arXiv:2601.00726v1 [physics.flu-dyn] 2 Jan 2026

基于间断伽辽金-玻尔兹曼公式的近不可压缩流动隐式大涡模拟

Onur Ata* [1]、Atakan Aygun[1], Tim Warburton[2] 和 Ali Karakus[1]

[1]中东技术大学机械工程系，土耳其安卡拉 *06800*[2]弗吉尼亚理工大学数学系，美国弗吉尼亚州布莱克斯堡

摘要 我们提出了一种高阶隐式大涡模拟（ILES）方法，用于模拟近不可压缩状态下的流动。该方法基于玻尔兹曼方程的节点间断伽辽金（DG）离散。我们利用间断伽辽金方法的紧致性和低耗散特性，模拟传统带亚格子尺度模型的大涡模拟。ILES 的关键要求之一是仅在狭窄的高波数带内提供耗散。我们通过泰勒-格林涡问题的数值实验对此进行了详细验证，所选雷诺数下存在尺度各异的相干湍流结构。此外，我们通过模拟雷诺数为 $Re = 3700$ 时的绕球流动，验证了该方法在外部空气动力学构型中的适用性，并捕捉到该状态下典型的层流-湍流转捩和复杂的多尺度涡动力学。结果表明，高阶间断伽辽金-玻尔兹曼公式能够准确捕捉转捩与湍流流动特征，而无需采用显式亚格子尺度建模，凸显了其作为近不可压缩湍流 ILES 稳健且符合物理规律的框架的潜力。

关键词： 间断伽辽金方法、玻尔兹曼方程、隐式大涡模拟、高阶方法；

1 引言

湍流本质上具有三维、非定常和随机等特征。在这类流动中，速度尺度会在空间和时间上发生显著且不规则的变化 [1]。考虑到精度和计算成本等因素（这些因素通常取决于具体的流动问题），人们已经发展出一系列数值方法来预测湍流的行为。其中一种方法是直接数值模拟（直接数值模拟） [2, 3]。该方法通过解析流动运动的所有尺度，从最大的尺度（例如边界层或混合层的厚度）一直到科尔莫戈洛夫长度尺度量级，来求解纳维-斯托克斯方程，而无需使用任何湍流模型 $\mathcal{O}(\eta)$ [4]。尽管直接数值模拟是研究湍流物理的有力工具，并且近几十年来计算能力取得了显著进步，但对于大多数具有工业应用意义的复杂流动问题而言，其计算成本仍然高得难以承受。

在解析湍流的各种尺度时，大涡模拟（LES）已成为一种可行的替代方法。与直接数值模拟相比，LES 所需的计算资源更少；与成本效益更高但精度较低的雷诺平均纳维–斯托克斯（RANS）方法相比，它能更深入地揭示流动动力学。传统的 LES 方法直接解析较大的三维非定常运动，这些运动具有各向异性、依赖几何形状且包含大部分能量。较小尺度具有更普适的特征，通常使用亚网格尺度（SGS）模型进行建模 [5]。另一种方法是利用数值方法的离散格式所产生的数值耗散，以处理可能代表截断误差的

*通讯作者。电子邮箱：onurata@metu.edu.tr

亚格子尺度模型。这种方法通常称为隐式大涡模拟（ILES） [6–8] ，也称为欠分辨率直接数值模拟。由于这种方法更为直接，且无需使用亚格子尺度模型，过去十年间，学界对 ILES 的研究兴趣显著增长，并采用了各种数值方法 [9–11]。

ILES 以及所有 LES 的一项关键要求，是能够捕捉流动中的初始扰动；这些扰动的幅度可能比自由来流速度小几个数量级。这些扰动会使层流转捩为湍流，从而在流动中产生复杂的物理现象。因此，为了准确捕捉复杂流动中的关键结构，ILES 数值方法必须在高波数处一个狭窄范围内具有较低的耗散 [12]。因此，由于耗散较低，高阶方法是准确表示湍流的合理选择。基于这一点，研究人员通过数值实验和分析，考察了一大类间断高阶方法对 ILES 的适用性。这些方法包括间断Galerkin（DG） [13, 14], 谱差分（SD） [15–19], 谱体积（SV） [20], 和通量重构（FR） [21, 22] 方法。另一方面，这些方法能否适用于 ILES，主要取决于它们在不同情形下的稳定性。在此背景下，研究人员对这些方法进行了分析和相互比较，以确定它们能否在保持数值稳定的同时实现足够低的耗散。

在高阶方法中，通量重构（FR）方法因其数值通量格式所带来的低数值耗散特性而备受关注。这使 FR 特别适用于欠分辨率湍流模拟。研究表明，即使不显式采用亚格子尺度模型，FR 也能捕捉湍流的关键特征 [23]。近期进展进一步使 FR 能够应用于 ILES 设置，例如通过额外滤波进行稳定化 [22, 24], 、采用近似 L^2 投影 [25], 进行抗混叠，或使用混合RANS/LES公式 [26]。本研究聚焦于 DG 方法，该方法与 FR 具有若干相同的结构和数值特性。本文提出的见解或许也能为在 ILES 场景中采用 FR 的读者提供参考。

间断Galerkin（DG）方法能够为复杂流动生成高阶解，这一特性对大涡模拟尤为有利。此外，DG 方法采用的高阶模板具有紧致性，因此能够在现代计算架构上高效实现高度并行的算法。在低马赫数区域，文献已广泛研究了 ILES 框架下将 DG 方法应用于可压缩Navier–Stokes方程的问题 [27–32]。此外，研究表明，在用于 ILES 的不可压缩Navier–Stokes方程 DG 离散中，采用多种稳定化技术 [33–35]可以获得稳健性。研究者还在 ILES 背景下考察了 DG 方法在各种数值通量格式下的谱特性 [9, 31, 36–38], ，为该领域提供了宝贵见解，并为后续发展指明方向。近期研究继续评估不同 DG 方法用于 ILES 的性能，并提出旨在兼顾精度与稳定性的新方法 [35, 39–41]。与这些基于 DG 的 Navier–Stokes方程 ILES 研究进展相比，在 ILES 背景下对 Boltzmann方程的 DG 离散进行分析仍属空白。已有多项研究提出了 Boltzmann方程的 DG 格式，并表明能够维持数值稳定性和精度 [42–45]。受这些结果启发，我们旨在探索采用高阶 DG 离散的玻尔兹曼方程对近不可压缩流动开展 ILES 的潜力。

本文研究高阶节点间断伽辽金离散对连续 Boltzmann 方程的处理能力， [45] 旨在对近不可压缩三维湍流进行准确、稳定的隐式大涡模拟（ILES）。主要目标是评估该方法固有的数值耗散和稳定化机制在欠分辨流动状态下的表现。我们认为，采用节点间断 Galerkin 方法得到的玻尔兹曼方程组形式相对简单，非常适合控制耗散机制并确保稳定性。控制方程为采用 Bhatnagar–Gross–Krook（BGK）

碰撞算子 [46]。这些方程采用基于厄米多项式的 Galerkin 方法在速度空间中离散。所得一阶系统包含一个非线性碰撞算子，并使用节点间断 Galerkin 方法求解。为减少数值积分中的潜在近似误差，并确保粗网格模拟的稳定性，采用求积规则计算非线性碰撞算子，以实现去混叠。数值耗散完全由离散格式在适当的时间和空间尺度上提供，因此无需显式滤波或人工耗散。采用并比较了两种不同的通量格式——迎风通量和局部 Lax–Friedrichs 通量，以评估它们在不同单元数和近似阶数下对数值耗散的影响。本文分析了半离散格式的稳定性，其中包括对流项和非线性弛豫项。采用三阶半解析 Runge–Kutta 格式，以缓解小弛豫时间可能导致的严苛时间步长限制 τ。通过两个基准问题展示了所提方法捕捉转捩流和湍流中小尺度结构的能力：在 $Re = 1600$ 下的泰勒–格林涡，以及 $Re = 3700$ 下绕球体流动。

本文其余部分安排如下：第2节详细介绍连续玻尔兹曼方程及其系统的间断 Galerkin 离散，并讨论时间离散策略的细节。第3节通过数值研究验证我们的方法，并展示该系统在大涡模拟中的适用性。最后，第 4节给出结论。

2 方法

本节首先阐述 Galerkin-Boltzmann 公式背后的基本概念和数学原理。接着，我们介绍高阶间断 Galerkin 方法，重点讨论空间离散技术。最后，我们介绍用于时间积分的显式时间推进方法。

2.1 Galerkin-Boltzmann 公式

我们考虑采用 BGK 碰撞模型的玻尔兹曼方程。该方程描述粒子分布函数 $f(\mathbf{x},\ \mathbf{v}\ t)$ 随时间的演化，其中该函数取决于空间变量 $\mathbf{x}$、微观速度 $\mathbf{v}$ 和时间 t。忽略外部粒子加速度时，连续 Boltzmann-BGK 方程可写为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f = \frac{(f^{eq} - f)}{\tau}, \tag{1}$$

其中，τ 是松弛时间，它是动力黏度的函数；f^{eq} 是平衡相空间密度，在三维空间中写作

$$f^{eq} = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2}{2RT}\right), \tag{2}$$

其中，ρ，R，T 和$\mathbf{u}$分别是宏观密度、气体常数、温度和宏观速度。

为推导 Galerkin–Boltzmann 方程，我们首先采用 Tölke 等人[47], 的方法，利用基于全局稳态流动的多项式展开来近似相空间分布函数。

$$f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = \frac{1}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{v}|^2}{2RT}\right) \sum_{n=1}^{N_h} q_n(\mathbf{x},t)\phi_n(\mathbf{v}), \tag{3}$$

其中， $\phi_n(\mathbf{v})$ 是速度空间中的多项式， q_n 是相应的系数。按照 Galerkin形式，我们假设 ϕ_n 函数构成一个基，并且偏微分方程残差与同一多项式空间 $\{\phi_m(\mathbf{v})\}_{m=1}^{N_h}$中的所有检验函数正交。我们将方程乘以检验函数，并在无界微观速度空间 $\Omega_{\mathbf{v}} = (-\infty, \infty)^d$ 中积分，得到

$$\int_{\Omega_{\mathbf{v}}} \phi_m(\mathbf{v}) \frac{1}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{v}|^2}{2RT}\right) \phi_n(\mathbf{v}) \left(\frac{\partial q_n}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} q_n - \frac{(q_n^{eq} - q_n)}{\tau}\right) d\mathbf{v} = 0, \tag{4}$$

