避免龙曲线的交点

REIMUND ALBERS、ZONGYI GUO、HUAIYI GUO[1]

摘要：本文证明，当展开角大于 98.195° 时，龙曲线没有自交。证明方法是构造一个龙曲线的凸包，该凸包在龙曲线生成映射的作用下映射到自身。本文采用纯几何方法进行论述。证明还辅以一个猜想，该猜想将展开角的下限降至 96.241°

.

1. 引言

当折纸多边形恰好以 90° 展开时，不会出现交点，这意味着折线的任何线段都不会折返[1]。当展开角超过 90° 时是否仍能避免交点，这一问题最早于 1990 年受到关注[2]，源于 M. Mendès France 的直觉假设：展开角大于 90° 时不会出现交点。H.-O. Peitgen 和 S. Michaelis 于 1995 年前后开展的计算机实验表明，当展开角介于 90° 和 95° 之间时可能会出现交点。在 D. Knuth 2011 年出版的著作[1]中，他指出自己“于 *1969* 年注意到，折叠角为 *95*° 时，路径会发生自交 ”。2006 年，Albers 给出了证明 [3]，表明当角度介于 90° 和 95.126° 之间时，第 10 次迭代中会出现交叉线段。此外，研究还表明[3]，当展开角约为 93.06° 时，折纸曲线的某些顶点会重合。2014 年，S. Tabachnikov 在《重新审视龙曲线》[4]中提出了这个问题：“……曲线开始自交时的临界角是多少，又会在哪里发生自交？”2018 年，J.-P. Allouche、M. Mendès France 和 G. Skordev 对该问题及其迄今为止的解答作了全面综述[5]。2022 年，Y. Kamiya 构造了一个角度序列[6]，其极限为 93.7912°；在该极限处，折纸曲线的两个顶点恰好重合。最后

,

2024年1月，S. Akiyama、Y. Kamiya 和 F. Wen 证明，当展开角超过 99.3438° 时，不会出现交点 [7]。他们的研究与本文探讨的是同一个问题，整体思路也相同。他们采用聚焦于极限龙曲线的复杂计算方法，而本文则对有限折纸多边形进行了纯几何分析。

当前的研究结果总结于图1。

[1]不来梅大学。*MZH Bibliothekstr. 5, 28359* 不来梅，德国 *Gymnasium Horn, Vorkampsweg 97, 28359* 不来梅，德国 电子邮箱：*ralbers@uni-bremen.de, zy.guo@dxfund.org, hy. guo@dxfund.org* 关键词：海威龙，龙曲线

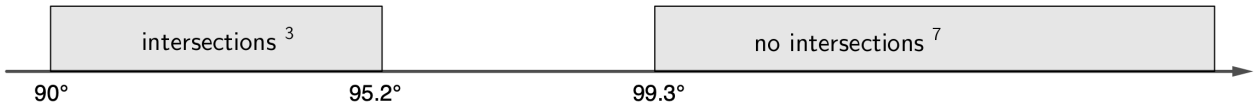


图1：目前的认知

本文将按如下方式缩小不确定间隙。

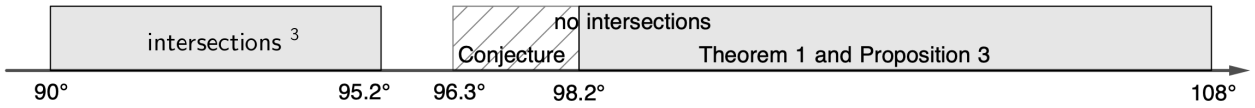


图2：本文的目标

2. 基础知识

2. 1. 将折纸过程定义为符号序列

折纸多边形是通过反复沿同一方向折叠纸条，并分析由此产生的折痕而生成的。这个过程会产生一连串向上和向下的折痕，即山折和谷折。根据几何解释（参见定义3），向下折（谷折）记作 L，向上折（山折）记作 R。如果纸条的摆放方向使第一道折痕向下折（= L），那么符号序列便以 LLRLLRRLLLRRLRR ... 开始。

定义1

设 σ: N $\rightarrow${L, R} 为一个函数，它将序列中位置 n 处的符号映射出来。

这个函数使我们能够定义折纸序列。

定义 2（膨胀律）

折纸序列由符号 L 和 R 构成，具体由以下规则确定：

$$\sigma(n) = \begin{cases} \text{L if } n \equiv 1\ mod\ 4 \\ \text{R if } n \equiv 3\ mod\ 4 \\ \sigma\left(\frac{n}{2}\right) \text{ if } n \equiv 0\ mod\ 2 \end{cases} \quad n\epsilon\mathbb{N}$$

还有另一种构造该序列的方法。

引理 1（反射律）

折纸序列可定义为$\sigma(2^k) = \text{L}$、 $k\epsilon\text{N}_0$ 和 $\sigma(2^k - d) = \sigma(2^k + d)$ AAAAAAAAAAAAA， $d\epsilon\{1,2, \dots, 2^k - 1\}$，其中$\bar{S}$ 表示与符号$S\epsilon${L, R}相反的符号。

证明

参见 R. Albers，《折纸折叠》[3]，第 3 章

2. 2. 将折纸过程定义为多边形序列

从更几何的角度来看，可以将折叠纸带视为一个多边形，其中折痕构成顶点，纸段构成边。

定义3（折纸多边形序列）

该多边形取决于一个角 α，称为展开角。

Q_n 是一个由2^n+1 个顶点$P_{n,0}$至$P_{n,2^n}$ 及其连接线段组成的多边形

$\overline{P_{n,k}P_{n,k+1}}, k \in \{0,1,2,\dots,2^n-1\}$，交于角 α。（图 3）

Q_0 是从 $P_{0,0}$ 到$P_{0,1}$的直线。

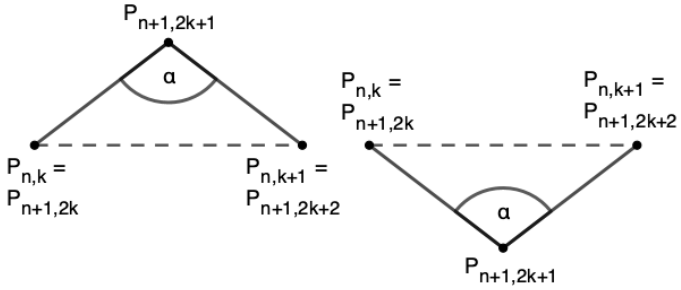


图 3：几何膨胀

Q_{n+1} 由Q_n 按以下方式构造：

a）重新编号顶点 $P_{n,k}$ 至$P_{n+1,2k}$；b）将每条线段 $P_{n,k}P_{n,k+1}$ AAAAAAAAAAAA替换为等腰三角形的两边，使其以$P_{n+1,2k+1}$ 为顶点，夹角为 α。c）将等腰三角形添加到：i. 左侧，形成右转；若 $P_{n,k}P_{n,k+1}$ AAAAAAAAAAAA是从奇数k到偶数k+1；ii. 右侧，形成左转；若 $P_{n,k}P_{n,k+1}$ AAAAAAAAAAAA是从偶数k到奇数k+1。

结论

1. 每个多边形始于 $P_{0,0}$，终于 $P_{0,1}$。
2. 对 Q_n 的这一几何构造符合膨胀律（定义 2）。

定义 4

a) $\beta = \left|\sphericalangle P_{n,k+1}P_{n,k}P_{n+1,2k+1}\right| = \frac{180°-\alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$

b) $q = \frac{|P_{n,k}P_{n+1,2k+1}|}{|P_{n,k}P_{n,k+1}|} = \frac{1}{2cos\beta}$

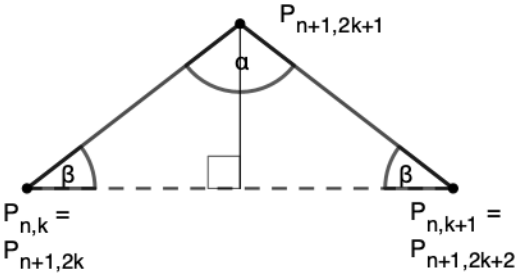


图 4：b 和 q 的定义

利用定义 4 中的参数，现在可以定义两个基本映射。

定义 5

映射 π_0：绕 $P_{0,0}$ 旋转 $-\beta$，再以 $P_{0,0}$ 为中心进行膨胀，比例因子为 q。

映射 π_1：绕 $P_{0,0}$ 旋转 $\beta - 180°$，再以$P_{0,0}$ 为中心进行膨胀，比例因子为 q，然后平移 $P_{0,0}P_{0,1}$⃗。

