评估量子退火求解最小顶点多割问题

Ali Abbassi*Orange Research*、*LIST3N* 特鲁瓦技术大学Chatillon-Troyes，法国
ali.abbassi@utt.fr/orange.com

Yann Dujardin
Orange Research
Orange
Chatillon，法国
yann.dujardin@orange.com

Eric Gourdin
Orange Research
Orange
Chatillon，法国
eric.gourdin@orange.com

Philippe Lacomme Caroline Prodhon*LIMOS - UMRCNRS 6158 ISIMA* - 奥弗涅信息学院 *LIST3N* 大学´克莱蒙奥弗涅大学 特鲁瓦技术大学´大学校园，Chebarde街1号，63177 Aubière，法国 特鲁瓦，法国
philippe.lacomme@isima.fr caroline.prodhon@utt.fr

arXiv:2601.00711v1 [quant-ph] 2 Jan 2026

摘要—**电信网络中的网络安全问题往往会引发难以用经典方法求解的复杂组合优化问题。本文研究了采用量子退火解决受限顶点最小多割问题的实际可行性。我们将该问题建模为二次无约束二元优化模型，并在 D-Wave 量子退火机上实现。我们不只关注解质量，还分析了量子工作流的关键环节，包括小子图嵌入技术、链长度、拓扑约束、链强度选择、解除嵌入过程以及后处理。结果表明，量子退火在硬件层面面临显著限制，在嵌入和可扩展性方面存在瓶颈，尤其是处理大型实例时；而量子-经典混合求解器则具有更好的可行性。本研究对 D-Wave系统当前的能力进行了切实评估，并指出了决定量子优化在网络安全相关网络问题中成效的关键参数。**

索引词—**组合优化；图与网络；电信应用**

I. 引言

现代电信网络必须持续应对确保通信安全、可靠和高效所面临的挑战，尤其是在遭受对抗性攻击或系统故障时。在这一背景下出现的许多算法挑战，都可以表述为困难的组合优化问题

一个典型例子是顶点最小多割（*VMMC*）问题。给定一个无向图和一组终端节点对，目标是找出最小的非终端顶点集合，移除该集合后，所有指定的终端对都彼此不连通。该问题出现在许多现实场景中，包括入侵遏制、弹性路由以及可生存通信基础设施的设计 [7], [20]。VMMC 也是涉及攻击路径干扰或安全导向网络配置中的选择性隔离任务的一种自然抽象。

已知，即使在树 [9], [15],等受限图类上，VMMC 问题仍是**NP 完全**的；而且，在实际应用中常见的约束下（例如禁止移除终端节点），其计算难度依然存在。尽管对于区间图 [15]和共二分图 [19], 等特殊图类存在多项式时间解法，但一般情形仍难以有效求解。

过去几十年来，人们已经提出了多种方法来应对该问题固有的复杂性。这些方法包括整数线性规划（ILP）模型、常数因子和对数近似算法 [6], [12], ，以及近年来利用输入结构参数的固定参数可处理（FPT）策略 [5], [18]。然而，随着网络规模和连通性的增加，经典算法往往面临扩展性挑战，尤其是在终端对数量增长或图呈现不规则或高度拓扑结构时。

在本文中，我们探索一种替代性计算范式：在D-Wave量子处理单元（QPU）上实现的量子退火。量子退火是一种元启发式方法，旨在寻找编码为二次无约束二元优化（*QUBO*）模型或其伊辛等价形式的二进制优化问题的基态能量（即最优或近似最优）配置 [11], [13]。D-Wave架构专为此类表述而设计，为实验评估量子硬件在NP难图问题上的性能提供了独特机会。

我们特别关注顶点最小多割问题的树结构实例，这些实例的QUBO表述采用基于路径的约束构建。我们的目标不仅是使用量子退火对这些实例进行编码和求解，还要评估这一过程中的实际瓶颈。这些瓶颈包括受硬件拓扑限制的嵌入 [8], 链稳定性 [4], ，以及在D-Wave的Advantage 平台等系统中使用量子-经典混合求解器时所涉及的权衡 [10]。