其中 $\frac{1}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{v}|^2}{2RT}\right) \phi_n(\mathbf{v}) q_n^{eq}$是满足以下条件的局部平衡态的局部 L_2 近似

$$\int_{\Omega_{\mathbf{v}}} \phi_m(\mathbf{v}) \left(\frac{1}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{v}|^2}{2RT}\right) \phi_n(\mathbf{v}) q_n^{eq} - f^{eq}\right) d\mathbf{v} = 0. \tag{5}$$

我们可以将方程组（4）写成如下矩阵形式

$$M_{mn} \frac{\partial q_n}{\partial t} = A_{\mathbf{x},mn} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} q_n + M_{mn} \frac{1}{\tau} \left(q_n^{eq} - q_n\right), \tag{6}$$

其中，速度空间质量矩阵 M 和刚度矩阵 $A_{\mathbf{x}}$ 定义如下

$$M_{mn} = \frac{1}{(2\pi RT)^{3/2}} \int_{\Omega_{\mathbf{v}}} \phi_m \phi_n \exp\left(-\frac{|\mathbf{v}|^2}{2RT}\right) d\mathbf{v}, \tag{7}$$

$$A_{\mathbf{x},mn} = -\frac{1}{(2\pi RT)^{3/2}} \int_{\Omega_{\mathbf{v}}} \phi_m \phi_n \mathbf{v} \exp\left(-\frac{|\mathbf{v}|^2}{2RT}\right) d\mathbf{v}. \tag{8}$$

为简化（6），我们选择厄米多项式来近似速度空间，因为内积中带有指数权重。选择在麦克斯韦内积下正交归一的三元厄米多项式，可得到单位质量矩阵 $M_{mn} = \delta_{mn}$以及常系数刚度矩阵。由此得到以下一阶偏微分方程

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = A_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{q} + \mathcal{N}(\mathbf{q}), \tag{9}$$

其中， $q = q(\mathbf{x}\ t)$ 是厄米多项式系数向量， $A_{\mathbf{x}}$ 是方向系数矩阵， $\mathcal{N}$ 是碰撞算子。本文使用二阶厄米多项式对速度空间进行近似，以模拟近不可压缩流动。对于三维空间，二阶速度空间近似会产生一个由未知系数组成的向量：$\mathbf{q}(\mathbf{x}\ t) = [q_1(x,\ y,\ z,\ t), \ldots, q_{10}(x,\ y,\ z,\ t)]$。方程可明确写为：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_1}{\partial t} &= -c\left(\frac{\partial q_2}{\partial x} + \frac{\partial q_3}{\partial y} + \frac{\partial q_4}{\partial z}\right) & \frac{\partial q_2}{\partial t} &= -c\left(\frac{\partial q_1}{\partial x} + \sqrt{2}\frac{\partial q_8}{\partial x} + \frac{\partial q_5}{\partial y} + \frac{\partial q_6}{\partial z}\right) \\
\frac{\partial q_3}{\partial t} &= -c\left(\frac{\partial q_5}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y} + \sqrt{2}\frac{\partial q_9}{\partial y} + \frac{\partial q_7}{\partial z}\right) & \frac{\partial q_4}{\partial t} &= -c\left(\frac{\partial q_6}{\partial x} + \frac{\partial q_7}{\partial y} + \frac{\partial q_1}{\partial z} + \sqrt{2}\frac{\partial q_{10}}{\partial z}\right) \\
\frac{\partial q_5}{\partial t} &= -c\left(\frac{\partial q_3}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y}\right) - \frac{1}{\tau}\left(q_5 - \frac{q_2 q_3}{q_1}\right) & \frac{\partial q_6}{\partial t} &= -c\left(\frac{\partial q_4}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial z}\right) - \frac{1}{\tau}\left(q_6 - \frac{q_2 q_4}{q_1}\right) \\
\frac{\partial q_7}{\partial t} &= -c\left(\frac{\partial q_4}{\partial y} + \frac{\partial q_3}{\partial z}\right) - \frac{1}{\tau}\left(q_7 - \frac{q_3 q_4}{q_1}\right) & \frac{\partial q_8}{\partial t} &= -c\left(\sqrt{2}\frac{\partial q_2}{\partial x}\right) - \frac{1}{\tau}\left(q_8 - \frac{q_2^2}{q_1\sqrt{2}}\right) \\
\frac{\partial q_9}{\partial t} &= -c\left(\sqrt{2}\frac{\partial q_3}{\partial y}\right) - \frac{1}{\tau}\left(q_9 - \frac{q_3^2}{q_1\sqrt{2}}\right) & \frac{\partial q_{10}}{\partial t} &= -c\left(\sqrt{2}\frac{\partial q_4}{\partial z}\right) - \frac{1}{\tau}\left(q_{10} - \frac{q_4^2}{q_1\sqrt{2}}\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

其中， $c=\sqrt{RT}$ 表示声速。系统（9）在运动黏度为 $\nu=\tau RT$ [47]时，可还原近不可压缩流动的纳维-斯托克斯方程。宏观流动变量与微观变量之间的关系为

$$\rho=q_1,\quad \rho u_x=\sqrt{RT}q_2,\quad \rho u_y=\sqrt{RT}q_3,\quad \rho u_z=\sqrt{RT}q_4.$$

偏应力张量的各分量可表示为

$$\begin{aligned}\sigma_{11}&=-RT\left(\sqrt{2}q_8-\tfrac{q_2^2}{q1}\right),\quad \sigma_{22}=-RT\left(\sqrt{2}q_9-\tfrac{q_3^2}{q1}\right),\quad \sigma_{33}=-RT\left(\sqrt{2}q_{10}-\tfrac{q_4^2}{q1}\right),\\ \sigma_{12}&=-RT\left(q_5-\tfrac{q_2q_3}{q1}\right),\quad \sigma_{13}=-RT\left(q_6-\tfrac{q_2q_4}{q1}\right),\quad \sigma_{23}=-RT\left(q_7-\tfrac{q_3q_4}{q1}\right),\end{aligned}.$$

压力由状态方程 $p=\rho RT$求得。

2.2 空间离散

我们用计算域 Ω_h 表示物理域 $\Omega\in\mathbb{R}^3$，该计算域由 K 个互不重叠的单元组成， D^e，其中 $e=1,\ldots,K$，满足

$$\Omega_h=\bigcup_{e=1}^{K}D^e.$$

我们将场变量 q 在单元 D^e 上的近似记为 q^e。 q^e 沿 ∂D^e的迹值记为 q^-，相应的相邻值记为 q^+。我们将 q^e 沿迹 ∂D^e 的平均项与跳跃项分别定义为 $\{\!\{q\}\!\}$ 和 $[\![q]\!]$，定义如下

$$\{\!\{q\}\!\}=\tfrac{q^++q^-}{2},\quad [\![q]\!]=q^+-q^-. \tag{11}$$

我们将每个单元 D^e 上的有限元空间 V_N^e 定义为 $\mathcal{P}_N(D^e)$，即次数为 N的多项式函数空间。作为有限元空间的基，我们选用拉格朗日多项式来表示每个单元网格点上的解，记为 $\{\phi_i^e\}_{i=1}^{N_p}$。六面体单元中的插值节点选为 Gauss–Legendre–（GLL）点。

接下来，从（9）出发，我们在单元 D^e 内寻求一个局部解 q，使其满足

$$\int_{D^e}\phi\frac{\partial q}{\partial t}=\int_{D^e}\phi\left(A_x\frac{\partial q}{\partial x}+A_y\frac{\partial q}{\partial y}+A_z\frac{\partial q}{\partial z}\right)+\int_{\partial D^e}\phi F(q^*-q^-)+\int_{D^e}\phi\mathcal{N}(q). \tag{12}$$

为计算（12）中包含非线性项 $\mathcal{N}$（q）的体积分，我们采用基于求积的积分方法来减少混叠误差。求积规则将单元内任意函数 g 的一般积分近似为

$$\int_{D^e}g(\mathbf{r})\approx\sum_{i=1}^{N_c}g(\mathbf{r_i^c})w_i^c,$$

在 N_c 个求积节点处，权重为 w_i^c，其中 $i=1,\ldots,N_c$。我们将微观系数字段插值到一组 Gauss–Legendre 求积节点上，并使用求积权重 w_i^c 计算非线性弛豫项$\mathcal{N}$。

在计算表面项时，我们选用迎风通量作为数值通量。我们将通量矩阵记为 $F=n_xA_x+n_yA_y+n_zA_z$沿单元法向量 $\mathbf{n}$ 方向的q^*，它是方程（12）中的一个迹状态。通过对算子F进行对角化，可将迎风通量写为 $F=\mathcal{R}\Lambda\mathcal{R}^{-1}$。对角矩阵 Λ仅包含实数元素 0、0、$0,-0\pm c$， $\pm c$, $\pm c\sqrt{3}$。若将正特征值记为 Λ^+，负特征值记为 Λ^-，即 $\Lambda=\Lambda^++\Lambda^-$，则迎风通量可写为

$$Fq^* = \mathcal{R}\left(\Lambda^+\mathcal{R}^{-1}q^- + \Lambda^-\mathcal{R}^{-1}q^+\right).$$

我们还将迎风通量格式与局部 Lax-Friedrichs（LLF）方法进行了比较，以了解数值通量格式对我们方法耗散行为的影响。LLF 单元间通量为

$$Fq^* = \frac{1}{2}\left(F^+ + F^-\right) + \frac{1}{2}C\left(q^- - q^+\right),$$

其中，C为局部特征波速，F^+和 F^-为利用分裂特征值构造的法向通量矩阵中对应的分量，即 $F^+ = \mathcal{R}\Lambda^+\mathcal{R}^{-1}$和 $F^- = \mathcal{R}\Lambda^-\mathcal{R}^{-1}$。除非另有说明，本文所有结果均采用迎风通量格式计算。

定义质量、表面质量和刚度算子如下:

$$\mathcal{M}^e_{ij} = \int_{D^e}\phi_j\phi_i, \quad \mathcal{M}^{ef}_{ij} = \int_{\partial D^e}\phi_j\phi_i,$$

$$(\mathcal{S}^e_x)_{ij} = \int_{D^e}\phi_j\frac{\partial\phi_i}{\partial x}, \quad (\mathcal{S}^e_y)_{ij} = \int_{D^e}\phi_j\frac{\partial\phi_i}{\partial y}, \quad (\mathcal{S}^e_z)_{ij} = \int_{D^e}\phi_j\frac{\partial\phi_i}{\partial z},$$

