arXiv:2601.00720v1 [quant-ph] 2 Jan 2026

最小边多路割问题的量子方法

Ali Abbassi[1,2], Yann Dujardin[1], Eric Gourdin[1], Philippe Lacomme[3], 和 Caroline Prodhon[2]

[1] OrangeResearch，Chatillon，法国[2] LIST3N，特鲁瓦技术大学，特鲁瓦，法国[3] LIMOS - CNRS 6158 联合研究单位，ISIMA - 克莱蒙奥弗涅大学，法国
ali.abbassi@utt.fr,orange.com，yann.dujardin@orange.com，eric.gourdin@orange.com，philippe.lacomme@isima.fr，caroline.prodhon@utt.fr

摘要。 我们研究了最小边多路割问题，这是评估电信网络韧性的一项基础任务。本研究对比了该问题在三种量子计算范式下的表现：在 D-Wave 量子处理单元上进行量子退火、在 Quandela 的 Perceval 平台上模拟光子变分量子电路，以及 IBM 的门模型量子近似优化算法（QAOA）。我们评估了这些方法在早期量子优化中的相对可行性，并着重分析电路约束、编码开销和可扩展性之间的权衡。研究结果表明，目前量子退火在此类问题上具有最佳可扩展性，而光子和基于量子门的方法仍受硬件条件和模拟深度的限制。这些结果为设计面向电信安全和韧性分析中组合优化问题的量子工作流提供了切实可行的参考。

关键词： 量子退火 · 多路割 · 变分量子电路 · 量子近似优化算法 · 光子计算

1 引言

《最小边多路割》最小边多路割(MEMC) 问题常见于需要分离特定终端节点，以满足网络韧性标准或防止未经授权通信的任务中 [7]。给定一个无向图和一组 k 终端点，目标是找出一个最小权重边集，移除这些边后，任意两个终端点都不会位于同一个连通分量中。对于$k = 2$，该问题可归约为经典的最小割问题，可通过最大流算法在多项式时间内求解 [14]。对于 $k \geq 3$，该问题是 NP难问题 [9]。我们使用三种量子计算范式评估 MEMC 问题：(i) 在 D-Wave 硬件上进行量子退火；(ii) 使用 IBM Qiskit 实现量子近似优化算法（QAOA）；以及 (iii) 变分光子

量子电路，并使用 Quandela 的 Perceval 平台进行模拟。每种范式均采用相同的 MEMC QUBO表述，从而能够在不同求解器之间保持一致的问题建模 [8]。

该 QUBO模型被映射为伊辛形式，以便在 D-Wave 平台上执行，并用作 QAOA 和光子变分电路的代价哈密顿量。D-Wave 原生支持基于 QUBO 的量子退火，并提供混合求解器，因此是天然的基准平台 [10]。我们报告了小型图实例的数值结果，包括退火行为、QAOA 收敛趋势，以及光子电路中的比特串采样准确度。

本研究旨在表征不同量子优化方法在统一问题编码下的行为，并着重分析其在可扩展性、模型表达能力和硬件兼容性方面的权衡 [2]。本文结构如下：第 2 节定义 MEMC 问题，并回顾关键的复杂度结果。第 3 节介绍所有量子范式共用的 QUBO表述。第 4 节介绍三种量子优化方法：量子退火、QAOA 和光子变分电路。第 5 节报告在具有代表性的实例上获得的数值结果。第 6 节总结全文，并讨论当前的局限性与未来研究方向。

2 问题陈述

我们研究最小边多路割 （MEMC）问题。这是一个经典的NP难图划分问题，应用于网络阻断、安全通信和遏制策略 [20]。

输入。一个无向连通图 $G = (V,\ E)$、一个非负代价函数$C\colon\ E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，以及一组 $k \geq 2$终端点 $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \subseteq V$。
目标。找出一个最小代价的边集 $F \subseteq E$，使得在图 $G' = (V,\ E \setminus F)$ 中，任意两个终端点都不属于同一个连通分量。

该问题推广了经典的最小 s–t 割（当 $k = 2$ 时），可通过最大流算法在多项式时间内求解 [14]。对于 $k \geq 3$，该问题变为NP难 [9], ，即使在度或树宽等受到限制的情况下仍然很难求解 [6][22]。尽管针对某些参数 [4][21], 存在固定参数可解算法，但其判定版本——检验是否存在代价至多为 K的割——一般情况下是NP完全的。贪心启发式可提供 $2 - \frac{2}{k}$ 近似比 [9], ，但对于规模较大的实例，精确求解通常需要指数时间方法或松弛技术。我们研究其优化版本，并将其重新表述为二次无约束二元优化（QUBO）问题，为部署量子求解器提供一个通用基础。