通过聚焦于一个成熟且计算上具有挑战性的问题，我们旨在评估量子退火对于一种据我们所知尚未在这一背景下得到研究的变体的实际可行性。除提出一种QUBO表述外，我们还分析硬件约束、嵌入策略和求解器行为对解质量及运行时性能的影响。本文其余部分的结构如下：第2节形式化定义顶点最小多割问题，讨论其复杂性，并概述基于路径的表述。第3节详细介绍量子退火工作流程以及D-Wave量子处理器所发挥的作用。第4节展示实证结果并讨论实际观察结果。第5节总结全文。

II. 问题陈述

多割问题是通信网络设计、可靠性和安全性中的核心问题，其目标是通过移除最少的图元素（边或顶点），断开特定的终端对。根据割的类型（边割或顶点割）以及割是否可以包含终端节点，该问题有多种变体。

本文聚焦于受限顶点最小多割（RVMMC）问题，其目标是移除最少数量的非终端顶点，使所有给定的终端对彼此断开。为简洁起见，本文其余部分将该问题称为顶点最小多割（VMMC）。

设 $G=(V,\ E)$ 为无向图，$H=\{(s_i,\ t_i)\ |i=1,\ .....,\ k\}$，其中 $k\in\mathbb{N}$，且 $H\subseteq V\times V$ 为终端对集合。目标是找到非终端顶点的一个子集 $C\subseteq V$，使得对于每个 $(s_i,\ t_i)\ \in H$，连接 s_i 和 t_i 的所有路径都至少经过 C 中的一个顶点。

即使在度数有界的树上，该问题也是 NP 完全的 [8]，，并且在余图和分裂图等图类上难以求解。然而，在区间图 [15]，、置换图和共二分图 [19]上，该问题存在多项式时间解。此外，相对于割集的大小，该问题的参数化版本是固定参数可 tractable 的 [5]‚[18]。相关问题也以不同形式进行过研究。文献 [17]使用分支定价法研究了多终端顶点分离集。已有研究提出了用于树上的边多重割的 QUBO模型，并使用 D-Wave [8]求解；也提出了采用优化公式的多路割模型 [16] 。表 I 总结了各种多重割问题的主要区别。

表 I 基于割的图分离问题比较。

问题	**割类型**	**终端移除**	**复杂度（一般图）**
最小割最大流	Edge	允许	多项式时间
多路割	边/顶点	取决于模型	NP 完全 for $\|T\|\geq 3$ [9]
边多重割	Edge	允许	NP 完全 for $\|H\|\geq 3$ [8]
受限顶点多割	顶点	Not 允许	NP 完全，even 在树上 [15]

现在，我们介绍一个基于路径的二元线性规划（BLP）来对 VMMC 建模。为每个顶点 $v\in V$ 分配一个二元变量 $x_v\in\{0,1\}$；当该顶点被选中移除时，$x_v=1$ 。令 $P_{s_i,\ t_i}$ 表示所有 s_i-t_i路径的集合，$i=1,\ .....k\in\mathbb{N}$。目标函数是在满足以下两个约束的同时，使移除顶点的总数最少：

$$\begin{aligned}\min\quad & \sum_{v\in V}x_v & & \\ \text{s.t.}\quad & x_v=0 & \forall v\in V_H\quad & \text{(C1)}\\ & \sum_{v\in\pi}x_v\geq 1 & \forall(s_i,t_i)\in H,\forall\pi\in P_{s_i,t_i}\quad & \text{(C2)}\\ & x_v\in\{0,1\} & & \end{aligned}\tag{1}$$

约束 (C1) 禁止移除终端顶点。约束 (C2) 确保每个终端对的源顶点与目标顶点之间都不存在路径。此表述未考虑路径之间的冗余，但为转换为 QUBO 以及开展量子优化实验提供了合适的基础。