我们将方程（12）写成半离散形式

$$\mathcal{M}^e_{ij}\frac{\partial q^e_j}{\partial t} = A_x(\mathcal{S}^e_x)_{ij}q^e_j + A_y(\mathcal{S}^e_y)_{ij}q^e_j + A_z(\mathcal{S}^e_z)_{ij}q^e_j + \mathcal{M}^{ef}_{ij}(F(q^* - q^-))_j + \mathcal{J}^e\mathcal{I}^e_{ki}w_k\mathcal{N}(\mathcal{I}^e_{kj}q^e_j), \quad (13)$$

其中 i，$j = 1$，$...N_p$和 $f = 1$，$...N_{fp}$。将方程（12）中的每一项乘以逆质量矩阵后，可定义所得的微分、提升和投影算子如下:

$$\mathcal{D}^e_x = (\mathcal{M}^e)^{-1}\mathcal{S}^e_x, \quad \mathcal{D}^e_y = (\mathcal{M}^e)^{-1}\mathcal{S}^e_y, \quad \mathcal{D}^e_z = (\mathcal{M}^e)^{-1}\mathcal{S}^e_z,$$

$$\mathcal{L}^{ef} = (\mathcal{M}^e)^{-1}\mathcal{M}^{ef}, \quad \mathcal{P}^e = (\mathcal{M}^e)^{-1}(\mathcal{I}^e)^T diag(w)$$

其中 $diag(w)$是一个包含权重的对角矩阵 w_i，对应于 $i = 1$，...，N_c，则半离散形式（13）可写为

$$\frac{\partial q^e_i}{\partial t} = A_x(\mathcal{D}^e_x)_{ij}q_j + A_y(\mathcal{D}^e_y)_{ij}q_j + A_z(\mathcal{D}^e_z)_{ij}q_j + \mathcal{L}^e_{ij}(F(q^* - q^-))_j + \mathcal{J}^e\mathcal{P}^e_{ik}\mathcal{N}(\mathcal{I}^e_{kj}q^e_j). \quad (14)$$

最后，我们表示 在参考单元上通过参考算子表达节点 DG 半离散形式 ˆe rs

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^e_x &= r^e_x\mathcal{D}_r + s^e_x\mathcal{D}_s + t^e_x\mathcal{D}_t,\\
\mathcal{D}^e_y &= r^e_y\mathcal{D}_r + s^e_y\mathcal{D}_s + t^e_y\mathcal{D}_t,\\
\mathcal{D}^e_z &= r^e_z\mathcal{D}_r + s^e_z\mathcal{D}_s + t^e_z\mathcal{D}_t,\\
\mathcal{L}^{ef} &= \frac{\mathcal{J}^{ef}}{\mathcal{J}^e}\mathcal{L}^f, \quad \mathcal{I}^e = \mathcal{I},\\
\mathcal{P}^e &= \frac{1}{\mathcal{J}^e}\mathcal{P},
\end{aligned}$$

其中，我们使用链式法则计算物理导数 D^e_x, D^e_y, D^e_z，方法是求取局部坐标导数 r^e_x, r^e_y, r^e_z 等。利用拉格朗日基多项式 ϕ_i，我们可以将参考单元上的偏导数矩阵写为

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_r &= D^{1D}\otimes I\otimes I,\\
\mathcal{D}_s &= I\otimes D^{1D}\otimes I,\\
\mathcal{D}_t &= I\otimes I\otimes D^{1D},
\end{aligned}$$

其中， D^{1D} 是一维微分矩阵，由一维多项式的张量积定义。利用这些参考算子，我们将式（14）写为

$$\frac{\partial q_i^e}{\partial t} = A_r^e(\mathcal{D}_r)_{ij}q_j + A_s^e(\mathcal{D}_s)_{ij}q_j + A_t^e(\mathcal{D}_t)_{ij}q_j + \frac{J^{ef}}{J^e}\mathcal{L}_{ij}(F(q^* - q^-))_j + \mathcal{P}_{ik}\mathcal{N}(I_{kj}q_j^e), \tag{15}$$

其中

$$\begin{aligned} A_r^e &= r_x^e A_x + r_y^e A_y + r_z^e A_z, \\ A_s^e &= s_x^e A_x + s_y^e A_y + s_z^e A_z, \\ A_t^e &= t_x^e A_x + t_y^e A_y + t_z^e A_z, \end{aligned}$$

由此得到我们所用半离散节点 DG 格式的最终形式。在接下来的章节中，我们将通过对半离散形式进行稳定性分析，并采用半解析方法对这些形式进行时间离散，从而完善我们的方法。

2.3 半离散格式的稳定性

从式（13）所示的半离散形式出发

$$\mathcal{M}^e\frac{\partial q^e}{\partial t} = A_x(\mathcal{S}_x^e)q^e + A_y(\mathcal{S}_y^e)q^e + A_z(\mathcal{S}_z^e q^e + \mathcal{M}^{ef}(F(q^* - q^-)) + \mathbf{N}^e,$$

其中$\mathbf{N}^e$ 表示单元 e 上离散化的非线性碰撞项。将方程乘以q^T，将其转换为能量形式

$$\frac{dE^e}{dt} = \mathbf{\Phi}_{\mathcal{L}}^e + \mathbf{\Phi}_{\mathcal{N}}^e = q^T(A_x(\mathcal{S}_x^e)q^e + A_y(\mathcal{S}_y^e)q^e + A_z(\mathcal{S}_z^e)q^e + \mathcal{M}^{ef}(F(q^* - q^-)) + \mathbf{N}^e),$$

其中 $E^e = \frac{1}{2}q^T\mathcal{M}q$、 $\mathbf{\Phi}_{\mathcal{L}}^e$ 和 $\mathbf{\Phi}_{\mathcal{N}}^e$ 分别是对流项和非线性弛豫项的能量贡献。首先考察线性项，利用分部求和恒等式$S_{\mathbf{x}} + S_{\mathbf{x}}^T = \sum(R^{ef})^T w^{ef} n_{\mathbf{x}} R^{ef}$ 以及 $A_{\mathbf{x}}$的对称性，可将离散体积分项写为

$$q^T A_{\mathbf{x}} S_{\mathbf{x}} q = \frac{1}{2}q^T A_{\mathbf{x}}(S_{\mathbf{x}} + S_{\mathbf{x}}^T)q = \frac{1}{2}\sum_f (q^-)^T w^{ef} F q^-$$

其中 $q^- = R^{ef}q$。然后将其代入该项的能量形式

$$\mathbf{\Phi}_{\mathcal{L}}^e = \sum_f \left(\frac{1}{2}(q^-)^T w^{ef} F q^- + (q^-)^T w^{ef} F(q^* - q^-)\right),$$

采用迎风通量格式，并将其代入线性项的能量形式，可得单元各面的能量表达式

$$\mathbf{\Phi}_{\mathcal{L}}^e = \sum_f \left(-\frac{1}{2}(q^-)^T w^{ef}(\mathcal{R}\Lambda\mathcal{R}^{-1})q^- + (q^-)^T w^{ef}\mathcal{R}\left(\Lambda^+\mathcal{R}^{-1}q^- + \Lambda^-\mathcal{R}^{-1}q^+\right)\right). \tag{16}$$

若将相邻面的贡献纳入，并对计算域内所有不重复的内部面求和，则可得到线性项的如下形式:

$$\mathbf{\Phi}_{\mathcal{L}} = \sum_{Nf}\left(-\frac{1}{2}[\![q]\!]^T w^{ef}\mathcal{R}[\![\Lambda]\!]\mathcal{R}^{-1}[\![q]\!]\right) \le 0, \tag{17}$$

由于 $[\![F]\!] = \mathcal{R}[\![\Lambda]\!]\mathcal{R}^{-1}$ 如前期研究所示，为半正定的 [13, 48–51]。接下来，我们将分析重点转向非线性碰撞项，以完成分析。松弛项对单元能量率的贡献可写为

$$\mathbf{\Phi}^e_{\mathcal{N}} = (q^e)^T \mathcal{J}^e \mathcal{I}^e_{ki} w_k \mathcal{N}(\mathcal{I}^e_{kj} q^e_j) = \sum_k w_k J^e_k (q(\xi_k))^T \mathcal{N}(q(\xi_k)).$$

由于前四个方程没有任何松弛项，我们将省略这些方程。每个分量都可以写成以下形式

$$q_i(\xi_k)\mathcal{N}_i(\xi_k) = -\frac{1}{\tau} q_i(\xi_k)(q_i(\xi_k) - q_i(\xi_k)^{\mathrm{eq}}) = -\frac{1}{\tau}\left[(q_i(\xi_k) - q_i^{\mathrm{eq}}(\xi_k))^2 + q_i^{\mathrm{eq}}(\xi_k)(q_i(\xi_k) - q_i^{\mathrm{eq}}(\xi_k))\right].$$

因此，单元松弛贡献为

$$\mathbf{\Phi}^e_{\mathcal{N}} = -\frac{1}{\tau}\sum_k \sum_{i=5}^{10} w_k J^e_k \left[(q_i(\xi_k) - q_i^{\mathrm{eq}}(\xi_k))^2 + q_i^{\mathrm{eq}}(\xi_k)(q_i(\xi_k) - q_i^{\mathrm{eq}}(\xi_k))\right].$$

这里的首个二次项严格为非正 $-\frac{1}{\tau}\sum_{i=5}^{10}(q_i(\xi_k) - q_i^{\mathrm{eq}}(\xi_k))^2 \leq 0$。第二项的符号不固定，但可以利用杨氏不等式进行界定，

$$\left|q_i^{\mathrm{eq}}(\xi_k)(q_i(\xi_k) - q_i^{\mathrm{eq}}(\xi_k))\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}(q_i(\xi_k) - q_i^{\mathrm{eq}}(\xi_k))^2 + \frac{1}{2\varepsilon}(q_i^{eq}(\xi_k))^2, \quad \varepsilon > 0.$$

将该界代入能量形式可得

$$\mathbf{\Phi}^e_{\mathcal{N}} \leq -\frac{1-\varepsilon/2}{\tau}\sum_k \sum_{i=5}^{10} w_k J^e_k (q_i(\xi_k) - q_i^{\mathrm{eq}}(\xi_k))^2 + \frac{1}{2\tau\varepsilon}\sum_k \sum_{i=5}^{10} w_k J^e_k (q_i^{\mathrm{eq}}(\xi_k))^2.$$

对所有单元求和后，可以将对离散能量率的总松弛贡献写成以下形式

$$\mathbf{\Phi}_{\mathcal{N}} \leq -\frac{1-\varepsilon/2}{\tau}||q - q^{\mathrm{eq}}||^2_{L^2} + \frac{C}{\tau\varepsilon}, \tag{18}$$

