排版后的文章将在此处显示与文章类型相符的横幅

arXiv:2601.00724v1 [physics.flu-dyn] 2 Jan 2026

冻结细流诱导的冰结构形态

H´elie de Miramon[1]†, Wladimir Sarlin[2,3], Christophe Josserand[1],Thomas S´eon[3] 和 Axel Huerre[2]

[1]流体动力学实验室（LadHyX），UMR 7646 法国国家科学研究中心-巴黎综合理工学院，巴黎理工学院，91128 帕莱索 CEDEX，法国
[2]物质与复杂系统实验室（MSC），巴黎西岱大学，法国国家科学研究中心，UMR 7057，巴黎，75013，法国
[3]法国—阿根廷环境流体动力学研究所 (IFADyFE)，法国国家科学研究中心 (IRL 2027)，布宜诺斯艾利斯大学，阿根廷国家科学与技术研究委员会，阿根廷布宜诺斯艾利斯

（收到日期：xx；修订日期：xx；接受日期：xx）

我们研究了水细流在冷倾斜基底上流动时的凝固过程，以及由此形成的三维冰结构。我们采用可控的水力与热学实验装置，结合时空相移轮廓测量法和红外热成像，对冰的瞬态演化和最终形态进行表征。结果表明，典型实验分为三个阶段：首先形成一条直线冰脊，使细流趋于稳定；随后流动失稳并发生横向偏移，导致冰结构迅速横向扩展；最后，冰块逐渐增厚并变得平滑。在宽范围的流量、倾斜角度和热学条件下，最终形态均呈现上游三角形侧向包络，而到达基底边缘后，下游区域的宽度几乎保持恒定。红外测量显示，细流在基底上的停留时间随方位角呈高斯分布，这意味着细流经过结构中心区域的频率远高于经过侧缘的频率。针对实验结束时高度已收敛的区域，我们建立了一个二维理论模型，将描述细流几何的流体动力学模型与液相和固相中的热传输耦合起来。在大佩克莱数极限下，该模型预测稳态冰层高度沿流动方向呈指数增长，并且与实验高度场高度吻合。我们还进一步展示了稳态高度剖面与非均匀停留时间分布如何共同控制冰横截面的角向收敛。

关键词：作者不应在稿件中填写关键词，因为关键词须由作者在在线投稿过程中选择，之后将在排版过程中添加（完整列表请参见关键词 PDF）。其他分类也将同时添加。

† 通讯邮箱：heliedemiramon@gmail.com

1. 引言

地球，尤其是最寒冷的地区，存在许多自然流动与相变相互作用并形成复杂冰形态的实例。例如，在地下洞穴中，薄薄的细流水流或水膜会在悬垂的冷表面上冻结，形成冰帘（Persoiu & Lauritzen 2017）；滴落的水还会形成冰钟乳和石笋（Chen & Morris 2011；Papa 等 2024）；而在更大的尺度上，类似过程会在陡峭的山坡上形成冰瀑（Montagnat 等 2010）。在冰川表面，流动的融水与融化中的基底相互作用，形成多种多样的形态，这些形态统称为冰川冰岩溶。在融化季节，表面融水汇集于洼地，形成冰面湖，并汇流成溪流和河流，在冰体上切蚀出沟道（Pitcher & Smith 2019）。这些水流最终可能注入冰裂隙，进而在冰川底部形成冰内通道（Mankoff 等 2017）。这些排水系统通过调节冰下水文，对冰川运动和稳定性产生显著影响。2000年至2023年间，冰川体积损失了近5%（Zemp 等 2025），因此，确定冰面溪流如何加速其流经表面的融化，变得愈发重要（Pitcher & Smith 2019）。近年来，冰面溪流的形成、演化和动力学受到科学界广泛关注（Pitcher & Smith 2019），但相关研究主要采用野外工作（早在20世纪初，David Shackleton的探险便已开展此类工作（David 等 1910）），近年来则更多采用遥感分析（Smith 等 2015；Yang 等2016；St Germain & Moorman 2019）。尽管冰面河流对冰川质量损失和动力学至关重要，我们对其仍知之甚少。事实上，由于在偏远地区开展野外观测存在后勤困难，其全球分布图仅绘制了部分区域（Gleason 等 2016）；此外，其下切速率和快速形态调整仍缺乏野外尺度的定量验证（Karlstrom 等 2013）。此外，尽管越来越多的证据表明，融水沿渠化流路输送以及表面排水流至冰川底部会显著调节冰体动力学和冰架稳定性（Kingslake 等 2017），当前的冰盖模型尚未模拟这些过程，导致对冰川稳定性和海平面上升的预测仍存在重大不确定性（Pitcher & Smith 2019）。

然而，除了这些重力主导流之外，运动中的液体与不断演化的冰表面之间的类似相互作用，也会在小得多的毛细尺度上发生（Huerre 等2025年）。研究此类构型为分离控制流动—冰相互作用的基本物理机制，并将其用于理解更大尺度冰结构的形成，提供了一条互补途径。这通常以人工结构上的冰的积聚为典型例子（Lynch &Khodadoust 2001；Baumert 等2018年；Liu 等2019年），其源于撞击水滴的反复凝固。因此，已有多项研究考察了液滴撞击冷基底的过程。Madejski（1976年）基于能量论证，对撞击表面温度低于液体熔点的基底的液滴铺展动力学进行了实验和理论研究。Ghabache 等（2016年）研究了撞击液滴凝固形成的冰中出现的断裂模式。Schremb 等（2018年）刻画了过冷水滴撞击冰面后液膜的动力学，以及由此形成的最终冰形状。Thi´evenaz 等（2020年）研究了液滴撞击冷基底时达到的最大铺展直径，并提出了有效黏度模型来解释其实验观察结果。随后，该模型被扩展到液滴在铺展过程中能够融化其基底的情形（Sarlin 等2024年），从而捕捉到了此前研究报道的行为（Jin

等2017年；Ju 等2019年）。Papa 等（2024年）还研究了液滴反复撞击冷基底的情形，这会导致冻结液体钟乳石的形成。Sarlin等（2025年）近期考察了沉积在冰上的水滴的铺展动力学，并确定了水在冰面上的宏观接触角。还应指出，已有大量研究探讨了“拜占庭式冻结液滴”的形态，即静置液滴凝固形成的冰形状，尽管这一问题仍未解决（Stairs 1971年；Sebilleau 等2021年）。

然而，液滴并非唯一值得关注的毛细流。当流体沿倾斜平面向下流动时，会根据体积流量 Q 呈现出多种流体动力学状态（Nakagawa & Scott 1984；Nakagawa 1992）。随着 Q 增加，可能会观察到滴落、直线状细流（Monier 2022）、蜿蜒流（Le Grand-Piteira等2006），或呈现编织状图案的液膜（Mertens 等2004）。Monier 等（2020）近期研究了直线状细流的凝固过程，描述了其动力学，并报告了一种令人惊讶的冰形态：其高度随与注入点的距离线性增加。随后，Huerre 等（2021）通过一个平流–扩散模型捕捉了这种形状以及问题中各相的温度场；该模型在水–冰界面处与斯特藩条件耦合。然而，这些研究聚焦于较短的时间尺度，并专门选择流动条件以确保直线状细流保持稳定。其他细流状态（尤其是流量较高、会出现横向不稳定性和分支的情况）仍鲜有研究，即使在没有凝固的情况下也是如此（Le Grand-Piteira 等2006；Aouad 等2016）。因此，将凝固实验拓展到这些更复杂的流体动力学状态，对于揭示可能形成的冰形态范围，以及阐明自然与工程环境中导致其形成的物理机制至关重要。

本文旨在对上述后几个问题作出回应。全文组织如下。我们首先介绍实验装置和方法，随后描述典型实验中的演化与动力学，并对在我们的控制参数范围内三维冰结构的形成给出一般性解释。我们将分析结构的动态铺展过程以及其向稳态的趋近过程。接下来，我们建立一个用于描述稳态冰高度场的二维理论模型，将细流流体动力学与液体和固相区域中的热传输耦合起来。模型预测与实验测量结果取得了良好的一致性。最后，我们表明，冰结构的角向依赖性源于细流在冷基底上的停留时间呈高斯分布，这是因为细流在其中心线处的停留时间远长于在边缘处的停留时间。

2. 实验方法与装置

图1所示的实验装置用于研究冷基底上的细流冻结所诱导的冰结构形成。该装置由三个不同部分组成：液压系统可确保在整个实验期间（18 小时）保持恒定流量；热系统用于控制基底表面温度；光学装置则利用光学轮廓测量技术，随时间对冰结构进行三维重建。该设计使我们能够认为，所有控制参数在准瞬时状态下均保持恒定，并且在整个实验期间（18 小时）也保持恒定；但注入水温除外，它在不到 10 分钟的过渡期后达到所需的最终值。以下段落将分别详细介绍这三个子系统。

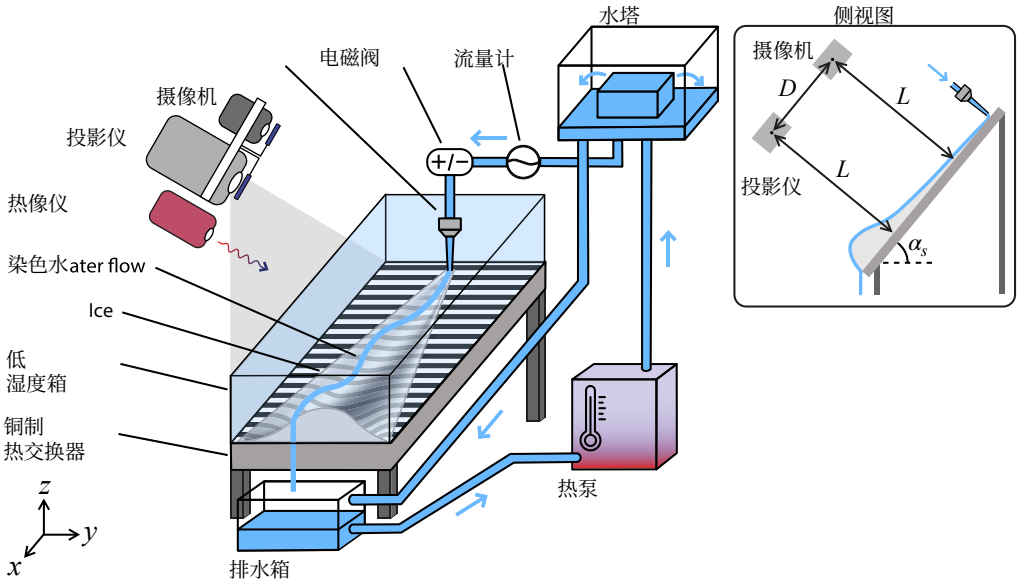

图1：本研究所用实验装置示意图。该装置由水力回路、低温恒温器调控的铜制热交换器以及光学系统组成。水力回路在倾斜基底顶部注入恒定水流；铜制热交换器确保表面温度受控；光学系统由投影仪/摄像机组成，可通过时空相移轮廓测量法对冰结构高度场进行三维映射。密封低湿度箱可在整个18小时实验期间防止结霜。

2.1. 流量控制

液压装置构成一个闭环，使我们能够在整个实验期间保持水的恒定流量 Q。在这里，Q 流量在 15 到 200 mL。min^{-1} 之间变化，以涵盖从直线状液膜流动到蜿蜒行为的转变；在环境温度下的铜基底上通常可以观察到这种蜿蜒行为。如图1的示意图所示，热交换器安装在排水箱顶部，其顶端设有旋转轴，可用于改变基底倾角 α_s。本研究考虑了三种构型：$\alpha_s \in \{50。3°，\ 90°，\ 139。6°\}$。

水由排水箱泵送至水塔，水塔位于热交换器上方约 50 cm 处。使用电磁流量计（Kobold MIM）监测流量，并通过电磁阀进行控制。电磁阀和流量计均连接至控制器（RB 100），使反馈回路能够在整个实验过程中将流量维持在目标值。随后，使用注入器将水通过内径为 $d_{in} = 3\text{mm}$ 的金属针注入；注入器位于基底上方 4 mm 处（垂直于倾斜面），以防止低流量时发生流动失稳和液滴形成。

所有实验均从在 $t = 0$打开电磁阀开始，几秒钟后即可达到所需流量，且不会出现超调。为避免之后流量调节受到干扰，随后将电磁阀的积分时间设为5秒，以滤除流量计固有的瞬时波动。这确保了整个18小时研究期间注入流量保持稳定，典型标准差范围为 0.8 mL.min^{-1}，对应于 $Q = 15\ \text{mL.min}^{-1}$，以及 $2 - 3\ \text{mL.min}^{-1}$，对应于 $Q = 200\ \text{mL.min}^{-1}$。

