式

$$\widehat{\mathbb{G}}^f_{\mathbf{A}}(k_\rho, z, z') = \sum_{s=1}^{5} a^f_s(k_\rho, z, z') \mathbb{J}_s \tag{125}$$

其中

$$a^f_1 = a^f_2 = -\frac{1}{2\omega k_{\ell' z}} \Big[e^{\mathrm{i} k_{\ell' z}(d_{\ell'} - z')} H(z - z') e^{\uparrow}_{\ell'}(z) + e^{\mathrm{i} k_{\ell' z}(z' - d_{\ell'-1})} H(z' - z) e^{\downarrow}_{\ell'}(z) \Big], \tag{126}$$

$a^f_3 = a^f_4 = a^f_5 = 0$，并且

$$e^{\uparrow}_\ell(z) = e^{\mathrm{i} k_{\ell z}(z - d_\ell)}, \quad e^{\downarrow}_\ell(z) = e^{\mathrm{i} k_{\ell z}(d_{\ell-1} - z)}.$$

定义

$$a_{\ell s}(k_x, k_y, z, z') = \beta^{\uparrow}_{\ell s}(k_x, k_y, z') e^{\uparrow}_\ell(z) + \beta^{\downarrow}_{\ell s}(k_x, k_y, z') e^{\downarrow}_\ell(z) + \delta_{\ell\ell'} a^f_s(k_\rho, z, z'), \tag{127}$$

对于 $s = 1$，2，$\cdots$，5。然后，利用式 (84) 和 (81) 中的公式 (124)–(125)，可得

$$\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}(k_x, k_y, z, z') = \sum_{s=1}^{5} a_{\ell s}(k_x, k_y, z, z') \mathbb{J}_s \tag{128}$$

对于 $d_\ell < z < d_{\ell-1}$。

请注意

$$\begin{aligned}\partial_z a_s^f(k_\rho,z,z') =& -\frac{\mathrm{i}k_{\ell' z}}{2\omega k_{\ell' z}}\Big[e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}(z-z')}H(z-z')-e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}(z'-z)}H(z'-z)\Big]\\ &-\frac{1}{2\omega k_{\ell' z}}(e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}(z-z')}-e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}(z'-z)})\delta(z-z')\\ =&\frac{1}{2\mathrm{i}\omega}\Big[e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}(z-z')}H(z-z')-e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}(z'-z)}H(z'-z)\Big],\\ \partial_z^2 a_s^f(k_\rho,z,z') =& -k_{\ell' z}^2 a_s^f(k_\rho,z,z')+\frac{1}{2\mathrm{i}\omega}(e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}(z-z')}+e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}(z'-z)})\delta(z-z')\\ =&-k_{\ell' z}^2 a_s^f(k_\rho,z,z')+\frac{\delta(z-z')}{\mathrm{i}\omega},\end{aligned}\tag{129}$$

对于 $s=1,\ 2$。因此，(126) 和 (127) 表明

$$\begin{aligned}a_{\ell s}(k_x,k_y,z,z') =&a_s^f\delta_{\ell\ell'}+\beta_{\ell s}^{\uparrow}e_\ell^{\uparrow}(z)+\beta_{\ell s}^{\downarrow}e_\ell^{\downarrow}(z),\\ \partial_z a_{\ell s}(k_x,k_y,z,z') =&\partial_z a_s^f\delta_{\ell\ell'}+\mathrm{i}k_{\ell z}\left[\beta_{\ell s}^{\uparrow}e_\ell^{\uparrow}(z)-\beta_{\ell s}^{\downarrow}e_\ell^{\downarrow}(z)\right]\\ =&\frac{\delta_{\ell\ell'}}{2\mathrm{i}\omega}\Big[e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}(z-z')}H(z-z')-e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}(z'-z)}H(z'-z)\Big]\\ &+\mathrm{i}k_{\ell z}[\beta_{\ell s}^{\uparrow}e_\ell^{\uparrow}(z)-\beta_{\ell s}^{\downarrow}e_\ell^{\downarrow}(z)],\quad s=1,2,\\ \partial_z a_{\ell s}(k_x,k_y,z,z') =&\partial_z a_s^f\delta_{\ell\ell'}+\mathrm{i}k_{\ell z}\left[\beta_{\ell s}^{\uparrow}e_\ell^{\uparrow}(z)-\beta_{\ell s}^{\downarrow}e_\ell^{\downarrow}(z)\right]\\ =&\mathrm{i}k_{\ell z}[\beta_{\ell s}^{\uparrow}e_\ell^{\uparrow}(z)-\beta_{\ell s}^{\downarrow}e_\ell^{\downarrow}(z)],\quad s=3,4,5,\\ \partial_z^2 a_{\ell s}(k_x,k_y,z,z') =&\partial_z^2 a_s^f\delta_{\ell\ell'}-k_{\ell z}^2\left[\beta_{\ell s}^{\uparrow}e_\ell^{\uparrow}(z)+\beta_{\ell s}^{\downarrow}e_\ell^{\downarrow}(z)\right]\\ =&-k_{\ell z}^2 a_{\ell s}+\frac{\delta_{\ell\ell'}\delta(z-z')}{\mathrm{i}\omega},\quad s=1,2,\\ \partial_z^2 a_{\ell s}(k_x,k_y,z,z') =&-k_{\ell z}^2 a_{\ell s},\quad s=3,4,5.\end{aligned}\tag{130}$$

因此，系数 $\{a_{\ell s}\}_{s=1}^5$ 满足微分方程

$$\begin{aligned}&\partial_{zz}a_{\ell s}+k_{\ell z}^2 a_{\ell s}=\frac{\delta_{\ell\ell'}\delta(z-z')}{\mathrm{i}\omega},\quad s=1,2\\ &\partial_{zz}a_{\ell s}+k_{\ell z}^2 a_{\ell s}=0,\quad s=3,4,5.\end{aligned}\tag{131}$$

3.4. 分层介质中的两个亥姆霍兹问题。 在本小节中，我们证明，由（128）给出的 $\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}(k_x,k_y,z,z')$并不唯一，而 $\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{E}}(k_x,k_y,z,z')$、$\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{H}}(k_x,k_y,z,z')$可以通过求解分层介质中的两个亥姆霍兹问题来确定。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$由（96）-（95）和（131）可计算得出，（89）中的 $\mathbb{G}_{\mathbf{E}}, \mathbb{G}_{\mathbf{H}}$ 具有如下表达式

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{E}} =& -\mathrm{i}\omega\left(\mathbb{I}+\frac{\widehat{\nabla}\widehat{\nabla}}{k_\ell^2}\right)\Big(\sum_{s=1}^{5}a_{\ell s}\mathbb{J}_s\Big)\\ =& -\mathrm{i}\omega\Big[a_{\ell1}\mathbb{J}_1+\frac{k_\rho^2(a_{\ell2}-\partial_z a_{\ell3})}{k_\ell^2}\mathbb{J}_2+\frac{\partial_z a_{\ell2}+k_{\ell z}^2 a_{\ell3}}{k_\ell^2}\mathbb{J}_3\Big]-\frac{\delta_{\ell\ell'}}{k_\ell^2}\delta(z-z')\mathbb{J}_2\\ &-\frac{\mathrm{i}\omega}{k_\ell^2}\Big[\big(\partial_z a_{\ell1}+k_\rho^2 a_{\ell4}-k_\rho^2\partial_z a_{\ell5}\big)\mathbb{J}_4+\big(a_{\ell1}+\partial_z a_{\ell4}+k_{\ell z}^2 a_{\ell5}\big)\mathbb{J}_5\Big],\\ \widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{H}} =& \frac{1}{\mu_\ell}\Big(a_{\ell1}\mathbb{J}_6+\big(a_{\ell2}-\partial_z a_{\ell3}\big)\mathbb{J}_7-\big(a_{\ell4}-\partial_z a_{\ell5}\big)\mathbb{J}_8-\partial_z a_{\ell1}\mathbb{J}_9\Big).\end{aligned}\tag{132}$$

此外，式 (131) 表明

$$a_{\ell1}+\partial_z a_{\ell4}+k_{\ell z}^2 a_{\ell5}=\frac{1}{k_\rho^2}\partial_z\big(\partial_z a_{\ell1}+k_\rho^2 a_{\ell4}-k_\rho^2\partial_z a_{\ell5}\big)+\frac{k_\ell^2}{k_\rho^2}a_{\ell1}-\frac{\delta_{\ell\ell'}}{\mathrm{i}\omega}\delta(z-z').\tag{133}$$

因此，我们可以通过引入以下三组新系数，减少表达式 (132) 中独立系数的数量：

$$b_{\ell1}=a_{\ell1},\quad b_{\ell2}=\frac{1}{\mu_\ell}\left(a_{\ell2}-\partial_z a_{\ell3}\right),\quad b_{\ell3}=\frac{1}{\mu_\ell}\left(\partial_z a_{\ell1}+k_\rho^2 a_{\ell4}-k_\rho^2\partial_z a_{\ell5}\right).\tag{134}$$