其中

$$||q - q^{\mathrm{eq}}||^2_{L^2} = \sum_e \sum_k \sum_{i=5}^{10} w_k J^e_k (q_i(\xi_k) - q_i^{\mathrm{eq}}(\xi_k))^2, \quad C = \frac{1}{2}\sum_e \sum_k \sum_{i=5}^{10} w_k J^e_k (q_i^{\mathrm{eq}}(\xi_k))^2.$$

因此，对于任意物理可容许状态（$q_1 > 0$ 和 $0 < \varepsilon < 2$），松弛算子均具有耗散性，但存在一个与 $\|q_i^{\mathrm{eq}}\|^2$ 成正比的有界源项。然而，数值求积误差可能引入伪能量，导致解非物理增长，尤其是在欠分辨率模拟中。为减轻混叠误差，我们采用过积分，使用高阶求积规则计算非线性项。结合对线性项和非线性项的分析，可证明 Galerkin-Boltzmann 公式的半离散形式具有稳定性。

2.4 时间离散化

在我们的模拟中，我们采用三阶半解析Runge-Kutta时间离散化 [45]，以克服小松弛时间 τ极限下严苛的时间步长限制。对于较小的松弛时间，公式中的非线性项$\mathcal{N}(q)$会变得刚性，因此我们将系统写为

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{L}(\mathbf{q}) + \mathbf{N}(\mathbf{q}), \tag{19}$$

表 1：基于 RK2a 的改编方法的 Butcher 表，其系数为

0			
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{16}$	$\frac{15}{16}$	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{8}{15}$

将所有线性（非刚性）项归入 $\mathbf{L}$，并将依赖于 τ 的非线性（刚性）松弛项归入$\mathbf{N}$。根据式（9）中的非线性项，我们可以将式（19）改写为

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = -\mathbf{\Lambda q} + \mathbf{L}(\mathbf{q}) + \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{q}), \tag{20}$$

其中 $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{\tau},\ \frac{1}{\tau},\ \frac{1}{\tau},\ \frac{1}{\tau},\ \frac{1}{\tau},\ \frac{1}{\tau})$，且 $\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{q}) = \left(0, 0, 0, 0, \frac{q_2 q_3}{\tau q_1}, \frac{q_2 q_4}{\tau q_1}, \frac{q_3 q_4}{\tau q_1}, -\frac{q_2^2}{\tau q_1 \sqrt{2}}, -\frac{q_3^2}{\tau q_1 \sqrt{2}}, \frac{q_4^2}{\tau q_1 \sqrt{2}}\right)$。令 $\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{L}(\mathbf{q}) + \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{q})$，即可将记号简化为

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = -\mathbf{\Lambda q} + \mathbf{F}(\mathbf{q}). \tag{21}$$

系统的结构使得前四个方程可以在时间上显式积分。这是可行的，因为其中不存在非线性项，因此平流时间尺度构成相关的稳定性约束。式（21）中的时间分裂方法将系统拆分，使我们能够对最后六个方程采用半解析时间积分方法，同时继续对前四个方程使用显式方法。我们精心设计了显式格式，使其在非刚性极限 $1/\tau \to 0$下与半解析积分相一致。为推导半解析公式，我们将式（21）乘以 $e^{\mathbf{\Lambda} t}$ 并对时间积分，得到以下表达式：

$$\mathbf{q}(t_{n+1}) = \mathbf{q}(t_n) e^{-\mathbf{\Lambda}(t_{n+1}-t_n)} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{\mathbf{\Lambda}(\theta - t_{n+1})} \mathbf{F}\left(\mathbf{q}\left(\theta\right), \theta\right) d\theta. \tag{22}$$

由于前四个特征值为零，方程（22）的前四个方程与随时间积分的方程（19）相同。对于龙格-库塔方法，我们首先将（22）从 $t = t_n$ 积分到某个中间时间层 $t = t_n + \Delta t_i$，

$$\mathbf{q}_{ni} = \mathbf{q}_n e^{-\mathbf{\Lambda}\Delta t_i} + \int_0^{\Delta t_i} e^{\mathbf{\Lambda}(\theta - \Delta t_i)} \mathbf{F}\left(\mathbf{q}(t_n + \theta), t_n + \theta\right) d\theta.$$

一般方法的内部阶段和最终阶段可近似表示为：

$$\mathbf{q}_{ni} = \mathbf{q}_n e^{-\mathbf{\Lambda}\Delta t_i} + \Delta t \sum_{j=0}^{s-1} \tilde{a}_{ij} \mathbf{F}\left(\mathbf{q}(t_n + \Delta t_j), t_n + \Delta t_j\right) = \mathbf{q}_n e^{-\mathbf{\Lambda}\Delta t_i} + \Delta t \sum_{j=0}^{s-1} \tilde{a}_{ij} \mathbf{F}_{nj},$$

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n e^{-\mathbf{\Lambda}\Delta t} + \Delta t \sum_{i=0}^{s-1} \tilde{b}_i \mathbf{F}\left(\mathbf{q}(t_n + \Delta t_i), t_n + \Delta t_i\right) = \mathbf{q}_n e^{-\mathbf{\Lambda}\Delta t} + \Delta t \sum_{j=0}^{s} \tilde{b}_i \mathbf{F}_{ni},$$

其中，s 表示阶段数，$\tilde{a}$ 和 b是半解析龙格-库塔方法的系数。由于半解析方法在$\frac{1}{\tau} \to 0$的极限下退化为基础龙格-库塔方法，因此方程中的指数项和非指数项是一致的。假设基础 RK 方法满足

$$\sum_{j=0}^{s-1} b_j = 1, \quad \sum_{j=0}^{s-1} a_{ij} = c_i, \tag{23}$$

而半解析 Runge–Kutta 格式满足类似的约束：

$$\sum_{j=0}^{s-1}\tilde{b}_j=\gamma^{-1}\left(e^{\gamma}-1\right),\quad \sum_{j=0}^{s-1}\frac{1}{c_i}\gamma^{-1}\left(e^{c_i\gamma}-1\right), \tag{24}$$

对于 $i=1$、……、$s-1$ 和$\gamma=\frac{\Delta t}{\tau}$。通过修改基础方法的系数，引入了一类三阶半解析 Runge–Kutta 格式 [45]，从而改善了截断误差。采用表 1 所示的 Butcher 表，本文使用的系数如下：1，

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{10}&=\gamma^{-1}\left[-1+e^{\frac{\gamma}{3}}\right],\\
\tilde{a}_{20}&=\frac{1}{4}\gamma^{-1}\left[1-e^{\frac{3\gamma}{4}}\right],\\
\tilde{a}_{21}&=\frac{1}{4}\gamma^{-1}\left[-5+5e^{\frac{3\gamma}{4}}\right],\\
\tilde{b}_0&=\frac{1}{3}\gamma^{-3}\left[-24-11\gamma-2\gamma^2-e^{\gamma}\left(-24+13\gamma-3\gamma^2\right)\right],\\
\tilde{b}_1&=\frac{36}{5}\gamma^{-3}\left[2+\frac{5}{4}\gamma+\frac{1}{4}\gamma^2-e^{\gamma}\left(2-\frac{3}{4}\gamma\right)\right],\\
\tilde{b}_2&=\frac{16}{5}\gamma^{-3}\left[-2-\frac{5}{3}\gamma-\frac{2}{3}\gamma^2-e^{\gamma}\left(-2+\frac{1}{3}\gamma\right)\right],
\end{aligned} \tag{25}$$

3 结果

本节旨在验证 Boltzmann-Galerkin 方法对不同类型流动的精度和稳定性。为此，考察了两个不同的算例：三维 Taylor-Green 涡旋（TGV）问题，以及 $Re=3700$ 下的绕球流动。所有计算均在 libParanumal 框架 [52]，中完成，其中采用半解析 Runge–Kutta 格式实现了 DG Boltzmann 公式。

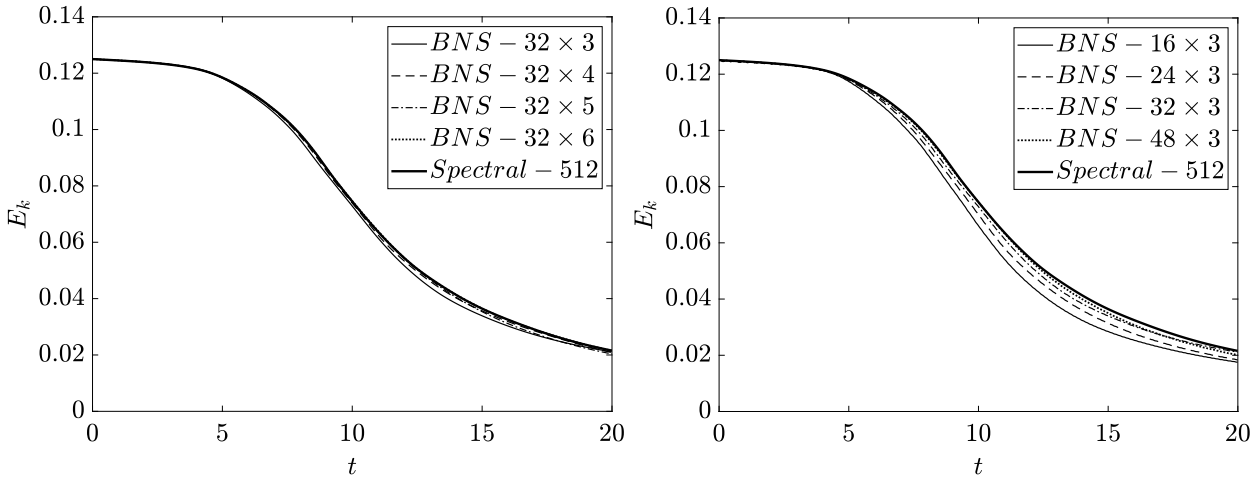


图 1：三维TGV问题的动能演化。左：不同近似阶数的比较。右：不同单元数量的比较。

3.1 三维泰勒–格林涡

Taylor-Green 涡旋是用于研究能量耗散与各向同性湍流衰减之间关系的问题 [53]。由于它具有简单的初始条件和边界条件，且体现了复杂湍流的关键特征，因此常用作评估数值方法