III. 量子优化

量子计算利用叠加和隧穿等量子力学现象，为解决组合优化问题引入了一种新范式，提供了高效方案，以探索大型实例的广阔解空间 [1]。尽管人们普遍认为，量子计算机无法在多项式时间内求解一般的 NP 完全问题（包括可满足性问题），也就是说，这些问题不属于有界错误量子多项式时间 [1], , 但量子方法在实际应用中仍可带来显著优势。具体而言，Grover算法在无结构搜索情形下至多提供二次加速 [14], ，这印证了黑盒优化的理论局限性。然而，这些局限并不排除量子计算在现实场景中常见的结构化问题实例上实现显著量子加速的可能性 [2]。

受这一细微差异的启发，量子退火等量子启发式方法在求解可利用其结构的 NP难组合问题方面日益受到关注。在这项工作中，我们重点研究量子退火在 VMMC 实例中的应用。我们将其表述为二次无约束二元优化（QUBO）模型，并探究 D-Wave 量子处理器的有效性。

A. 量子计算

优化问题可以通过基于门的量子算法来求解，例如Grover自适应搜索或量子近似优化算法（QAOA）；也可以采用量子退火（QA）等模拟方法 [1], [3]。要让量子设备处理优化问题，必须将问题表述为兼容的数学模型。对于大多数模拟机器，这通常是一个二次布尔多项式，并编码为 QUBO 模型或伊辛哈密顿量；

而哈密顿量数字机器则可以处理更高阶的哈密顿量。对于基于门的量子计算机，QUBO 会被映射为由幺正操作组成的量子电路，这些操作作用于希尔伯特空间中的量子比特。量子态的演化会产生概率性测量，使其坍缩为一个经典解。

相比之下，D-Wave 的量子处理器通过将 QUBO 或伊辛模型直接嵌入硬件，在物理层面实现优化。目标是找到所编码代价函数的基态，即能量最低的配置。系统从易于制备的哈密顿量的基态开始初始化，并根据随时间变化的薛定谔方程 [11] 逐渐演化至问题哈密顿量。如果这一演化足够缓慢，绝热定理便可确保系统在整个过程中保持在基态，从而得出最优或近似最优解。

在这两种模型中，最终解的质量在很大程度上取决于问题的表述、硬件约束和抗噪性，因此编码策略是量子优化工作流程中的核心设计要素 [21]。

B. 量子退火

量子退火（QA）是一种用于求解组合优化问题的元启发式算法，它利用量子涨落，尤其是量子隧穿，来逃离局部极小值并探索低能构型。量子退火依赖于由量子绝热定理 [11] 所支配的物理过程。

在此框架中，优化问题被编码到作用于希尔伯特空间 $\mathcal{H} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ 上、与 n 个量子比特相关联的问题哈密顿量 H_p的基态中。系统初始化于驱动哈密顿量$H_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 的基态，其中 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 上有界线性算子的空间。整个系统按照一个随时间变化的厄米算子演化：

$$H(t) = A(t)H_0 + B(t)H_p, \quad t \in [0, T], \tag{2}$$

其中， $A(t)$ $B(t)$ $\in$ $C^\infty([0,T],\mathbb{R})$ 是光滑的实值退火方案，满足 $A(0) > 0, B(0) = 0$ 且$A(T) = 0, B(T) > 0$。光滑性确保各阶导数均存在，这对满足绝热条件至关重要。

如果系统演化得足够缓慢，且基态与第一激发态之间的瞬时谱隙 $\Delta(t) = E_1(t) - E_0(t)$ 对所有 $t \in [0,T]$ 始终严格为正，那么绝热定理保证系统在整个演化过程中保持在其瞬时基态，最终到达一个接近H_p基态的状态。在 D-Wave 量子退火机上， H_p 被实现为伊辛哈密顿量：

$$H_{\mathrm{p}} = \sum_{i=1}^{n} h_i Z_i + \sum_{1 \le i < j \le n} J_{ij} Z_i Z_j, \tag{3}$$

其中， Z_i 是作用于量子比特 i 的 Pauli-Z 算符，其本征值为 ± 1； h_i， $J_{ij} \in \mathbb{R}$ 则分别是可调标量参数，表示局部场和两两耦合。