2.2. 温度控制

为了即使在水流经过表面时也能保持其温度恒定，将尺寸为50x20x2 cm^3 的铜制热交换器连接至低温恒温器（Lauda RP290E）。特定的传热液体（Lauda Kryo 95油）从低温恒温器流入热交换器，从而使表面在-60至100°C的任意温度下均具有空间均匀性，并具备抗热传递能力。温度调节通过三个Class1/3PT100探头进行监测（精度为 ±0.1℃），探头插入热交换器侧面中央厚度处：其中两个分别位于板的上游端和下游端附近，用于测量其温度分布，第三个探头位于板长方向的中点，为低温恒温器提供反馈控制。由于热泵具有较高的制冷能力（对于所需温度范围 –40 至 20℃，可达640 – 800W），表面温度得以保持恒定，典型标准差为 σ（T_s） < 0.4° C。在本研究所展示的实验中， T_s的范围为 –40℃至 –5℃。

水温由 Huber Minichiller 600 控制，先冷却后再泵送至水塔。由于环境空气会加热管道中流动的染色水，注入水温通常会在 1–10 分钟后逐渐达到研究设定温度。完成这一过渡后，注入水温在整个实验过程中保持稳定，典型标准差为 $\sigma(T_{\text{in}})$ < 0。5℃。本研究所呈现的实验中， T_{in} 范围为 4℃ 至 34℃。

最后，为防止霜的形成，在热交换器上方加装一个尺寸为 45x52x24 cm^3 的密闭透明有机玻璃箱，并向箱内注入加压干燥空气，流量为 $Q_{\text{air}} = 200\,\text{L}。\text{min}^{-1}$，使所有实验的湿度降至约 8 – 14%。

2.3. 光学装置

2.3.1. 轮廓测量方法原理

在现有的各种轮廓测量方法中，本研究选用的方法称为时空相移轮廓测量法（ST-PSP）。该轮廓测量方法利用视频投影仪将正弦条纹图案投射到参考平面（此处为基底）上。当物体出现时，条纹会发生变形，这种变形可通过摄像机记录下来，如图1所示。对所获得图像的分析使我们能够确定其相对于参考平面的相移，进而确定物体的高度图（Maurel 等 2009年；de Miramon 等2025年）。

ST-PSP方法结合了采样莫尔条纹法和相移轮廓测量法，以提高相位确定的准确性和稳健性（Ri 等 2019年）。具体做法是处理一组经过 N 相移的图像，并对所有 N 图像进行降采样和插值。随后，可通过二维离散傅里叶变换推得物体和参考平面的相位 ϕ 和 ϕ_0 （de Miramon等2025年）。接着，可以将物体的高度图与物体和参考平面之间的相位差$\Delta\phi = \phi - \phi_0$ （按上述方法分别提取）联系起来。这种联系最早由 Takeda 和 Mutoh（1983年）建立，随后由 Maurel 等 （2009年）加以完善。此处采用非准直投影和平行光轴几何结构，因此相位—高度关系为（Maurel 等2009年）：

$$h(x', y') = \frac{L\Delta\phi(x, y)}{\Delta\phi(x, y) - \omega_0 D}, \tag{2.1}$$

其中， D 是投影仪与相机光轴之间的垂直距离，L 是入瞳位置与参考平面之间的距离，而

ω_0 是投影条纹的频率（见图1中的插图）。由于视差效应，等式（2.1）两边的坐标会发生偏移。该偏移定义为

$$x' = \left(1 - \frac{h(x', y')}{L}\right) x, \qquad y' = \left(1 - \frac{h(x', y')}{L}\right) y. \tag{2.2}$$

当测量对象的高度相较于投影距离较小时L，可以忽略视差效应，并在方程（2.1）两侧使用相同坐标来应用相位—高度关系。然而，在我们的配置中，冰结构的高度可达到 L的5%至10%，因此不能忽略视差。为此，我们通过重新网格化和插值，将非线性的(x', y') 坐标中的高度场映射到规则的(x, y) 网格上，从而隐式求解方程（2.1）（Grivel 2018）。

2.3.2. *ST-PSP*方法的实施

在水溶液中加入含有二氧化钛和白垩颗粒的白色水性液体染料（Edding 4090记号笔，$C = 1\ \mathrm{g.L^{-1}}$），以增强冰的三维轮廓对比度（de Miramon 等 2025年）。实验装置还包括一台投影仪和一台摄像机，用于采用ST-PSP方法进行三维重建。实验使用Epson TW7100投影仪（4K分辨率）和配备50 mm Nikon镜头的Nikon D810相机，可拍摄36MP图像。摄像机和投影仪均垂直于基底放置，距离为 $L \simeq 1$。32 m，彼此间隔 $D \simeq 28$ cm，如图1的示意侧视图所示。为消除感兴趣表面上的杂散反射，在摄像机和投影仪上加装了两片交叉放置的线偏振片（100mm SQ TS, Edmund Optics）。本研究报告的所有测量均采用最少数量的相移条纹图案，即 $N = 3$，以尽量缩短每次测量的采集时间（Zuo 等 2018年）。照片的拍摄时间间隔为 $\Delta t \simeq 3$。3 s，约每10秒完成一次重建。鉴于实验持续时间较长且产生的数据量较大，采集间隔逐渐延长：第一小时后改为30秒，四小时后再延长至2分钟。

2.4. 红外测量

对于一些研究冰结构顶部水流位置的实验，使用热像仪（FLIR A600系列），并将其垂直于基底放置，以记录表面温度场。通过区分正温度区域和负温度区域，这反过来能够持续追踪细流的位置。为了使用热像仪进行红外测量，在这些特定实验中，移除了低湿度箱的上表面（该表面由对红外辐射不透明的有机玻璃制成）。

3. 冰结构形成的一般描述

当水细流流经冷基底时，其凝固过程会逐渐塑造下方的冰。这种相互作用（流动雕刻冰体，而不断演变的冰又改变流动方向）促使复杂形态逐渐形成。下文将描述这一形成过程，从首次接触冷基底时产生的初始笔直脊状结构，到实验结束时观察到的三维几何形态。得益于精确的控制参数调节，本文报告的实验具有很高的

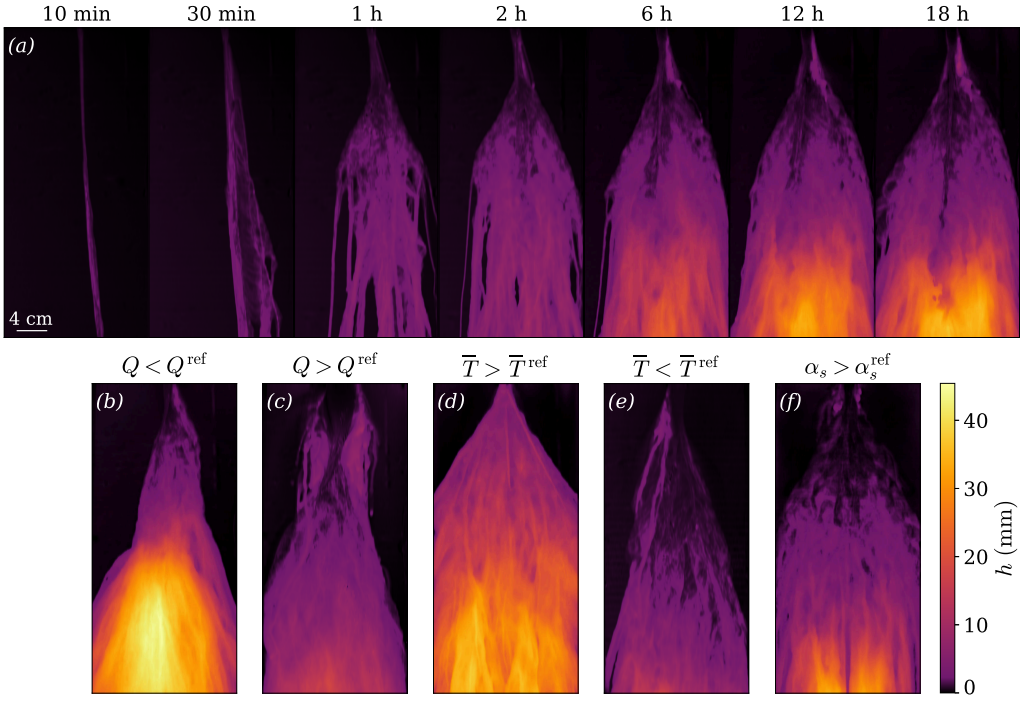

图2：（a）参考实验期间重建冰结构的演化（$\alpha_s^{\mathrm{ref}} = 50。3°$，$Q^{\mathrm{ref}} = 67\,\mathrm{mL}。\mathrm{min}^{-1}$，$T^{\mathrm{ref}} = 1。11$）。水流自上而下。随后，将参考实验的最终状态与5个不同的实验（b-f）进行比较，每个实验对应于单个控制参数的变化，具体参数汇总于每幅图像的顶部：（b）$Q = 30\,\mathrm{mL}。\mathrm{min}^{-1}$，（c）$Q = 193\,\mathrm{mL}。\mathrm{min}^{-1}$，（d）$T = 0。48$，（e）$T = 3。88$，以及（f）$\alpha_s = 90°$。所有重建结果均使用图右下方所示的同一色标。

在相同操作条件下可重复性。为展示冰结构形成的典型动态，本节将聚焦于在 $\alpha_s^{\mathrm{ref}} = 50。3°$, $Q^{\mathrm{ref}} = 67\,\mathrm{mL}$, min^{-1}, $T^{\mathrm{ref}}\mathrm{in} = 19。9℃$ 和 $T\mathrm{ref}_s = -22。1℃$ 条件下进行的“参考实验”。下文强调的行为代表了本研究所考察条件范围内进行的所有实验。

3.1. 冰结构的总体演化

为了表征该参考实验的动力学，图2（a）展示了冰结构从初始形成到最终状态的时间演化。所有图像均对应于实验不同时间点的冰结构三维重建结果，从初始直线状液膜的 $t \sim 10\,\mathrm{min}$到经过 $t = 18\mathrm{h}$后获得的冰块。物体的高度场由图右下方的色标编码表示。

开始时，在 $t \leqslant 10\mathrm{min}$，细流一开始沿换热器向下流动，便出现一道近似笔直的冰脊。值得注意的是，在环境温度下，以相同流量沿铜制斜面向下流动的直线状液膜会立即失稳，最终形成蜿蜒流，因为实验流量高于蜿蜒流出现时的临界流量（Le Grand-Piteira等，2006）。然而，当细流在零下温度下沿冷斜面向下流动时，凝固过程会对流动产生稳定作用，从而扰乱惯性-毛细平衡（De Ruiter 等，2017）。细流流经冰脊时，固化冰

会改变局部润湿特性，使其有别于铜表面的润湿特性，尤其会增大表观接触角（Monier 2022）。因此，冰相当于一种表面缺陷，会显著增强接触角滞后。结果是，细流若要横向移动并开始蜿蜒运动，就需要较大的脱钉力。这一机制解释了实验早期（约 30 min 之前）沿冰脊顶部流动的细流为何具有显著的稳定性。初始冰脊持续增厚一段时间后，细流最终会在换热器下半部失稳，从冰墙两侧溢出，进而扩大冰的覆盖面积，如 min 的图像所示。它既可能持续扩大，沿横向轴延伸，也可能形成新的冰分支；左侧重建图中展示了一个典型例子，时间为 h。关于实验第一小时内细流轨迹的更详细分析，将在第 3.2节中给出。

在这初始失稳之后，细流缓慢地向侧方偏移，形成新的分支并横向移动（$t = 2$ h）。在此阶段，冰结构逐渐增厚，逐步填满相邻分支之间的空隙（$t = 6$h）。从上方观察，随着表面变得平滑，各个分支逐渐合并为一个连续的冰块，冰结构的整体形状演变为近似三角形（从 $t = 6$h到 $t = 18$h）。还观察到，冰层会随着距注入器距离的增加而增厚：流动沿冰结构向更远处移动时，温度会降低，从而减少细流传递给生长中冰结构的热通量，加快凝固前沿推进，进而增加冰厚度。在实验的最后几小时（$t = 12$h到 $t = 18$h），冰覆盖区域不再横向扩展，但仍继续缓慢增厚，尤其是在其下端附近。