将式 (132) 中的表示改写为

$$\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{E}}=-\frac{\mathrm{i}\omega}{k_\ell^2}\left[k_\ell^2 b_{\ell1}\mathbb{J}_1+\mu_\ell k_\rho^2 b_{\ell2}\mathbb{J}_2+\mu_\ell\partial_z b_{\ell2}\mathbb{J}_3+\mu_\ell b_{\ell3}\mathbb{J}_4+\left(\frac{k_\ell^2}{k_\rho^2}b_{\ell1}+\frac{\mu_\ell}{k_\rho^2}\partial_z b_{\ell3}\right)\mathbb{J}_5\right]+\delta,\tag{135}$$

and

$$\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{H}}=\frac{1}{\mu_\ell}\left[b_{\ell1}\mathbb{J}_6+\mu_\ell b_{\ell2}\mathbb{J}_7+\left(\frac{1}{k_\rho^2}\partial_z b_{\ell1}-\frac{\mu_\ell}{k_\rho^2}b_{\ell3}\right)\mathbb{J}_8-\partial_z b_{\ell1}\mathbb{J}_9\right],\tag{136}$$

对于 $d_\ell<z<d_{\ell-1}$，其中

$$\delta:=\left[\frac{\mathbb{J}_5}{k_\rho^2}-\mathbb{J}_2\right]\frac{\delta_{\ell\ell'}}{k_\ell^2}\delta(z-z').\tag{137}$$

定义分段光滑函数

$$b_j(k_x,k_y,z,z')=b_{\ell j}(k_x,k_y,z,z'),\quad d_\ell<z<d_{\ell-1},\tag{138}$$

在分层介质中。将表达式 (135) 代入 (104)，得到

$$\left[\!\!\left[b_1\mathbb{J}_1+\frac{\mu}{k^2}\partial_z b_2\mathbb{J}_3+\left(\frac{1}{k_\rho^2}b_1+\frac{\mu}{k^2k_\rho^2}\partial_z b_3\right)\mathbb{J}_5\right]\!\!\right]=\mathbf{0},\quad \left[\!\!\left[\frac{\varepsilon\mu}{k^2}k_\rho^2 b_2\mathbb{J}_2+\frac{\varepsilon\mu}{k^2}b_3\mathbb{J}_4\right]\!\!\right]=\mathbf{0}.\tag{139}$$

于是，$\mathbf{J}_s$ 的独立性和连续性意味着

$$[\![b_1]\!]=0,\quad [\![b_2]\!]=0,\quad [\![b_3]\!]=0,\quad \left[\!\!\left[\frac{1}{\varepsilon}\partial_z b_2\right]\!\!\right]=0,\quad \left[\!\!\left[\frac{1}{\varepsilon}\partial_z b_3\right]\!\!\right]=0.\tag{140}$$

类似地，将表达式 (136) 代入跳跃条件 (105)，可得

$$\left[\!\!\left[\frac{1}{\mu}\left(\mu b_2\mathbb{J}_7+\left(\frac{1}{k_\rho^2}\partial_z b_1-\frac{\mu}{k_\rho^2}b_3\right)\mathbb{J}_8-\partial_z b_1\mathbb{J}_9\right)\right]\!\!\right]=\mathbf{0},\quad \left[\!\!\left[b_1\mathbb{J}_6\right]\!\!\right]=\mathbf{0}.\tag{141}$$

结合跳跃条件 $[\![b_2]\!]=0$, $[\![b_3]\!]=0$，可得

$$\left[\!\!\left[\frac{1}{\mu}\partial_z b_1\right]\!\!\right]=0. \tag{142}$$

因此，界面条件 (90) 等价于系数上的 (140) 和 (142) 中的解耦条件。

现在，我们推导每一层中分段光滑函数 $\{b_s(k_x、\ k_y、\ z、\ z')\}_{s=1}^3$ 所满足的微分方程。定义分段光滑函数

$$a_s(k_x,k_y,z,z')=a_{\ell s}(k_x,k_y,z,z'),\quad d_\ell<z<d_{\ell-1}, \tag{143}$$

(131) 中的方程意味着

$$\begin{aligned}(\partial_{zz}+k_z^2)a_s(k_x,k_y,z,z')=&\frac{\delta(z-z')}{\mathrm{i}\omega},\quad d_\ell<z<d_{\ell-1},\ \ s=1,2,\\(\partial_{zz}+k_z^2)a_s(k_x,k_y,z,z')=&0,\quad d_\ell<z<d_{\ell-1},\ \ s=3,4,5.\end{aligned} \tag{144}$$

此外，按层定义 (134) 意味着

$$b_1=a_1,\quad b_2=\frac{1}{\mu}(a_2-\partial_z a_3),\quad b_3=\frac{1}{\mu}(\partial_z a_1+k_\rho^2 a_4-k_\rho^2\partial_z a_5). \tag{145}$$

因此，我们得到 分段光滑函数的界面问题中，如下所示 b_1， b_2， b_3 ：

$$\begin{cases}\partial_{zz}b_1(k_x,k_y,z,z')+k_{\ell z}^2 b_1(k_x,k_y,z,z')=-\dfrac{\mathrm{i}}{\omega}\delta(z-z'),\quad d_\ell<z<d_{\ell-1},\\ [\![b_1]\!]=0,\quad \left[\!\!\left[\dfrac{1}{\mu}\partial_z b_1\right]\!\!\right]=0,\quad z=d_\ell,\ \ell=0,1,\cdots,L-1,\end{cases} \tag{146}$$

$$\begin{cases}\partial_{zz}b_2(k_x,k_y,z,z')+k_{\ell z}^2 b_2(k_x,k_y,z,z')=-\dfrac{\mathrm{i}}{\mu\omega}\delta(z-z'),\quad d_\ell<z<d_{\ell-1},\\ [\![b_2]\!]=0,\quad \left[\!\!\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\partial_z b_2\right]\!\!\right]=0,\quad z=d_\ell,\ \ell=0,1,\cdots,L-1,\end{cases} \tag{147}$$

$$\begin{cases}\partial_{zz}b_3(k_x,k_y,z,z')+k_{\ell z}^2 b_3 k_x,k_y,z,z')=-\dfrac{\mathrm{i}}{\mu\omega}\delta'(z-z'),\quad d_\ell<z<d_{\ell-1},\\ [\![b_3]\!]=0,\quad \left[\!\!\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\partial_z b_3\right]\!\!\right]=0,\quad z=d_\ell,\ \ell=0,1,\cdots,L-1,\end{cases} \tag{148}$$

显然， $\{b_j(k_x,\ k_y,\ z,\ z')\}$ 正是三层介质中亥姆霍兹方程的格林函数。

对方程（147）两边关于 z' 求导，并结合（147）中的跳跃条件，可得

$$(\partial_{zz}+k_{\ell z}^2)(\partial_{z'}b_2(k_\rho,z,z'))=\frac{\mathrm{i}}{\mu\omega}\delta'(z-z') \tag{149}$$

and

$$[\![\partial_{z'}b_2(k_\rho,z,z')]\!]=0,\quad \left[\!\!\left[\frac{1}{\varepsilon}\partial_z\partial_{z'}b_2(k_\rho,z,z')\right]\!\!\right]=0, \tag{150}$$

这意味着

$$b_3(k_\rho,z,z')=-\partial_{z'}b_2(k_\rho,z,z').$$

因此，只需解出两个亥姆霍兹问题 (146)-(147)，即可得到 $\mathbb{G}_{\mathbf{E}}$ 和 $\mathbb{G}_{\mathbf{H}}$。

备注 1. 与 (145) 中的公式类似，我们定义

$$b_1^f = a_1^f = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\widehat{g}^f(k_\rho, z, z'), \quad b_2^f = \frac{1}{\mu}a_2^f = -\frac{\widehat{g}^f(k_\rho, z, z')}{\mathrm{i}\omega\mu_{\ell'}} \quad b_3^f = \frac{1}{\mu}\partial_z a_1^f = -\frac{\partial_z\widehat{g}^f(k_\rho, z, z')}{\mathrm{i}\omega\mu_{\ell'}}.$$

根据式（135）和（136）中的表示，应有

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{E}}^f =& -\frac{\mathrm{i}\omega}{k_{\ell'}^2}\left[k_{\ell'}^2 b_1^f\mathbb{J}_1 + \mu_{\ell'}k_\rho^2 b_2^f\mathbb{J}_2 + \mu_{\ell'}\partial_z b_2^f\mathbb{J}_3 + \mu_{\ell'}b_3^f\mathbb{J}_4 + \left(\frac{k_{\ell'}^2}{k_\rho^2}b_1^f + \frac{\mu_{\ell'}}{k_\rho^2}\partial_z b_3^f\right)\mathbb{J}_5\right] \\ &+ \left[\frac{\mathbb{J}_5}{k_\rho^2} - \mathbb{J}_2\right]\frac{\delta(z-z')}{k_{\ell'}^2}, \qquad (151)\\ \widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{H}}^f =& \frac{1}{\mu_{\ell'}}\left[b_1^f\mathbb{J}_6 + \mu_{\ell'}b_2^f\mathbb{J}_7 + \left(\frac{1}{k_\rho^2}\partial_z b_1^f - \frac{\mu_{\ell'}}{k_\rho^2}b_3^f\right)\mathbb{J}_8 - \partial_z b_1^f\mathbb{J}_9\right].\end{aligned}$$