备注

由于角 $-\beta$ 和 $\beta - 180°$ 均为负值，因此旋转方向为顺时针。

引理 2

多边形序列 Q_n 由以下方式递归生成

$Q_0 = P_{0,0}P_{0,1}$AAAAAAAAA 和 $Q_{n+1} = \pi_0(Q_n) \cup \pi_1(Q_n)$。

证明
关于特殊情况 $\beta = 45°$，请参见 R. Albers，《折纸折叠》[3]，第 8 章。

备注
引理 2 对应于反射律（引理 1）

为了便于进一步分析，为线段设定方向。方向从索引为偶数k 的顶点 P_n指向索引为奇数k的顶点k+1 或k–1。如图 5 所示，交替线段的方向与其前一条线段相反。

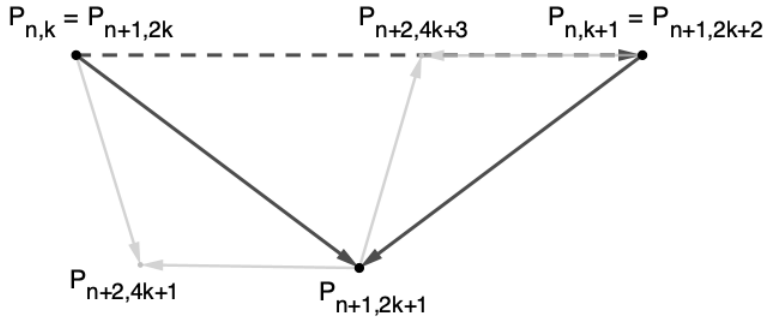


图 5：定向线段（k 为偶数）

引理 3（定向线段）
沿着已确立的线段方向，构造 $Q_{n+1}$from Q_n 中的所有三角形都一致地插入到有向线段的右侧。

证明
这可直接由定义 3 c) 得出，见图 5

预览：避免折纸多边形 Q_n 的交点

本文表明（见命题 3 和定理 1），当展开角为 98.195° ≤ α ≤ 108° 时，折纸多边形 Q_n不会相交。

证明策略依赖于构造一个集合 A_{PF}，该集合包含所有多边形 Q_n 作为子集。如果该集合在映射 π_0 和 π_1 下的像明显分离，

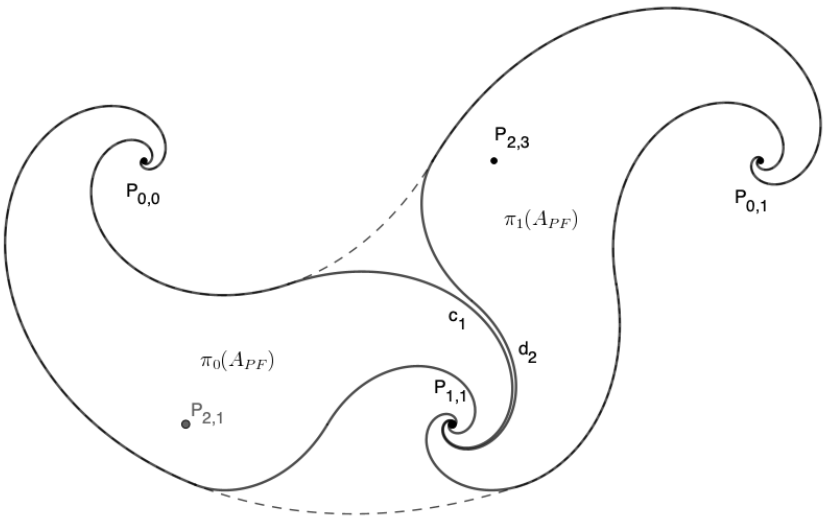


图 6：证明思路

也就是说，$\pi_0(A_{PF}) \cap \pi_1(A_{PF}) = P_{1,\ 1}$，那么折纸多边形中不会出现交点。

完整的形式化证明见引理 10 之后。

3. 直线上的点

引理 4a

设k为奇整数。如果在 $P_{n,\ k}$处左转，那么这三个点 $P_{n,\ k-1}$、$P_{n,\ k}$ = $P_{n+4,\ 16k}$ 和 $P_{n+4,\ 16k+1}$ 共线。（图 7）

证明

由于 k 为奇数，线段 $P_{n,k}P_{n,k+1}$AAAAAAAAAAAA 朝向 $P_{n,k}$。从 Q_n 生成Q_{n+1}的膨胀过程会添加 $P_{n+1,2k}P_{n+1,2k+1}$AAAAAAAAAAAAAAAAAAAA，使其相对于 $P_{n,k}P_{n,k+1}$AAAAAAAAAAAA 旋转 β。后续的膨胀步骤会生成旋转了 $-\beta$ 的线段。因此，$P_{n,k}P_{n,k+1}$ AAAAAAAAAAAA 与 $P_{n+4,16k}P_{n+4,16k+1}$ AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA 之间的角（绝对值）为 2β。由于 $\alpha + 2\beta = 180°$，点 $P_{n,k-1}$、$P_{n,k}$ = $P_{n+4,16k}$ 和 $P_{n+4,16k+1}$ 位于同一直线上。

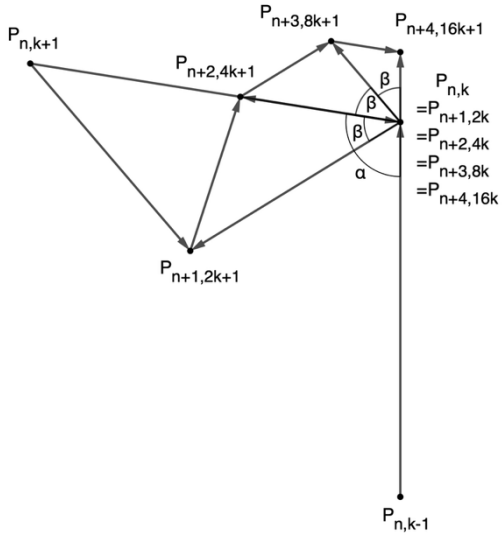


图 7：左转后的新线段

结论

点 $P_{n+4,\ 16k+1}$ 开启了另一次左转（见定义 2）。反复应用这一性质，可得到位于同一直线上的 $P_{n+8,\ 256k+17}$。这一过程可以无限继续。

引理 4b

设k为奇整数。若 $P_{n,k}$处有右转，则三个点 $P_{n,k+1}$、$P_{n,k}$ =$P_{n+4,16k}$ 和 $P_{n+4,16k-1}$ 共线。（图 8）

证明

由于 k 为奇数，线段 $P_{n,k}P_{n,k-1}$ AAAAAAAAAAAA 的方向指向 $P_{n,k}$。从 Q_n 生成Q_{n+1}的膨胀过程会添加 $P_{n+1,2k}P_{n+1,2k-1}$AAAAAAAAAAAAAAAAAAAA，使其相对于 $P_{n,k}P_{n,k-1}$AAAAAAAAAAAA β 旋转。后续膨胀步骤会生成旋转了$-\beta$的线段。因此，$P_{n,k}P_{n,k-1}$AAAAAAAAAAAA 与 $P_{n+4,16k}P_{n+4,16k-1}$ AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA 之间的角（绝对值）为 2β。由于$\alpha + 2\beta = 180°$，点 $P_{n,k+1}$、$P_{n,k}$ =$P_{n+4,16k}$ 和 $P_{n+4,16k-1}$ 位于同一直线上。