求解湍流能力的基准问题。该问题的求解域是一个尺寸为 $x_i \in [0, 2\pi]$ 的周期性立方体区域。此案例的雷诺数设为 1600。我们的方法求解近不可压缩流动。因此，马赫数设为 0.1。该问题的初始条件为

$$u(x, y, z, t_0) = U_0 sin(x/L)cos(y/L)cos(z/L), \tag{26}$$
$$v(x, y, z, t_0) = -U_0 sin(y/L)cos(x/L)cos(z/L), \tag{27}$$
$$w(x, \ y, \ z, \ t_0) = 0. \tag{28}$$

求解域采用等间距六面体单元进行离散。在此背景下，使用了四种不同的网格，其单元数分别为 16^3, 24^3, 32^3, 和 48^3。我们在较低近似阶数下，针对逐渐增加的单元数 $N = 3$求得解；对于单元数 $K = 32^3$，则逐步提高近似阶数。所得结果与采用谱元法、使用 512^3 个单元 [54]得到的结果进行比较。图中以 $Spectral - 512$表示参考解。TGV 问题的所有解均在 TUBITAK ULAKBIM 高性能与网格计算中心的 Nvidia P100 GPU 和 Intel Xeon Gold 6248R 处理器上求得。

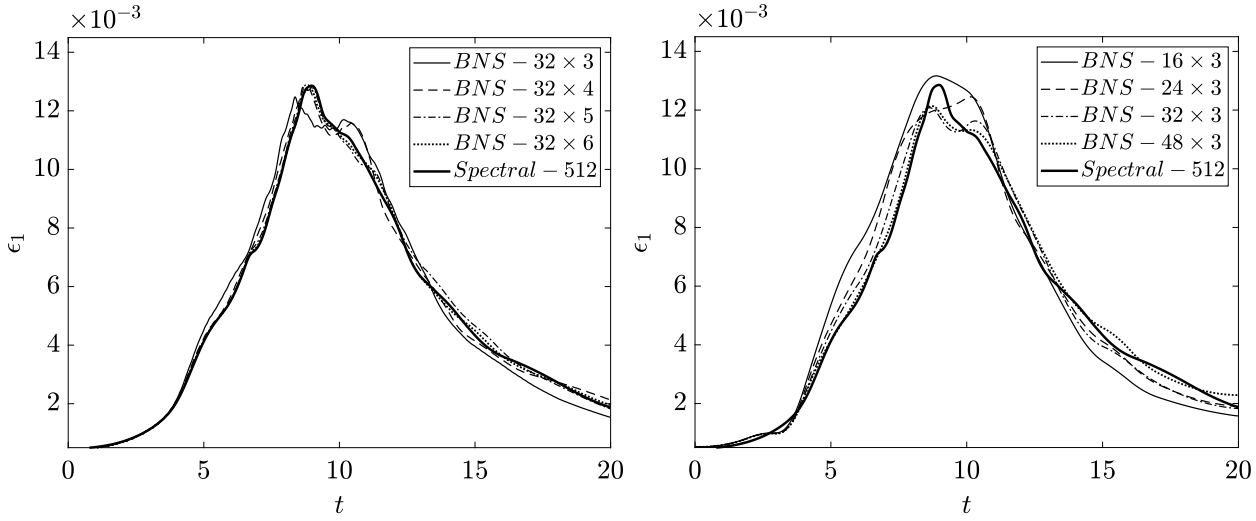


图 2：三维TGV问题的动能耗散率。不同近似阶数的比较。

通过分析 Taylor–Green 涡问题，评估求解域内动能随时间的耗散情况。求解域内的总动能计算如下：

$$E_k = \frac{1}{\rho_\infty \Omega} \int_\Omega \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d\Omega, \tag{29}$$

其中 Ω 为计算域的体积，参考密度为 $\rho_\infty = 1$。动能随时间的演化如图 1 所示，时间范围为 $0 \leq t \leq 20$。采用 $K = 16^3$，24_3，32_3，48_3以及 $N = 3$ 的解高估了通过较小尺度产生的能量耗散。采用中等网格 $K = 32^3$ 并提高近似阶数 $N = 3$，4，5，6 的解表现出较小的耗散；采用六阶近似且包含 32^3 个单元的解与参考解吻合良好。

动能耗散表示为

$$\epsilon_1 = -\frac{dE_k}{dt}, \tag{30}$$

其中，它通过对动能进行一阶向前差分直接计算。第二个耗散项与涡量平方有关。涡量平方可通过以下方式求得

$$\zeta = \frac{1}{\rho_\infty \Omega} \int_\Omega \frac{1}{2} \rho \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} d\Omega, \tag{31}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 为涡量。对于不可压缩流，还可以利用涡量平方定义第二种耗散率：

$$\epsilon_2 = -\frac{2\mu}{\rho_\infty} \zeta, \tag{32}$$

其中 μ 为动力黏度。采用这两种方法计算的耗散率如图2 和3所示。两种方法得出的结果存在差异：基于涡量的耗散率始终低于直接根据动能计算的耗散率。正如文献 [55], 所指出的，这种差异表明，耗散不仅源于涡量，也源于数值耗散，其定义为 $\epsilon_1 - \epsilon_2$。

对于 $K = 32^3$ 和 $N = 4$，5，6这两种配置，直接根据动能计算的动能耗散率预测准确，如图2 所示。与参考解的对比表明，所有这些配置都成功捕捉到了 $t = 9$附近的耗散峰值。增加单元数可以改善结果；当单元数达到适中的 $K = 32$时，继续加密网格对准确呈现耗散率的改善已不明显。此外，图3 所示的涡量平方耗散会随着多项式阶数提高而增大，这是因为更小的涡结构得到了更好的分辨；而 $N = 5$ 和 $N = 6$ 的解与参考结果高度吻合。这些发现表明，该格式产生的数值耗散能够有效模拟亚格子尺度模型的行为。图4展示了多项式阶数增加时数值耗散的对比。整体趋势是，在时间中点附近始终可以观察到数值耗散峰值。对于多项式近似阶数$N = 5$ 和 $N = 6$，数值耗散很低，因此能够生成稳定且准确的高阶 ILES 解。数值耗散被用作比较量，以观察数值通量格式的影响。在此背景下，我们将经典迎风格式与局部 Lax–Friedrichs 格式进行比较。通过三种不同配置分析数值通量与总数值耗散之间的关系。在第一种配置中，单元数和多项式阶数都相对较小，即 $K = 24^3$，$N = 3$。在这种条件下，局部 Lax–Friedrichs 格式会产生相当大的数值耗散。对于另外两种配置，我们考察了增大 K 和 N 的影响。结果同样见图5。结果表明，尽管增加单元数仍会造成一定的数值耗散差异，尤其是在峰值处，但提高近似阶数能够抑制局部 Lax–Friedrichs 格式引入的过量耗散。

为展现流动中的相干结构，尤其是尾流区中的结构，采用 Q准则 [56]。该准则通过速度梯度张量 $\nabla \mathbf{u}$的正二阶不变量计算，其定义为

$$Q = \frac{1}{2}(\|\mathbf{\Omega}\|^2 - \|\mathbf{S}\|^2).$$

其中 $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{\Omega}$ 分别是速度梯度 $\nabla \mathbf{u}$的对称部分和反对称部分。按速度大小着色的 Q准则等值面如图 6 所示，用以展示流动的演变过程。如 [57], 所述，初始的无黏行为逐渐发展为涡片的形成和卷起，直至 $t^* = 5$。随后，相干涡结构开始在 $t^* = 9$附近发生破碎。此后，流动变为充分湍流，结构逐渐衰减，直至流动达到稳态。

还利用傅里叶变换计算了三维动能谱，并将其表示为波数的函数。对面值取平均，以准确表征能谱。图

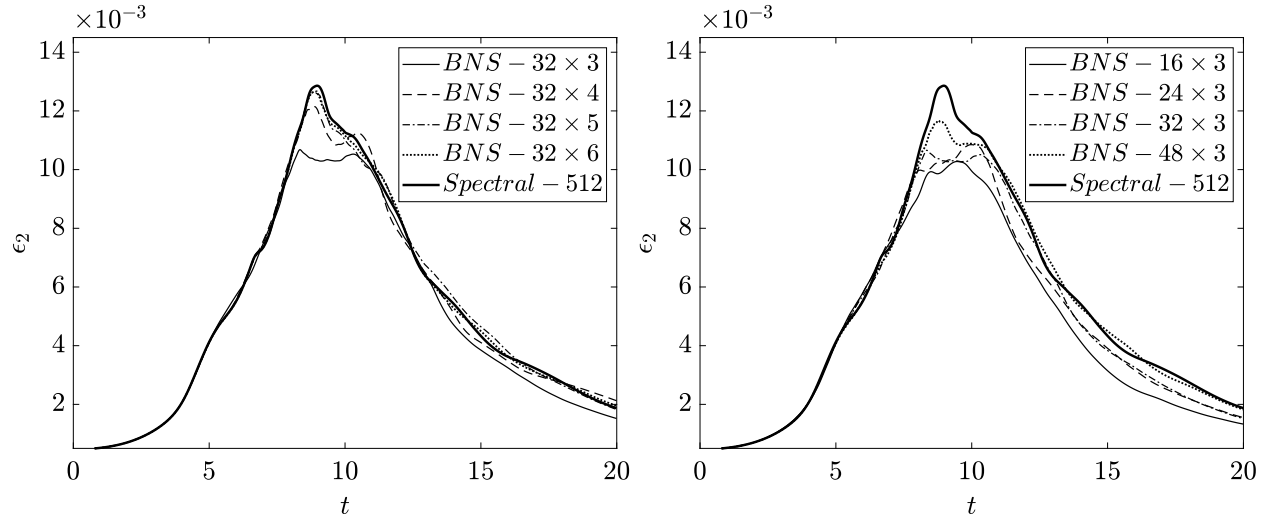


图3：基于涡量平方的三维TGV问题动能耗散率。不同近似阶数的比较。

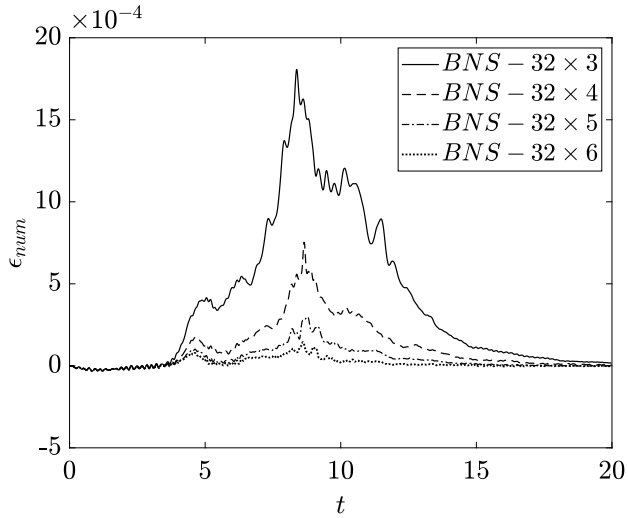


图4：三维TGV问题中随近似阶数增加的数值耗散率。

7 展示了在$t = 9$ （此时最小尺度上的能量达到峰值，且最大耗散出现在这一时刻附近）[57]的不同单元数和多项式阶数下的能谱。结果与采用伪谱方法、使用512^3 个单元 [28]得到的参考解进行了比较。每种模拟的最大波数 $DOF/2$在图中以竖线标出。对逐渐增加单元数和多项式阶数的结果进行比较后发现，采用适量单元和高阶多项式有利于捕捉更高波数处的能量。此外，对于最粗网格 $K = 16^3$，在较低波数处观察到明显的不一致，这在 [36]中也有所体现。