事实上，利用亥姆霍兹方程

$$\left[\partial_{zz} + k_{\ell' z}^2\right]\hat{g}^f(k_\rho, z, z') = -\delta(z-z'),$$

我们可以由公式（151）计算得出

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{E}}^f =& \frac{1}{k_{\ell'}^2}\left[k_{\ell'}^2\mathbb{J}_1 + k_\rho^2\mathbb{J}_2 + \mathbb{J}_3\partial_z + \mathbb{J}_4\partial_z + \left(\frac{k_{\ell'}^2}{k_\rho^2} + \frac{1}{k_\rho^2}\partial_{zz}\right)\mathbb{J}_5\right]\widehat{g}^f(k_\rho, z, z') \\ &+ \left[\frac{\mathbb{J}_5}{k_\rho^2} - \mathbb{J}_2\right]\frac{\delta(z-z')}{k_{\ell'}^2} \\ =& \mathbb{I} + \frac{1}{k_{\ell'}^2}\left[-k_{\ell' z}^2\mathbb{J}_2 + (\mathbb{J}_3 + \mathbb{J}_4)\partial_z + \mathbb{J}_5\right]\widehat{g}^f(k_\rho, z, z') - \frac{\delta(z-z')}{k_{\ell'}^2}\mathbb{J}_2 \\ =& \mathbb{I} + \frac{1}{k_{\ell'}^2}\left[\mathbb{J}_5 + (\mathbb{J}_3 + \mathbb{J}_4)\partial_z + \mathbb{J}_2\partial_{zz}\right]\widehat{g}^f(k_\rho, z, z') = \left[\mathbb{I} + \frac{\widehat{\nabla}\widehat{\nabla}}{k_{\ell'}^2}\right]\widehat{g}^f(k_\rho, z, z'),\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由式（93）推导得出。类似地，我们有

$$\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{H}}^f = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu_{\ell'}}\left[\mathbb{J}_6 + \mathbb{J}_7 - \mathbb{J}_9\partial_z\right]\widehat{g}^f(k_\rho, z, z') = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu_{\ell'}}\widehat{\nabla}\times\left(\widehat{g}^f(k_\rho, z, z')\mathbb{I}\right). \qquad (152)$$

这些结果表明，式（135）和（136）中的表示与自由空间中的公式（89）一致。

注 2。根据定义 (145)，$\{a_{\ell s}\}_{s=1}^5$ 不能由$\{b_{\ell s}\}_{s=1}^3$唯一确定。因此，$\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{E}}$，$\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{H}}$ 由系数 $\{b_{\ell s}\}_{s=1}^3$ 唯一确定，但 $\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}$并不唯一。一个自然的选择是令 $a_{\ell 3} = a_{\ell 5} = 0$。于是，由 (145) 得

$$a_{\ell 1} = b_{\ell 1}, \quad a_{\ell 2} = \mu_\ell b_{\ell 2}, \quad a_{\ell 4} = \frac{b_{\ell 3}}{k_\rho^2} - \frac{1}{\mu_\ell k_\rho^2}\partial_z b_{\ell 1}. \qquad (153)$$

这组系数导出了所谓的索末菲势

$$\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}^S(k_x, k_y, z, z') = b_{\ell 1}\mathbb{J}_1 + \mu_\ell b_{\ell 2}\mathbb{J}_2 + \left(\frac{b_{\ell 3}}{k_\rho^2} - \frac{1}{\mu_\ell k_\rho^2}\partial_z b_{\ell 1}\right)\mathbb{J}_4, \quad d_\ell < z < d_{\ell-1}, \qquad (154)$$

其具有非零模式

$$\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{A}}^S = \begin{bmatrix}\times & & \\ & \times & \\ \times & \times & \times\end{bmatrix}.$$

3.5. 物理域中的并矢格林函数。亥姆霍兹分层介质问题 (146)–(148) 解的解析表达式汇总于附录 A，即

$$\begin{aligned}
b_{\ell 1}(k_\rho,z,z') &= \delta_{\ell\ell'} b_1^f(k_\rho,z,z') - \frac{1}{2\omega k_{\ell' z}} \sum_{*,\star=\uparrow,\downarrow} b_{\ell\ell' 1}^{**}(k_\rho) Z_{\ell\ell'}^{**}(k_\rho,z,z'),\\
b_{\ell 2}(k_\rho,z,z') &= \delta_{\ell\ell'} b_2^f(k_\rho,z,z') - \frac{1}{2\omega \mu_{\ell'} k_{\ell' z}} \sum_{*,\star=\uparrow,\downarrow} b_{\ell\ell' 2}^{**}(k_\rho) Z_{\ell\ell'}^{**}(k_\rho,z,z'),\\
b_{\ell 3}(k_\rho,z,z') &= -\delta_{\ell\ell'}\partial_{z'} b_2^f(k_\rho,z,z') + \frac{\mathrm{i}}{2\omega \mu_{\ell'}} \sum_{*,\star=\uparrow,\downarrow} s_{\ell'\ell'}^{\star\star} b_{\ell\ell' 2}^{**}(k_\rho) Z_{\ell\ell'}^{**}(k_\rho,z,z'),
\end{aligned} \tag{155}$$

根据公式 (135)，我们有

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{E}}^r =& -\frac{\mathrm{i}\omega}{k_\ell^2}\left[k_\ell^2 b_{\ell 1}^r \mathbb{J}_1 + \mu_\ell k_\rho^2 b_{\ell 2}^r \mathbb{J}_2 + \mu_\ell \partial_z b_{\ell 2}^r \mathbb{J}_3 + \mu_\ell b_{\ell 3}^r \mathbb{J}_4 + \left(\frac{k_\ell^2}{k_\rho^2} b_{\ell 1}^r + \frac{\mu_\ell}{k_\rho^2}\partial_z b_{\ell 3}^r\right)\mathbb{J}_5\right]\\
=& \frac{\mathrm{i}}{2k_{\ell' z}}\Big[Z_{\ell\ell'}^{\uparrow\uparrow}(k_\rho,z,z')\boldsymbol{\Theta}^{\uparrow\uparrow}(k_x,k_y) + Z_{\ell\ell'}^{\uparrow\downarrow}(k_\rho,z,z')\boldsymbol{\Theta}^{\uparrow\downarrow}(k_x,k_y)\\
&+ Z_{\ell\ell'}^{\downarrow\uparrow}(k_\rho,z,z')\boldsymbol{\Theta}^{\downarrow\uparrow}(k_x,k_y) + Z_{\ell\ell'}^{\downarrow\downarrow}(k_\rho,z,z')\boldsymbol{\Theta}^{\downarrow\downarrow}(k_x,k_y)\Big]\\
:=& \widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{E}}^{\uparrow\uparrow} + \widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{E}}^{\uparrow\downarrow} + \widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{E}}^{\downarrow\uparrow} + \widehat{\mathbb{G}}_{\mathbf{E}}^{\downarrow\downarrow}
\end{aligned} \tag{156}$$

其中

$$\boldsymbol{\Theta}^{\uparrow\uparrow} = b_{\ell\ell' 1}^{\uparrow\uparrow}\Big(\mathbb{J}_1 + \frac{1}{k_\rho^2}\mathbb{J}_5\Big) + \frac{\mu_\ell b_{\ell\ell' 2}^{\uparrow\uparrow}}{\mu_{\ell'} k_\ell^2}\Big(k_\rho^2\mathbb{J}_2 + \mathrm{i}k_{\ell z}\mathbb{J}_3 - \mathrm{i}k_{\ell' z}\mathbb{J}_4 + \frac{k_{\ell z}k_{\ell' z}}{k_\rho^2}\mathbb{J}_5\Big), \tag{157}$$

$$\boldsymbol{\Theta}^{\uparrow\downarrow} = b_{\ell\ell' 1}^{\uparrow\downarrow}\Big(\mathbb{J}_1 + \frac{1}{k_\rho^2}\mathbb{J}_5\Big) + \frac{\mu_\ell b_{\ell\ell' 2}^{\uparrow\downarrow}}{\mu_{\ell'} k_\ell^2}\Big(k_\rho^2\mathbb{J}_2 + \mathrm{i}k_{\ell z}\mathbb{J}_3 + \mathrm{i}k_{\ell' z}\mathbb{J}_4 - \frac{k_{\ell z}k_{\ell' z}}{k_\rho^2}\mathbb{J}_5\Big), \tag{158}$$

$$\boldsymbol{\Theta}^{\downarrow\uparrow} = b_{\ell\ell' 1}^{\downarrow\uparrow}\Big(\mathbb{J}_1 + \frac{1}{k_\rho^2}\mathbb{J}_5\Big) + \frac{\mu_\ell b_{\ell\ell' 2}^{\downarrow\uparrow}}{\mu_{\ell'} k_\ell^2}\big(k_\rho^2\mathbb{J}_2 - \mathrm{i}k_{\ell z}\mathbb{J}_3 - \mathrm{i}k_{\ell' z}\mathbb{J}_4 - \frac{k_{\ell z}k_{\ell' z}}{k_\rho^2}\mathbb{J}_5\big), \tag{159}$$

$$\boldsymbol{\Theta}^{\downarrow\downarrow} = b_{\ell\ell' 1}^{\downarrow\downarrow}\Big(\mathbb{J}_1 + \frac{1}{k_\rho^2}\mathbb{J}_5\Big) + \frac{\mu_\ell b_{\ell\ell' 2}^{\downarrow\downarrow}}{\mu_{\ell'} k_\ell^2}\Big(k_\rho^2\mathbb{J}_2 - \mathrm{i}k_{\ell z}\mathbb{J}_3 + \mathrm{i}k_{\ell' z}\mathbb{J}_4 + \frac{k_{\ell z}k_{\ell' z}}{k_\rho^2}\mathbb{J}_5\Big). \tag{160}$$