3 QUBO表述

我们采用 [18], 提出的 MEMC 问题 QUBO表述，该表述旨在实现向量子硬件的高效嵌入。给定一个图 $G = (V,\ E)$，每个

顶点 $u \in V$ 通过二元变量$x_{u,\ t} \in \{0,1\}$分配给其中一个终端点 $t \in T$，其中 $x_{u,\ t} = 1$ 表示节点 u 被分配给终端点 t。这定义了图顶点的一个划分。因此，我们考虑以下哈密顿量：

$$H(x) = \alpha \left(\sum_{u \in V} \left(1 - \sum_{t \in T} x_{u,t} \right)^2 + \sum_{\substack{t,t' \in T \\ t \neq t'}} x_{t,t'} \right) + \sum_{\{u,v\} \in E} \sum_{t \in T} \sum_{\substack{t' \in T \\ t \neq t'}} C(\{u,v\}) x_{u,t} x_{v,t'} \tag{1}$$

第一项确保每个节点恰好分配给一个终端点，第二项则防止终端点之间发生冲突重叠（不会将一个终端点分配给另一个终端点）。

最后一项累计切断连接被分配给不同终端点的顶点的边所产生的代价。标量 α 用于调节约束项相对于目标项的权重。

4 量子优化

我们介绍本研究所考察的不同量子优化流程，并简要回顾其理论可靠性和编码策略[1][2]。

4.1 量子退火

量子退火（QA）是一种基于量子绝热定理 [11] 的连续时间优化方法。系统在一个随时间变化的哈密顿量作用下演化

$$H(t) = A(t)H_0 + B(t)H_p, \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

其中，H_0 是横场驱动项，H_p 编码代价函数。若$A(t)$ $B(t)$变化足够缓慢，且谱隙始终不可忽略，则系统最终会处于 H_p的基态附近。

我们的 QUBO表述通过 $x_i = (1 - z_i)/2$ 映射为伊辛能量函数，其中 $z_i \in \{-1, 1\}$ [15]:

$$E(z) = \sum_{i<j} J_{ij} z_i z_j + \sum_i h_i z_i, \tag{3}$$

其中，$J_{ij} = \frac{1}{4} Q_{ij}$和 $h_i = -\frac{1}{4} \sum_j (Q_{ij} + Q_{ji})$。这定义了一个伊辛自旋玻璃，其基态可解出原始问题。

伊辛模型代价函数被提升为对角量子哈密顿量：

$$H_p = \sum_{i<j} J_{ij} Z_i Z_j + \sum_i h_i Z_i, \tag{4}$$

其中， Z_i 是量子比特 i上的泡利-Z 算符。在 D-Wave 系统上，该哈密顿量通过稀疏硬件图 [10]上的可编程耦合和局域场实现。次级嵌入通过将物理量子比特连接成链来满足硬件连通性约束，从而能够退火至最低能量构型，该构型对应于低代价解。

4.2 量子近似优化算法

量子近似优化算法（QAOA） [12] 是一种变分量子算法，通过在浅层电路上交替演化哈密顿量来求解离散优化问题。该算法作用于由 QUBO 模型推导出的成本哈密顿量 H_C 和混合哈密顿量 H_M。QAOA$_p$ 拟设制备的量子态为

$$|\psi(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})\rangle = \prod_{\ell=1}^{p} e^{-i\beta_\ell H_M} e^{-i\gamma_\ell H_C} |\psi_0\rangle,$$

其中， $\boldsymbol{\gamma}$， $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$ 为可调参数， $|\psi_0\rangle = |+\rangle^{\otimes n}$ 为初始均匀叠加态。实际应用中， H_C 通过单量子比特 R_Z 门实现；标准混合哈密顿量$H_M = \sum_i X_i$ 对应全局 R_X 旋转。

通过最小化能量期望值$\langle\psi(\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\beta})|H_C|\psi(\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\beta})\rangle$，利用 COBYLA 等经典优化器对参数进行优化。QAOA 的结构可解释为在$H = H_C + H_M$作用下演化的 Trotter 化近似，其控制模式为“bang-bang”型 [5]。