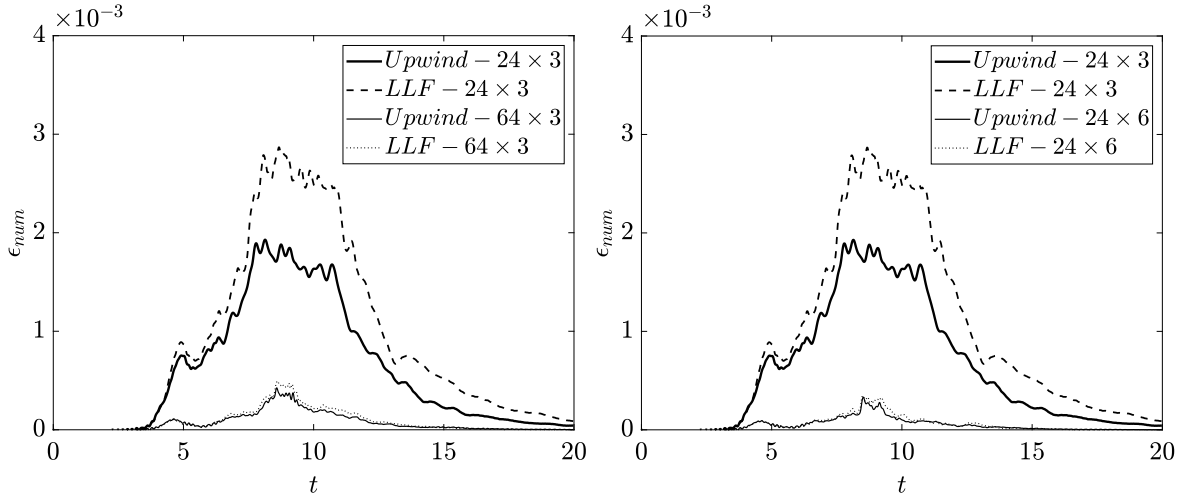


图 5：三维TGV问题中，不同单元数和近似阶数下不同数值通量方法的数值耗散率比较。左：单元数递增；右：近似阶数递增。

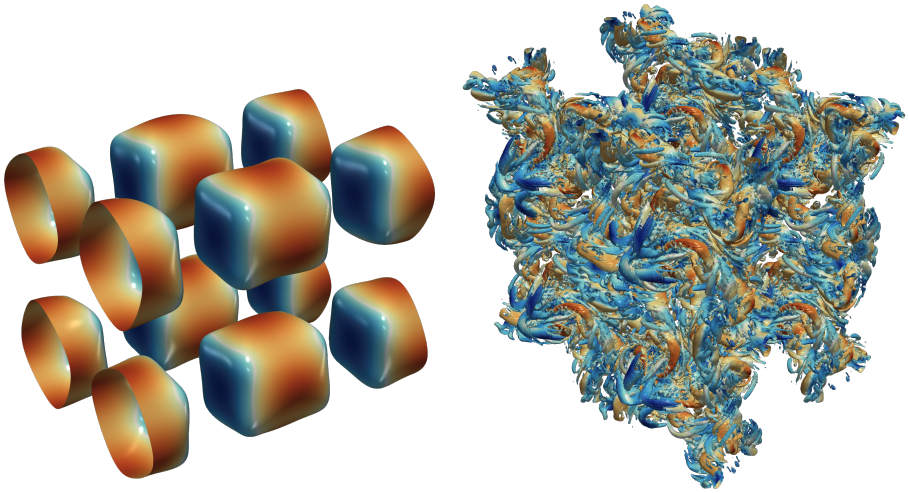


图 6：三维TGV问题的 $K = 32^3$, $N = 6$ 解所得 Q准则等值面，按速度大小着色。左： $t^* = 1$；右： $t^* = 9$。

3.2 雷诺数为 $Re = 3700$ 时的绕球流动

在本节中，我们研究 $Re = 3700$ 条件下亚临界状态的绕球流动。我们将结果与以往的数值研究 [58–60]及同一状态下的实验数据 [61, 62] 进行比较，具体如下：

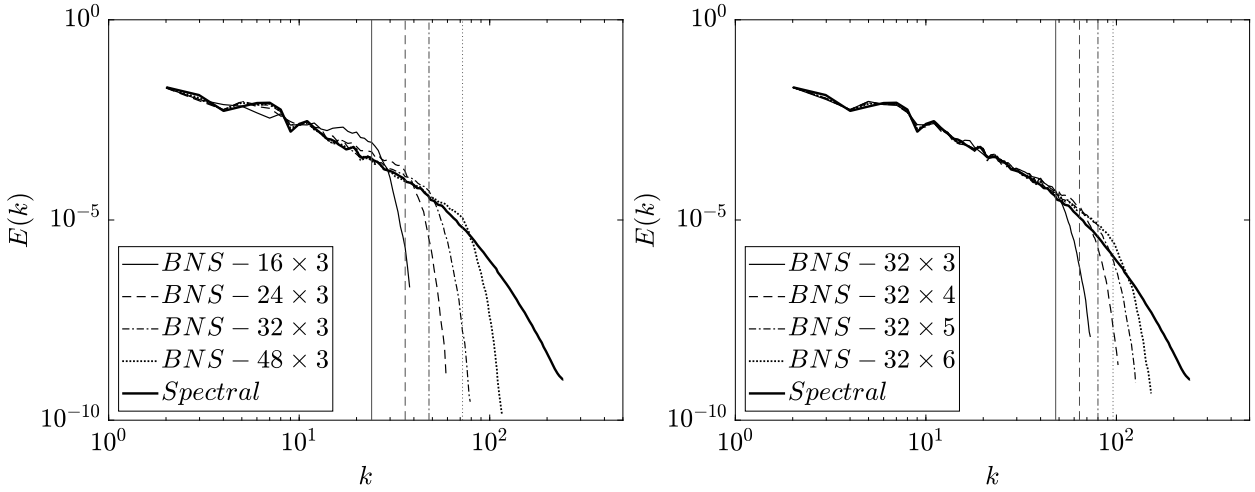


图 7：三维TGV问题在 t=9 时的能谱。

在相同状态下。在此雷诺数下，流动在球体赤道附近发生层流分离，并在分离剪切层中转变为湍流，从而产生涡脱落。层流向湍流的转变，以及湍流尾流中非定常的涡脱落，使流动动力学变得复杂。

计算域采用六面体单元进行离散。为保证壁面边界处的解精度，球体表面采用曲边单元。这些曲边单元通过移动表面节点使其与球体边界重合而生成，同时采用简单的混合法调整内部体节点。总共使用 $K = 476199$ 个单元，并采用三阶和四阶多项式逼近求解。我们使用完美匹配层（PML）衰减边界反射，从而使计算域保持相对较小。求解采用各方向宽度为 $w = 4D$ 的PML，最大阻尼系数为 50 ，阻尼分布为三阶，其中 D 为球体直径。有关 PML 的详细信息和公式，读者可参阅 [45]。模拟在Polaris超级计算机上运行，使用了英伟达A100图形处理器和超威半导体EPYC 7713处理器。

平均流动参数、阻力系数、斯特劳哈尔数以及瞬时涡结构均经过研究，并与参考数据进行了比较。阻力系数和升力系数 C_d 和 C_l 根据作用于球体表面 Γ上的总力$\mathbf{F}_t$计算得到，

$$\mathbf{F}_t = \int_\Gamma (-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + p\mathbf{n})\, d\Gamma,$$

其中， p 是根据状态方程恢复的压力， $\boldsymbol{\sigma}$ 是偏应力张量，其分量定义见方法部分。系数定义如下：

$$C_d = \frac{\mathbf{F}_t \cdot \mathbf{i}}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 A}, \quad C_l = \frac{\mathbf{F}_t \cdot \mathbf{j}}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 A},$$

其中， A 是球体的投影迎风面积，$\mathbf{i}$ 和$\mathbf{j}$ 分别是沿 x 和 y方向的单位向量。斯特劳哈尔数定义如下：

$$St = \frac{fD}{U_\infty},$$

其中， f 是通过对升力系数历史进行谱分析得到的脱落频率。表2 总结了平均阻力系数 C_d 和斯特劳哈尔数 St 与文献报道数值的对比

。阶数 $N = 3$ 和 $N = 4$ 的结果显示，平均阻力系数的百分比差异极小，仅为 0.8%，且斯特劳哈尔数吻合良好。两种近似阶数得到的平均阻力系数均处于针对相同构型的既往直接数值模拟 [59] 和大涡模拟 [58] 研究所报告的数值范围内。与这两项研究的差异约为 5%。与近期 [60], 的研究结果更为吻合；该研究针对同一问题，采用高阶谱元求解器 Nek5000 [63] 进行直接数值模拟。以斯特劳哈尔数表示的涡脱落频率 St也处于文献报道的实验和数值结果范围内。

图 8 展示了使用 $N = 4$ 获得的球体周围向湍流转捩后涡结构的形成过程。随着时间推移，这些结构发展为带有大尺度波动的螺旋状脱落模式，这与 [58, 59]的观察结果一致。在相同的时刻，球体周围的速度大小等值线如图9所示。速度剖面表明，球体后方的回流泡延伸至约 $x^* \approx 2D$，与文献 [58, 59]报道的结果高度吻合。