在计算基中，哈密顿量是对角的，并定义了一个经典能量函数：

$$E(\mathbf{s}) = \sum_i h_i s_i + \sum_{i<j} J_{ij} s_i s_j, \quad \mathbf{s} \in \{-1, +1\}^n,$$

其最小化对应于确定 H_p 的基态。

*C. QUBO*表述

设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ 为一个二元决策变量向量。一般的伪布尔函数是一个多元多项式 [8] f：$\{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ 其定义如下：

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{S \subseteq \{1,\ldots,n\}} c_S \prod_{j \in S} x_j, \tag{4}$$

其中 $c_S \in \mathbb{R}$。我们定义 $\deg(f) = \max\{|S| : c_S \neq 0\}$。当 $\deg(f) = 2$ 时，该函数称为二次伪布尔函数，可写为：

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i + \sum_{1 \le i < j \le n} w_{ij} x_i x_j. \tag{5}$$

由此得到规范的 QUBO形式：

$$\min_{\mathbf{x} \in \{0,1\}^n} \mathbf{x}^\top Q \mathbf{x}, \quad Q \in \mathbb{R}^{n \times n}, \tag{6}$$

其中 Q是一个对称代价矩阵。在该模型中，对角线元素 Q_{ii} 表示线性项，非对角线元素 Q_{ij} 表示成对相互作用。QUBO表述与物理学中的伊辛模型密切相关。通过变量替换 $x_i = \frac{1+s_i}{2}$，其中 $s_i \in \{-1, +1\}$，可以将 QUBO 映射为等价的伊辛哈密顿量。这使得可以在 D-Wave 等量子退火机上直接实现硬件计算，使系统朝着所编码能量景观的基态演化。在实践中，通过将违反约束的情况纳入惩罚项，可将 BLP 转换为 QUBO形式。这些惩罚项由超参数加权；必须对超参数进行调节，以强化约束，同时避免能量景观出现数值不稳定性或失真 [13]。

令 $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ 分别表示终端约束和路径约束的惩罚系数。给定二进制变量 $x_v \in \{0,1\}$，QUBO 表述为：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\top H_p \mathbf{x} = & \sum_{v \in V} x_v \\ & + M_1 \left(\sum_{v \in V_H} x_v \right)^2 \quad \text{(C1)} \\ & + M_2 \sum_{(s_i,t_i) \in H} \sum_{\pi \in P_{s_i,t_i}} \left(\sum_{v \in \pi} (1 - x_v) \right)^2 \quad \text{(C2)} \end{aligned} \tag{7}$$

此表达式将目标函数和约束编码为惩罚项，合并为一个二次函数，供量子退火器最小化。虽然这种表述避免了松弛变量

，但其他版本可能会引入辅助二进制松弛变量，将不等式约束转换为等式 [13]。例如，形式为$\sum_{v\in\pi} x_v \geq 1$ 的路径约束可重新表述为

$$\left(\sum_{v\in\pi} x_v + \sum_{j=0}^{\lceil \log_2 M_\pi \rceil - 1} 2^j \cdot y_j^\pi - 1\right)^2, \forall \pi \in P_{s_i,t_i}$$

其中，$y_j^\pi \in \{0,1\}$ 是二进制松弛变量，M_π 是路径中的节点数。该建模方式提升了表达能力，但也引入了额外变量和二次项，可能影响在量子硬件上的嵌入可行性和资源使用。

D. D-Wave 的量子退火工作流程

将顶点最小多割问题建模为 QUBO 后，要在 D-Wave 的量子退火机上求解，还需要经过复杂的编译流程。具体而言，用于表示终端点分离的基于路径的编码会带来建模开销，因为约束数量会随枚举路径集合的规模而增加。随后，必须将生成的 QUBO 图嵌入 D-Wave 的硬件拓扑（如 Pegasus 或 Zephyr），而硬件拓扑对量子比特连通性有严格要求。将逻辑变量嵌入由物理量子比特构成的链本身就是 NP 难问题，还需要额外的量子比特和耦合器 [4]。