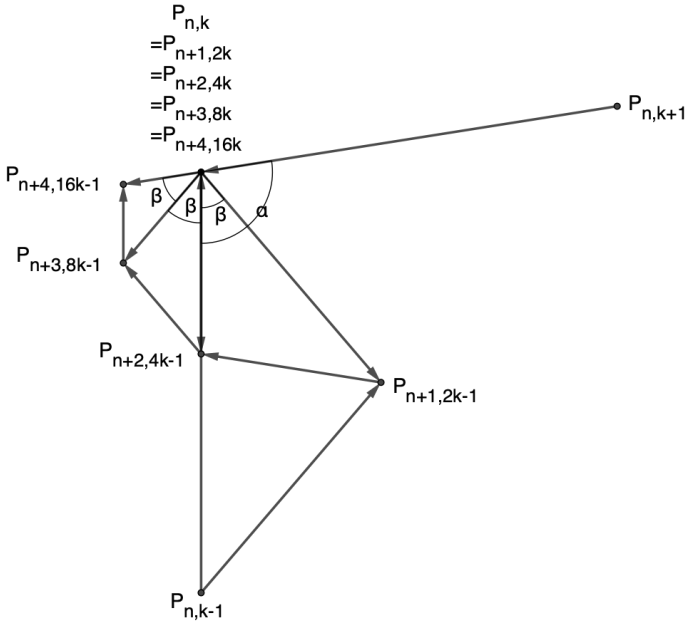


图 8：右转前的新线段

结论

点 $P_{n+4,\ 16k-1}$ 会引发另一次右转（见定义 2）。反复应用这一性质，可得到位于同一直线上的 $P_{n+8,\ 256k-17}$。这一过程可以无限继续下去。

在文章接下来的部分中会大量使用对数螺线。因此，有必要记下若干

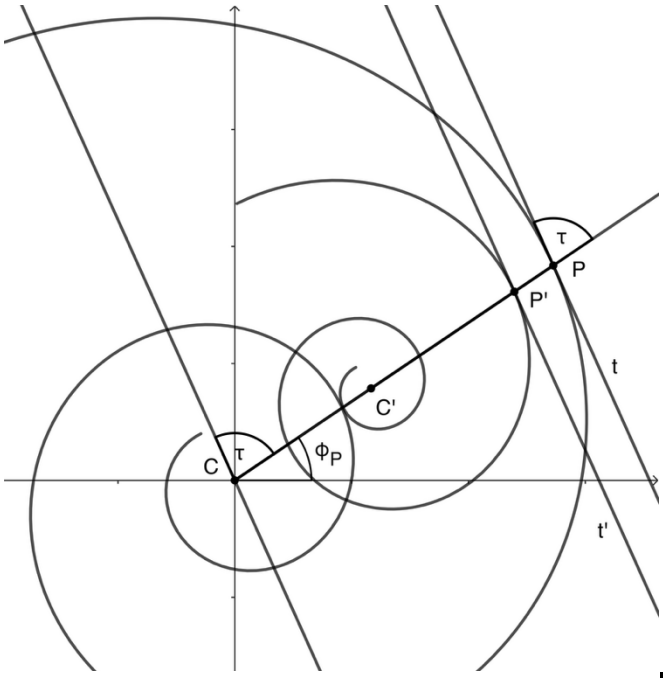
对数螺线的基本性质 在极坐标系中，以原点 C 为中心的对数螺线可表示为

$$r(\varphi) = ab^{\varphi}, a, b > 0$$

对于螺线上的每一点 P，半径 CP 与 P 点处螺线的切线之间的角 τ为常数，其值为

$$\tan(\tau) = \frac{1}{\ln b}$$

由此可知，对于以 C 和 C’ 为中心且底数相同的两条螺线：若 P 和 P’ 分别是两条螺线上的点，且 P、P’ 与 C、C’ 共线，那么两条螺线在 P 和 P’ 处的切线 t 和 t’ 平行。若 P = P’，那么该切线是两条螺线的公切线。



设底数为 $b > 1$，φ_{P} 为从中心 C 起测量的 P 点极角。设 t 为螺线在 P 点处的切线。那么，所有极角为 $\varphi \le \varphi_{\mathrm{P}} + \tau$ 的螺线上的点都位于 t 所在直线的、包含中心 C 的半平面内。

将螺线以中心 C 为中心膨胀s倍，并绕 C 旋转角度 ρ，其表达式将由$r(\varphi) = a\, b^{\varphi}$，$\varphi_{min} \le \varphi \le \varphi_{max}$ 变为 $\tilde{r}(\varphi) = sa\, b^{\varphi-\rho}, \varphi_{min} + \rho \le \varphi \le \varphi_{max} + \rho$

4. 为多边形 Q_n 构造边界

构造 1：到 $P_{0,\ 0}$ 的最大距离

根据引理 4a)，三点 $P_{n,\ k-1}$、$P_{n,\ k}$ =$P_{n+4,\ 16k}$ 和 $P_{n+4,\ 16k+1}$ 共线。经过四个膨胀步骤后，这一模式会重复，并在同一直线上出现更多点。如果 $P_{n,\ k-1}P_{n,\ k}$ 的长度为 L，那么这条直线上连续线段的总长度构成一个几何级数：$L(1 + q^4 + q^8 + q^{12} + \cdots) = L\ 1\ 1-q_4$（$q$ 见定义 4）。

将此应用于 $P_{n,}\overline{_{k-1}P_{n,k}} = \overline{P_{1,0}P_{1,1}}$，存在一条直线，依次经过 $P_{0,0}$、$P_{1,1}$、$P4,_{17}$、$P_{9,273}$、$P_{13,4369}$ .....（见图9）。给定 $XP_{0,0}P_{0,1}X = 1 \Rightarrow XP_{1,0}P_{1,1}X = q$，从 $P_{0,0}$ 经 $P_{1,1}$ 的距离在极限下为 q ’’-@’。

然后将其应用于 $P_{n,\ k-1}\overline{P_{n,\ k}} = \overline{P_{2,\ 0}P_{2,\ 1}}$，并与 $P_{1,\ 0}P_{1,\ 1}$相比，这条线段顺时针旋转 -b，并按q的比例缩放。因此，极限长度变为 $q^2\ \ 1\ \ 1-q_4$。重复这一过程会生成一条螺旋线，作为折纸多边形的外边界

围绕 $P_{0,0}$。在以 $P_{0,0}$ 为原点的极坐标系中，$P_{0,0}P_{0,1}$ 定义了方向，$\varphi = 0$ 这条螺旋线由以下内容给出

$$a_0(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi}{\beta}}, \varphi \le -\beta$$