在分析了该参考工况下冰结构的时间演化后，接下来有必要分析最终冰形态如何取决于控制参数：基底倾角 α_s、细流流量 Q、注入温度 T_{in}以及基底温度 T_s。我们进一步引入一个用于表征流动产生冰的倾向的无量纲温度参数，即约化温度 $\overline{T}$：

$$\overline{T} = \frac{T_m - T_s}{T_{\text{in}} - T_m} \tag{3.1}$$

该参数表示固相和液相温度相对于熔点 T_m 的温差之比，从而将 T_{in} 和T_s 的影响合并为一个无量纲变量。较高的 $\overline{T}$ 对应更强的凝固驱动力。

为评估各控制参数对最终冰形态的影响，图2(b–f)展示了在不同实验条件下经过18小时后冰表面的五幅高度图，每幅图均突出显示了相对于参考工况(a)仅改变一个控制参数所产生的影响。这些参数最显著的影响体现在最大冰层高度上，如色标所示。图2(b–c)表明，增大流量会降低最终高度。事实上，流量增加会增大细流带来的热通量，并降低凝固前沿的速度。相反，图2(d–e)显示，冰层高度随 $\overline{T}$增大而增加，因为液体与固体之间更大的热对比会提高凝固速率。最后，基底倾角的变化（图2(f)）似乎对最终高度场的影响较小。

所有实验均呈现出相似的双区域形态：上游为三角形扩展区，当冰到达基底边缘后，随后形成恒定宽度的区域。这种大体对称的轮廓反映了热流体动力耦合作用下细流铺展的范围。细流铺展程度可通过上游三角形区域的张角来量化。

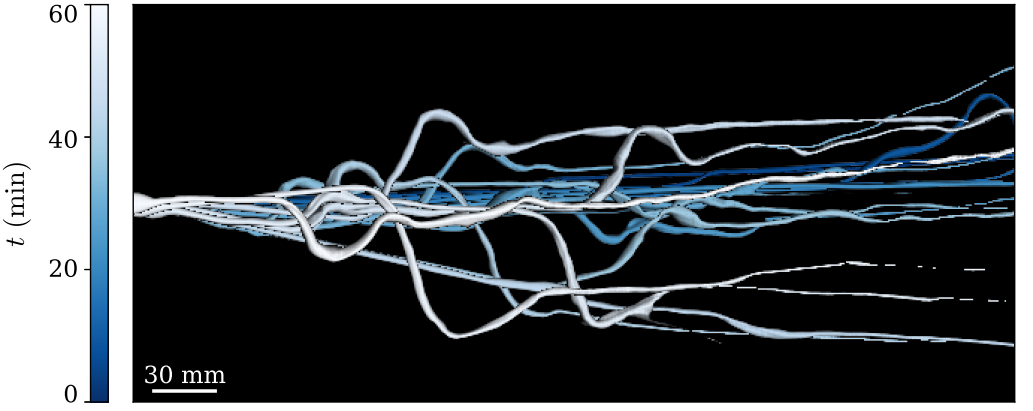

图 3：参考实验前一小时内细流轨迹的演化，由热像仪拍摄。色标表示根据热测量检测到细流的时间。

本文在附录中对这一参数进行了初步分析 A。

3. 细流振荡诱导的冰结构扩展

为了更好地理解冰结构的演化，可以利用红外相机提供的表面温度测量数据，分析细流在冰结构表面的运动。图 3 展示了参考实验中细流轨迹随时间的演化，图中给出了连续时间步的轨迹（由蓝色至白色进行颜色编码）。细流的位置通过温度为 $T > 0$°C 的区域确定。

细流很快偏离最初的直线路径，在逐渐形成的冰结构表面流动时开始不规则振荡。这解释了图 2(a) 中 $t < 1$h处新冰分支的形成。随着时间推移，冰结构不断扩展，振荡幅度也随之增大。可以将这种动态演化理解为细流在冰表面的润湿性发生变化，同时冰形成导致冰表面形貌发生变化。事实上，由于接触线钉扎，水在冰面上的宏观接触角会随着冰表面的过冷度（即凝固温度与冰表面温度之差）增大而增大（Sarlin 等 2025年；Demmenie 等2025年）。因此，随着实验进行，冰层整体高度增加，表面温度升高，进而使细流脱钉并向侧面迁移。因此，实验一小时后观察到的振荡幅度平均而言显著大于前十分钟内的幅度。所有实验中均可观察到此类细流振荡。

为进一步表征实验整个过程中细流的位移，我们分析了细流在基底各点的总停留时间 τ_{pas}。图4展示了τ_{pas} 在参考实验中的空间分布。图 (a) 显示了表面各点的总停留时间 τ_{pas}。黑色区域对应细流从未经过的点。鉴于分布的几何形态，数据采用相对于基底中心线定义的柱坐标 (r, θ) 进行分析，如图4左上方的示意图所示。对于给定半径 r，τ_{pas} 在冰结构中心附近显著大于其外缘处，凸显了其对方位角 θ的强烈依赖性。图 (b) 进一步展示了这种依赖性，其中给出了τ_{pas} 随 θ 变化的关系，涉及径向距离从 100 到 400 mm 的八个位置。停留时间显然在 $\theta = 0$处达到最大值，并随着

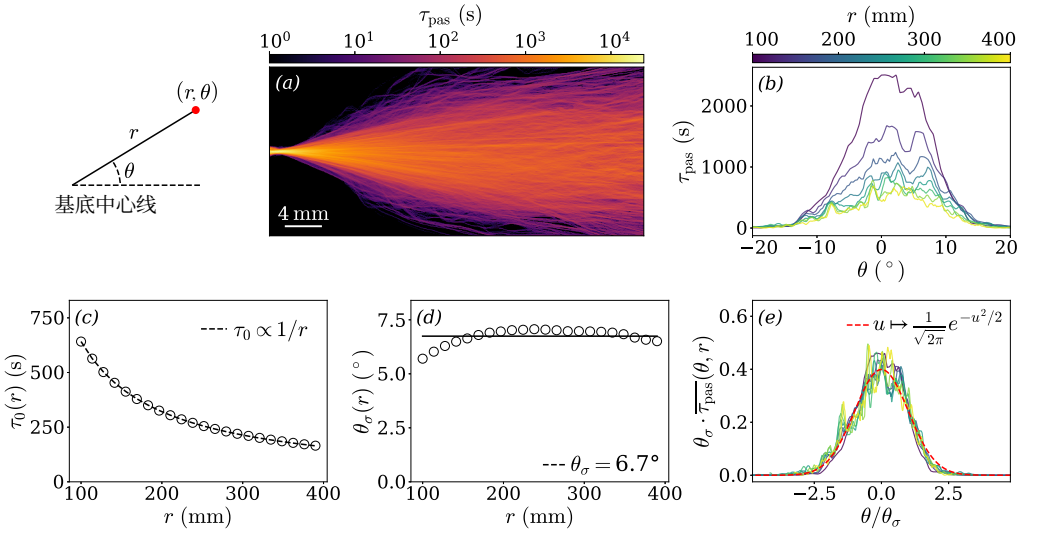

图4：（a）参考实验中研究区域内细流总停留时间 τ_{pas} 的分布。由于形成的几何形状，该分布采用相对于基底中心线定义的柱坐标（r，θ）进行分析。（b）展示了在不同径向距离处截取的八个 τ_{pas} 角向截面，径向距离范围为 100 至 400 mm。（c）在给定径向距离 r 处沿圆弧对 τ_{pas} 积分，得到总停留时间 τ_0。将 τ_{pas} 除以 τ_0，定义归一化停留时间 τ_{pas}，并通过中心高斯分布拟合提取角向标准差 $\theta_\sigma(r)$，结果见（d）。（e）绘制了重标度剖面 $\theta_\sigma \cdot \tau_{\mathrm{pas}}$ 随约化角 θ/θ_σ 的变化关系，其中 $\theta_\sigma = 6.7°$ 为由（d）得到的平均标准差，展示了停留时间分布的自相似性。

$|\theta|$ 增大而迅速减小。此外，每个径向横截面的分布都近似呈高斯分布，其峰值幅度出现在 $\theta = 0$ 处，并随 r增大而减小：径向距离越大，分布越宽且峰值越低。在给定径向距离处沿圆弧积分得到的总停留时间τ_0 如图 r 4(c)所示，并呈现出明显的衰减趋势，符合 $\tau_0 \propto 1/r$，如拟合得到的虚线所示。假设停留时间分布的径向依赖性和角向依赖性可以分离，则这种标度关系源于沿圆弧的总停留时间守恒，即 $\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \tau_{\mathrm{pas}}(r,\theta) r \mathrm{d}\theta = \mathrm{cst}$。为量化分布的角向扩展，$\tau_{\mathrm{pas}}(r,\theta)$ 除以其角向积分 $\tau_0(r)$ 进行归一化，得到约化变量 $\tau_{\mathrm{pas}}(r,\theta)$。随后使用高斯函数对该约化分布进行拟合，其特征参数为标准差 θ_σ：

$$\mathcal{G}(\theta, \theta_\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_\sigma} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\theta_\sigma^2}\right) \tag{3.2}$$

如图4(d)所示，提取出的角向标准差 θ_σ 随 r 仅略有变化，可用均值为 $\theta_\sigma = 6$的7°平台很好地近似。这表明，归一化停留时间分布遵循唯一的高斯分布，其特征是标准差为常数 $\theta_\sigma = 6.7°$。为展示这种自相似行为，图4(e)展示了重缩放变量$\theta_\sigma \tau_{\mathrm{pas}}$ 随约化方位角 θ/θ_σ的变化，其中采用了从图 $\theta_\sigma = 6.7°$ 中提取的均值4(d)。不同径向位置下获得的分布曲线重合，表明该高斯模型能够准确再现实验剖面。因此，这项分析表明，细流停留时间分布可由以下自相似表达式描述：

$$\tau_{\text{pas}}(r,\theta) \propto \frac{1}{r}\exp\left(-\frac{\theta^2}{2\theta_\sigma^2}\right) \tag{3.3}$$

总之，细流停留时间在θ上遵循中心高斯分布，而其对r的依赖仅通过与圆弧周长相关的前因子体现。这表明，细流主要在结构的中心区域附近流动，只有很少情况下才会到达其侧边界。这一结果后来将成为解释冰高度场角向依赖性的关键（见第5.2节），正如图2所示不同最终状态所暗示的那样。此外，在本研究涵盖的所有实验条件下，都观察到了细流停留时间的这种高斯分布。不过，标准差θ_σ取决于控制参数：冰结构的侧向包络越宽，θ_σ就越大。由于包络的孔径主要随细流的热参数变化（详情见附录A），我们可以推断，θ_σ将随T增大。

–

3.3. 冰结构向稳态收敛

在上一节中，我们分析了参考实验中冰结构从初始直脊到最终几何形态的整体形成过程。由此自然产生一个问题：这一最终构型是否对应稳态？为探究这一问题，我们将该结构分为两个部分：侧向包络，以及包络内部的高度场。

为了研究侧向包络的收敛情况，我们可以分析冰与热交换器之间的接触面积A_c。参考实验中的这一变量如图5（a）所示。接触面积在前两个小时内迅速增加，随后逐渐趋于稳定值，这证实了图2（a）中观察到的冰包络早期快速扩展。在附录A中，我们表明侧向包络始终会达到一种以三角形形状为特征的稳态，该形状由重力-毛细力平衡与热效应共同形成。我们还表明，张角主要取决于热参数，而非流体动力学参数，这说明相变是塑造冰结构外部包络的主导机制。

在侧向包络之外，我们现在将重点放在其中的高度场上，尤其关注该高度场在实验结束时是否已达到稳态。为了初步了解侧向包络内高度场的演化，图5（b）展示了参考实验中形成的冰的总体积的时间演化V_{tot}。我们可以观察到，冰形成速率在实验过程中逐渐降低：冰结构越高，冰从细流吸收的热通量越低，冰前沿推进得越慢。与A_c相比，V_{tot}在经过18小时的实验后尚未完全达到稳态值，而是仍在缓慢增加，这表明冰块在整个实验期间持续增厚；如果继续进行测试，这一过程还将继续。最后，为了量化不同径向位置处的平均冰生长，可以定义时间$h$moy 时沿径向距离为t的圆弧上的角向平均高度r为

$$h_{\text{moy}}(r,t) = \frac{\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} h(r,\theta,t)\mathbb{1}_{\text{ice}}(r,\theta,t)\,d\theta}{\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \mathbb{1}_{\text{ice}}(r,\theta,t)\,d\theta} \tag{3.4}$$

其中$\mathbb{1}_{\text{ice}}(r,\ \theta,\ t)$表示示性函数：当点位于冰表面上时取值为1，当点位于热交换器上时取值为0。实验期间$h$moy 的演化如图5(c) 所示。每条曲线对应实验期间的一个不同时间点，时间范围为