注意，上述矩阵中的角度项可以改写为

$$\begin{aligned}
&\frac{k_x}{k_\rho} = \frac{e^{\mathrm{i}\alpha}+e^{-\mathrm{i}\alpha}}{2}, \quad \frac{k_y}{k_\rho} = \frac{\mathrm{i}(e^{-\mathrm{i}\alpha}-e^{\mathrm{i}\alpha})}{2},\\
&\frac{k_x^2}{k_\rho^2} = \frac{1}{2} + \frac{e^{2\mathrm{i}\alpha}+e^{-2\mathrm{i}\alpha}}{4}, \quad \frac{k_x k_y}{k_\rho^2} = \frac{\mathrm{i}(e^{-2\mathrm{i}\alpha}-e^{2\mathrm{i}\alpha})}{4}, \quad \frac{k_y^2}{k_\rho^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{2\mathrm{i}\alpha} - \frac{1}{4}e^{-2\mathrm{i}\alpha},
\end{aligned}$$

其中， α 是向量（k_x， k_y）的极角。我们有

$$\mathbb{J}_1+\frac{\mathbb{J}_5}{k_\rho^2}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0\end{bmatrix}+e^{2\mathrm{i}\alpha}\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{\mathrm{i}}{4}&0\\\frac{\mathrm{i}}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&0&0\end{bmatrix}+e^{-2\mathrm{i}\alpha}\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&-\frac{\mathrm{i}}{4}&0\\-\frac{\mathrm{i}}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{k_\rho^2}\mathbb{J}_5=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0\end{bmatrix}-e^{2\mathrm{i}\alpha}\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{\mathrm{i}}{4}&0\\\frac{\mathrm{i}}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&0&0\end{bmatrix}-e^{-2\mathrm{i}\alpha}\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&-\frac{\mathrm{i}}{4}&0\\-\frac{\mathrm{i}}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\frac{\mathbb{J}_3}{\mathrm{i}k_\rho}=e^{\mathrm{i}\alpha}\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{\mathrm{i}}{2}\\0&0&0\end{bmatrix}+e^{-\mathrm{i}\alpha}\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{\mathrm{i}}{2}\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \frac{\mathbb{J}_4}{\mathrm{i}k_\rho}=e^{\mathrm{i}\alpha}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\frac{1}{2}&-\frac{\mathrm{i}}{2}&0\end{bmatrix}+e^{-\mathrm{i}\alpha}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{\mathrm{i}}{2}&0\end{bmatrix}.$$

记为 $\gamma_{\ell\ell'}=\mu_\ell/(\mu_{\ell'}k_\ell^2)$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{M}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \mathbb{M}_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{\mathrm{i}}{4}&0\\\frac{\mathrm{i}}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \mathbb{M}_3=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&-\frac{\mathrm{i}}{4}&0\\-\frac{\mathrm{i}}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&0&0\end{bmatrix},\\&\mathbb{M}_4=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{\mathrm{i}}{2}\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \mathbb{M}_5=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{\mathrm{i}}{2}\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \mathbb{M}_6=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{161}$$

则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Theta}^{\uparrow\uparrow}=&b^{\uparrow\uparrow}_{\ell\ell'1}(\mathbb{M}_1+e^{2\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_2+e^{-2\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_3)+\gamma_{\ell\ell'}b^{\uparrow\uparrow}_{\ell\ell'2}\Big[-k_{\ell z}k_{\ell' z}(\mathbb{M}_1-e^{2\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_2-e^{-2\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_3)\\&-k_\rho k_{\ell z}(e^{\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_4+e^{-\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_5)+k_\rho k_{\ell' z}(e^{\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_4^{\mathrm{T}}+e^{-\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_5^{\mathrm{T}})+k_\rho^2\mathbb{M}_6\Big]\\\boldsymbol{\Theta}^{\uparrow\downarrow}=&b^{\uparrow\downarrow}_{\ell\ell'1}(\mathbb{M}_1+e^{2\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_2+e^{-2\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_3)+\gamma_{\ell\ell'}b^{\uparrow\downarrow}_{\ell\ell'2}\Big[k_{\ell z}k_{\ell' z}(\mathbb{M}_1-e^{2\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_2-e^{-2\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_3)\\&-k_\rho k_{\ell z}(e^{\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_4+e^{-\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_5)-k_\rho k_{\ell' z}(e^{\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_4^{\mathrm{T}}+e^{-\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_5^{\mathrm{T}})+k_\rho^2\mathbb{M}_6\Big]\\\boldsymbol{\Theta}^{\downarrow\uparrow}=&b^{\downarrow\uparrow}_{\ell\ell'1}(\mathbb{M}_1+e^{2\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_2+e^{-2\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_3)+\gamma_{\ell\ell'}b^{\downarrow\uparrow}_{\ell\ell'2}\Big[k_{\ell z}k_{\ell' z}(\mathbb{M}_1-e^{2\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_2-e^{-2\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_3)\\&+k_\rho k_{\ell z}(e^{\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_4+e^{-\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_5)+k_\rho k_{\ell' z}(e^{\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_4^{\mathrm{T}}+e^{-\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_5^{\mathrm{T}})+k_\rho^2\mathbb{M}_6\Big]\\\boldsymbol{\Theta}^{\downarrow\downarrow}=&b^{\downarrow\downarrow}_{\ell\ell'1}(\mathbb{M}_1+e^{2\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_2+e^{-2\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_3)+\gamma_{\ell\ell'}b^{\downarrow\downarrow}_{\ell\ell'2}\Big[-k_{\ell z}k_{\ell' z}(\mathbb{M}_1-e^{2\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_2-e^{-2\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_3)\\&+k_\rho k_{\ell z}(e^{\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_4+e^{-\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_5)-k_\rho k_{\ell' z}(e^{\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_4^{\mathrm{T}}+e^{-\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_5^{\mathrm{T}})+k_\rho^2\mathbb{M}_6\Big]\end{aligned}$$

将密度定义为 $\sigma^{**}_{\ell\ell'j}(k_\rho)$，如下所示

$$\begin{aligned}&\sigma^{\uparrow\uparrow}_{\ell\ell'1}=\frac{b^{\uparrow\uparrow}_{\ell\ell'1}(k_\rho)}{k_{\ell' z}}-\gamma_{\ell\ell'}k_{\ell z}b^{\uparrow\uparrow}_{\ell\ell'2}(k_\rho),\quad \sigma^{\downarrow\downarrow}_{\ell\ell'1}=\frac{b^{\downarrow\downarrow}_{\ell\ell'1}(k_\rho)}{k_{\ell' z}}-\gamma_{\ell\ell'}k_{\ell z}b^{\downarrow\downarrow}_{\ell\ell'2}(k_\rho),\\&\sigma^{\uparrow\downarrow}_{\ell\ell'1}=\frac{b^{\uparrow\downarrow}_{\ell\ell'1}(k_\rho)}{k_{\ell' z}}+\gamma_{\ell\ell'}k_{\ell z}b^{\uparrow\downarrow}_{\ell\ell'2}(k_\rho),\quad \sigma^{\downarrow\uparrow}_{\ell\ell'1}=\frac{b^{\downarrow\uparrow}_{\ell\ell'1}(k_\rho)}{k_{\ell' z}}+\gamma_{\ell\ell'}k_{\ell z}b^{\downarrow\uparrow}_{\ell\ell'2}(k_\rho),\\&\sigma^{\uparrow\uparrow}_{\ell\ell'3}=\frac{b^{\uparrow\uparrow}_{\ell\ell'1}(k_\rho)}{k_{\ell' z}}+\gamma_{\ell\ell'}k_{\ell z}b^{\uparrow\uparrow}_{\ell\ell'2}(k_\rho),\quad \sigma^{\downarrow\downarrow}_{\ell\ell'3}=\frac{b^{\downarrow\downarrow}_{\ell\ell'1}(k_\rho)}{k_{\ell' z}}-\gamma_{\ell\ell'}k_{\ell z}b^{\downarrow\downarrow}_{\ell\ell'2}(k_\rho),\\&\sigma^{\uparrow\downarrow}_{\ell\ell'3}=\frac{b^{\uparrow\downarrow}_{\ell\ell'1}(k_\rho)}{k_{\ell' z}}-\gamma_{\ell\ell'}k_{\ell z}b^{\uparrow\downarrow}_{\ell\ell'2}(k_\rho),\quad \sigma^{\downarrow\uparrow}_{\ell\ell'3}=\frac{b^{\downarrow\uparrow}_{\ell\ell'1}(k_\rho)}{k_{\ell' z}}+\gamma_{\ell\ell'}k_{\ell z}b^{\downarrow\uparrow}_{\ell\ell'2}(k_\rho),\end{aligned}\tag{162}$$

and

$$\begin{aligned}
&\sigma^{\uparrow\star}_{\ell\ell'2}=-\gamma_{\ell\ell'}\frac{k_\rho k_{\ell z}}{k_{\ell' z}}b^{\uparrow\star}_{\ell\ell'2},\quad \sigma^{*\uparrow}_{\ell\ell'2}=\gamma_{\ell\ell'}\frac{k_\rho k_{\ell z}}{k_{\ell' z}}b^{*\uparrow}_{\ell\ell'2},\\
&\sigma^{*\uparrow}_{\ell\ell'4}=\gamma_{\ell\ell'}k_\rho b^{*\uparrow}_{\ell\ell'2},\quad \sigma^{*\downarrow}_{\ell\ell'4}=-\gamma_{\ell\ell'}k_\rho b^{*\downarrow}_{\ell\ell'2},\quad \sigma^{**}_{\ell\ell'5}=\gamma_{\ell\ell'}\frac{k_\rho^2}{k_{\ell' z}}b^{**}_{\ell\ell'2}.
\end{aligned}\tag{163}$$