为解决可扩展性和噪声相关问题，我们采用了基于竞赛策略的 D-Wave 混合求解器 [10]。该方法会并行评估多个经典-量子求解器实例，并动态优先处理收敛速度较快的实例。分解有助于更好地利用经典启发式算法和量子隧穿来改进部分解。

IV. 数值分析

本节评估 QUBO 在树结构实例上的顶点最小多割 VMMC 问题中的性能。研究考察了求解器行为、D-Wave 硬件瓶颈以及参数调优的影响。我们生成随机无权树，其中每个终端对共享唯一一条路径。这保证了基于路径的 QUBO 表述具有可行性，同时保留了非平凡的嵌入复杂度。每个实例均构造为随机生成树，并精心选择非相邻终端点对，以避免退化割。研究聚焦于 9 种实例类型，终端对数量从 3 到 100 不等，顶点数量从 20 到 400 不等。

为确保性能评估贴近实际，我们重点关注规模和结构能够反映嵌入与量子比特资源实际限制的实例。在终端对数量增加时，这一点尤为重要。

A. QUBO 参数调优

我们对惩罚系数进行网格搜索，并使用模拟退火估算可行性概率和基态收敛情况。此外，还采用蒙特卡洛采样来验证惩罚鲁棒性。通过经验校准惩罚权重，以避免其过强（这可能会使能量景观变平）或过弱（这可能导致解不可行）。最终值根据图规模和终端对的数量进行缩放。

B. 求解器和评估指标

我们使用四项关键指标评估性能。首先，通过最优性差距评估解的质量，其定义为 $\frac{f_{\text{found}} - f^*}{f^*} \times 100\%$，其中 f^* 是在可处理的情况下通过混合整数线性规划求解器获得的最优成本。对于规模较大的情况，如果混合整数线性规划在计算上不可行，则仅报告不同求解器之间的相对比较。采样时间包括退火和后处理时长，用于衡量计算成本。嵌入难度通过链统计数据（长度、断链数）量化，而可行率则表示满足原始二元线性规划建模所施加全部约束的解所占比例。

表 II 求解器后端。

Type	**后端**
量子退火	D-Wave Advantage 4.1 QPU
经典启发式算法	模拟退火（自定义）
精确求解器	CPLEX
混合求解器	Leap 混合求解器（竞速）

其他指标包括量子处理器采样时间和解的可行性。模拟退火的参数通过逆温度范围 (0.1,10.0) 和 (0.1, 20.0)、扫描次数 {100,200, 500}，以及几何和线性冷却方案进行调整。测量次数在 10 到 1000 之间变化。对于每种配置，我们都会记录惩罚权重 M_1, M_2、选定的退火方案和采样参数。只有在相关时，才会结合可行性细分讨论链统计数据。

C. D-Wave 后端配置

实验在 D-Wave 的 Advantage System 4.1（eu-central-1）上执行，该系统支持 Pegasus P16 拓扑。嵌入使用*MinorMiner* 算法完成，重点在于尽量缩短链长度并避免链断裂。退火时间固定为 20μs，取值范围为系统可用范围内的一个值。

混合求解器以竞速模式运行，同时并行启动多个经典和量子采样器。这能改善响应时间和解的稳健性。耦合强度 J 在扩展范围 $[-2,1]$ 内进行调节，以稳定量子比特链并减少碎片化。

D. 研究结果与讨论

我们通过同时增加顶点和终端对的数量，评估了九个复杂度递增的实例。实例 I1 最小，包含 $|H| = 3$ 和 $|V| = 24$；实例 I9 最大，包含 $|H| = 100$ 和 $|V| = 450$。如图1所示，我们比较了四种求解器类型所得的最低 QUBO 能量及相应的割集大小。模拟退火（SA）始终能获得更优的