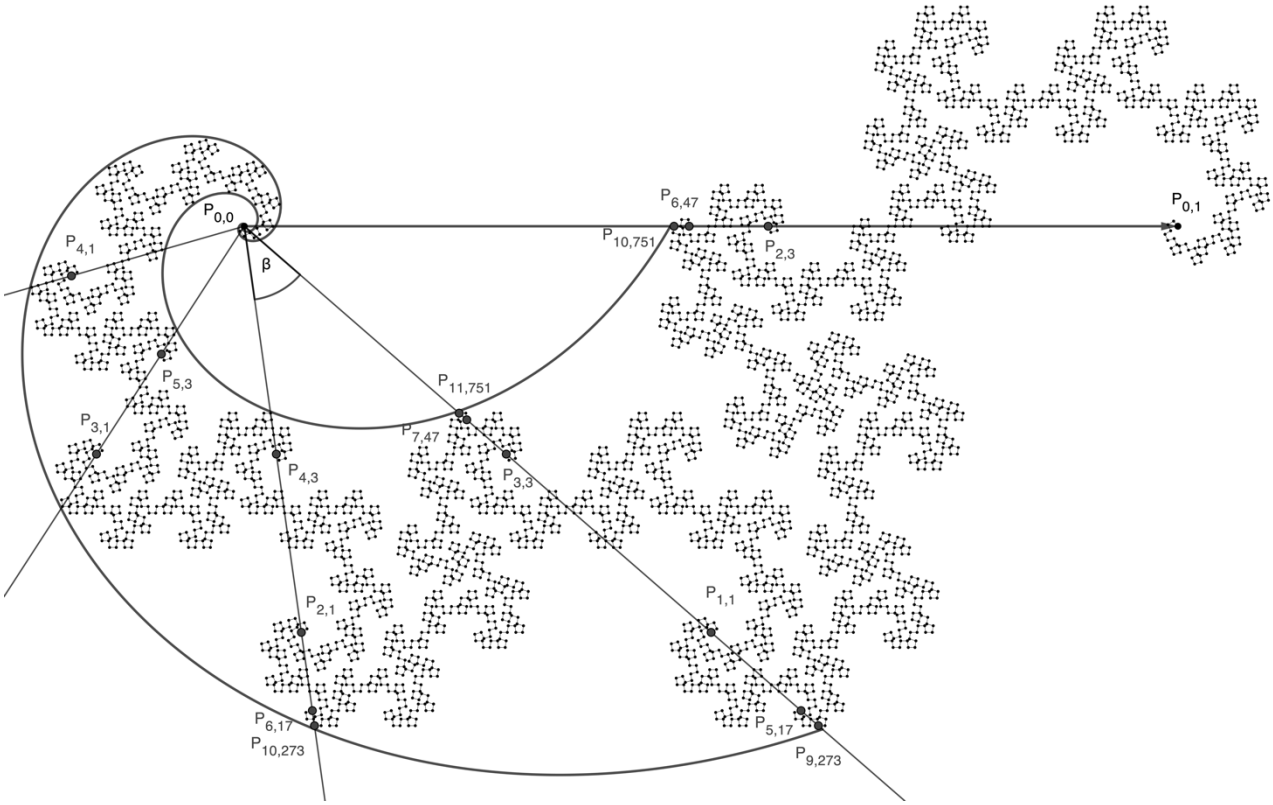


图9：带有外螺旋线和内螺旋线的多边形 Q_{12}，位于 $P_{0,0}$

构造2：到 $P_{0,0}$ 的最小距离

根据引理 4b)，三个点 $P_{n,k+1}$、$P_{n,k}$ 和 $P_{n+4,16k}$ 共线。经过四个膨胀步骤后，这一模式会重复，并在同一直线上出现更多点。如果 $P_{n,k+1}P_{n,k}$ 的长度为L，则这条直线上连续线段的总长度构成一个几何级数：$L(1+q^4+q^8+q^{12}+\cdots) = L\frac{1}{1-q^4}$。

将此应用于 $P_{n,k+1}P_{n,k}$ 和 $P_{2,1}P_{2,3}$（记住 $P_{2,4} = P_{0,1}$），存在一条直线，从 $P_{0,1}$ 到 $P_{2,3}$ 再到 $P_{6,47}$，$P_{10,751}$，……（见图9）。给定 $XP_{0,0}P_{0,1}X = 1 \Rightarrow XP_{2,3}P_{0,1}X = q^2$，其长度在极限情况下为 @&'–@'。由于 $P_{0,0}$ 位于同一直线上，从该极限到 $P_{0,0}$ 的距离为$\left(1-\right.$ @&'–@':。

将此方法应用于 $P_{n,k} = P_{3,3}$ 处的下一个右转。得到 $P_{n,k+1} = P_{3,4} = P_{1,1}$。相对于 $P_{2,4}P_{2,3}$，直线顺时针旋转 -b，所有长度都缩短为原来的 q，从而得到到 $P_{0,0}$ 的最小距离 $q\left(1-q^2\frac{1}{1-q^4}\right.$:。重复这一过程会生成一条螺旋线，它表示折纸多边形到 $P_{0,0}$ 的最小距离。在构造 1 的同一坐标系中，它表示为

$$b_0(\varphi) = \left(1-\frac{q^2}{1-q^4}\right) q^{-\frac{\varphi}{\beta}}, \varphi \le 0$$

构造 3：到 $P_{0,1}$ 的最大距离和最小距离

A根据引理 2，每个多边形 Q_n 都由映射 π_0 和 π生成 1.

由于 $P_{0,\ 1} = \pi_1 w P_{0,\ 0} x$，螺旋线 a_0 和 b_0 经 π_1 变换。

π_1：膨胀 q 倍，旋转 $\beta - 180° = -\alpha - \beta$

$$a_0(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi}{\beta}}, \varphi \le -\beta \xrightarrow{\pi_1} c_0(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi+\alpha}{\beta}}, \varphi \le -180°$$

对于进一步的论证，c_0 的定义域扩展至 $\varphi \le -180° + \beta = -\alpha - \beta$.

$$b_0(\varphi) = \left(1 - \frac{q^2}{1-q^4}\right) q^{-\frac{\varphi}{\beta}}, \varphi \le 0 \xrightarrow{\pi_1} d_0(\varphi) = \left(1 - \frac{q^2}{1-q^4}\right) q^{-\frac{\varphi+\alpha}{\beta}}, \varphi \le -\alpha - \beta$$

T用于 c_0 和 d_0 的底层坐标系的原点平移至 $P_{0,\ 1}$.

构造 4：缩小 a_0 与d_0之间的间隙由于 $P_{1,\ 1} = \pi_1 w P_{0,\ 1} x$，螺旋线 c_0 通过π_1进行变换。π_1：膨胀 q，旋转 $\beta - 180° = -\alpha - \beta c_0(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\varphi + \alpha\beta}$，

$\varphi \le -180°$ $\pi_1 yz$ $e_0(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\varphi + 2\alpha\beta}$， $\varphi \le -360° + \beta$应用参数变换

$\varphi \to \varphi - 360° = \varphi - (2\alpha + 4\beta)$ 得到

$$e_0(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi - 4\beta}{\beta}}, \varphi \le \beta$$

底层坐标系的原点平移至 $P_{1,\ 1}$。

要完整涵盖折纸多边形，只需取螺旋线的一部分，直到它在极角 $-\beta$ 处到达 a_0。因此，φ 的区间限制为 $-\beta \le \varphi \le \beta$。