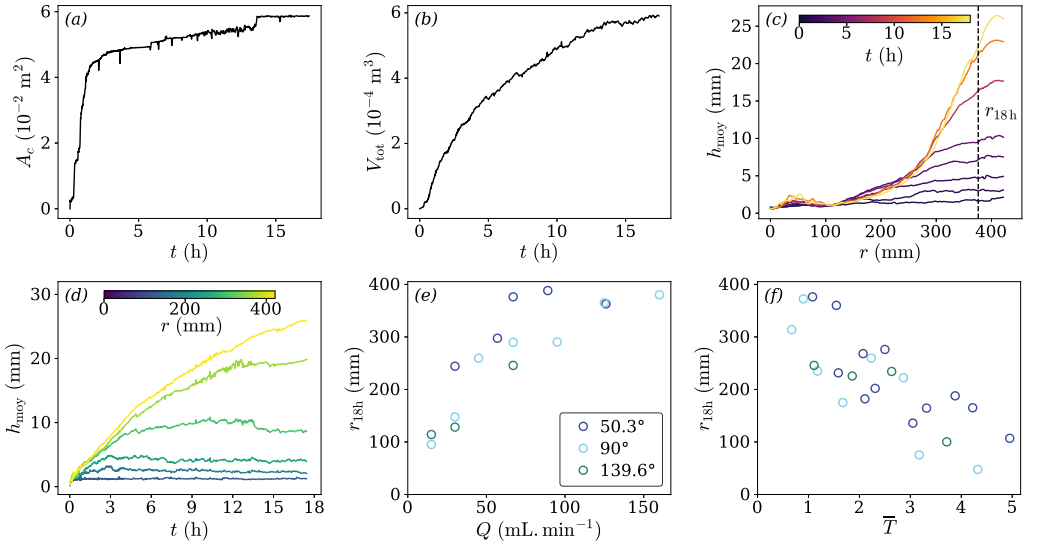

图5：对于图2(a)中的参考实验，本图展示了：(a) 冰结构与基底的接触面积 A_c，(b) 冰总体积 V_{tot}，以及 (c) 在实验过程中不同时间下，角向平均高度 h^{moy} 随径向距离 r 变化的情况。(d) 图中绘出了观测区域内若干个 r 位置处 h^{moy} 的时间演化。根据这些曲线，我们提取出收敛半径 r_{18h}，定义为在实验最后4小时内，$t \mapsto h^{\text{moy}}(r,t)$的平均变化小于1 mm时所对应的最大 r。在本例中，$r_{18h} = 376$ mm：从上往下第二条曲线（浅绿色）在18小时后达到稳态高度，而最上方的曲线（黄色）则没有。(e)r_{18h} 随流量 Q 的变化，其中温度条件恒定（$T = \dots$）；(f)在流量恒定（$Q = 67$ mL.min^{-1}）时，r_{18h} 随约化温度 T 的变化。不同颜色对应不同的基底倾角。

27 分钟至 18 小时，如图上方的色标所示。可以观察到，高度随时间推移以及径向距离增加而增大，因为水离注入器越远温度越低，从而促进冰形成。最终，高度场在$r \in [0, 376]$ 毫米处达到稳定值，表明该区域的冰生长已停止。然而，在 $r > 376$ 毫米处，冰层高度尚未收敛至稳态值，这表明即使经过 18 小时的实验，该处的冰结构仍会继续生长。因此，似乎存在一个收敛半径 r_{18h}，使得 18 小时后，角度平均高度场h^{moy} 仅在区域 $r < r_{18h}$内收敛。

为了定量确定收敛半径r_{18h}，我们考察了多个径向位置 r处 h^{moy} 的时间演化，如参考实验的图5(d)所示。结果表明，h^{moy} 明显依赖于 r：在较小的径向距离处，h^{moy} 趋于稳定值；而在最大距离处，它在 $t = 18$h 时仍持续增加，这表明即使实验结束后，增长仍会继续。为区分收敛区域与未收敛区域，我们定义如下收敛判据：对于给定的 r，若 $h^{\text{moy}}(r,t)$ 在实验最后 4h 内的平均变化量小于 1 mm，则视为已收敛。在此例中，最外侧的曲线（位于 $r = 421$ mm 处）未达到这一阈值，在最后 4 小时内高度增加了约 2.50 mm。相比之下，位于$r = 361$ mm 处的曲线在同一时段仅增加了 0.58 mm，因此满足收敛要求。这表明 r_{18h} 位于这两个径向位置之间。随后，我们将 r_{18h} 定义为满足收敛判据的最大径向距离。采用这一方法，在此例中得到 $r_{18h} = 376$ mm。

使用此 通过这一过程，我们可以确定每次 r_{18h} 实验的值并绘制 t

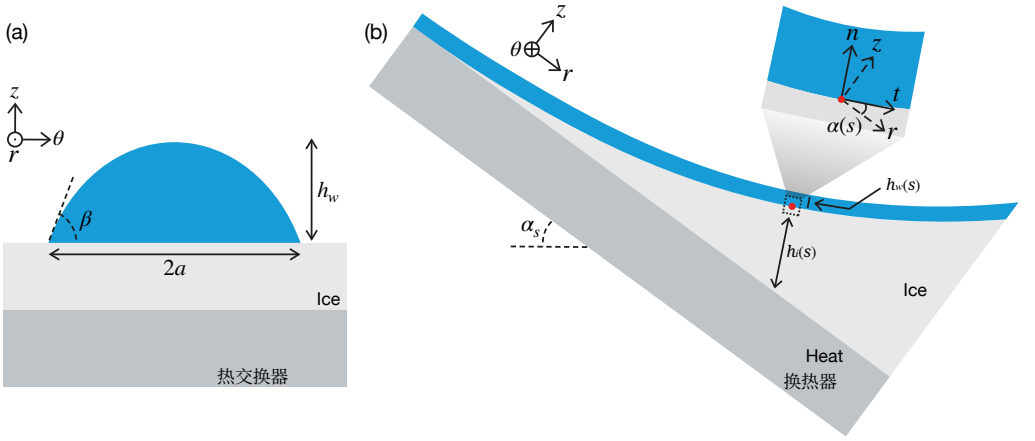

图 6：（a）根据 Duffy & Moffatt（1995）的横向细流几何，其中 h_w 为细流的最大高度，a 为其半宽，β 为其接触角。（b）流经稳态冰结构的细流的二维几何。参考坐标系从柱坐标（r, z）变换为附着于冰水界面的曲线坐标（s, n）。该界面的局部坡度由 $\alpha_s - \alpha(s)$ 给出，其中 $\alpha(s) \ll 1$ 与冰高度场 h_i 相关，该冰高度场通过 $\tan\alpha = \nabla h_i$ 表示。

流量的函数关系 Q 和约化温度的函数关系 T，如图5（e-f）所示。部分实验在整个研究区域内均已收敛（这意味着 $r_{18h} > L_{study}$，L_{study} 为基底长度），因此未在两张图中同时展示。我们可以从这两张图中推断出 r_{18h} 随流量增加而增大，并随约化温度升高而减小。此外，如图2所示，该结构的最大冰层高度呈现相反的趋势：它随 Q 减小，并随T增大。因此，我们可以推断，收敛半径会随着该结构整体高度场的增大而减小。在确定了收敛半径的这些趋势后，下面我们将转向收敛区域内的高度场 $r < r_{18h}$，以分析稳态高度剖面的演化。

4. 冰结构稳态高度场的理论模型

为了描述与我们的三维冰结构相关的高度场的静态几何形态，我们对 Huerre 提出的模型进行了推广等人（2021年）。他们研究了在较低流量和较小长度尺度下，细流在二维冰脊上的凝固。在该研究中，作者假设冰具有恒定斜率，且细流速度场沿固定方向，因此忽略了垂直于坡度方向的平流。在本研究中，我们将这一框架调整为直线状细流流经坡度可变的三维冰结构的情况，从而将其适用范围扩展到更大的流量范围以及更长的时空尺度。系统示意图见图6（a）。该系统采用二维模型描述，其中（r，z）平面表示冰结构中平行于流动方向的一个截面，其与热交换器中心线之间的夹角可任意取值 θ。

4.1. 细流几何

在考虑坡度变化的基底之前，应先对沿恒定倾角的基底向下流动的细流进行流体动力学描述 α_s。在迄今用于描述这种细流几何形态的众多模型中（Towell 和 Rothfeld（1966）；

Bentwich 等人 1976年；Duffy & Moffatt（1995）；Perazzo 与 Gratton，2004），本研究采用了 Duffy 与 Moffatt（1995）的方法，因为其公式适用于倾角 $\alpha_s \in [0, 180°]$，且鉴于细流的接触角较小 $\beta \lesssim 40°$，润滑近似对流动具有重要意义。在他们的方法中，流体被视为牛顿流体且不可压缩，其密度为 ρ，黏度为 μ，表面张力为 γ。流动满足薄膜条件，可用半泊肃叶速度剖面描述；横向高度剖面则呈对称双曲函数形式，将局部高度与细流接触角 β、约化毛细长度 $l_c = \sqrt{\gamma/\cancel{\rho g \cos\alpha_s}}$以及邦德数 Bo $= a/l_c$联系起来，其中 a 为细流半宽（见图6（a））。根据他们的分析，细流沿横向轴的平均高度满足以下方程：

$$\frac{h_w}{l_c \tan\beta} = \begin{cases} \coth \mathrm{Bo} - 1/\mathrm{Bo} & \alpha_s < 90° \\ \mathrm{Bo}/3 & \alpha_s = 90° \\ 1/\mathrm{Bo} - \cot \mathrm{Bo} & \alpha_s > 90° \end{cases} \tag{4.1}$$

当邦德数较小时，可以证明该方程可与质量守恒方程联立，从而得到细流平均高度的以下标度关系：

$$h_w \propto \left(\frac{Q}{\sin\alpha_s}\right)^{1/4} \tag{4.2}$$

在本实验中，我们可以测定细流的平均宽度，并利用热像仪检测细流，推算相应的邦德数。分析表明，在所有实验条件下，Bo 的范围为 [0。4，0。9]。因此，我们可以合理地得出结论：Bo $\lesssim 1$，且方程（4.2）适用于细流流经冰表面的情形。

接下来，我们将这一恒定斜率细流模型推广到坡度随 $\alpha_s - \alpha(r)$ 变化的冰结构，其中 $\alpha = \nabla h_i$ 表示冰在基底上形成所引起的局部坡度变化。由于冰结构仍然只有较小的倾斜（典型坡度为 $\nabla h_i \sim {}^{35\,\text{毫米}}/_{420\,\text{毫米}} \sim 8 \times 10^{-2} \ll 1$），我们认为方程（4.1）和（4.2）仍然成立；将恒定坡度 α_s 替换为局部变化的坡度 $\alpha_s - \alpha(r)$ 即可应用。这一近似有充分依据，因为冰层高度变化的特征长度约为 4 m，而建立半泊肃叶速度状态所需的特征距离约为 2 cm，二者相差很大。

4.2. 缓变坡度上的平流热方程与边界条件

然后，我们将研究坐标系转换为与冰坡相关联的曲线坐标系。因此，我们将初始的 (r, z) 变量转换为 (s, n) 变量，其中$s(r) = \int_0^r \sqrt{1 + \nabla \mathrm{h}_i(r')^2}\, dr'$，$n$ 为研究点到冰/水界面的法向距离。曲线几何见图 6(a)。在这个新坐标系中，细流高度是缓慢变化的函数 $\mathrm{h}_w(s)$，其速度 $U(s, n)$ 呈现半泊肃叶型分布：

$$U(s,n) = \frac{g \sin(\alpha_s - \alpha(s)) h_w(s)^2}{2\nu} \frac{n}{h_w(s)} \left(2 - \frac{n}{h_w(s)}\right) \tag{4.3}$$