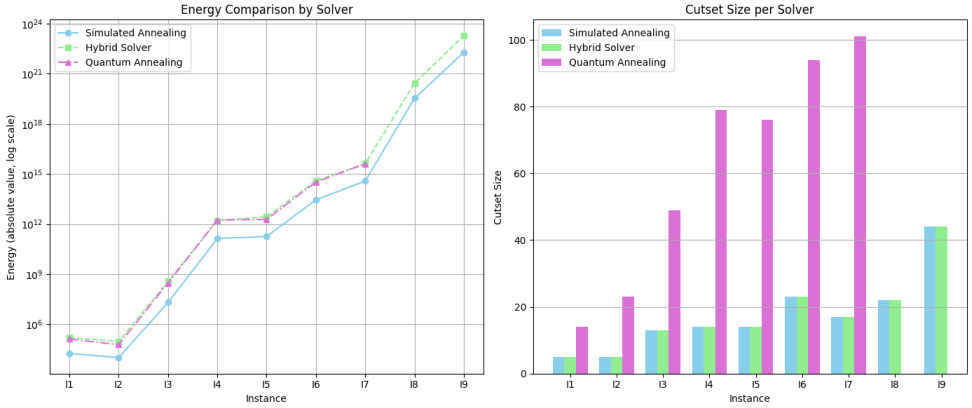

图1。 左：求解器能量 不同实例间的比较（绝对值对数刻度）。右：相关割集大小，表示解的可行性 y.

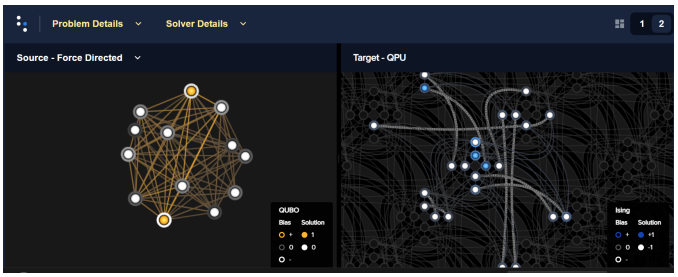

图2。使用 D-Wave Inspector 工具展示小型实例的源到量子处理器映射和链结构。

割集大小，表明其解的质量更高，差距约为 10% 至 15%，尽管它并非总能达到能量最低的构型。混合求解器往往比经典方法更有效地降低能量，但由于能量景观编码存在局限，这一优势不一定能转化为更优的解。

一个关键观察是，量子退火求解器通常能找到低能量解，但这些解不满足原始 VMMC约束。例如，在实例I7中，混合求解器和量子退火机得到的 QUBO能量相近，但量子求解器的割集与精确解相差超过 300%。从实例I5开始，量子退火无法得到任何可行解；对于实例I8和I9，无论采用何种嵌入策略，都无法将 QUBO嵌入量子处理器。我们尝试了多种方法，包括 MinorMiner、LazyFixedEmbeddingComposite、均匀扭矩补偿和基于团的嵌入，但均未成功。

在较小的实例中，由于开销较低，可以成功完成嵌入。然而，随着终端对数量增加，路径约束和 QUBO中的二次项也随之增多，导致连通性要求变得复杂。这使嵌入过程更加困难，并引发链不稳定性，往往导致解嵌入时无法恢复有效解。

为更好地理解量子退火性能下降的原因，我们分析了变量嵌入（图2）。我——

链强度设置不当往往会导致断链，即使能量值看起来较低，也会因此产生不可行解。在可视化的实例中，提高链强度可以增强嵌入的稳定性，从而恢复可行解。这凸显了采用审慎的解嵌入策略和准确的多数投票解码，对于提取有效变量赋值的重要性。

逻辑变量与物理量子比特之间的非线性关系在图3中得到了进一步说明。即使逻辑变量数量相同，不同实例所需的量子比特数量也可能因相互作用项的密度不同而存在巨大差异。这是QUBO编码成对约束的内在特性，也反映了Pegasus拓扑的局限性；在理想连接条件下，该拓扑支持的平均链长度约为5。