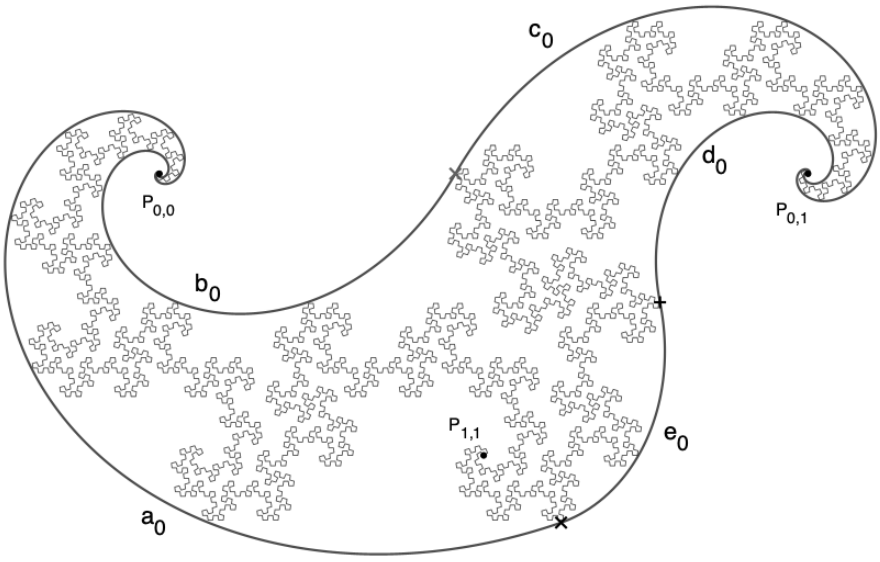


图 10：边界的五个部分

5. 定义一个集合，即折纸多边形的凸包

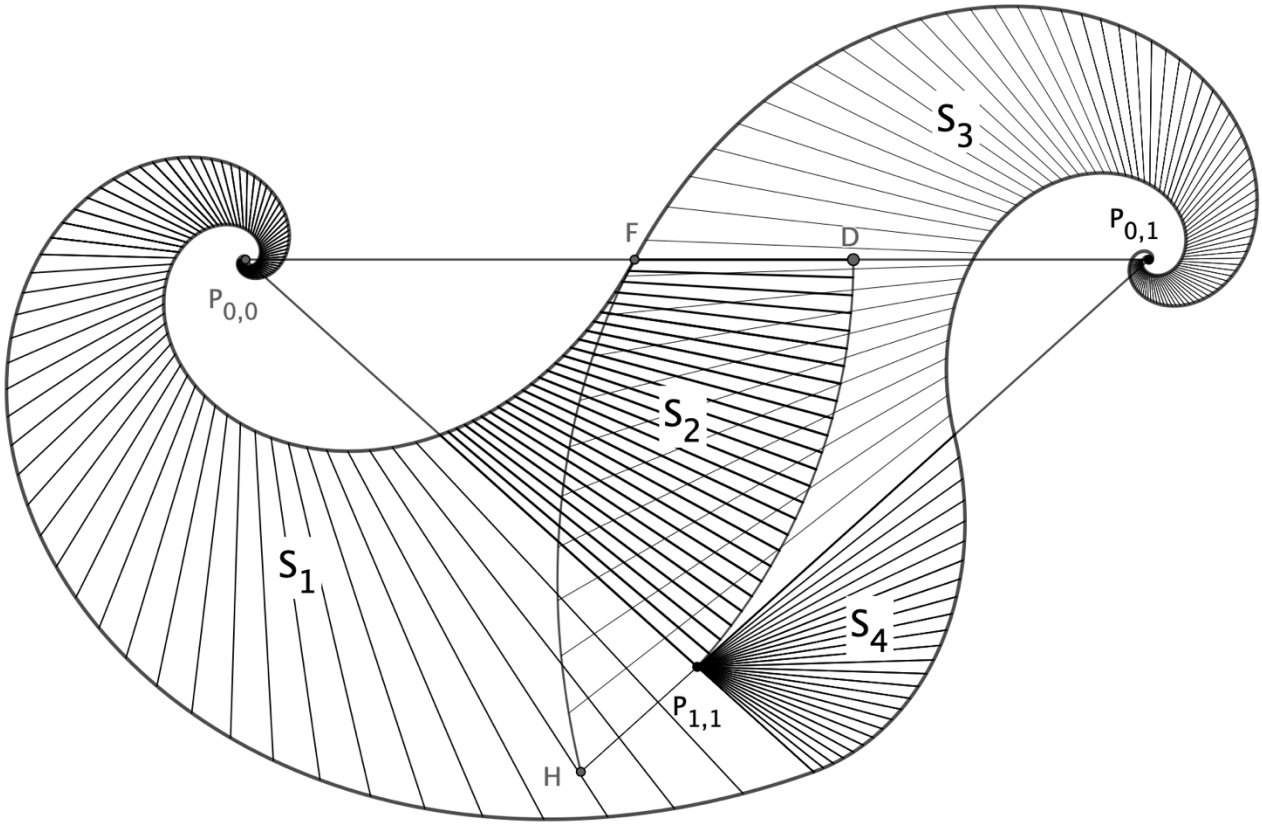


图 11：四个点集

定义 6

a) F 是位于 $P_{0,0}P_{0,1}$ 上的点，其中 $XP_{0,0}FX = b_0(0°) = 1 - q^2 1 - q^4$。

D 是位于 $P_{0,0}P_{0,1}$ 且 $XP_{0,0}DX = q$ 上的点。

H 是位于 c_0 上、极角为 $-\alpha - \beta$ 的点。

b) 对于 $90° \le \alpha \le 108°$（对应于 $45° \ge \beta \ge 36°$，$1\ 2\sqrt{2} \ge q \ge \sqrt{5}-1\ 2$）

由上文构造的包围螺旋线所界定的点集由四部分组成：

w$d_{i,k}$；φx 是某一点的极坐标，$d_{i,k}$是到点 P$_{i,k}$的距离

$S_1 = \{(d_{0,0};\varphi) \in \mathbb{R}^2 |\ b_0(\varphi) \le d_{0,0} \le a_0(\varphi), \varphi \le -\beta\}$

$S_2 = \{(d_{0,0};\varphi) \in \mathbb{R}^2 |\ b_0(\varphi) \le d_{0,0} \le q, -\beta \le \varphi \le 0°\}$

$S_3 = \{(d_{0,1};\varphi) \in \mathbb{R}^2 |\ d_0(\varphi) \le d_{0,1} \le c_0(\varphi), \varphi \le -\alpha - \beta\}$

$S_4 = \{(d_{1,1};\varphi) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \le d_{1,1} \le e_0(\varphi), -\beta \le \varphi \le \beta\}$

Then the total set of points is

$A_{PF} = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$

此集合构成了所有具有固定展开角 a 的折纸多边形 Q_n 的凸包。由于其形状独特，我们将其称为“鸭形包络”，或简称“鸭子”。

引理 5

设 D 和 H 为定义 6 中定义的点（见图 11）。对于 $\sqrt{2} \geq q \geq \sqrt{5}-1$ a) $D \epsilon S_3$。b) $H \epsilon S_1$

证明

a) 当 $d_0(-180°) \leq 1-q \leq c_0(-180°) \Leftrightarrow \left(1-\right.$ @& ’-@’: $q^2 \leq 1-q \leq$ ’ ’-@’ q^2 时，$D \epsilon S_3$ 成立；对于 ’ " $\sqrt{2} \geq q \geq \sqrt{5}-$ ’ "，该结论成立。- b) 当 $a_0(\lambda) \leq$ X$P_{0,0}H$X $\leq b_0(\lambda)$ 时，$H \epsilon S_1$ 成立，其中 λ 是 $P_{0,0}H$的极角。H 由 X$P_{0,1}H$X $= c_0(-\alpha-\beta)$ 定义。在三角形 $P_{0,0}HP_{0,1}$中应用余弦定理可得 X$P_{0,0}H$X $= q^{\sqrt{1-}}$ @2 & @6 ’-@’，且 tan|λ| = G1@& -’ ’-"@’。数值分析表明，对于 ’ " $\sqrt{2} \geq q \geq \sqrt{5}-$ ’ ", arctan $(\sqrt{4q^2}-$ ’ ’-"@’ $)\Big) \leq q$ G’ 0 @2 & @6 ’-@’ $\leq b_0\left(-\arctan\left(\sqrt{4q^2}-\right.\right.$ ’ ’-"@’ $)\Big)$ 成立。

定义 7

A_{PF}的推广

令 π 为映射 π_0 和 π_1 的复合，使得 P$_{n,\ k}$P$_{n,\ k+1}$AAAAAAAAAAAA = πwP$_{0,\ 0}$ P$_{0,\ 1}$AAAAAAAAAx，$k \in \{0,1,2,\ldots,2^n-1\}$。则 A_{PF}wP$_{n,\ k}P_{n,\ k+1}$ AAAAAAAAAAAAx 定义为 A_{PF}wP$_{n,\ k}$P$_{n,\ k+1}$AAAAAAAAAAAAx = $\pi(A_{PF})$。

因此，A_{PF}wP$_{n,\ k}$P$_{n,\ k+1}$AAAAAAAAAAAAx 是 A_{PF} 的缩小副本，取向于线段 P$_{n,\ k}$P$_{n,\ k+1}$ AAAAAAAAAAAA。初始集合 A_{PF} 可写为 A_{PF}wP$_{0,\ 0}$P$_{0,\ 1}$AAAAAAAAAx。