其中，ν 为流动的运动黏度。借助这一曲线坐标系和速度剖面，我们可以调整 Huerre 等人模型的假设和方程。

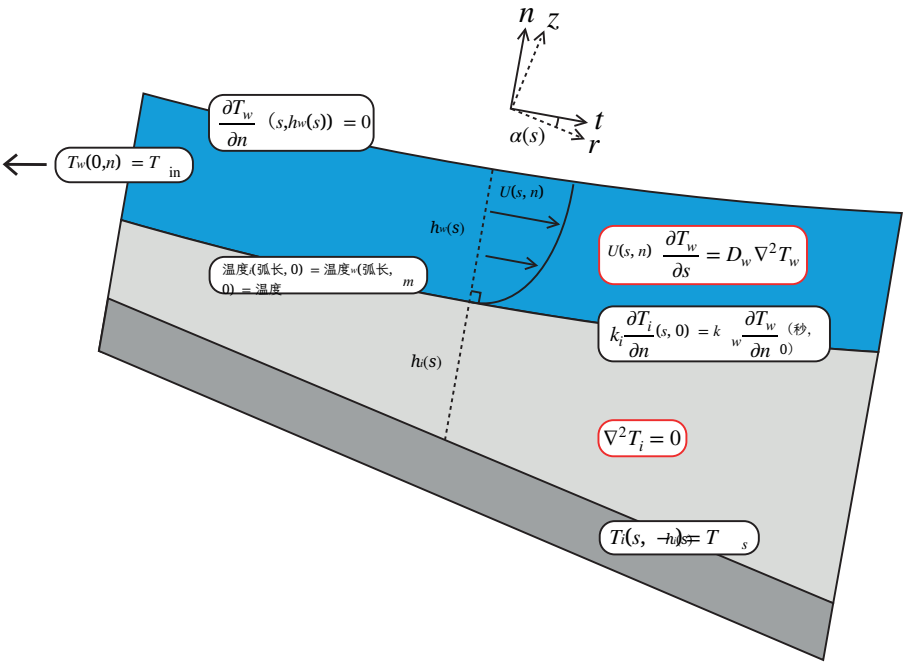

图7：示意图展示了在坡度随空间变化的冰结构上流动的细流横截面；液体和固体中的热方程以红色表示，边界条件以黑色表示。

（2021年）。水温 T_w 对应的稳态平流-扩散热方程，以及冰温 T_i 对应的稳态扩散方程，可写为：

$$\begin{cases} U(s,n)\dfrac{\partial T_w}{\partial s} = D_w \nabla^2 T_w \\ \nabla^2 T_i = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

其中 D_w 为水的热扩散系数。变量 T_w 和 T_i 通过以下稳态斯特藩条件在冰水界面处相互关联：

$$(k_i \nabla T_i - k_w \nabla T_w).\mathbf{e}_n(s,0) = 0 \tag{4.5}$$

其中 k_i 和 k_w 分别为冰和水的热导率，$\mathbf{e}_n$ 为垂直于冰水界面的单位向量。此外，在细流的自由表面（$n = h_w(s)$）处，由于环境空气的热导率相较于水的热导率较小，我们可以忽略环境空气的热流入（$k_{\text{air}}/k_w \sim 0。04 \ll 1$），从而得到以下方程：

$$k_w \nabla T_w.\mathbf{e}_n(s, h_w(s)) = 0 \tag{4.6}$$

此外，这两个温度均与水的凝固温度相同 T_m 在界面处，因此 $T_i(s,\ 0) = T_w(s,\ 0) = T_m$。最后，我们假设注入水的温度恒定 T_{in}，且换热器表面的温度保持恒定 T_s。所有模型假设汇总于图 7。

4.3. 模型解

根据这组方程和边界条件，我们可以使用细流的初始高度$h_{w,\,0}$（对应于在恒定坡度为 α_s 的倾斜面上流动的细流的平均高度，据 Duffy 与 Moffatt（1995））以及自由表面的初始速度 $U_0 = g h_{w,\,0}^2 \sin\alpha_s/2\nu$，定义初始 P´eclet 数 Pe：

$$\mathrm{Pe} = \frac{U_0 h_{w,0}}{D_w} = \frac{g h_{w,0}^3 \sin\alpha_s}{2\nu D_w} \tag{4.7}$$

在我们的实验中，P´eclet 数非常大，约为 600 至 4000，这表明热传输主要由平流而非扩散控制。于是，我们可以使用以下无量纲参数组：

$$\begin{cases} \overline{s} = \dfrac{s}{h_{w,0}\,\mathrm{Pe}}, \quad \overline{n} = \dfrac{n}{h_w}, \quad \overline{h_i} = \dfrac{h_i}{h_{w,0}}, \quad \overline{h_w} = \dfrac{h_w}{h_{w,0}} \\ \Theta_w = \dfrac{T_w - T_m}{T_{\mathrm{in}} - T_m}, \quad \Theta_i = \dfrac{T_i - T_m}{T_s - T_m} \end{cases} \tag{4.8}$$

根据前述方程组和新定义的无量纲变量，并考虑 $\mathrm{Pe} \gg 1$，忽略 $1/\mathrm{Pe}$ 中阶数为 1 或更高的项后，可得无量纲温度场具有以下形式（详细推导见附录 B ）：

$$\begin{cases} \Theta_i(\overline{s},\overline{n}) = 1 + \overline{n}\dfrac{\overline{h_w}(\overline{s})}{\overline{h_{\mathrm{i}}}(\overline{s})} \\ \Theta_w(\overline{s},\overline{n}) = A_1 \Phi_1(\overline{n}) e^{-\lambda_1^2 \overline{s}} \end{cases} \tag{4.9}$$

其中 $A_1 \approx 0。78$，$\lambda_1 \approx 1。68$，而 Φ_1 表示与相应 Sturm–Liouville 问题相关的第一特征函数，其第一特征值为 λ_1。关于 Sturm-Liouville 分解的详细信息，参见 Huerre等人 (2021年)。随后，应用斯特藩条件（方程（4.5））， 结合曲线坐标 s 与径向距离 r之间的关系，并保留 Pe 中阶数最低至 0 的项，可将冰结构的稳态高度表示为以下形式：

$$\begin{cases} h_i(r) = h_0 \exp(\dfrac{r}{r_c}) \\ h_0 = \dfrac{k_i \overline{T} h_{w,0}}{k_w A_1 \Phi_1'(0)}, \quad r_c = \dfrac{h_{w,0}\mathrm{Pe}}{\lambda_1^2} \end{cases} \tag{4.10}$$

尽管 Huerre 已经预测了指数增长等人（2021年），但本文的方法纳入了细流的流体动力学模型，从而能够更精确地建立 P´eclet 数与流量之间的联系，并进一步将其结果拓展至具有不同坡度的冰表面，这正如我们的实验中所观察到的那样。该理论指数剖面与实验结束时角向平均高度的实验演化一致h^{moy}，如图5（c）所示，其中 $r < r_{18\mathrm{h}}$ 在 $t = 18\mathrm{h}$ 处。利用由方程（$h_{w,\,0}$ ）推导出的 h 和 Pe 的流体动力学关系，我们发现理论冰高参数h_0 和 r_c 可表示为：

$$h_0 = 0.44 \frac{k_i}{k_w} \left(\frac{\nu \tan\beta}{g}\right)^{1/4} \overline{T} \left(\frac{Q}{\sin\alpha_s}\right)^{1/4}, \quad r_c = 0.057 \frac{Q \tan\beta}{D_w} \tag{4.11}$$

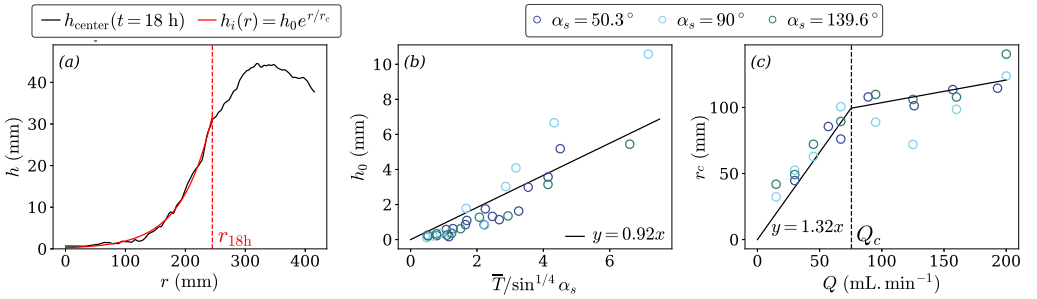

图8：（a）对于 $\alpha_s = 50.3°$, $Q = 30$ mL.min^{-1}，且 $\overline{T} = 1.07$ 的情况，在 $t = 18$h 时沿基底中心线测得的实验冰层高度与其在收敛区域 $r < r_{18\mathrm{h}} = 245$ mm 内拟合得到的指数剖面 h_i（如公式（4.10）所示）的比较。通过该拟合，可从实验中提取特征距离 r_c 和初始高度 h_0。（b）在流量恒定为 $Q = 67$mL.min^{-1}时，外推参数 h_0 随约化参数 $T/\sin^{1/4}\alpha_s$ 的演化。黑线表示对数据点的线性拟合。（c）在约化温度恒定为 $T = 1.1$ 时，外推参数 r_c 随流量 Q 的演化。黑线同样表示对临界流量 Q_c以下数据点的线性拟合；超过该流量后，$Q > Q_c$时坡度发生变化，凸显了流体动力学状态从直线状液膜向蜿蜒流的转变。

因此，在我们的实验中改变的控制参数里，指数剖面的特征长度 r_c主要取决于流动的流体动力学性质，而初始高度则主要通过 T 受热学条件控制。有趣的是，基底倾角对初始冰层高度h_0,的影响很小，也不会影响特征距离 r_c。细流–冰接触角对与h_0, 相关的前因子影响较小，但对 r_c 的前因子影响更为显著。

5. 结果

我们在前几节中已经表明，冰结构会在一个有限区域内收敛$r < r_{18\mathrm{h}}$，并基于三维细流几何形态建立了二维理论模型，通过求解液相和固相区域中的热方程，得到了方程（4.10）和（4.11）。现在可以将这些理论预测与实验高度场进行比较。

5.1. 换热器中心线上的冰结构高度

为了检验方程（4.10）对稳态冰层高度的适用性，我们首先考察换热器中心线——根据图 4 中的驻留时间分析，这一区域是细流在横向振荡过程中最常经过的区域。根据第 3.3 节所述的收敛分析以及收敛半径的定义$r_{18\mathrm{h}}$，我们将中心轴 $t = 18$h 处的实验高度剖面与方程（4.10）给出的理论表达式进行比较。为此，我们用指数函数拟合实验剖面，并由此得到两个外推参数，h_0 和 r_c。

指数拟合的一个示例如图8(a)所示，该图显示，在收敛区域 $r < r_{18\mathrm{h}} = 245$ mm内，理论模型与实验数据吻合极佳，验证了理论模型的适用性。采用这种指数拟合方法，我们提取出实验参数h_0 和 r_c。图h_0 随约化参数 $T/\sin^{1/4}\alpha_s$ 演化的情况如图8(b)所示，而 r_c 随流量

的演化如图8(c)所示。两幅图均包含测试的三种基底倾角$\alpha_s \in \{50.3°, 90°, 139.6°\}$。首先可以看到，$h_0$ 随 $T/\sin^{1/4}\alpha_s$线性增加，且不同倾角下的数据离散度较小，这证实了方程（4.11）的理论预测。线性拟合得到的实验坡度约为0.92 mm^{-1}。为了将该坡度与方程（4.11）的理论预测进行比较，必须指定细流接触角（定义见方程（4.1））。根据 Duffy & Moffatt（1995）的模型，细流半宽 a 与其接触角 β 之间满足$a \propto \tan^{-3/4}\beta$关系，该关系适用于较小的邦德数。因此，可以根据细流宽度的测量值估算 β 。通过分析在不同流量和 $T_s = -22$°C下进行的三次实验全程的平均宽度，我们得到$\beta \approx 32°$，这与 Sarlin 等（2025）针对约22 K过冷度报告的数值一致。采用该接触角估算值，方程（4.11）预测的理论坡度为4.39 mm^{-1}，约为实验前因子的4.8倍。这种差异可能源于多个因素：二维模型固有的横向平均、理论解截断为斯图姆–刘维尔分解的第一模态（Huerre 等人，2021），以及指数拟合方法的敏感性；与特征距离相比，该方法会导致前因子的相对不确定性更大 r_c。

另一方面，图8(c)展示了特征长度 r_c的实验演化，该长度由公式（4.10）定义。图中呈现出两个明显的状态：第一个区域为 $Q \in [15, 70]$ mL.min^{-1}，其中 r_c 随 Q线性增加；第二个区域为 $Q \in [70, 200]$ mL.min^{-1}，其中 r_c 继续线性增加，但速率显著减慢。这两个状态在约 $Q \sim 70$ mL.min^{-1}处的坡度发生明显变化，从而彼此分隔。此外，在给定流量下，三种基底倾角再次表现出极小的离散性。这些观察结果与公式（4.11）中给出的 r_c 理论表达式一致；该表达式预测，在低流量下 Q 呈线性依赖关系，且不依赖于 α_s。对于 $Q > 70$ mL.min^{-1} ，坡度的变化以及 r_c 的微弱增加可归因于流体动力学状态的转变：细流不再像Duffy & Moffatt（1995）的模型所假设的那样“笔直”，而是开始蜿蜒并发生横向移动。这一转变可能改变了模型的假设——尤其是细流的横截面几何形状和接触角，而这两者会直接影响公式（4.2）——并因此影响公式（4.11）的最终表达式。此外，第一个区域中的实验前因子（$r_c = 1.32.Q$）比理论前因子高1.8倍，这再次证实了理论模型的适用性。