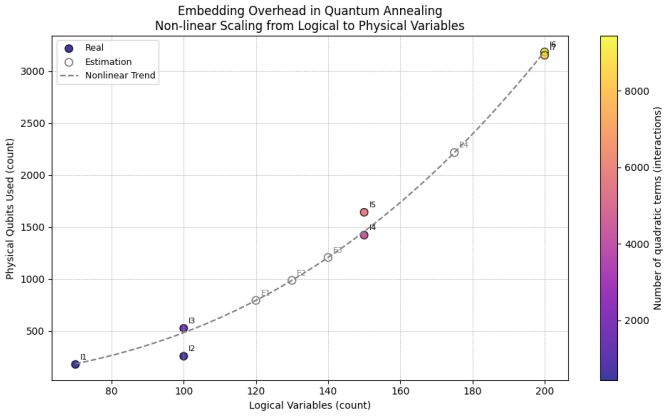

图3。嵌入开销：D-Wave量子退火中从逻辑量子比特到物理量子比特的非线性扩展。

最后，图4比较了求解器运行时间。虽然量子处理器的物理退火时间仍然很短——主要由亚毫秒级采样所决定——但总运行时间会受到编译流程的显著影响，其中包括 QUBO 实例化、嵌入和解嵌入。对于中小型实例，模拟退火在运行时间与解质量之间实现了最佳权衡。量子退火

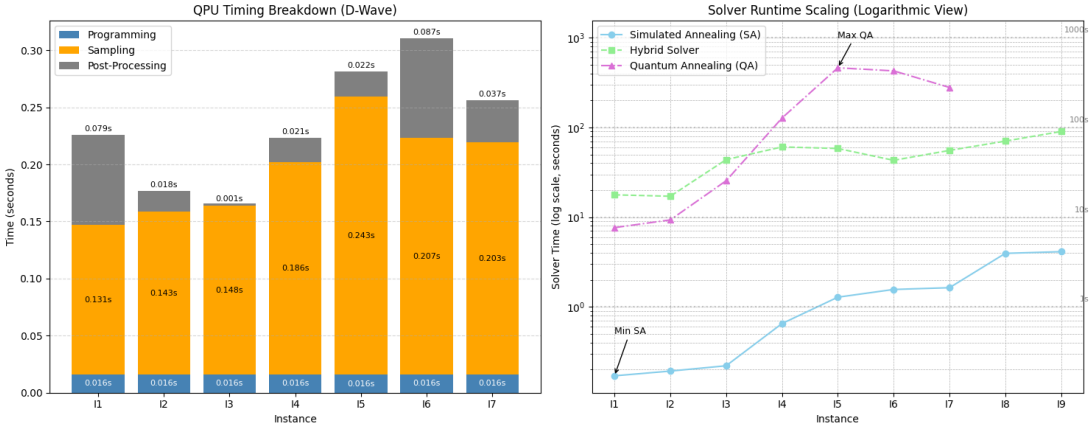

图4. 各实例的求解器运行时间比较及量子处理器计时细分。

对于小型实例，运行时间具有竞争力，但由于嵌入失败，很快就变得不切实际。混合求解器通过将 QUBO 分解为易于求解的子问题，在两种情形之间取得平衡，因此是处理中等规模实例的理想选择。

V. 结论与未来工作

本文对用于受限顶点最小多割（VMMC）问题的量子退火进行了实验评估。该问题被建模为 QUBO，并使用 D-Wave 的量子硬件求解。尽管该问题天然适合组合优化，但随着终端对数量增加，将其编码为基于路径的 QUBO 会带来显著开销。

尽管量子退火通常能够达到低能量构型，但由于断裂量子比特链和嵌入限制，这些构型并不能始终产生可行解。嵌入过程将逻辑变量映射到物理硬件量子比特，由此产生的非线性开销源于硬件连接约束和 QUBO 密度。因此，规模较大的实例会面临可扩展性下降和解质量退化的问题。混合量子经典求解器通过将问题分解为易于处理的子结构，表现出更强的鲁棒性，并能在更大规模下获得可行解。模拟退火在运行时间和割集质量方面也仍具竞争力。

未来的工作将着重于利用问题结构，减少 QUBO 中二次相互作用的数量，从而实现更紧凑的嵌入。对链强度进行更具策略性的控制，并采用自适应嵌入启发式方法，或许能提高纯量子运行中的解的可行性。