于是，我们得到 $\mathbb{G}^{**}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z')$ 的表达式：

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{G}}^{**}_{\ell\ell'}=&\mathrm{i}\frac{Z^{**}_{\ell\ell'}}{2}[\sigma^{**}_{\ell\ell'1}\mathbb{M}_1+\sigma^{**}_{\ell\ell'3}e^{2\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_2+\sigma^{**}_{\ell\ell'3}e^{-2\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_3+\sigma^{**}_{\ell\ell'2}e^{\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_4\\
&+\sigma^{**}_{\ell\ell'2}e^{-\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_5+\sigma^{**}_{\ell\ell'4}e^{\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_4^{\mathrm{T}}+\sigma^{**}_{\ell\ell'4}e^{-\mathrm{i}\alpha}\mathbb{M}_5^{\mathrm{T}}+\sigma^{**}_{\ell\ell'5}\mathbb{M}_6]
\end{aligned}\tag{164}$$

进行逆傅里叶变换后，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}^{**}_{\ell\ell'}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=&\frac{1}{4\pi^2}\iint_{\mathbb{R}^2}\widehat{\mathbb{G}}^{**}_{\ell\ell'}e^{\mathrm{i}k_x(x-x')+\mathrm{i}k_y(y-y')}dk_xdk_y\\
=&\mathcal{I}^{**}_{\ell\ell'0}[\sigma^{**}_{\ell\ell'1}]\mathbb{M}_1+\mathcal{I}^{**}_{\ell\ell'2}[\sigma^{**}_{\ell\ell'3}]\mathbb{M}_2+\mathcal{I}^{**}_{\ell\ell',-2}[\sigma^{**}_{\ell\ell'3}]\mathbb{M}_3\\
&+\mathcal{I}^{**}_{\ell\ell'1}[\sigma^{**}_{\ell\ell'2}]\mathbb{M}_4+\mathcal{I}^{**}_{\ell\ell',-1}[\sigma^{**}_{\ell\ell'2}]\mathbb{M}_5+\mathcal{I}^{**}_{\ell\ell'1}[\sigma^{**}_{\ell\ell'4}]\mathbb{M}_4^{\mathrm{T}}\\
&+\mathcal{I}^{**}_{\ell\ell',-1}[\sigma^{**}_{\ell\ell'4}]\mathbb{M}_5^{\mathrm{T}}+\mathcal{I}^{**}_{\ell\ell'0}[\sigma^{**}_{\ell\ell'5}]\mathbb{M}_6,
\end{aligned}\tag{165}$$

其中

$$\mathcal{I}^{**}_{\ell\ell'\kappa}[\sigma](\mathbf{r},\mathbf{r}')=\frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\iint_{\mathbb{R}^2}e^{\mathrm{i}\mathbf{k}_\alpha\cdot(\rho-\rho')}\mathcal{Z}^{**}_{\ell\ell'}(z,z')e^{\mathrm{i}\kappa\alpha}\sigma(k_\rho)dk_xdk_y,\quad *,\star=\uparrow,\downarrow,\tag{166}$$

对于 $\kappa=-2,-1,0,1,2$。此外，根据恒等式

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}^n}\int_0^{2\pi}e^{\mathrm{i}z\cos\theta+\mathrm{i}n\theta}d\theta,\tag{167}$$

我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{**}_{\ell\ell'\kappa}[\sigma](\mathbf{r},\mathbf{r}')&=\frac{\mathrm{i}^{1+\kappa}e^{\mathrm{i}\kappa\varphi}}{4\pi}\int_0^\infty k_\rho J_\kappa(k_\rho\rho)\mathcal{Z}^{**}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z')\sigma(k_\rho)dk_\rho,\\
\mathcal{I}^{**}_{\ell\ell',-\kappa}[\sigma](\mathbf{r},\mathbf{r}')&=\frac{\mathrm{i}^{1-\kappa}e^{-\mathrm{i}\kappa\varphi}}{4\pi}\int_0^\infty k_\rho J_{-\kappa}(k_\rho\rho)\mathcal{Z}^{**}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z')\sigma(k_\rho)dk_\rho,
\end{aligned}\tag{168}$$

对于 $\kappa>0$。注意，$J_{-n}(z)=(-1)^nJ_n(z)$，$n>0$。然后，对于 $\kappa=0,1,2$，我们定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{**}_{\ell\ell'\kappa+}[\sigma](\mathbf{r},\mathbf{r}')&:=\mathcal{I}^{**}_{\ell\ell'\kappa}[\sigma](\mathbf{r},\mathbf{r}')+\mathcal{I}^{**}_{\ell\ell',-\kappa}[\sigma](\mathbf{r},\mathbf{r}'),\\
\mathcal{I}^{**}_{\ell\ell'\kappa-}[\sigma](\mathbf{r},\mathbf{r}')&:=\mathcal{I}^{**}_{\ell\ell'\kappa}[\sigma](\mathbf{r},\mathbf{r}')-\mathcal{I}^{**}_{\ell\ell',-\kappa}[\sigma](\mathbf{r},\mathbf{r}'),
\end{aligned}\tag{169}$$

其中

$$\mathcal{I}^{**}_{\ell\ell',-\kappa}[\sigma](\mathbf{r},\mathbf{r}')=e^{\mathrm{i}2\kappa\varphi}\mathcal{I}^{**}_{\ell\ell'\kappa}[\sigma](\mathbf{r},\mathbf{r}').\tag{170}$$

3.6. 两组公式的比较。对于平面分层介质中的电磁场问题，求解麦克斯韦方程组通常依赖适当的数学变换来降低复杂度。TE/TM分解是一种经典方法，其核心思想是基于特定的坐标方向（通常为分层法线，即 z 方向），将电磁场分解为相互解耦的 TE 和 TM 波模。通过引入适当的标量势函数 $\widehat{G}_1$，$\widehat{G}_2$，$\widehat{G}_3$，完整的矢量麦克斯韦方程组可以转化为

三个标量亥姆霍兹分层问题 (64)-(66)。基于矢势的矩阵基展开，分层介质中的麦克斯韦方程组也分别导出针对 b_1，b_2，b_3 的三个标量亥姆霍兹分层问题 (146)-(148)。

直接比较标量界面问题 (64)–(66) 与 (146)–(148)，显然可以看出它们的

$$b_1 = \frac{\mathrm{i}}{\omega}\widehat{G}_1, \quad b_2 = \frac{\mathrm{i}}{\omega\mu_{\ell'}}\widehat{G}_2, \quad b_3 = \frac{\mathrm{i}}{\omega\mu_{\ell'}}\widehat{G}_3. \tag{171}$$

此外，矩阵基 (91) 具有深刻的几何和物理意义。实际上，它本质上是三个单位方向向量 ($\hat{\mathbf{u}}$，$\hat{\mathbf{v}}$，$\hat{\mathbf{z}}$) 的张量积（并矢）的具体表示，即

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{u}} \otimes \hat{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}} = -\frac{\mathbb{J}_5}{k_\rho^2}, \quad \hat{\mathbf{u}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T = \mathbb{J}_9 - \frac{\mathbb{J}_8}{k_\rho^2}, \quad \hat{\mathbf{u}} \otimes \hat{\mathbf{z}}^T = -\frac{\mathrm{i}\mathbb{J}_3}{k_\rho}, \\
&\hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T = \mathbb{J}_1 + \frac{\mathbb{J}_5}{k_\rho^2}, \quad \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{u}}^T = -\frac{\mathbb{J}_8}{k_\rho^2}, \quad \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{z}}^T = \frac{\mathrm{i}\mathbb{J}_7}{k_\rho}, \\
&\hat{\mathbf{z}} \otimes \hat{\mathbf{u}}^T = -\frac{\mathrm{i}\mathbb{J}_4}{k_\rho}, \quad \hat{\mathbf{z}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T = -\frac{\mathrm{i}\mathbb{J}_6}{k_\rho}, \quad \hat{\mathbf{z}} \otimes \hat{\mathbf{z}}^T = \mathbb{J}_2.
\end{aligned} \tag{172}$$