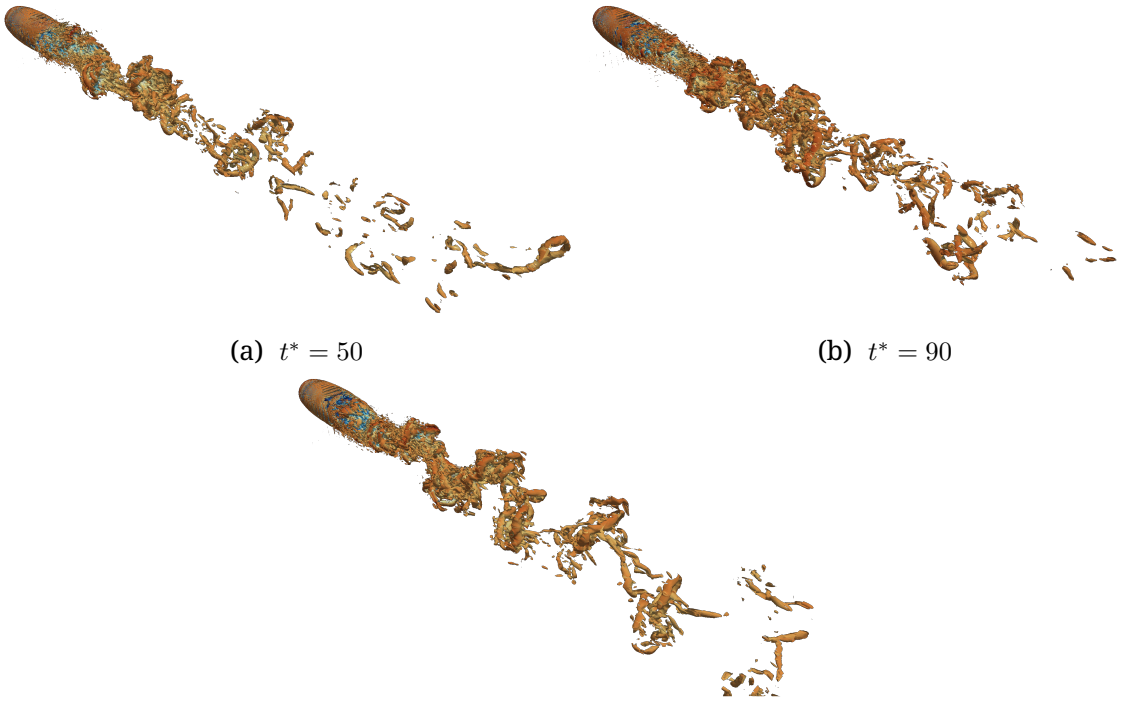
	Re	S_t	$\overline{C_d}$
本研究（N=3）	3700	0.219	0.369
本研究（N=4）	3700	0.220	0.372
Zhang and Peet（直接数值模拟） [60]	3700	0.220	0.375
Rodriguez *et al.*（直接数值模拟） [59]	3700	0.215	0.394
Yun *et al.*（大涡模拟） [58]	3700	0.21	0.355
Kim 和 Durbin（实验） [61]	3700	0.225	–
Sakamoto 和 Haniu（实验） [62]	3700	0.204	–

表 2：球体绕流问题的流动统计特性。结果与文献中的实验和数值结果进行了比较。

4 结论

总而言之，我们证明了连续玻尔兹曼方程的高阶 DG 格式能够捕捉近不可压缩流动中的复杂湍流物理。我们的方法依赖于利用数值离散的耗散机制，稳定地滤除最小尺度。由此得到的方程系统结构相对简单，因此该方法非常适合控制数值耗散。为避免混叠误差，我们对半离散系统中唯一的非线性项，即碰撞项，采用了过积分。线性对流项及其相关数值通量采用两种不同的通量格式，以评估它们对数值耗散和方法稳定性的影响。

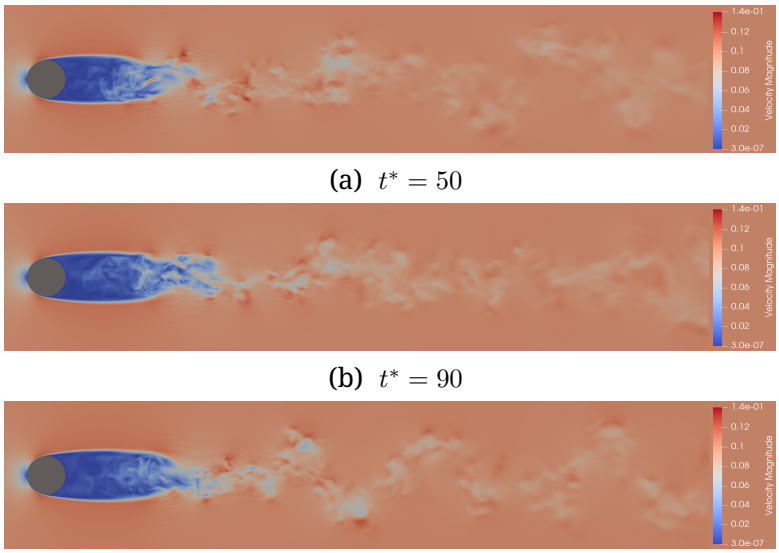
首先，我们研究了泰勒–格林涡问题，并分析了解的几乎所有方面。我们通过考察不同的近似阶数、单元数量以及两种不同的数值通量公式，研究了耗散机制。我们发现，LLF通量方法比迎风方法耗散性更强。这种差异在粗网格和较低阶数下尤为显著。较高的多项式阶数和更细网格能够有效抑制较耗散的 LLF 通量格式引入的过度耗散。根据一阶统计量和能谱所得的结果表明，数值耗散较小且守恒于



(a) $t^* = 50$ (b) $t^* = 90$

(c) $t^* = 120$

图8：球体绕流问题求解结果中，按速度大小着色的 Q准则等值面， $Q = 0.005$。



(a) $t^* = 50$

(b) $t^* = 90$

(c) $t^* = 120$

图9：球体绕流问题求解结果在 $xy-$平面上的速度大小等值线。

高波数区间，这是大涡模拟的要求之一。DG–Boltzmann公式准确再现了动能衰减，以及湍流在广泛的空间分辨率和多项式阶数下的演化。

其次，该方法应用于亚临界雷诺数下的绕球流动，此时层流-湍流转捩伴随着一个较大的分离泡。研究准确解析了复杂的转捩尾流动力学，并通过Q准则和速度等值线加以呈现，表明所提出的方案具备足够的ILES特性。结果发现，平均气动量与数值及实验参考数据吻合良好。

总体而言，本研究凸显了DG–Boltzmann公式作为高阶框架用于湍流的ILES的潜力。未来的研究将着重纳入自适应策略，以提高计算效率，并更好地捕捉更复杂湍流构型中的多尺度流动特征。

5 致谢

本研究使用了阿贡领导力计算设施的资源。该设施是美国能源部（DOE）科学办公室设于阿贡国家实验室的用户设施。本研究由美国能源部科学办公室高级科学计算研究计划支持，合同编号 DE-AC02-06CH11357。

本文报告的数值计算部分在 TUBITAK ULAK-BIM 高性能与网格计算中心（TRUBA 资源）完成。

参考文献

[1] S. B. Pope，“湍流”，《测量科学与技术》，第12卷，第11期，第2020–2021页，2001年。[2] S. A. Orszag 和 G. Patterson Jr，“三维均匀各向同性湍流的数值模拟”，《物理评论快报》，第28卷，第2期，第76页，1972年。[3] R. S. Rogallo，均匀湍流中的数值实验，第81315卷。美国国家航空航天局，1981年。[4] P. Moin 和 K. Mahesh，“直接数值模拟：湍流研究的工具”，《流体力学年度评论》，第30卷，第1期，第539–578页，1998年。[5] P. Sagaut 和 S. Deck，“空气动力学中的大涡模拟：现状与展望”，《英国皇家学会哲学汇刊*A*辑：数学、物理与工程科学》，第367卷，第1899期，第2849–2860页，2009年。[6] J. P. Boris，“关于采用亚格子湍流模型进行大涡模拟的评论1”，载于《湍流何去何从？十字路口的湍流：*1989*年*3*月*22*日至*24*日在纽约州伊萨卡康奈尔大学举行的研讨会论文集，第344–353页，Springer，2005年。[7] L. Margolin 和 W. Rider，“隐式大涡模拟模型的设计与构建”，《国际流体数值方法杂志》，第47卷，第10-11期，第1173–1179页，2005年。[8] L. G. Margolin、W. J. Rider 和 F. F. Grinstein，“采用隐式大涡模拟对湍流进行建模”，《湍流杂志》，第7期，N15，2006年。[9] R. C. Moura、G. Mengaldo、J. Peiró 和 S. J. Sherwin，“高阶间断伽辽金方法对欧拉湍流隐式大涡模拟/欠分辨率直接数值模拟的涡解析能力”，《计算物理学杂志》，第330卷，第615–623页，2017年。[10] R. Wang、F. Wu、H. Xu 和 S. J. Sherwin，“通过谱/hp有限元方法对通道湍流进行隐式大涡模拟”，《流体物理》，第33卷，第3期，2021年。[11] S. Matsuyama，“Re$=104$下湍流平面射流的隐式大涡模拟”，《计算机与流体》，第250卷，第105732页，2023年。