标准 QAOA 会探索整个希尔伯特空间，而量子交替算符拟设（QAOA-A）等受约束扩展方法 [17] 则使用定制混合算符来施加问题约束。我们的实验并未使用这些方法；相反，我们将约束直接嵌入 QUBO 能量景观中。

4.3 光子量子计算机上的变分电路

光子变分量子电路利用线性光学元件 [19] [3]为求解组合优化问题提供了另一种范式。这些电路工作在离散变量区制中，此时福克态（光子数态）构成计算基。酉变换通过由分束器和相移器构成的无源干涉仪实现。通过经典优化调整电路参数，以最小化由 QUBO 导出的代价函数。

每个福克态 $|\boldsymbol{n}\rangle = |n_0,\ n_1,\ \ldots\ldots,\ n_{M-1}\rangle$ 编码了M 模式中的光子数，光子总数为 $\sum_j n_j = P$。对于二元优化，会采用双轨和奇偶性等编码方式。在双轨编码中，一个逻辑量子比特跨越两个模式：

$$|0\rangle = |1\rangle_0 \otimes |0\rangle_1, \quad |1\rangle = |0\rangle_0 \otimes |1\rangle_1.$$

我们采用基于奇偶性的映射 [24], ，其中每一位都按 $x_i = n_i \bmod 2$ 计算，从而可以直接评估 QUBO目标函数： $H(x) = x^\top Q x$。

该电路对输入福克态$|\boldsymbol{n}_{\text{in}}\rangle$施加酉变换 $U(\boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{\phi})$。此酉变换分解为带参数的分束器和相移器：

$$\mathrm{BS}(\theta,\phi)=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -e^{i\phi}\sin(\theta)\\ e^{-i\phi}\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix},\quad \mathrm{PS}(\varphi)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{i\varphi}\end{pmatrix}.$$

这些量子门将量子态演化为：

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = U(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\phi})|\boldsymbol{n}_{\text{in}}\rangle.$$

在福克基中进行测量会得到输出构型 $\boldsymbol{n}_{\text{out}}$，这些构型通过奇偶性映射为比特串 $x\in\{0,1\}^N$。QUBO 能量的估计如下：

$$\mathbb{E}_{x\sim p(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\phi})}[H(x)] = \sum_x p(x)\cdot x^\top Q x.$$

在 $(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\phi})$ 上最小化该期望值，构成了变分优化循环。我们在理想化条件下使用 Perceval [19] 模拟小规模的最小边多路割实例，并评估该电路采样近最优比特串的能力。

5 数值分析

初步结果证实，小规模实例的最小边多路割问题在三种量子工作流——量子退火（QA）、基于门的 QAOA 和光子变分电路（VQC）——中均可求得最优解。在$k=2$ 和 $|V|\le 10$的情况下，所有平台都能返回最优解，表明约束组合优化问题在低维量子环境中是可处理的。

表 1。数值汇总

后端	小型实例 ($k=2,\ \lvert V\rvert\le 10$)	大型实例 ($k=2,\ 10<\lvert V\rvert<70$)	收敛 / 备注
D-Wave QA	最优（100%）	差距 ≈ 20–40%（依赖拓扑结构）	观察到链断裂，平均链长 ∼ 8；建议使用混合求解器以提高稳定性。
D-Wave 混合式	最优（100%）	近似最优；典型差距 $\lesssim$ 10–15%	运行时间较长；经典后处理缓解嵌入效应。
QAOA （模拟）	最优比特串以 ∼ 40%采样在 $p=1$ 处的概率；没有改善更多迭代。	差距 ∼ 固定条件下为 15–30% p；没有系统性的改进——对于更大的 p （贫瘠平台期）	在 ∼10–20 次迭代内收敛；采样到最佳比特串的概率降低在 $p=1$ 处，BP 对中大型实例的影响。
光子 （类似）	最优采样以 $>$ 90% 的概率——性。	差距 ∼ 20–40%；不可行以模拟更大的系统使用 SLOS 后端	∼300–1500 参数更新； Nelder–Mead 比 COBYLA 更稳定。