将 (171) 和 (172) 代入 (135)–(136)，并重新整理结果，可得到 (71) 和 (72) 中的表达式。因此，并矢格林函数 $\mathbb{G}_{\mathbf{E}}$，$\mathbb{G}_{\mathbf{H}}$ 的矩阵基底表述与 TE/TM表述完全相同。

[9] 中提出的 TE/TM分解和矩阵基是从不同视角处理分层介质中矢量波动方程的有效工具。前者基于对波模态进行符合物理直觉的解耦，后者则基于系统的代数展开。本文的讨论阐明，这两种方法具有相同的简化数学核心结构（三个标量亥姆霍兹问题），其解和最终物理输出（并矢格林函数）也相同。矩阵基方法可视为 TE/TM分解思想在代数上更一般的实现，且不依赖于显式的横向方向。这样的理解有助于统一对不同计算电磁学方法的认识，也可能为处理分层介质中的其他矢量波动方程（例如弹性波动方程）提供启发。

4. 结论

我们提出了两种方法在分层介质中麦克斯韦方程组格林函数求解上的一致性。TE/TM 分解的主要思想是将电磁场问题解耦，从而求得 TE 波和 TM 波的解。矩阵基方法的主要思想是对矢势函数进行矩阵基展开，再将其转化为对称系数的解。

附录 A. 分层介质中的三维亥姆霍兹方程格林函数

考虑界面问题（64）。逐层解 $G_1(k_\rho,\ z,\ z')$ 的分解形式为

$$G_1(k_\rho,z,z')=v_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z')+\delta_{\ell\ell'}\widehat{G}^f(k_\rho,z,z'),\quad d_\ell<z<d_{\ell-1}, \tag{173}$$

其中，反应场分量 $v_{\ell\ell'}(k_\rho,\ z,\ z')$ 满足常微分方程

$$\partial_{zz}\hat{v}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z')+k_{\ell z}^2\hat{v}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z')=0,\quad d_\ell<z<d_{\ell-1},\ \ell=0,1,\cdots,L, \tag{174}$$

在每一层中。

二阶常微分方程（174）的通解为

$$\hat{v}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z')=\begin{cases}A_0(k_\rho z')e^{\mathrm{i}k_{0z}z},\quad \ell=0,\\ A_\ell(k_\rho,z')e^{\mathrm{i}k_{\ell z}z}+B_\ell(k_\rho,z')e^{-2\mathrm{i}k_{\ell z}d_{\ell-1}-\mathrm{i}k_{\ell z}z},\quad 0<\ell<\ell',\\ A^r_{\ell'}(k_\rho,z')e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}z}+B^r_{\ell'}(k_\rho,z')e^{-\mathrm{i}k_{\ell' z}z},\quad \ell=\ell',\\ A_\ell(k_\rho,z')e^{2\mathrm{i}k_{\ell z}d_\ell+\mathrm{i}k_{\ell z}z}+B_\ell(k_\rho,z')e^{-\mathrm{i}k_{\ell z}z},\quad \ell'<\ell<L,\\ B_L(k_\rho,z')e^{-\mathrm{i}k_{Lz}z},\quad \ell=L,\end{cases} \tag{175}$$

其中，由于辐射波的外向性，两个指数增长项已被移除。注意，自由空间分量可以重写为

$$\widehat{G}^f(k_\rho,z,z')=\frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}|z-z'|}}{2k_{\ell' z}}=H(z-z')A^f_{\ell'}(k_\rho,z')e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}z}+H(z-z')B^f_{\ell'}(k_\rho,z')e^{-\mathrm{i}k_{\ell' z}z}$$

其中，$H(x)$ 是赫维赛德函数，且

$$A^f_{\ell'}(k_\rho,z')=\frac{\mathrm{i}}{2k_{\ell' z}}e^{-\mathrm{i}k_{\ell' z}z'},\quad B^f_{\ell'}(k_\rho,z')=\frac{\mathrm{i}}{2k_{\ell' z}}e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}z'}$$

Then

$$G_1(k_\rho,z,z')=\begin{cases}A_0(k_\rho,z')e^{\mathrm{i}k_{0z}z},\quad \ell=0,\\ A_\ell(k_\rho,z')e^{\mathrm{i}k_{\ell z}z}+B_\ell(k_\rho,z')e^{-2\mathrm{i}k_{\ell z}d_{\ell-1}-\mathrm{i}k_{\ell z}z},\quad 0<\ell<\ell',\\ A_{\ell'}(k_\rho,z')e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}z}+B_{\ell'}(k_\rho,z')e^{-\mathrm{i}k_{\ell' z}z},\quad \ell=\ell',\\ A_\ell(k_\rho,z')e^{2\mathrm{i}k_{\ell z}d_\ell+\mathrm{i}k_{\ell z}z}+B_\ell(k_\rho,z')e^{-\mathrm{i}k_{\ell z}z},\quad \ell'<\ell<L,\\ B_L(k_\rho,z')e^{-\mathrm{i}k_{Lz}z},\quad \ell=L,\end{cases} \tag{176}$$

其中

$$A_{\ell'}(k_\rho,z')=A^r_{\ell'}(k_\rho,z')+A^f_{\ell'},\quad B_{\ell'}(k_\rho,z')=B^r_{\ell'}(k_\rho,z')+B^f_{\ell'}.$$

在使用式 (64) 中的界面条件确定系数 $\{A_\ell,B_\ell\}_{\ell=0}^{L}$，$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ 之前，我们先介绍多层分层介质 [3] 的广义反射系数和透射系数 $R_{\ell\ell'},\ T_{\ell\ell'}$。它们通过双层反射系数和透射系数递归定义。

$$R_{\ell,\ell+1}=\frac{a_{\ell+1}b_\ell k_{\ell z}-a_\ell b_{\ell+1}k_{\ell+1,z}}{a_{\ell+1}b_\ell k_{\ell z}+a_\ell b_{\ell+1}k_{\ell+1,z}},\quad T_{\ell,\ell+1}=\frac{2a_\ell b_\ell k_{\ell z}}{a_{\ell+1}b_\ell k_{\ell z}+a_\ell b_{\ell+1}k_{\ell+1,z}}.$$

一般而言，我们有如下递推关系

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_{0,-1}=&0,\quad \widetilde{R}_{\ell+1,\ell}=\frac{R_{\ell+1,\ell}+\widetilde{R}_{\ell,\ell-1}e^{2\mathrm{i}k_{\ell z}D_\ell}}{1+R_{\ell+1,\ell}\widetilde{R}_{\ell,\ell-1}e^{2\mathrm{i}k_{\ell z}D_\ell}},\quad \ell=0,1,\cdots,L-1,\\ \widetilde{R}_{L,L+1}=&0,\quad \widetilde{R}_{\ell,\ell+1}=\frac{R_{\ell,\ell+1}+\widetilde{R}_{\ell+1,\ell+2}e^{2\mathrm{i}k_{\ell+1,z}D_{\ell+1}}}{1+R_{\ell,\ell+1}\widetilde{R}_{\ell+1,\ell+2}e^{2\mathrm{i}k_{\ell+1,z}D_{\ell+1}}},\quad \ell=L-1,\cdots,1,0,\end{aligned}\tag{177}$$

关于广义反射系数以及递推关系

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_{\ell'\ell'}=&1,\quad \widetilde{T}_{\ell'\ell}=\frac{T_{\ell+1,\ell}e^{-\mathrm{i}(k_{\ell,z}-k_{\ell+1,z})d_\ell}}{1+R_{\ell+1,\ell}\widetilde{R}_{\ell,\ell-1}e^{2\mathrm{i}k_{\ell z}D_\ell}}\widetilde{T}_{\ell',\ell+1},\quad \ell=\ell'-1,\ell'-2,\cdots,0,\\ \widetilde{T}_{\ell',\ell+1}=&\frac{T_{\ell,\ell+1}e^{-\mathrm{i}(k_{\ell z}-k_{\ell+1,z})d_\ell}}{1+R_{\ell,\ell+1}\widetilde{R}_{\ell+1,\ell+2}e^{2\mathrm{i}k_{\ell+1,z}D_{\ell+1}}}\widetilde{T}_{\ell'\ell},\quad \ell=\ell',\ell'+1,\cdots,L-1,\end{aligned}\tag{178}$$