5.2. 冰高度场的角向变化

在此前对冰高度场的分析中，我们证明了中心高度剖面 h_{center} 趋向于与第 4 节所述理论模型相一致的稳态形状。然而，尚需确定这种收敛是否也适用于非零角位置 θ，即远离中心线的位置。在实验持续时间无限长的理想极限下，预期会形成轴对称冰结构，其形状不随 θ 变化，并随径向距离呈指数增长 r，因为此时细流在结构侧向包络内的停留时间将处处无限长。这将确保该包络内的冰高度收敛至第 θ 节推导的、与4无关的理论剖面。然而在实际中，实验持续时间有限，导致高度场具有显著的角向依赖性，正如图 2 所示的不同最终状态所表明的那样。

为了解释冰结构中观察到的角向变化，必须回顾细流在换热器上的停留时间角向分布。如

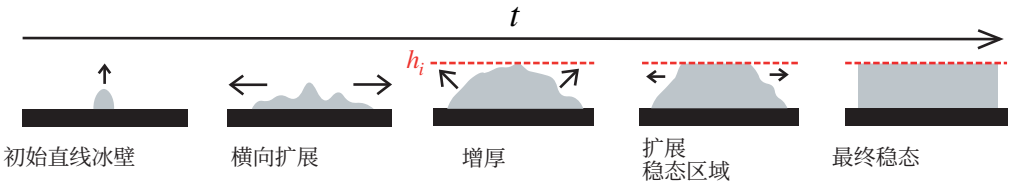

图 9：示意图展示了距注入点 r 处的角向截面的演化。起初狭窄且笔直的脊状结构先向两侧扩展，随后结构增厚，高度沿中心线逐渐收敛至稳态值h_i。收敛区域的角向宽度随后逐渐增加，直至形成最终稳态的矩形截面，此时高度场不再随 θ变化。

图4所示，停留时间沿 θ呈高斯分布，而其对 r 的依赖仅体现在前因子上。这意味着，即使凝固速率和细流速度场严格独立于 θ，细流在侧缘附近的停留时间远短于沿中心线的停留时间这一事实，仍不可避免地会影响生长18小时后冰的最终几何形态。因此，在固定径向 θ距离处，冰的截面是两种效应卷积的结果：细流停留时间沿 θ 的高斯分布，以及高度场达到稳态所需的瞬态演化，如理论模型所述。如果中心线处的收敛时间相较于实验总时长较长，那么结构在大部分角向范围内都将保持瞬态状态，高度分布也会保留明显的高斯特征。反之，如果收敛时间较短，则更宽的中心区域会达到稳态高度，截面也会越来越不依赖于 θ。

据此，我们可以推断固定径向距离 r处冰截面的整体演化过程，如图 9所示。实验开始时，冰首先沿中心轴形成狭窄、笔直的冰脊。经过一段时间后，流经冰脊顶部的细流变得不稳定并偏离中心线，在冷却的基底上横向扩展，从而使冰结构变宽。随后，冰逐渐增厚，直至达到稳态高度 $h_i(r)$，该高度最先在 $\theta = 0$处达到，此处细流停留时间最长。根据实验条件和径向位置的不同，在为时 18 小时的实验期间，可能无法达到这一稳态。局部达到这一理论高度后，满足 $h = h_i(r)$ 的稳态区域会逐渐向两侧扩展，形成以热交换器轴线为中心的平台。在实验时间趋于无限长的极限下，这种横向扩展最终会使截面收敛为矩形轮廓。

为量化收敛区域内横向扩展的最终阶段，我们考察了固定径向距离处冰层高度的角向剖面。图10展示了一个代表性示例，实验条件为 $\alpha_s = 50.3°$, $Q = 200$ mL、min^{-1} 和 $T = 3.17$。在三个不同时间$t \in \{2, 10, 18\}$h以及三个径向距离 $r \in \{200, 250, 300\}$ mm处，图10(a–c)显示了冰高度场的角向变化。可以观察到，截面随时间明显增厚并拓宽。每个截面中心周围收敛区域的拓宽发生在中心高度达到其稳态值之后；对于 $r = 200$ mm、 $r = 250$ mm和 $r = 300$ mm，这一过程分别在约3h、5h和8h后发生。此外，由于稳态高度随r呈指数增长， $r = 200$ mm处的剖面相比 $r = 250$ mm和 $r = 300$ mm处的剖面表现出更强的θ无关性。在较小的径向距离处，稳态高度更快达到，因此与细流停留时间的高斯分布进行卷积后，在实验结束时得到的收敛角向区域更宽。相反，在较大的 r处，较慢的收敛使 $t = 18$h时截面中保留了更强的 θ依赖性。

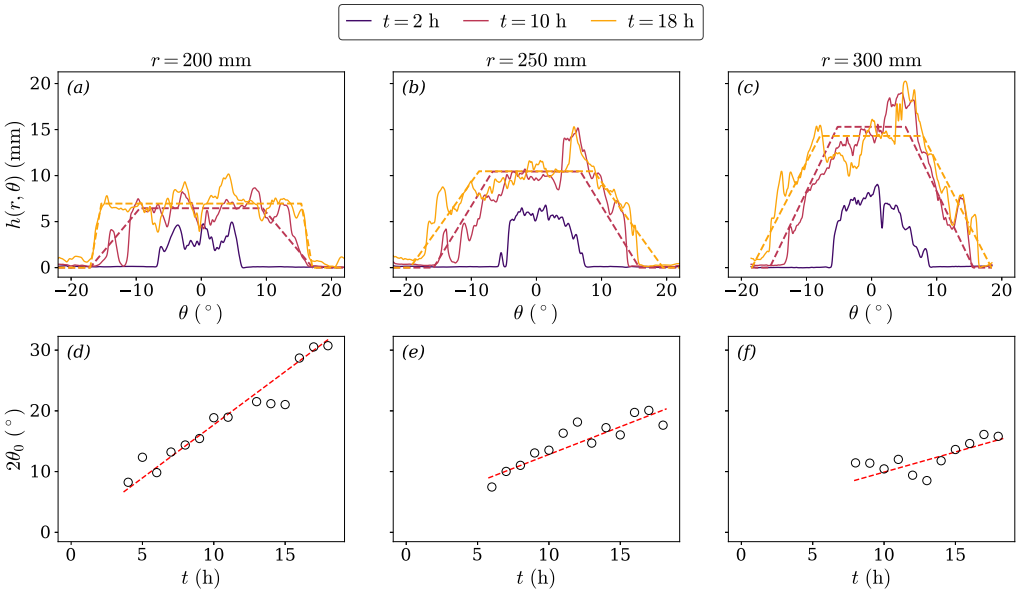

图10：在条件 $\alpha_s = 50.3°$,$Q = 200\ \mathrm{mL.min^{-1}}$ 和 $T = 3.17$ 下，收敛高度的横向扩展。(a–c) 实验过程中不同时间记录的三个角向截面 $t \in \{2, 10, 18\}$h，分别对应不同的径向距离 $r \in \{200, 250, 300\}$ mm。虚线表示对剖面进行的分段线性拟合，其中中心平台区对应收敛区域。(d–f) 收敛高度对应的平台区宽度 $2\theta_0$ 的时间演化。从这些图中可以观察到，平台的角向宽度呈线性增长，据此可估算其增长率。图(d–f)中的红色虚线表示线性趋势，其坡度分别为 1.6°/h、0.9°/h 和 0.7°/h。

为进一步分析这种扩展，在中心线处的冰层高度收敛至稳态值后（即对于 $r \in \{200, 250, 300\}$ mm，分别经过3、5和8h），我们使用简单的“平台”函数对每个截面进行拟合。该函数在 $|\theta| < \theta_0$ 范围内保持恒定高度（因此 $2\theta_0$ 定义了平台的角向宽度），并在线性连接至远离中心线处的零高度。使用该平台函数拟合高度剖面，可以估算冰层高度近似恒定并达到稳态的角向范围 $2\theta_0$ 。这些拟合结果以虚线显示于图10(a–c)中，对应于 $t = 10$h和 $t = 18$h的图线；结果表明，对于所有考察的半径，平台区宽度都随时间稳步增加。对于 $r = 200$、250和300 mm，在中心高度收敛后每小时重复一次这一拟合过程。 $2\theta_0$ 的时间演化报告于图10(d–f)中。在所有情况下， $2\theta_0(t)$均随时间大致线性增加，其增长率随着 r 增加而降低。根据线性拟合（红色虚线），估算得到的角向扩展速率分别为 $r = 200$ mm时1.6°/h、 $r = 250$ mm时0.9°/h，以及 $r = 300$ mm时0.7°/h。

扩展速率随半径增大而降低，这反映了稳态冰层高度随 r 指数增长，同时细流停留时间相对于 θ呈高斯分布：距离源头越远，需要更多次细流经过才能达到给定厚度，从而减缓冰结构边缘处的增长。18 小时后，图 10(d-f) 表明，三个剖面均未达到准稳态角向宽度。此时，平台区宽度分别为 $2\theta_0 \in \{30°, 20°, 16°\}$ 对于$r \in \{200,250,300\}$ mm，依次对应。由于本实验中侧向包络的张角约为 31° (如图 2(a) 的最终高度图所示)

这表明，$r = 200$ mm 处的截面几乎已收敛为矩形 θ-不变剖面。如果将该值视为完全发育的稳态宽度，根据观测到的增长率进行外推可知，$r = 250$ mm 处的截面大约需要 30 小时才能在角向上收敛，而 $r = 300$ mm 处的截面则需要近 41 小时。这些估算表明，经过 18 小时后，冰结构在角向上仅部分收敛。总的来说，经过 18 小时已达到收敛的区域因此仅限于满足$r < r_{18\mathrm{h}}$ 和 $|\theta| < \theta_0$的区域。

6. 结论

本文研究了水细流在冷倾斜基底上流动时的凝固过程，并展示了这种构型如何在 18 小时内形成三维冰结构。我们利用可控的水力与热学实验装置，结合时空相移轮廓测量法和红外热成像，分析了这些结构的时间演化及其最终形态。实验的动态过程通常遵循可重复的顺序：(i) 细流首先形成一条直线冰脊，并在其上保持稳定；(ii) 随后，细流在冰脊上失稳，导致细流发生横向偏移，冰块迅速横向扩展；(iii) 随着细流振荡并形成新的冰分支，冰块逐渐增厚，分支间的空隙逐渐填满，整体表面也变得更加平滑。在所有测试条件下，最终的冰结构均由上游三角形侧向包络构成，并过渡到下游恒定宽度区域，此时基底的边缘已被触及（通常如此）。

我们利用红外测量量化了细流在冰表面上的探索情况。流动在基底上的总停留时间随方位角 θ 呈现自相似高斯分布，其标准差与径向距离 r无关。因此，与结构的侧缘相比，中心区域被经过的频率要高得多。通过分析角向平均高度 $h^{\mathrm{moy}}(r,\ t)$，我们表明，对于每次实验，都存在一个收敛半径 $r_{18\mathrm{h}}$ ，在该半径以内，高度剖面到 18 小时实验结束时基本已达到稳态，而在 $r > r_{18\mathrm{h}}$区域，冰仍在下游方向持续增厚。

在收敛区域 $r < r_{18\mathrm{h}}$内，我们推导并检验了一个用于描述稳态高度场的二维理论模型。我们将 Huerre 等人（2021年）的框架扩展至缓慢变化的冰坡上的细流流动，并将细流的基于润滑理论的流体动力学描述与液相和固相中的热方程耦合起来，两者通过界面处的斯特藩条件相联系。在与我们的实验相关的大佩克莱数极限下，该模型预测，稳态冰层高度沿流动方向呈指数增长，其特征由初始高度h_0 和特征长度 r_c决定。尽管 Huerre 等人 （2021年）已发现这一规律，但本模型表明，该预测可推广至具有缓慢变化坡度的基底。此外，纳入细流的三维几何形态后，冰高度场与流动流体动力学参数之间的关系得到了进一步完善。在 $t = 18\mathrm{h}$条件下对实验中心线剖面进行指数拟合，结果表明，在收敛区域内，拟合与模型吻合良好。特征长度随流量的变化表明，在 $Q \simeq 70\ \mathrm{mL.min^{-1}}$附近坡度发生变化，这标志着流动状态从直线细流状态（与模型假设一致）转变为蜿蜒状态；在后一状态下，必须考虑不同的细流几何形态。我们还考察了冰高度场的角向依赖性。即使中心线上的高度已收敛，热交换器侧缘附近的高度仍可能尚未收敛，原因恰恰在于细流停留时间随方位角 θ呈中心高斯分布。