[12] D. Drikakis、M. Hahn、A. Mosedale 和 B. Thornber，“采用高分辨率和高阶方法进行大涡模拟”，《英国皇家学会哲学汇刊*A*辑：数学、物理与工程科学》，第367卷，第1899期，第2985–2997页，2009年。[13] J. S. Hesthaven 和 T. Warburton，节点间断伽辽金方法：算法、分析与应用。施普林格科学与商业媒体，2007年。[14] B. Cockburn、G. E. Karniadakis 和 C.-W. Shu，间断伽辽金方法：理论、计算与应用，第11卷。施普林格科学与商业媒体，2012年。[15] D. A. Kopriva 和 J. H. Kolias，“一种用于可压缩流的守恒型交错网格切比雪夫多子域方法”，《计算物理学杂志》，第125卷，第1期，第244–261页，1996年。[16] Y. Liu、M. Vinokur 和 Z. J. Wang，“非结构网格谱差分方法I：基本形式”，《计算物理学杂志》，第216卷，第2期，第780–801页，2006年。[17] Z. J. Wang、Y. Liu、G. May 和 A. Jameson，“非结构网格谱差分方法II：扩展至欧拉方程”，《科学计算杂志》，第32卷，第45–71页，2007年。[18] M. Parsani、G. Ghorbaniasl、C. Lacor 和 E. Turkel，“一种用于大涡模拟的隐式高阶谱差分方法”，《计算物理学杂志》，第229卷，第14期，第5373–5393页，2010年。[19] Y. Zhou 和 Z. J. Wang，“采用高阶谱差分方法对机翼上低雷诺数转捩流进行隐式大涡模拟”，载于第*40*届流体动力学会议暨展览，（伊利诺伊州芝加哥），美国航空航天学会，2010年6月。[20] Z. J. Wang，“非结构网格守恒律的谱（有限）体积法。基本形式：基本形式”，《计算物理学杂志》，第178卷，第210–251页，2002年5月。[21] H. T. Huynh，“一种包含间断伽辽金方法在内的高阶格式通量重构方法”，载于第*18*届美国航空航天学会计算流体力学会议，第4079页，2007年。[22] J. R. Bull 和 A. Jameson，“采用高阶通量重构格式模拟泰勒–格林涡”，《美国航空航天学会期刊》，第53卷，第9期，第2750–2761页，2015年。[23] B. C. Vermeire、S. Nadarajah 和 P. G. Tucker，“采用高阶重构校正方法进行隐式大涡模拟”，《国际流体数值方法杂志》，第82卷，第5期，第231–260页，2016年。[24] M. Hamedi 和 B. C. Vermeire，“用于稳定高阶大涡模拟的优化滤波器”，《计算机与流体》，第237卷，第105301页，2022年。[25] J. Park、F. Witherden 和 P. Vincent，“NACA0021翼型绕流的高阶隐式大涡模拟”，《美国航空航天学会期刊》，第55卷，第7期，第2186–2197页，2017年。[26] H. Zhu、S. Fu、L. Shi 和 Z. Wang，“高阶通量重构方法的隐式大涡模拟”，《美国航空航天学会期刊》，第54卷，第9期，第2721–2733页，2016年。[27] A. Uranga、P. O. Persson、M. Drela 和 J. Peraire，“采用间断伽辽金方法对低雷诺数下向湍流转捩进行隐式大涡模拟”，《国际工程数值方法杂志》，第87卷，第232–261页，2011年7月。[28] C. Carton de Wiart、K. Hillewaert、M. Duponcheel 和 G. Winckelmans，“评估间断伽辽金方法对高雷诺数涡流的模拟能力”，《国际流体数值方法杂志》，第74卷，第7期，第469–493页，2014年。[29] A. D. Beck、T. Bolemann、D. Flad、H. Frank、G. J. Gassner、F. Hindenlang 和 C.-D. Munz，“用于转捩流与湍流模拟的高阶间断伽辽金谱元方法”，《国际流体数值方法杂志》，第76卷，第8期，第522–548页，2014年。[30] T. Bolemann、A. Beck、D. Flad、H. Frank、V. Mayer 和 C.-D. Munz，“用于中等雷诺数流动大涡模拟的高阶间断伽辽金格式”，载于IDIHOM：

高阶方法的产业化——自上而下的方法：欧盟资助的合作研究项目成果，*2010—2014*，第435–456页，Springer，2015年。[31] P. Fernandez、N. C. Nguyen 和 J. Peraire，“用于转捩湍流隐式大涡模拟的混合化不连续Galerkin方法”，《计算物理学杂志》，第336卷，第308–329页，2017年5月。[32] A. R. Winters、R. C. Moura、G. Mengaldo、G. J. Gassner、S. Walch、J. Peiro 和 S. J. Sherwin，“欠分辨率湍流计算中多项式去混叠与分裂形式不连续Galerkin格式的比较研究”，《计算物理学杂志》，第372卷，第1–21页，2018年。[33] E. Ferrer，“用于隐式大涡模拟的内部惩罚稳定化不可压缩不连续Galerkin–Fourier求解器”，《计算物理学杂志》，第348卷，第754–775页，2017年。[34] B. Krank、N. Fehn、W. A. Wall 和 M. Kronbichler，“用于三维不可压缩流的高阶半显式不连续Galerkin求解器及其在湍流通道流DNS和LES中的应用”，《计算物理学杂志》，第348卷，第634–659页，2017年。[35] N. Fehn、M. Kronbichler、C. Lehrenfeld、G. Lube 和 P. W. Schroeder，“欠分辨率湍流不可压缩流的高阶DG求解器：L2方法与H(div)方法的比较”，《国际流体数值方法杂志》，第91卷，第11期，第533–556页，2019年。[36] G. J. Gassner 和 A. D. Beck，“欠分辨率湍流模拟中高阶离散的精度”，*Theoretical and Computational Fluid Dynamics*，第27卷，第3期，第221–237页，2013年。[37] R. C. Moura、G. Mengaldo、J. Peiró 和 S. J. Sherwin，“高阶间断伽辽金方法在Euler湍流隐式LES/欠分辨率DNS中的涡解析能力”，《计算物理学杂志》，第330卷，第615–623页，2017年2月。[38] G. Mengaldo、R. C. Moura、B. Giralda、J. Peiró 和 S. J. Sherwin，“间断伽辽金格式的空间特征解分析：对欠分辨率计算和隐式LES的实用启示”，《计算机与流体》，第169卷，第349–364页，2018年6月。[39] M. de la Llave Plata、V. Couaillier 和 M.-C. Le Pape，“高阶间断伽辽金方法在壁面约束湍流DNS和LES中的应用”，《计算机与流体》，第176卷，第320–337页，2018年。[40] P. L. Lederer、X. Mooslechner 和 J. Schöberl，“用于隐式大涡模拟的高阶基于投影的迎风方法”，《计算物理学杂志》，第493卷，文章编号112492，2023年。[41] R. C. Moura、L. D. Fernandes、A. da Silva 和 S. J. Sherwin，“间断伽辽金方法的联合模态扩散分析：面向非线性问题和隐式LES的更优耗散估计”，《计算物理学杂志》，第505卷，文章编号112912，2024年。[42] X. Shi、J. Lin 和 Z. Yu，“三角形单元上的不连续伽辽金谱元格子Boltzmann方法”，《国际流体数值方法杂志》，第42卷，第11期，第1249–1261页，2003年。[43] A. Düster、L. Demkowicz 和 E. Rank，“高阶有限元在离散Boltzmann方程中的应用”，《国际工程数值方法杂志》，第67卷，第8期，第1094–1121页，2006年。[44] M. Min 和 T. Lee，“用于近不可压缩流动的谱元不连续伽辽金格子Boltzmann方法”，《计算物理学杂志》，第230卷，第1期，第245–259页，2011年。[45] A. Karakus、N. Chalmers、J. S. Hesthaven 和 T. Warburton，“近不可压缩流动的Boltzmann–BGK方程不连续伽辽金离散：半解析时间步进与吸收边界层”，《计算物理学杂志》，第390卷，第175–202页，2019年8月。[46] P. L. Bhatnagar、E. P. Gross 和 M. Krook，“气体中碰撞过程的模型。I. 带电和中性单组分系统中的小振幅过程”，《物理评论》，第94卷，第3期，第511页，1954年。

带电和中性单组分系统中的小振幅过程”，《物理评论》，第94卷，第3期，第511页，1954年。[47] J. Tölke、M. Krafczyk、M. Schulz 和 E. Rank，“采用Galerkin 方法在速度空间中离散Boltzmann方程”，《计算物理通讯》，第129卷，第1期，第91–99页，2000年。[48] T. Warburton，“用于波动问题的低存储曲线不连续伽辽金方法”，《*SIAM*科学计算杂志》，第35卷，第4期，第A1987–A2012页，2013年。[49] D. A. Kopriva 和 G. J. Gassner，“用于变系数平流问题的能量稳定不连续伽辽金谱元离散”，《*SIAM*科学计算杂志》，第36卷，第4期，第A2076–A2099页，2014年。[50] J. Chan、R. J. Hewett 和 T. Warburton，“权重调整不连续伽辽金方法：非均匀介质中的波传播”，《*SIAM*科学计算杂志》，第39卷，第6期，第A2935–A2961页，2017年。[51] J. Chan 和 T. Warburton，“一阶双曲系统迎风不连续Galerkin格式的惩罚稳定机制”，《计算机与数学应用》，第74卷，第12期，第3099–3110页，2017年。[52] N. Chalmers、A. Karakus、A. P. Austin、K. Swirydowicz 和 T. Warburton，“libParanumal：可移植的高性能高阶有限元库”，2022年。0.5.0版。[53] G. I. Taylor 和 A. E. Green，“大涡产生小涡的机制”，《伦敦皇家学会会刊：*A*辑——数学与物理科学》，第158卷，第895期，第499–521页，1937年。[54] W. M. Van Rees、A. Leonard、D. I. Pullin 和 P. Koumoutsakos，“高雷诺数下周期性涡流模拟中涡方法与伪谱方法的比较”，《计算物理学杂志》，第230卷，第8期，第2794–2805页，2011年。[55] J. DeBonis，“采用高分辨率显式有限差分方法求解泰勒-格林涡问题”，载于第*51*届*AIAA*航空航天科学会议暨新视野论坛与航空航天博览会，第382页，2013年。[56] J. C. Hunt、A. A. Wray 和 P. Moin，“湍流中的涡、流带和汇聚区”，利用数值模拟数据库研究湍流，第二卷：*1988*年夏季项目会议录，1988年。[57] M. E. Brachet、D. I. Meiron、S. A. Orszag、B. Nickel、R. H. Morf 和 U. Frisch，“泰勒–格林涡的小尺度结构”，《流体力学杂志》，第130卷，第411–452页，1983年。[58] G. Yun、D. Kim 和 H. Choi，“亚临界雷诺数下球体后方的涡结构”，《流体物理》，第18卷，第1期，2006年。[59] I. Rodriguez、R. Borell、O. Lehmkuhl、C. D. P. Segarra 和 A. Oliva，“雷诺数为Re$=3700$时绕球流动的直接数值模拟”，《流体力学杂志》，第679卷，第263–287页，2011年。[60] F. Zhang 和 Y. T. Peet，“雷诺数为Re$=3700$时球体湍流尾流中相干结构的动力学”，载于湍流与剪切流现象，第2022卷，第十二届湍流与剪切流现象国际研讨会，2022年。[61] H. Kim 和 P. Durbin，“球体尾流中的频率观测及声激励引起的阻力增加”，《流体物理》，第31卷，第11期，第3260–3265页，1988年。[62] H. Sakamoto 和 H. Haniu，“均匀流中球体涡脱落的研究”，《流体工程杂志》，第112卷，第4期，第386–392页，1990年。[63] P. Fischer、J. Lottes、S. Kerkemeier、O. Marin、K. Heisey、A. Obabko、E. Merzari 和 Y. Peet，“Nek5000：用户手册”，阿贡国家实验室，伊利诺伊州莱蒙特，技术报告编号*ANL/MCS-TM-351*，2015年。