关于广义透射系数。

然后，我们可以将问题 (64) 分解为两个问题：由来自最低层的向上传播的入射波 $A_{\ell'}e^{\mathrm{i}k_{\ell'z}z}$ 产生的 $(\ell+1)$ 层散射问题，以及由来自顶层的向下传播的入射波 $B_{\ell'}e^{-\mathrm{i}k_{\ell'z}z}$ 产生的 $(L-\ell)$ 层散射问题。它们是分层介质中的散射问题，平面波源分别从顶部和底部入射。利用广义反射系数，我们得到

$$G_1(k_\rho,z,z')=\begin{cases}A_\ell e^{\mathrm{i}k_{\ell z}z}+A_\ell\widetilde{R}_{\ell,\ell-1}e^{-2\mathrm{i}k_{\ell z}d_{\ell-1}-\mathrm{i}k_{\ell z}z},\quad d_\ell<z<d_{\ell-1},\ \ell=1,\cdots,\ell',\\ A_{\ell'}e^{\mathrm{i}k_{\ell'z}z}+A_{\ell'}\widetilde{R}_{\ell',\ell'-1}e^{-2\mathrm{i}k_{\ell'z}d_{\ell'-1}-\mathrm{i}k_{\ell'z}z},\quad d_{\ell'}<z<d_{\ell'-1},\end{cases}\tag{179}$$

and

$$G_1(k_\rho,z,z')=\begin{cases}B_{\ell'}\widetilde{R}_{\ell',\ell'+1}e^{2\mathrm{i}k_{\ell'z}d_{\ell'}+\mathrm{i}k_{\ell'z}z}+B_{\ell'}e^{-\mathrm{i}k_{\ell'z}z},\quad d_{\ell'}<z<d_{\ell'-1},\\ B_\ell\widetilde{R}_{\ell,\ell+1}e^{2\mathrm{i}k_{\ell z}d_\ell+\mathrm{i}k_{\ell z}z}+B_\ell e^{-\mathrm{i}k_{\ell z}z},\ \ d_\ell<z<d_{\ell-1},\ \ell=\ell'+1,\cdots,L.\end{cases}\tag{180}$$

将方程 (179) 和 (180) 代入 (64) 中的界面条件，得到

$$\begin{aligned}A_\ell(\widetilde{R}_{\ell,\ell-1}e^{2\mathrm{i}k_{\ell z}(d_{\ell-1}-d_\ell)}+1)e^{\mathrm{i}(k_{\ell z}-k_{\ell+1,z})d_\ell}=&A_{\ell+1}(\widetilde{R}_{\ell+1,\ell}+1),\\ \frac{1}{\mu_\ell}k_{\ell z}A_\ell(\widetilde{R}_{\ell\ell-1}e^{2\mathrm{i}k_{\ell z}(d_{\ell-1}-d_\ell)}-1)e^{\mathrm{i}(k_{\ell z}-k_{\ell+1,z})d_\ell}=&\frac{1}{\mu_{\ell+1}}k_{\ell+1,z}A_{\ell+1}(\widetilde{R}_{\ell+1,\ell}-1),\end{aligned}\tag{181}$$

对于 $\ell=0,\ 1,\ \cdots,\ \ell'-1$ 和

$$\begin{aligned}B_\ell(\widetilde{R}_{\ell,\ell+1}+1)=&B_{\ell+1}(\widetilde{R}_{\ell+1,\ell+2}e^{2\mathrm{i}k_{\ell+1,z}(d_\ell-d_{\ell+1})}+1)e^{\mathrm{i}(k_{\ell z}-k_{\ell+1,z})d_\ell},\\ \frac{1}{\mu_\ell}k_{\ell z}B_\ell(\widetilde{R}_{\ell,\ell+1}-1)=&\frac{1}{\mu_{\ell+1}}k_{\ell+1,z}B_{\ell+1}(\widetilde{R}_{\ell+1,\ell+2}e^{2\mathrm{i}k_{\ell+1,z}(d_\ell-d_{\ell+1})}-1)e^{\mathrm{i}(k_{\ell z}-k_{\ell+1,z})d_\ell},\end{aligned}\tag{182}$$

对于 $\ell=\ell',\ \ell'+1,\ \cdots,\ L-1$。

比较 将式（176）中的表达式与式（179）和（180）中的表达式相结合，我们得到 n

$$\begin{aligned}B_\ell=&\widetilde{R}_{\ell,\ell-1}A_\ell,\quad \ell=0,1,\cdots,\ell'-1,\\ A_\ell=&\widetilde{R}_{\ell,\ell+1}B_\ell,\quad \ell=\ell'+1,\ell'+2,\cdots,L,\end{aligned}\tag{183}$$

and

$$\begin{cases} B_{\ell'}^r = A_{\ell'}\widetilde{R}_{\ell',\ell'-1}e^{-2\mathrm{i}k_{\ell'z}d_{\ell'-1}} = (A_{\ell'}^f + A_{\ell'}^r)\widetilde{R}_{\ell',\ell'-1}e^{-2\mathrm{i}k_{\ell'z}d_{\ell'-1}}, \\ A_{\ell'}^r = B_{\ell'}\widetilde{R}_{\ell',\ell'+1}e^{2\mathrm{i}k_{\ell'z}d_{\ell'}} = (B_{\ell'}^f + B_{\ell'}^r)\widetilde{R}_{\ell',\ell'+1}e^{2\mathrm{i}k_{\ell'z}d_{\ell'}}, \end{cases} \tag{184}$$

定义

$$Q_\ell(k_\rho) := \frac{1}{1-\widetilde{R}_{\ell,\ell+1}\widetilde{R}_{\ell,\ell-1}e^{\mathrm{i}k_{\ell z}D_\ell}}, \quad \ell = 0,1,\cdots,L$$

其中， $d_{-1}=d_0, d_{L-1}=d_L$ 对于 $\ell=0,L$的记号如下。方程（184）的解 $A_{\ell'}^r, B_{\ell'}^r$ 为

$$\begin{aligned} A_{\ell'}^r =& \sigma_{\ell'\ell'}^{\uparrow\uparrow}e^{2\mathrm{i}k_{\ell'z}D_{\ell'}}A_{\ell'}^f + \sigma_{\ell'\ell'}^{\uparrow\downarrow}e^{-2\mathrm{i}k_{\ell'z}d_{\ell'}}B_{\ell'}^f \\ B_{\ell'}^r =& \sigma_{\ell'\ell'}^{\downarrow\uparrow}e^{2\mathrm{i}k_{\ell'z}d_{\ell'-1}}A_{\ell'}^f + \sigma_{\ell'\ell'}^{\downarrow\downarrow}e^{2\mathrm{i}k_{\ell'z}D_{\ell'}}B_{\ell'}^f \end{aligned} \tag{185}$$

其中，密度定义为

$$\begin{aligned} &\sigma_{\ell'\ell'}^{\uparrow\downarrow}(k_\rho) := Q_{\ell'}(k_\rho)\widetilde{R}_{\ell',\ell'+1}, \quad \sigma_{\ell'\ell'}^{\downarrow\uparrow}(k_\rho) := Q_{\ell'}(k_\rho)\widetilde{R}_{\ell',\ell'-1}, \\ &\sigma_{\ell'\ell'}^{\uparrow\uparrow}(k_\rho) = \sigma_{\ell'\ell'}^{\downarrow\downarrow}(k_\rho) := Q_{\ell'}(k_\rho)\widetilde{R}_{\ell',\ell'+1}\widetilde{R}_{\ell',\ell'-1} = \left[Q_{\ell'}(k_\rho)-1\right]e^{-2\mathrm{i}k_{\ell'z}D_{\ell'}}. \end{aligned} \tag{186}$$

从上述表达式可以看出，源层 ℓ' 中的反应场分为两部分：向上传播场（由 $A_{\ell'}^r$决定）和向下传播场（由 $B_{\ell'}^r$决定），且每部分都包含点源发出的向上场（由 $A_{\ell'}^f$决定）和向下场（由 $B_{\ell'}^f$决定）所激发的两个分量。因此，根据前面的讨论和分析，对 ℓ' 层上方的场有贡献的项，以及对 ℓ' 层下方场有贡献的项分别为

$$\begin{aligned} A_{\ell'} =& \left[1+\sigma_{\ell'\ell'}^{\uparrow\uparrow}e^{2\mathrm{i}k_{\ell'z}D_{\ell'}}\right]A_{\ell'}^f + \sigma_{\ell'\ell'}^{\uparrow\downarrow}e^{-2\mathrm{i}k_{\ell'z}d_{\ell'}}B_{\ell'}^f \\ B_{\ell'} =& \sigma_{\ell'\ell'}^{\downarrow\uparrow}e^{2\mathrm{i}k_{\ell'z}d_{\ell'-1}}A_{\ell'}^f + \left[1+\sigma_{\ell'\ell'}^{\downarrow\downarrow}e^{2\mathrm{i}k_{\ell'z}D_{\ell'}}\right]B_{\ell'}^f \end{aligned} \tag{187}$$

分别。结合反射系数和透射系数的定义，在方程（181）和（182）中消去 $R_{\ell,\ell+1}$ ，可得递推公式

$$\begin{aligned} A_\ell =& \frac{T_{\ell+1,\ell}e^{-\mathrm{i}(k_{\ell,z}-k_{\ell+1,z})d_\ell}}{1+R_{\ell+1,\ell}\widetilde{R}_{\ell,\ell-1}e^{2\mathrm{i}k_{\ell z}D_\ell}}A_{\ell+1}, \quad \ell=\ell'-1,\ell'-2,\cdots,0 \\ B_{\ell+1} =& \frac{T_{\ell,\ell+1}e^{-\mathrm{i}(k_{\ell z}-k_{\ell+1,z})d_\ell}}{1+R_{\ell,\ell+1}\widetilde{R}_{\ell+1,\ell+2}e^{2\mathrm{i}k_{\ell+1,z}D_{\ell+1}}}B_\ell, \quad \ell=\ell'+1,\ell'+2,\cdots,L \end{aligned}$$