为进一步论证，定义 A_{PF} 的其他子集。

定义 8（见图 12）

a) 点：

A 是直线 $P_{0,\ 0}P_{1,\ 1}$ 与 a_0、X$P_{0,\ 0}A$X $= a_0(-\beta)$ 的交点。

E 是直线 $P_{0,\ 0}P_{1,\ 1}$ 与 a_0、X$P_{0,\ 0}E$X $= a_0(-180° -\beta)$ 的交点。

B 是直线 $P_{0,\ 0}P_{1,\ 1}$ 与 b_0、X$P_{0,\ 0}B$X $= b_0(-\beta)$ 的交点。

C 是直线 $P_{0,\ 1}P_{1,\ 1}$ 与 d_0、X$P_{0,\ 1}C$X $= d_0(-\alpha-\beta)$ 的交点。

b) 直线：

当 X$P_{1,1}B$X =X$P_{1,1}C$X $= \frac{q^3}{1-q^4}$ 存在一条圆弧 $\widehat{BC}$，其中点为 $P_{1,\ 1}$。

t 是在 b_0 B 点处的切线。

e_0' 延伸 e_0 以覆盖从 $-\beta$ 到 $-180°$ 的极角 $-\beta$（中心为 $P_{1,\ 1}$）。

弧 $\widehat{BC}$ 与切线 t 的交点为 G。

c）集合：

$T_1 = \{$w$d_{1,\ 1}$; φx $\in$ R^2| $0 \leq d_{1,\ 1} \leq e_0'(\varphi)$, $-\beta \geq \varphi \geq -180° -\beta\}$

T_2 是由弧$\widehat{CG}$（中心$P_{1,\ 1}$，半径q_3 $_{1-q_4}$）、线段GB、线段$BP_{1,\ 1}$和线段$P_{1,\ 1}C$所围成的点集。

因此，T_2 中的每个点的极角φ 到$P_{1,\ 1}$ 满足$-180° -\beta \geq \varphi \geq -180° -\beta-\alpha$。

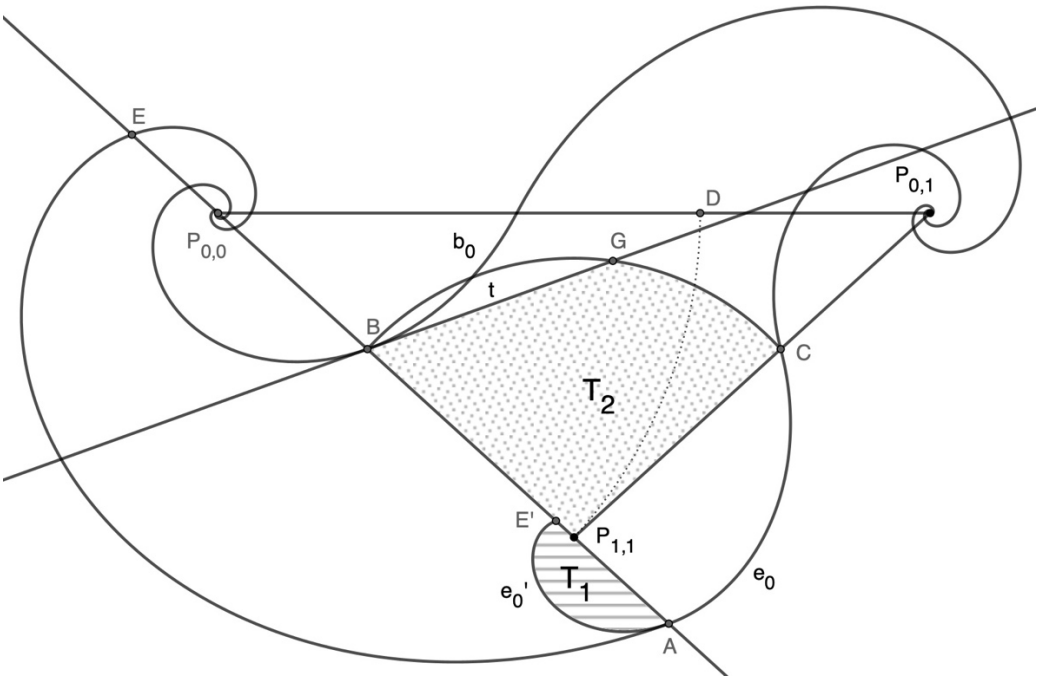


图 12：A_{PF}的子集

引理 6

对于$90° \leq \alpha \leq 108°$, $\frac{1}{2}\sqrt{2} \geq q \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$（见图13）

a) 弧 $\widehat{BC} \cap \overline{P_{0,0}P_{0,1}} = \emptyset$ b) 点G是弧 $\widehat{BC}$ 上的一个内点。

证明

a) 弧 $\widehat{BC}$ 的半径为$\frac{q^3}{1-q^4}$, $P_{1,1}$ 到 $P_{0,0}P_{0,1}$ 的距离为 $q\sin\beta = q\sqrt{1-\frac{1}{4}q^2}$。条件$\frac{q^3}{1-q^4} < q\sqrt{1-\frac{1}{4}q^2}$可简化为$\overline{1-4q}^2 - 2q^4 + 12q^6 + q^8 - 4q^{10} < 0$, 这对 0.724 $\geq q \geq$ 0.524 均成立。

b) τ 是螺旋线的切线与射线 $\overrightarrow{P_{0,0}B}$之间的角。因此, $\tan\tau = -\beta\ln q = \beta\ln(2\cos\beta)$ G 位于 C 和 B 之间等价于 $\tau > \beta$。这可变换为$\beta\ln(2\cos\beta) > \tan\beta$。这对所有 $0° < \beta < 45°$ 均成立

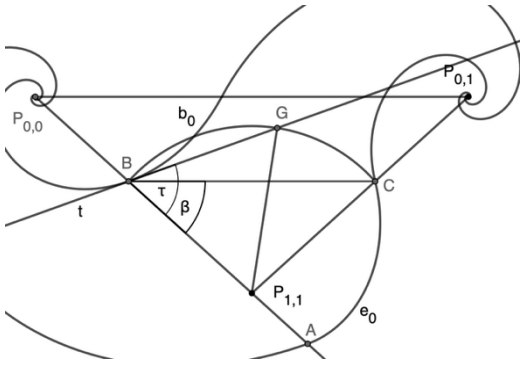


图13：角 τ 和点G

引理7

a) $T_1 \subset S_1 \subset A_{PF}$ b) $T_2 \subset (S_2 \cup S_3) \subset A_{PF}$

证明（见图 12）

a) 设由螺旋弧 $\widehat{AE}$ 和线段 EA 围成的面积为 $T_1{}^*$。以 A 为中心、缩放因子为 q^4 的膨胀将 $T_1{}^*$ 映射到 T_1，因为：

$|AP_{0,0}| = a_0(-\beta) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\beta}{\beta}} = \frac{1}{1-q^4} q$　$|AP_{1,1}| = e_0(-\beta) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\beta-4\beta}{\beta}} = \frac{1}{1-q^4} q^5$

因此，中心 $P_{0,\ 0}$ 被映射到中心 $P_{1,\ 1}$。

$|P_{0,0}P| = a_0(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi}{\beta}}$　$|P_{1,1}P'| = e_0{}'(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi-4\beta}{\beta}} = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi}{\beta}} q^4$

因此，a_0 上的每个点 P 都映射到 $e_0{}'$上的一个点 P'。$T_1{}^*$ 是凸的，且$A \epsilon T_1{}^*$，因此 $T_1 \subset T_1{}^*$。现在需要证明，对于T_1 上的所有点，到$P_{0,0}$ 的距离都大于b_0 上对应点到$P_{0,0}$ 的距离。设 P 是T_1上的一个点。应用三角不等式：$XP_{0,0}PX \geq XP_{0,0}P_{1,1}X - XP_{1,1}PX \geq q - XP_{1,1}AX = q - \frac{1}{1-q^4} q^5 \max(b_0(\varphi): -\beta \geq \varphi \geq -180° - \beta) = b_0(-\beta) = \left(1 - \frac{q^3}{1-q^4}\right) q = q - \frac{1}{1-q^4} q^3$因此，$XP_{0,0}PX \geq \max(b_0(\varphi): -\beta \geq \varphi \geq -180° - \beta)$，这意味着$T_1 \subset S_1$。