图1比较了模拟退火、量子退火和 D-Wave 混合求解器在图规模不断增大时得到的割成本。对于较小的

图，所有求解器都得出了相同的最优值。然而，从 (10，70) 实例开始，量子退火的性能急剧下降，产生了显著更高的割成本。这种退化可能是由于较大规模 QUBO 编码中的嵌入开销、链断裂错误，或退火调度表达能力不足所致。图2展示了 D-Wave 硬件上的运行时间扩展情况。对于较小的图，量子退火仍然高效（不到 1 秒），但在 (10，70) 实例上出现了两个数量级的运行时间峰值，这可能反映了嵌入和重试所需开销的增加。相比之下，混合求解器在所有规模下都保持稳定的运行时间（10–20 秒），同时始终能够获得更优的解。 这些观察结果凸显了计算时间与输出准确性之间的关键权衡；随着实例规模增大，混合工作流表现出更强的稳健性。

图4展示了小型 MEMC 图上深度为$p = 1$ 的实例的 QAOA 电路结构。该拟设交替采用纠缠 ZZ 成本层和参数化单量子比特混合器。虽然这种结构适用于基于门的模拟，但电路宽度和纠缠深度会随实例规模呈二次增长，因此模拟仅适用于 $n \lesssim 14$ 个量子比特。

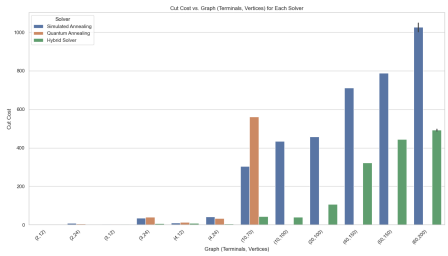


图1。 混合方法与量子退火的割成本

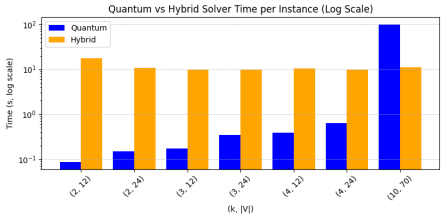


图2。 D-Wave 运行时间与实例规模

图4报告了经过25个经典步骤后预期成本的优化轨迹。尽管在无噪声环境中运行，能量景观仍然崎岖不平，导致收敛不稳定并陷入局部极小值。这反映了变分算法中贫瘠高原等已知挑战。虽然最终实现了收敛，但在我们的设置中，QAOA 无法扩展到更大的 MEMC 实例（$k \geq 3$ 和 $|V| \geq 15$ ）。尽管如此，在电路设计和模型容量方面，它仍比光子工作流更具表达能力。

光子模拟采用 Perceval 的 GenericInterferometer 和 SLOS 后端，并结合经典优化器进行。对于每种参数配置，使用 $N = 10000$ 次测量来估算 QUBO 成本。图6展示了一个玩具实例（$|V| = 4$、 $k = 2$），其中采样结果高度集中于最优比特串。图5展示了使用多种优化器时 QUBO 能量的收敛情况，其中 Nelder–Mead 的稳定性更高。

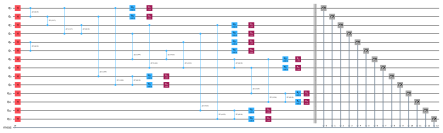


图 3. QAOA 电路结构 ($p = 1$)

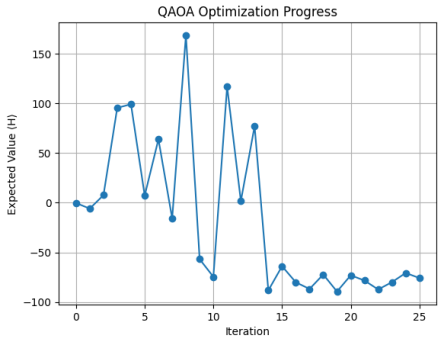


图 4. QAOA 训练收敛

尽管如此，光子工作流程的可扩展性仍然有限：对于变量超过 10 个或 $k \geq 3$ 的问题，性能会显著下降。此处未对嵌入效应、光子损失和退相干进行建模。未来的研究方向包括测试奎迪特编码或混合模拟编码，以解决模式限制。