利用广义透射系数，可将其改写为

$$\begin{aligned} A_\ell =& \widetilde{T}_{\ell'\ell}A_{\ell'}, \quad \ell=\ell'-1,\ell'-2,\cdots,0, \\ B_\ell =& \widetilde{T}_{\ell'\ell}B_{\ell'}, \quad \ell=\ell'+1,\ell'+2,\cdots,L. \end{aligned} \tag{188}$$

由式（183）、（187）和（188）可总结得出

$$A_\ell = \begin{cases} \sigma_{\ell'\ell'}^{\uparrow\uparrow}A_{\ell'}^f + \sigma_{\ell\ell'}^{\uparrow\downarrow}e^{-2\mathrm{i}k_{\ell'z}d_{\ell'}}B_{\ell'}^f, & \ell<\ell', \\ \sigma_{\ell\ell'}^{\uparrow\uparrow}e^{2\mathrm{i}k_{\ell'z}d_{\ell'-1}}A_{\ell'}^f + \sigma_{\ell\ell'}^{\uparrow\downarrow}B_{\ell'}^f, & \ell>\ell' \end{cases} \qquad B_\ell = \begin{cases} \sigma_{\ell'\ell'}^{\downarrow\uparrow}A_{\ell'}^f + \sigma_{\ell\ell'}^{\downarrow\downarrow}e^{-2\mathrm{i}k_{\ell'z}d_{\ell'}}B_{\ell'}^f, & \ell<\ell', \\ \sigma_{\ell\ell'}^{\downarrow\uparrow}e^{2\mathrm{i}k_{\ell'z}d_{\ell'-1}}A_{\ell'}^f + \sigma_{\ell\ell'}^{\downarrow\downarrow}B_{\ell'}^f, & \ell>\ell', \end{cases} \tag{189}$$

其中，源层外部的密度定义为

- $\ell < \ell'$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\ell\ell'}^{\uparrow\downarrow}(k_\rho) &:= \widetilde{T}_{\ell'\ell}\sigma_{\ell'\ell'}^{\uparrow\downarrow}(k_\rho), \quad \sigma_{\ell\ell'}^{\uparrow\uparrow}(k_\rho) := \widetilde{T}_{\ell'\ell}\left[1+\sigma_{\ell'\ell'}^{\uparrow\uparrow}(k_\rho)e^{2\mathrm{i}k_{\ell'z}D_{\ell'}}\right] \\
\sigma_{\ell\ell'}^{\downarrow\downarrow}(k_\rho) &:= \widetilde{R}_{\ell',\ell'-1}\sigma_{\ell\ell'}^{\uparrow\downarrow}(k_\rho), \quad \sigma_{\ell\ell'}^{\downarrow\uparrow}(k_\rho) := \widetilde{R}_{\ell',\ell'-1}\sigma_{\ell\ell'}^{\uparrow\uparrow}(k_\rho)
\end{aligned} \tag{190}$$

- $\ell > \ell'$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\ell\ell'}^{\downarrow\uparrow}(k_\rho) &:= \widetilde{T}_{\ell'\ell}\sigma_{\ell'\ell'}^{\downarrow\uparrow}(k_\rho), \quad \sigma_{\ell\ell'}^{\downarrow\downarrow}(k_\rho) := \widetilde{T}_{\ell'\ell}\left[1+\sigma_{\ell'\ell'}^{\downarrow\downarrow}(k_\rho)e^{2\mathrm{i}k_{\ell'z}D_{\ell'}}\right] \\
\sigma_{\ell\ell'}^{\uparrow\downarrow}(k_\rho) &:= \widetilde{R}_{\ell',\ell'+1}\sigma_{\ell\ell'}^{\downarrow\downarrow}(k_\rho), \quad \sigma_{\ell\ell'}^{\uparrow\uparrow}(k_\rho) := \widetilde{R}_{\ell',\ell'+1}\sigma_{\ell\ell'}^{\downarrow\uparrow}(k_\rho)
\end{aligned} \tag{191}$$

~ ~特别地，对于 $\ell = 0,\ L$，假设 $R_{0,\ -1} = R_{L,\ L+1} = 0$ 可得

$$\sigma_{00}^{\downarrow\downarrow} = \sigma_{00}^{\downarrow\uparrow} = \sigma_{LL}^{\uparrow\downarrow} = \sigma_{LL}^{\uparrow\uparrow} = 0$$

并且，在上层（$\ell = 0$）中，界面 $z = d_{-1}$ 不存在，因此由 $z = d_{-1}$ 的反射产生的两个反应分量恒为零，这与 $R_{0,\ -1} = 0$ 的定义相符。同样，界面 $z = d_L$ 不存在，因此由 $z = d_L$ 的反射产生的两个反应分量也为零，这也与 $R_{L,\ L+1} = 0$ 的定义相符。

将解（187）和（189）代入（175），即可得到如下反应场

$$\begin{aligned}
\hat{v}_{\ell\ell'}(k_\rho, z, z') = &\frac{\mathrm{i}}{2k_{\ell'z}}\Big[\sigma_{\ell\ell'}^{\uparrow\uparrow}(k_\rho)Z_{\ell\ell'}^{\uparrow\uparrow}(k_\rho, z, z') + \sigma_{\ell\ell'}^{\uparrow\downarrow}(k_\rho)Z_{\ell\ell'}^{\uparrow\downarrow}(k_\rho, z, z') \\
&+ \sigma_{\ell\ell'}^{\downarrow\uparrow}(k_\rho)Z_{\ell\ell'}^{\downarrow\uparrow}(k_\rho, z, z') + \sigma_{\ell\ell'}^{\downarrow\downarrow}(k_\rho)Z_{\ell\ell'}^{\downarrow\downarrow}(k_\rho, z, z')\Big]
\end{aligned} \tag{192}$$

其中 $Z_{\ell\ell'}^{\uparrow\downarrow}$（$k_\rho,\ z,\ z'$）是由下式给出的指数函数

$$\begin{aligned}
Z_{\ell\ell'}^{\uparrow\uparrow}(k_\rho, z, z') &= \begin{cases} e^{\mathrm{i}(k_{\ell z}z - k_{\ell' z}z')}, & \ell < \ell' \\ e^{\mathrm{i}(k_{\ell' z}\tau_{\ell'-1}(z') - k_{\ell z}\tau_\ell(z))}, & \ell \geq \ell' \end{cases} \\
Z_{\ell\ell'}^{\uparrow\downarrow}(k_\rho, z, z') &= \begin{cases} e^{\mathrm{i}(k_{\ell z}z - k_{\ell' z}\tau_{\ell'}(z'))}, & \ell \leq \ell' \\ e^{\mathrm{i}(k_{\ell' z}z' - k_{\ell z}\tau_\ell(z))}, & \ell > \ell' \end{cases} \\
Z_{\ell\ell'}^{\downarrow\uparrow}(k_\rho, z, z') &= \begin{cases} e^{\mathrm{i}(k_{\ell z}\tau_{\ell-1}(z) - k_{\ell' z}z')}, & \ell < \ell', \\ e^{\mathrm{i}(k_{\ell' z}\tau_{\ell'-1}(z') - k_{\ell z}z)}, & \ell \geq \ell', \end{cases} \\
Z_{\ell\ell'}^{\downarrow\downarrow}(k_\rho, z, z') &= \begin{cases} e^{\mathrm{i}(k_{\ell z}\tau_{\ell-1}(z) - k_{\ell' z}\tau_{\ell'}(z'))}, & \ell \leq \ell' \\ e^{\mathrm{i}(k_{\ell' z}z' - k_{\ell z}z)}, & \ell > \ell', \end{cases}
\end{aligned} \tag{193}$$

是指数函数，其中涉及相对于界面 d_ℓ定义的 z 的像坐标

$$\tau_\ell(z) = 2d_\ell - z, \tag{194}$$

值得指出的是，对于所有的 $d_{\ell'} < z' < d_{\ell'-1}$ 和 $d_\ell < z < d_{\ell-1}$，式（193）中的指数函数均呈指数衰减。

参考文献

[1] Wei Cai。《电磁现象的计算方法：溶剂化、散射和电子输运中的静电学》。剑桥大学出版社，2013 年。[2] WC Chew、JL Xiong 和 MA Saville。分层介质格林函数的矩阵友好型表述。《IEEE天线与无线传播快报》，5：490–494，2006 年。[3] Weng Cho Chew。《非均匀介质中的波与场》。约翰·威立父子出版公司，1999 年。[4] David Colton 和 Rainer Kress。《散射理论中的积分方程方法》。工业与应用数学学会，2013 年。[5] Walton C Gibson。《电磁学中的矩量法》。Chapman and Hall/CRC，2021 年。[6] Jian-Ming Jin。《电磁场理论与计算》。约翰·威立父子出版公司，2015 年。[7] Krzysztof A Michalski 和 Juan R Mosig。积分方程表述中的多层介质格林函数。《IEEE天线与传播汇刊》，45(3)：508–519，1997 年。[8] Jie L Xiong 和 Weng Cho Chew。一种适用于分层介质格林函数矩阵运算的新表述。《IEEE天线与传播汇刊》，58(3)：868–875，2009 年。[9] Wenzhong Zhang、Bo Wang 和 Wei Cai。分层介质中麦克斯韦方程组并矢格林函数的矩阵基底表述。《工业与应用数学学会应用数学杂志》，82(5)：1710–1732，2022 年。