基于此，我们提出了固定半径 r处角向截面的演化情景。最初较窄的冰脊首先向两侧扩展；随后，中心线处的高度收敛至模型预测的稳态值；最后，稳态平台区域从中心线逐渐扩展，直至整个截面最终变得 θ不变。该平台的扩展速度随 r 增大以及稳态高度升高而降低：根据稳态剖面的理论预测，我们推断，较低的流量或较高的约化温度会形成更高的结构，因此需要更长时间才能收敛至 θ不变的截面。因此，18小时后，只有（r, θ）参数空间中的有限区域达到了稳态高度，而其他区域的冰在此后仍持续生长。

除本文所探讨的具体实验配置外，我们的结果展示了毛细流与相变耦合时如何生成复杂的三维冰形态。本研究所建立的实验方法和理论框架可向多个方向拓展。首先，可探究类似机制是否也支配地下洞穴中冰帘的形成：在这些洞穴中，细流或薄膜以较低流量流经垂直或悬垂的冷表面。将当前模型与此类数字化形态进行比较，有助于评估模型的普适性。其次，可研究将细流直接注入冰表面的情形，从而引发融化而非凝固。这种配置将使系统更接近天然冰川上的情形：冰面溪流流经冰表面并逐渐改变其形态。

资助。本研究获得法国国防创新署（AID）通过国防与安全跨学科中心（CIEDS）提供的支持（项目 2021 - ICING）。

利益冲突。 作者声明不存在利益冲突。

数据可用性声明。 支持本研究结论的数据可向通讯作者索取，提出合理请求即可获得。

作者 ORCID。 W. Sarlin，https://orcid.org/0000-0002-2668-2279；C. Josserand，https://orcid.org/0000-0003-1429-4209；T. S´eon，https://orcid.org/0000-0001-6728-6072；A. Huerre，https://orcid.org/0000-0003-4702-5128。

附录A. 冰结构的张开角

从图2所示的不同冰最终状态可以看出，实验18小时后，所有结构都具有相同类型的三角形包络，其张开半角取决于实验条件。由于热交换器的宽度有限，三角形包络通常与基底边缘相交，从而在换热器底部形成一个恒定宽度区域。

在研究孔径如何依赖于控制参数之前，我们首先考察给定实验过程中孔径的时间演化。为此，我们通过冰结构宽度相对于距离的演化来监测其横向扩展 l_{ice} 相对于距离 x。该分析显示于图11 中，实验条件为 $\alpha_s = 50。3°$，$Q = 31\,\text{mL}。\text{min}^{-1}$ 和 $T = 0。72$。对于实验中的某一时刻 t，在结构到达换热器边缘之前，可以通过使用仿射曲线拟合 $\alpha(t)$ 来外推等效半角 l_{ice}。图11（a）展示了这种拟合方法的一个示例，时间为 $t = 18\text{h}$。随后可以提取 $\alpha(t)$ 的时间演化，如图11（b）所示。随着冰

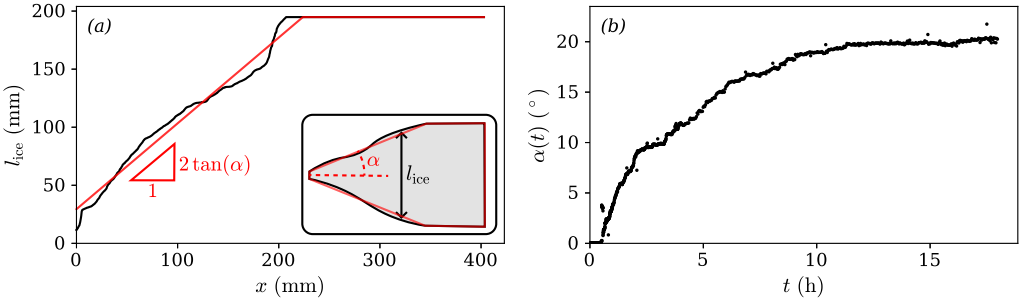

图11：通过典型实验期间冰结构宽度的演化 l_{ice} 确定其侧向包络的半张角（实验条件为 $\alpha_s = 50。3°$ $Q = 31\,mL。min^{-1}$ 和$T = 0。72$）。图（a）中的插图展示了冰结构的俯视图，以及通过18 h后的轮廓测量重建获得的 l_{ice} 随笛卡尔坐标 x的变化。图（a）中的曲线采用分段线性函数（先线性变化，后保持常数）进行拟合，表示一个最终与基底边缘相交的理想化对称三角形包络。根据该拟合结果，可提取半张角 α（t）。图（b）展示了该角度的时间演化；约10 h后，该角度趋于20。1°的稳定值。

结构由于细流的振荡而逐渐扩展，可以观察到 α 不断增大，直至达到最终稳态值 $\alpha_{fin} = 20。1°$ 约10h后。因此，冰结构的侧向包络早在实验结束之前很久，就已趋于由其半角 α_{fin} 表征的最终包络。这一行为在所有实验中都得到一致观察：尽管收敛时间尺度会随操作条件而变化，但始终短于实验的总持续时间。

基于这一结果，我们现在可以考察控制参数如何影响最终角度α_{fin}。结果见图12：每个数据点对应一次独立实验，代表三种基底倾角之一，分别为 $\alpha_s \in \{50。3°、90°、139。6°\}$，每种倾角均以不同颜色表示。如图12（a）所示，等效半张角 α_{fin} 相对于流量几乎保持不变 Q，约为 $\alpha_{fin} \sim 25°$；鉴于测量方法存在较大不确定性，这一结论与基底倾角无关。在低流量下进行的实验中， α_{fin}的测定结果表现出更大的变异性， 40°的数值最高可达。当分别考察每种倾角时，只有垂直构型（$\alpha_s = 90°$）中的 α_{fin}呈现出轻微下降。对于另外两种倾角，半张角围绕平均值波动，没有明显的单调变化趋势。总体而言，这些观察结果表明，冰结构的侧向包络并非主要由流体动力学效应控制。

为进一步探究包络形成的内在机制，图12(b)展示了 α_{fin} 随约化温度 T的变化。与前一张图不同，该曲线在所有基底倾角下均呈现出明显的单调趋势： α_{fin}随T增大。这一现象表明，较高的约化温度使细流能够在基底上向侧向扩展得更远，从而形成更宽的包络。因此，侧向包络似乎主要受相变动力学中的热效应支配。然而，由于 T 同时取决于 T_{in} 和 T_s，仅凭图12(b)无法区分二者各自的贡献。为此，我们从主图中选取了六个已有数据点，这些数据点对应的实验均在固定的 $\alpha_s = 50$下进行：3° 和 $Q = 67\,mL,min^{-1}$，基底温度近乎恒定，为 $T_s \in [-17.2, -15.6]$ ◦C，同时注入温度在较大范围内变化，即 $T_{in} \in [6.8,21.7]$ ◦C。这六组实验在图12(c)中单独标出。尽管 T_{in}变化很大， α_{fin} 基本保持不变，聚集在

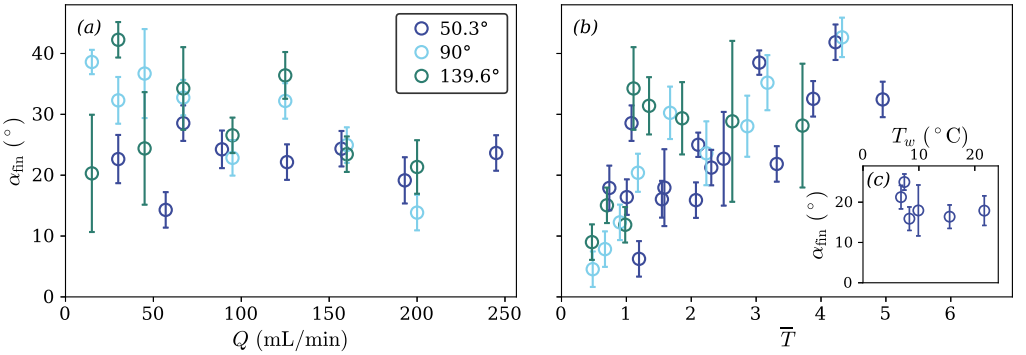

图12：实验结束时（t = 18小时）测得的冰包络最终等效半角 α_{fin} 随以下参数的变化：(a) 恒定温度（T_{in} = 20°C和 T_s = −22°C）下的流量 Q；(b) 恒定流量（Q = 67 mL.min^{-1}）下的约化温度 $\overline{T}$；(c) 恒定流量和基底温度（Q = 67 mL.min^{-1} 和T_s = −16±1.2 °C）下的注入温度 T_{in}。每幅图中展示了三个实验系列，分别对应基底倾角$\alpha_s \in \{50.3°,\ 90°, 139.6°\}$。分别提取基底左侧和右侧的半角，其平均值定义为 α_{fin}。不确定度采用学生t分布估算，并将结构不对称性以及每个半角 3° 的系统测量误差纳入考量。

19°附近。这表明注入温度对包络开口角影响甚微，因此包络开口角主要由基底温度 T_s控制。

总的来说，冰结构的侧向包络主要受热效应控制，更具体地说，受基底温度控制 T_s。事实上，已知这一参数会显著影响冰面上水的表观接触角（Sarlin等，2025年）：过冷度（相对于熔化温度的温差）越大，水在其基底上的表观接触角就越大。可以预期，表观接触角的变化会改变细流的整体动力学，例如动态蜿蜒状态下细流的横向运动。因此，这会影响细流横向振荡的角跨度，进而影响冰结构的张开角。这为观察到的侧向半角随 α_{fin} 减小 T_s而增大的现象提供了一种合理解释，如图12（b）所示。对凝固存在时接触线动力学的详细研究超出了本研究的范围，但显然值得在未来进行专门分析。

附录 B. 曲线坐标下热方程的推导

为推导方程（4.10），我们需要将平流–扩散方程（方程 4.4）改写为曲线坐标系下的形式，并按 $\varepsilon = 1/\text{Pe} \ll 1$ 展开至一阶。为此，可按照 Haggstrom（2018年）详述的方法表示拉普拉斯算子：

$$\nabla^2 T_w = \frac{1}{h_s h_n}\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{h_n}{h_s}\frac{\partial T_w}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{h_s}{h_n}\frac{\partial T_w}{\partial n}\right)\right] \tag{B 1}$$

其中，度量系数 h_s 和 h_n 与界面的局部曲率 κ 有关，其定义为 $\kappa = \dfrac{d^2 h}{ds^2}\left(1 + \left(\dfrac{dh}{ds}\right)^2\right)^{-3/2}$，即：

$$\begin{cases} h_s = 1 - n\kappa \\ h_n = 1 \end{cases} \tag{B 2}$$

由此得到曲线坐标下拉普拉斯算子的表达式：

$$\nabla^2 T_w = \frac{\partial^2 T_w}{\partial n^2} - \frac{\kappa}{1-n\kappa}\frac{\partial T_w}{\partial n} + \frac{d\kappa}{ds}\frac{n}{(1-n\kappa)^3}\frac{\partial T_w}{\partial s} + \frac{1}{(1-n\kappa)^2}\frac{\partial^2 T_w}{\partial s^2} \tag{B 3}$$

引入无量纲变量 $s = s/(h_{w,0}Pe_0)$, $n = n/h_w(s)$, $\kappa = \kappa h_{w,0}$,$\Theta_w = (T_w - T_m)/(T_{in} - T_m)$, $\Theta_i = (T_i - T_s)/(T_m - T_s)$ 和 $h_i = h_i/h_{w,0}$, 液体中的热方程变为:

$$\frac{\sin(\alpha_s - \alpha(\bar{s}))}{\sin(\alpha_s)}\left(\frac{h_w(\bar{s})}{h_{w,0}}\right)^4 \bar{n}(2-\bar{n})\frac{\partial \Theta_w}{\partial \bar{s}} = \frac{\partial^2 \Theta_w}{\partial \bar{n}^2} - \frac{h_w(\bar{s})}{h_{w,0}}\frac{\bar{\kappa}}{1-\bar{n}\,\bar{\kappa}}\frac{\partial \Theta_w}{\partial \bar{n}}$$

$$+ \varepsilon \frac{d\bar{\kappa}}{d\bar{s}}\left(\frac{h_w(\bar{s})}{h_{w,0}}\right)^2 \frac{\bar{n}}{(1-\bar{n}\,\bar{\kappa})^3}\frac{\partial \Theta_w}{\partial \bar{s}} \tag{B 4}$$

$$+ \varepsilon^2 \left(\frac{h_w(\bar{s})}{h_{w,0}}\right)^2 \frac{1}{(1-\bar{n}\,\bar{\kappa})^2}\frac{\partial^2 \Theta_w}{\partial \bar{s}^2} \tag{B 5}$$