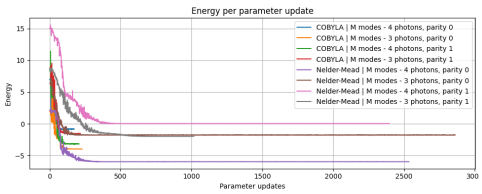


图 5. 光子能量收敛

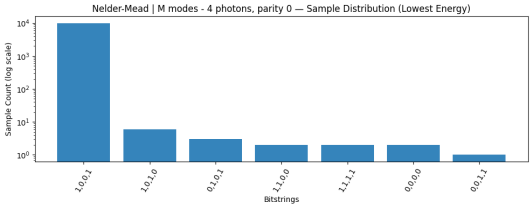


图 6. 光子比特串频率

6 结论

我们在相同的 QUBO 编码下，对三种量子范式处理 MEMC 问题的表现进行了基准测试。对于小规模实例（$|V| \leq 10$、 $k \leq 2$），所有方法——量子退火、QAOA 和光子变分电路——均找到了最优解，证实了基线兼容性。其中，D-Wave 的可扩展性最高，尽管存在嵌入开销，仍能以合理的解质量处理更大的图。该 QUBO表述以退火为设计考量，偏向稀疏两两相互作用，进一步凸显了 D-Wave 的适用性。QAOA 则受电路深度和贫瘠高原的限制。尽管在模拟中实现了收敛，其性能并未延伸至中等规模问题。更先进的设计（例如，约束保持混合器 [17]，参数集中 [5]）仍有待测试。光子模拟能够可靠地在玩具实例中找到最优

位串，但当变量超过 ∼10 时，性能会迅速下降。当前的奇偶校验编码和指数级状态空间是主要限制因素。面向硬件的增强（例如，奎迪特编码）前景可期。

总体而言，量子退火仍是在大规模应用方面最成熟的方案。未来的工作将致力于开发表达能力更强的编码、抗噪能力更强的 QAOA 电路，以及光子模型的物理部署。

7 补充材料

表2. 三个后端的系统属性和算法参数。

D-Wave Advantage（eu-central-1）	
QPU	Advantage_system5.4，Pegasus 拓扑（5614 个工作量子比特）
温度	16.4 毫开尔文
支持	概率- 二次无约束二元优化，伊辛模型
lems	
退火时间	[0.5, 2000] μ秒（默认 20 μ秒）
嵌入	自动次嵌入，平均链长
耦合范围	$J \in [-2, 1]$, $h \in [-18, 15]$
读取次数 / 后处理	多次读取，多数投票反嵌入
Quandela Perceval（光子变分量子电路，模拟）	
后端	SLOS 基于采样的模拟器
拟设	通用干涉仪（光束分束器 + 阶段移位算子)
编码	奇偶映射的福克态（$j = 0, 1$），完整/简化占据数
参数	相位 $\{\theta_i, \phi_{tr,i}, \phi_i\}$ 在 $[0, 2\pi]$中均匀分布
优化器	Powell、COBYLA、Nelder–Mead（最多 1000 次迭代）
损失函数	变分能量 $\langle\psi(\boldsymbol{\theta})\|H\|\psi(\boldsymbol{\theta})\rangle$
样本	每次评估 10 000 个
后处理	奇偶性转换、分布直方图化
IBM Qiskit 量子近似优化算法（基于量子门，模拟）	
后端	Qiskit AerSimulator（状态向量 + 4000测量次数）
拟设	QAOA拟设，深度 $p = 1$ （U_C, U_M）
初始化	$\beta_0 = \pi/2$, $\gamma_0 = \pi/4$
优化器	COBYLA，边界 $[0, \pi]$
目标函数	$\langle\psi(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})\|H\|\psi(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})\rangle$
编译	转译，预设遍历管理器（优化级别 0）
采样	测量所有量子比特后的归一化分布

可复现性与范围。 所有实现均使用公开的 SDK（Ocean、Qiskit、Perceval），参数范围列于表2。此处不包含经典基线；它们对于竞争力分析仍然至关重要，但不在本可行性研究的范围内。

贡献与范围。 本研究是首批跨范式研究之一，采用统一的 QUBO表述，在三种模式下研究最小边多路割 （MEMC）：D-Wave 量子退火、基于门的 QAOA 和光子变分电路。主要贡献包括：(i) 提出统一的编码，以便一致地对嵌入开销和工作流程约束进行基准测试；(ii) 对可扩展性瓶颈进行定性分析

(iii) 建立最小边多路割与电信网络韧性之间由应用驱动的联系；

不同于以往聚焦于原生设备问题（例如在硬件图上求解最大割）的研究，我们对一个具有直接产业应用动机的组合问题进行基准测试。目标是验证可行性并探索方法，而非实现量子优势。