尽管全面实现量子优势仍遥不可及，我们的研究结果表明，混合工作流和量身定制的建模方式能够有效助力现实世界中的网络安全优化。

参考文献

[1] A. Abbas等，《量子优化中的挑战与机遇》，*Nature Reviews Physics*，2024年。[2] S. Aaronson，《实现巨大量子加速需要多少结构？》，*arXiv:2209.06930*，2022年。

[3] A. Bochkarev、R. Heese、S. J¨ager、P. Schiewe和A. Sch¨obel，《离散优化的量子计算：三种技术概览》，arXiv:2409.01373v1，2024年。[4] A. Bertuzzi、D. Ferrari、A. Manzalini和M. Amoretti，《组合优化的量子与混合求解器评估》，arXiv:2403.10455，2024年。[5] N. Bousquet、J. Daligault和S. Thomass´e，《多割问题是固定参数可解的》，载于第*43*届 *ACM* 计算理论研讨会（*STOC*）论文集，2011年，第459–468页。[6] G. Calinescu、H. Karloff和Y. Rabani，《有界度和有界树宽无权图及有向图中的多割》，*J. Algorithms*，第48卷，第2期，第333–359页，2003年。[7] M.-C. Costa、D. Coudert和B. Jaumard，《最小多割与最大整数多流：综述》，*Eur. J. Oper. Res.*，第162卷，第1期，第55–69页，2005年。[8] W. Cruz-Santos、C. Salas和J. C. L´opez-S´anchez，《用于D-Wave量子退火机的树上最小多割问题实例的QUBO建模》，*Sci. Rep.*，第9卷，第1721页，2019年。[9] E. Dahlhaus、D. S. Johnson、C. H. Papadimitriou、P. D. Seymour和M. Yannakakis，《多终端割的复杂性》，*SIAM J. Comput.*，第23卷，第4期，第864–894页，1994年。[10] D-Wave Systems Inc.，《混合工作流求解器》，2024年。[11] E. Farhi、J. Goldstone、S. Gutmann和M. Sipser，《通过绝热演化实现量子计算》，arXiv:0001106，2000年。[12] N. Garg、V. V. Vazirani和M. Yannakakis，《近似最大流—最小（多）割定理及其应用》，*SIAM J. Comput.*，第25卷，第2期，第235–251页，1996年。[13] F. Glover、G. Kochenberger和Y. Du，《QUBO模型的构建与使用教程》，arXiv:1811.11538，2019年。[14] L. K. Grover，《一种用于数据库搜索的快速量子力学算法》，载于第*28*届 *ACM* 计算理论年会（*STOC*）论文集，1996年，第212–219页。[15] J. Guo和R. Niedermeier，《区间图和有界树宽图中顶点多割的复杂性与精确算法》，*Eur. J. Oper. Res.*，第186卷，第2期，第542–553页，2008年。[16] S. Heidari、M. J. Dinneen和P. Delmas，《最小多路割问题的等价QUBO模型》，CDMTCS研究报告，技术报告CDMTCS-565，2022年。[17] Y. Magnouche、A. R. Mahjoub和S. Martin，《多终端顶点分隔问题：分支定界、割平面与定价》，*Discrete Appl. Math.*，第286卷，第168–189页，2020年。[18] D. Marx和I. Razgon，《以割集大小为参数的多割问题的固定参数可解性》，载于第*43*届 *ACM* 计算理论研讨会（*STOC*）论文集，2011年，第469–478页。[19] C. Papadopoulos，《置换图上的受限顶点多割》，*Discrete Appl. Math.*，第160卷，第12期，第1791–1797页，2012年。[20] H. S. Stone，《借助网络流算法进行多处理器调度》，*IEEE Trans. Softw. Eng.*，第SE-3卷，第1期，第85–93页，1977年。[21] S. E. Venegas-Andraca、J. F. Barrera、M. L. Boyer和A. E. Car-r asco，《基于量子退火的算法跨学科导论》，*Contemp. Phys.*，第59卷，第2期，第174–196页，2018年。