值得注意的是，由于从方程（*4.2*）导出的量 $h_w^4(s)\sin(\alpha_s - \alpha(s))$的守恒4.2), 因子 $\sin(\alpha_s - \alpha(s))\sin(\alpha_s)\left(h_w(s_0)\right)^4 h_{w,}$恒等于 1。由于 $dhds$ 在 ε中为 1 阶， κ 因此在 ε中为 2 阶，方程在 ε 的一阶近似下可简化为:

$$\bar{n}(2-\bar{n})\frac{\partial \Theta_w}{\partial \bar{s}} = \frac{\partial^2 \Theta_w}{\partial \bar{n}^2} \tag{B 6}$$

对冰中的热扩散进行类似推导，可在相同阶次下得到:

$$\frac{\partial^2 \Theta_i}{\partial \bar{n}^2} = 0 \tag{B 7}$$

因此，在 ε的一阶近似下，液体中的平流–扩散方程和冰中的扩散方程化简为 Huerre 等人 (2021年) 将笛卡尔坐标 (x, z) 替换为曲线坐标 (s, n)所得的结果。冰层高度的理论表达式（方程（4.10））便可直接由该模型得出。

参考文献

Aouad, W., Landel, J.R., Dalziel, S.B., Davidson, J.F. & Wilson, D.I. 2016 水平连贯液体射流冲击垂直壁面并沿壁面流下的粒子图像测速与建模。实验热与流体科学**74**, 429–443. Baumert, A., Bansmer, S., Trontin, P. & Villedieu, P. 2018 混合相条件下飞机结冰的实验与数值研究。《国际传热传质杂志》 **123**, 957–978. Bentwich, Michael, Glasser, David, Kern, Jochen & Williams, Donald 1976 直线液膜流分析。*AIChE*期刊 **22**(4), 772–779. Chen, Antony Szu-Han & Morris, Stephen W 2011 冰柱形态的实验研究。《物理评论*E*—统计、非线性与软物质物理》 **83** (2), 026307. David, TW, Priestley, Raymond E, Priestley, Raymond Edward, Shackleton, Ernest Henry & others 1910 英国南极探险队，1907—1909年，由CVO爵士EH Shackleton指挥，科学考察报告。De Ruiter, Rielle, Colinet, Pierre, Brunet, Philippe, Snoeijer, Jacco H & Gelderblom, Hanneke 2017 凝固铺展液滴中的接触线钉扎。《物理评论：流体》 **2** (4), 043602. Demmenie, Menno, Gorin, Benjamin, Kolpakov, Paul, Smith, Scott, Kellay, Hamid & Bonn, Daniel 2025 冰面上水的部分润湿。《物理评论：流体》 **10** (5), 054002.

Duffy, B.R. & Moffatt, H.K. 1995 缓变倾斜面上的黏性细流流动。《化学工程杂志》和《生物化学工程杂志》60 (1), 141–146. Ghabache, Elisabeth, Josserand, Christophe & S´eon, Thomas 2016 冻结的撞击液滴：从破碎到层级裂纹图案。《物理评论快报》117 (7), 074501. Gleason, Colin J, Smith, Laurence C, Chu, Vena W, Legleiter, Carl J, Pitcher, Lincoln H, Overstreet, Brandon T, Rennermalm, Asa K, Forster, Richard R & Yang, Kang 2016 基于现场观测表征格陵兰冰盖冰面融水通道的水力学特性。《地表过程与地貌》41 (14), 2111–2122. Grivel, Morgane Anne Marie 2018 大尺度图案化润湿性对接触线流体动力学影响的研究。博士论文，加州理工学院。Haggstrom, Peter 2018 曲线坐标中的拉普拉斯算子——完整解析。Huerre, Axel, Josserand, Christophe & S´eon, Thomas 2025 冻结与毛细作用。《流体力学年度评论》57 (第57卷，2025年), 257–284. Huerre, Axel, Monier, Antoine, S´eon, Thomas & Josserand, Christophe 2021 细流的凝固：形状与温度场。《流体力学杂志》914, A32. Jin, Z., Zhang, H. & Yang, Z. 2017 水滴在冰表面撞击与冻结过程的实验研究。《国际传热传质杂志》109, 716–724. Ju, J., Yang, Z., Yi, X. & Jin, Z. 2019 热水滴在冰表面撞击与冻结过程的实验研究。《流体物理》31 (5), 057107. Karlstrom, Leif, Gajjar, Parmesh & Manga, Michael 2013 冰面溪流中的曲流形成。《地球物理研究杂志：地表》118 (3), 1897–1907. Kingslake, Jonathan, Ely, Jeremy C, Das, Indrani & Bell, Robin E 2017 融水广泛流至南极冰架并在其上流动。《自然》544 (7650), 349–352. Le Grand-Piteira, Nolwenn, Daerr, Adrian & Limat, Laurent 2006 平面上的蜿蜒细流：惯性与毛细作用之间的简单平衡。《物理评论快报》96, 254503. Liu, Y., Chen, W., Peng, Y. & Hu, H. 2019 不同表面改性桥梁缆索上动态结冰过程的实验研究。《风工程与工业空气动力学杂志》190, 218–229. Lynch, F. T. & Khodadoust, A. 2001 积冰对飞机空气动力学的影响。《航空航天科学进展》37 (8), 669–767. Madejski, J. 1976 冷表面上的液滴凝固。《国际传热传质杂志》19 (9), 1009–1013. Mankoff, Kenneth D., Gulley, Jason D., Tulaczyk, Slawek M., Covington, Matthew D., Liu, Xiaofeng, Chen, Yunxiang, Benn, Douglas I. & G lowacki, Piotr S. 2017 斯瓦尔巴群岛汉斯冰川冰下通道的粗糙度。《冰川学杂志》63 (239), 423–435. Maurel, Agn`es, Cobelli, Pablo, Pagneux, Vincent & Petitjeans, Philippe 2009 傅里叶变换轮廓术中相位—高度关系的实验与理论考察。《应用光学》48 (2), 380–392. Mertens, Keith, Putkaradze, Vakhtang & Vorobieff, Peter 2004 倾斜平面上的编织图案。《自然》430 (6996), 165–165. de Miramon, H´elie, Sarlin, Wladimir, Huerre, Axel, Cobelli, Pablo, S´eon, Thomas & Josserand, Christophe 2025 利用时空相移轮廓测量法测量毛细流的自由表面形貌。《流体实验》66 (5), 1–17. Monier, A. 2022 毛细流的凝固：细流与水滴。博士论文，索邦大学, 2022SORUS102. Monier, Antoine, Huerre, Axel, Josserand, Christophe & S´eon, Thomas 2020 细流冻结。《物理评论：流体》5 (6), 062301. Montagnat, M., Weiss, J., Cinquin-Lapierre, B., Labory, P.A., Moreau, L., Damilano, F. & Lavigne, D. 2010 瀑布冰：形成、结构与演化。《冰川学杂志》56 (196), 225–234. Nakagawa, T. 1992 光滑疏水表面上的细流蜿蜒。《国际多相流杂志》18 (3), 455–463. Nakagawa, T. & Scott, J. C. 1984 光滑疏水表面上的溪流蜿蜒。《流体力学杂志》149, 89–99. Papa, Daniel, Josserand, Christophe & Cohen, Caroline 2024 冰钟乳的形状。arXiv预印本 arXiv:2412.07654。Perazzo, Carlos A & Gratton, Julio 2004 倾斜平面上细流平行流动的纳维–斯托克斯方程解。《流体力学杂志》507, 367–379. Persoiu, Aurel & Lauritzen, Stein-Erik 2017 冰洞。爱思唯尔。

Pitcher, Lincoln H & Smith, Laurence C. 2019 冰面溪流和河流。《地球与行星科学年评》**47**（第47卷，2019年），421–452。Ri, Shien, Wang, Qinghua, Xia, Peng & Tsuda, Hiroshi 2019 用于精确分析条纹图案相位的时空移相法。《光学杂志》**21** (9), 095702。Sarlin, W., Grivet, R., Xu, J., Huerre, A., S´eon, T. & Josserand, C. 2024 融化与凝固在撞击水滴铺展过程中的作用。《流体力学杂志》**996**, A14。Sarlin, Wladimir, Papa, Daniel Vito, Grivet, Rodolphe, Rosenbaum, Alexander, Huerre, Axel, S´eon, Thomas & Josserand, Christophe 2025 冰面上水的宏观接触角。《流体力学杂志》**1019**, A31。Schremb, M., Roisman, I. V. & Tropea, C. 2018 过冷水滴垂直撞击光滑冰面的研究：实验与建模。《流体力学杂志》**835**, 1087–1107。Sebilleau, Julien, Ablonet, Emeryk, Tordjeman, Philippe & Legendre, Dominique 2021 空气湿度对水滴结冰的影响。《物理评论*E*》**104**, L032802。Smith, Laurence C, Chu, Vena W, Yang, Kang, Gleason, Colin J, Pitcher, Lincoln H, Rennermalm, Asa K, Legleiter, Carl J, Behar, Alberto E, Overstreet, Brandon T, Moustafa, Samiah E & others 2015 格陵兰西南部冰盖上，融水通过冰面溪流和河流高效排泄。《美国国家科学院院刊》**112**(4), 1001–1006。St Germain, Sarah L & Moorman, Brian J 2019 北极冰川上冰面溪流的长期观测。《冰川学杂志》**65** (254), 900–911。Stairs, R. A. 1971 液滴在冻结过程中的形状变化。《分析化学》**43** (11), 1535–1536。Takeda, Mitsuo & Mutoh, Kazuhiro 1983 用于自动测量三维物体形状的傅里叶变换轮廓术。《应用光学》**22** (24), 3977–3982。Thi´evenaz, V., S´eon, T. & Josserand, C. 2020 水滴的冻结阻尼撞击。《欧洲物理快报》**132** (2), 24002。Towell, G. D. & Rothfeld, L. B. 1966 细流流动的流体动力学。*AIChE*期刊**12** (5), 972–980。Yang, Kang, Smith, Laurence C, Chu, Vena W, Pitcher, Lincoln H, Gleason, Colin J, Rennermalm, Asa K & Li, Manchun 2016 格陵兰西南部冰盖冰面河网的河流形态测量。《地理信息科学与遥感》**53** (4), 459–482。Zemp, Michael, Jakob, Livia, Dussaillant, In´es, Nussbaumer, Samuel U., Gourmelen, Noel, Dubber, Sophie, A, Geruo, Abdullahi, Sahra, Andreassen, Liss Marie, Berthier, Etienne, Bhattacharya, Atanu, Blazquez, Alejandro, Boehm Vock, Laura F., Bolch, Tobias, Box, Jason, Braun, Matthias H., Brun, Fanny, Cicero, Eric, Colgan, William, Eckert, Nicolas, Farinotti, Daniel, Florentine, Caitlyn, Floricioiu, Dana, Gardner, Alex, Harig, Christopher, Hassan, Javed, Hugonnet, Romain, Huss, Matthias, J´ohannesson, T´omas, Liang, Chia-Chun Angela, Ke, Chang-Qing, Khan, Shfaqat Abbas, King, Owen, Kneib, Marin, Krieger, Lukas, Maussion, Fabien, Mattea, Enrico, McNabb, Robert, Menounos, Brian, Miles, Evan, Moholdt, Geir, Nilsson, Johan, P´alsson, Finnur, Pfeffer, Julia, Piermattei, Livia, Plummer, Stephen, Richter, Andreas, Sasgen, Ingo, Schuster, Lilian, See haus, Thorsten, Shen, Xiaoyi, Sommer, Christian, Sutterley, Tyler, Treichler, D´esir´ee, Velicogna, Isabella, Wouters, Bert, Zekollari, Harry, Zheng, Whyjay & Team, GlaMBIE 2025 社区估算的2000年至2023年全球冰川质量变化。《自然》**639** (8054), 382–388。Zuo, Chao, Feng, Shijie, Huang, Lei, Tao, Tianyang, Yin, Wei & Chen, Qian 2018 条纹投影轮廓术中的移相算法：综述。《工程光学与激光》**109**, 23 59–。