电信网络韧性 找出“关键”边的最小集合（即这些边同时发生故障会导致某项服务停摆），对于设计故障概率低的“高韧性”电信网络至关重要。这是一项难度很高的任务，因为可以将 NP难问题“最小边多路割”直接归约到该问题。

参考文献

1. Abbas, A., 等（2024）。量子优化中的挑战与机遇。《自然·物理评论》。2. Bochkarev, A., Heese, R., Jäger, S., Schiewe, P., & Schöbel, A.（2024）。离散优化的量子计算：三种技术概览。arXiv:2409.01373。3. Bombardelli, M., Fleury, G., Lacomme, P., & Vulpescu, B.（2025）。光子量子计算基础。*arXiv* 预印本 arXiv:2509.04266。4. Bousquet, N., Daligault, J., & Thomassé, S.（2011）。多割属于固定参数可处理问题。载于第*43*届*ACM*计算理论研讨会（*STOC*）论文集，第459–468页。5. Brady, L. T., Van Heck, B., & Keating, C. T.（2021）。邦邦控制与量子近似优化。《量子》，5，500。6. Calinescu, G., Karloff, H., & Rabani, Y.（2003）。有界度数和有界树宽无权图与有向图中的多割。《算法杂志》，48（2），333–359。7. Costa, M.-C., Coudert, D., & Jaumard, B.（2005）。最小多重割与最大整数多流：综述。《欧洲运筹学杂志》，162（1），55–69。8. W. Cruz-Santos, C. Salas, and J. C. López-Sánchez, “用于D-Wave量子退火机的树中最小多重割问题实例的QUBO表述”, 科学报告，第9卷，第1721页，2019。9. Dahlhaus, E., Johnson, D. S., Papadimitriou, C. H., Seymour, P. D., & Yannakakis, M.（1994）。多终端割的复杂性。《*SIAM*计算杂志》，23（4），864–894。10. D-Wave Systems Inc.（2024）。混合工作流求解器。技术文档。11. Farhi, E., Goldstone, J., Gutmann, S., & Sipser, M.（2000）。通过绝热演化实现量子计算。arXiv:quant-ph/0001106。12. Farhi, E., Goldstone, J., & Gutmann, S.（2014）。一种量子近似优化算法。arXiv:1411.4028。

13. Flamini, F., Spagnolo, N., & Sciarrino, F.（2018）。光子量子信息处理：综述。《物理学进展报告》，82（1），016001。14. Garg, N., Vazirani, V. V., & Yannakakis, M.（1996）。近似最大流最小（多）割定理及其应用。《*SIAM*计算杂志》，25（2），235–251。15. Glover, F., Kochenberger, G., & Du, Y.（2019）。QUBO模型的构建与使用教程。arXiv:1811.11538。16. Guo, J., & Niedermeier, R.（2008）。区间图和有界树宽图中顶点多割的复杂性与精确算法。《欧洲运筹学杂志》，186（2），542–553。17. Hadfield, S., Wang, Z., O'Gorman, B., Rieffel, E., Venturelli, D., & Biswas, R.（2019）。从量子近似优化算法到量子交替算子拟设。《算法》，12（2），34。18. Heidari, S., Dinneen, M. J., & Delmas, P.（2022）。一种等价于最小多路割问题的QUBO模型。CDMTCS研究报告，技术报告 CDMTCS-565。19. Heurtel, C., Arrazola, J. M., Delgado, A., Thiel, V., Wright, L. G., & Orieux, A.（2023）。Perceval：离散变量光子量子计算软件平台。《量子科学与技术》，8，014006。20. Magnouche, Y., Mahjoub, A. R., & Martin, S.（2020）。多终端顶点分隔问题：分支切割定价法。离散应用数学，286，168 189–。21. Marx, D., & Razgon, I.（2011）。以割集大小为参数的多割固定参数可处理性。载于第*43*届*ACM*计算理论研讨会（*STOC*）论文集，第469–478页。22. Papadopoulos, C.（2012）。排列图上的受限顶点多割。离散应用数学，160（12），1791–1797。23. Venegas-Andraca, S. E., Barrera, J. F., Boyer, M. L., & Carrasco, A. E.（2018）。量子退火算法的跨学科导论。当代物理学，59（2），174–196。24. Brádler, K., Wallner, H.：浅层玻色电路的若干性质与应用。arXiv:2112.09766 [量子物理学]（2021）。https://doi.org/10.48550/arXiv.2112.09766