□

b) 设 $P \epsilon T_2$情况1：$XP_{0,0}PX \leq q$ S_2 的定义直接得出 $P \epsilon S_2$。情况2：$XP_{0,0}PX > qT_2$ 的定义得出 $XP_{1,1}PX \leq$ @('-@'。现在需要证明，对于 P 到 $P_{0,1}$ 的距离，大于或等于 d_0 上相应点到 $P_{0,1}$的距离。应用三角不等式：$XPP_{0,1}X \geq XP_{1,1}P_{0,1}X - XP_{1,1}PX \geq q - \frac{q^3}{1-q^4}$

$\max(d_0(\varphi): -180° + \beta \geq \varphi \geq -180°) = d_0(-180° + \beta) = q - \frac{q^3}{1-q^4}$因此，$XPP_{0,1}X \geq \max(d_0(\varphi): -180° + \beta \geq \varphi \geq -180°)$，由此可得 $P \epsilon S_3$。

□

命题1 a) $\pi_0(A_{PF})$ $\subset A_{PF}$ b) $\pi_1(A_{PF})$ $\subset A_{PF}$

证明 a)

由于 π_0 保持比值不变，只需考察包围螺旋线的映射。

π_0：以 $P_{0,0}$ 为中心，进行比例因子为 q 的膨胀和角度为 $-\beta$ 的旋转

点：$P_{0,0} \to P_{0,0}$　$P_{0,1} \to P_{1,1}$　$P_{1,1} \to P_{2,1}$

螺旋线：

$a_0(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi}{\beta}}, \varphi \leq -\beta$, center $P_{0,0}$

$\to\ a_1(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi}{\beta}}, \varphi \leq -2\beta$, center $P_{0,0}$

$b_0(\varphi) = 1 - \frac{q^2}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi}{\beta}}$, $\varphi \leq 0$, 中心 $P_{0,0}$

$\to\ b_1(\varphi) = \left(1 - \frac{q^2}{1-q^4}\right) q^{-\frac{\varphi}{\beta}}, \varphi \leq -\beta$, center $P_{0,0}$

$c_0(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi}{\pm\alpha\beta}}$, $\varphi \le -180°$, 中心 $P_{0,1}$

$$\rightarrow \quad c_1(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi+\alpha}{\beta}}, \varphi \le -180° - \beta \text{ , center } P_{1,1}$$

$d_0(\varphi) = u1 - \frac{q^2}{1-q^4} v\ q^{-\frac{\varphi}{E\text{和}}}$, $\varphi \le -\alpha - \beta$, 中心 $P_{0,1}$

$$\rightarrow \quad d_1(\varphi) = \left(1 - \frac{q^2}{1-q^4}\right) q^{-\frac{\varphi+\alpha}{\beta}}, \varphi \le -180° \text{ , center } P_{1,1}$$

$e_0(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi-4}{\beta\beta}}$, $-\beta \le \varphi \le \beta$, 中心 $P_{1,1}$

$$\rightarrow \quad e_1(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi-4\beta}{\beta}}, \quad -2\beta \le \varphi \le 0° \text{ , center } P_{2,1}$$

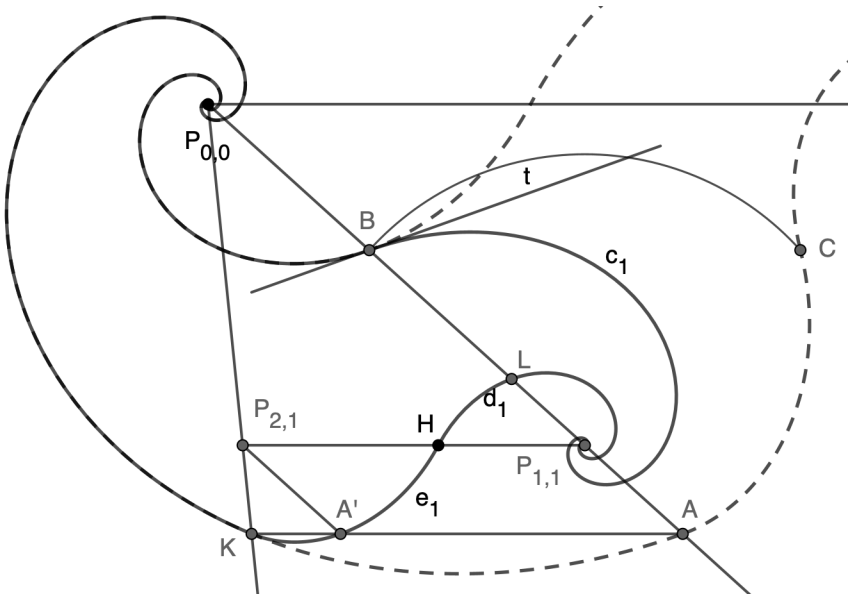


图14：$\pi_0(A_{PF})$

以q为比例的膨胀和$-\beta$ 所表示的旋转相互抵消。螺旋线仅平移到了不同的中心，且φ 的区间也作了修改。

a_0 和b_0 映射到它们自身。

c_1 在 B 点与b_0 相切，公切线为 t。 $|P_{0,0}B| = b_0(-\beta) = 1\left(-\frac{q^2}{1-q^4}\right)$

$qXBP_{1,1}X = c_1(-180° - \beta) = ''-@'q^{-})\%,-°)*\$/* = ''-@'q^3$, 从而得到 $XP_{0,0}BX + XBP_{1,1}X = q$. 对于 $-180° - \beta \ge \varphi \ge -180° - \beta - \alpha$ c_1 是T_2 的子集，因为$c_1(\varphi) \le XBP_{1,1}X = ''-@'q^3$ 且c_1 与 $P_{1,1}$ 位于直线 t 的同一半平面内。对于 $-180° - \beta - \alpha = -360° + \beta \ge \varphi \ge -360° - \beta$ c_1 是S_4 的子集，因为对于 $-360° - \beta \ge \varphi \ge -540° - \beta$ c_1 是 T_1 的子集，因为

$$c_1(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi+\alpha}{\beta}} \le e_0(\varphi + 360°) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi+360°-4\beta}{\beta}} = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi+2\alpha}{\beta}}$$

$$c_1(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi+\alpha}{\beta}} \le e_0'(\varphi + 360°) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi+2\alpha}{\beta}}$$

对于 $-540° - \beta \ge \varphi$ ，论证过程在半径收缩后重复进行。

对于 $-180° \geq \varphi \geq -180°$，$-\beta$ d_1 是 S_1 的子集，如下所示：

d_1 与 $P_{0,0}$ 位于相对于 $P_{2,1}P_{1,1}$的同一半平面内，因此只需检验到 b_0 的距离。设 P 是 d_1上的一点。应用三角不等式：

$$\left|PP_{0,0}\right| \geq \left|P_{1,1}P_{0,0}\right| - \left|P_{1,1}P\right| \geq q - d_1(-180°) = q - \left(1 - \frac{q^2}{1-q^4}\right) q^{\frac{180°-\alpha}{\beta}} = q - \left(1 - \frac{q^2}{1-q^4}\right) q^2$$

直线 $PP_{0,0}$ 的极角介于 $-\beta$ 与 -2β之间。

在此定义域中，$b_0(\varphi) \leq \left(1 - \frac{q^2}{1-q^4}\right) q$。数值分析表明，

$b_0(\varphi) \leq \left(1 - \frac{q^2}{1-q^4}\right) q \leq q - \left(1 - \frac{q^2}{1-q^4}\right) q^2 \leq XPP_{0,0}X$ 对 $q > 0.57$ 成立，对应于 $\alpha \leq 122°$。

对于 $-180°$，$-\beta \geq \varphi$ d_1 是 $T_2 \cup S_4 \cup T_1$ 的子集，因为

$$d_1(\varphi) = \left(1 - \frac{q^2}{1-q^4}\right) q^{-\frac{\varphi+\alpha}{\beta}} \leq c_1(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi+\alpha}{\beta}}$$

e_1:

设 K 和 A 是 $P_{0,0}P_{2,1}$ 与 $P_{0,0}P_{1,1}$ 和 a_0的交点。直线 KA 与 e_1 相交于 A'。以 K 为中心、q^4 为膨胀因子的膨胀，将螺旋弧 $\widehat{KA}$ （a_0的一部分）映射到 $\widehat{KA'}$ （e_1的一部分）：

$$\left|KP_{0,0}\right| = a_0(-2\beta) = \frac{1}{1-q^4} q^2 \xrightarrow{dilation} \left|KP_{0,0}\right| q^4 = \frac{1}{1-q^4} q^6 = e_1(-2\beta) = \left|KP_{2,1}\right|$$

因此，$P_{0,0}$，a_0 的中心映射到$P_{2,1}$，即 e_1的中心。

$$a_0(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi}{\beta}} \xrightarrow{dilation} \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi}{\beta}} q^4 = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi-4\beta}{\beta}} = e_1(\varphi)$$

因此，螺旋弧 $\widehat{KA}$上的每个点都映射到 $\widehat{KA'}$ 上的一个点。

设T_4 为由弧$\widehat{KA}$ 和线段KA围成的面积。T_4 是凸集，且是S_1的子集。由于$K \epsilon T_4$，像弧 $\widehat{KA'}$ 是T_4的子集。

$$\text{So, } \widehat{KA'} = \left\{ \left(d_{2,1}; \varphi\right) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, d_{2,1} = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi+4\beta}{\beta}}, -2\beta \geq \varphi \geq -\beta \right\}$$

设 P 是剩余螺旋弧$\widehat{HA'}$ 上的一点。那么

i. P 的极角φ：$-\beta \leq \varphi \leq 0°$。ii. 到$P_{2,1}$的距离：$XP_{2,1}PX \leq XP_{2,1}H X = e_1(0°) = \frac{1}{1-q^4} q^4 < q^2 = XP_{2,1}P_{1,1}X$，对于$q \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$成立。

iii. 相对于 A 处e_1 的切线，P 位于包含 $P_{2,1}$的那个半平面内。

由这三个性质可知，螺旋弧 $\widehat{HA'}$ 是平行四边形 $P_{1,1}P_{2,1}A'A \subset S_1$ 的子集（关于 $P_{2,1}P_{1,1} \subset S_1$，参见引理 9）。

Therefore, $\pi_0(A_{PF}) \subset A_{PF}$. □

证明 b)

由于 π_1 保持比值，只需考察包围螺旋线的映射。π_1：以 $P_{0,0}$为中心进行比率为q的膨胀和旋转 $\beta - 180°$，再平移 $P_{0,0}P_{0,1}$。

点：$P_{0,0} \to P_{0,1}$ $P_{0,1} \to P_{1,1}$ $P_{1,1} \to P_{2,3}$

螺旋线:

$a_0(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi}{\beta}}, \varphi \le -\beta$, center $P_{0,0}$

$$\rightarrow \quad a_2(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi}{+\alpha\beta}}, \quad \varphi \le -180°, \text{ 中心 } P_0$$

,1

$b_0(\varphi) = \mathrm{u1} - \frac{q^2}{1-q^4} \mathrm{v}\ q^{-\frac{\varphi}{\beta}}, \quad \varphi \le 0$ ， 中心 $P_{0,0}$

$$\rightarrow \quad b_2(\varphi) = \left(1 - \frac{q^2}{1-q^4}\right) q^{-\frac{\varphi+\alpha}{\beta}}, \varphi \le -\alpha - \beta, \text{center } P_{0,1}$$

$c_0(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi}{\pm\alpha\beta}}, \quad \varphi \le -180°$， 中心 $P_{0,1}$

$$\rightarrow \quad c_2(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi+2\alpha}{\beta}}, \varphi \le \beta - 360°, \text{center } P_{1,1}$$

$d_0(\varphi) = \mathrm{u1} - \frac{q^2}{1-q^4} \mathrm{v}\ q^{-\frac{\varphi}{+\alpha\beta}}, \quad \varphi \le -\alpha - \beta$， 中心 $P_{0,1}$

$$\rightarrow \quad d_2(\varphi) = \left(1 - \frac{q^2}{1-q^4}\right) q^{-\frac{\varphi+2\alpha}{\beta}}, \varphi \le -\alpha - 180°, \text{center } P_{1,1}$$

$e_0(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi-4}{-\beta\beta}}, \quad -\beta \le \varphi \le \beta$ ， 中心 $P_{1,1}$

$$\rightarrow \quad e_2(\varphi) = \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi+\alpha-4\beta}{\beta}}, \quad -180° \le \varphi \le -\alpha, \text{center } P_{2,3}$$

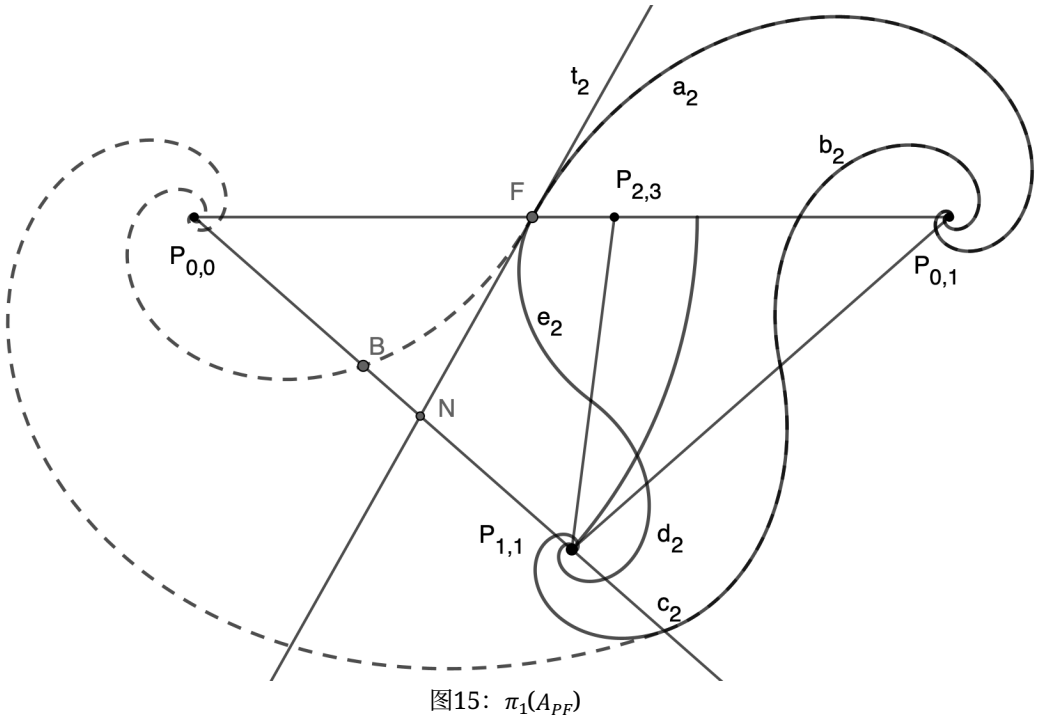


图15：$\pi_1(A_{PF})$

a_2 映射到c_0， b_2 映射到d_0 （参见构造 3）。

对于 $\beta \ge \varphi \ge -\beta$， c_2 被映射到e_0 （见构造 4），其中c_2（φ） $= e_0$（$\varphi + 360°$）。对于 $-\beta \ge \varphi \ge -180°$， $-\beta$ c_2 是T_1的子集。对于 $-180°$， $-\beta \ge \varphi$ c_2 是$T_2 \cup S_4 \cup T_1$ 的子集（类似于部分a中的c_1 ）。

对于 $-180° - \alpha \geq \varphi \geq -360° + \beta$， d_2 是T_2 的子集，因为
$d_2(\varphi) \leq d_2(-180° - \alpha) = \left(1 - q_2\ 1\underline{-q_4}: q^2 \leq q_3\ 1\underline{-q_4}\ .\right.$

数值分析表明，这对于 $q > 0.57$（对应于 $\alpha \leq 122°$）成立。
对于 $-360°$， $+\beta \geq \varphi$ d_2 是$T_2 \cup S_4 \cup T_1$的子集，因为 $d_2(\varphi) \leq c_2(\varphi)$。

e_2 与b_0 相切于 F，因为 $XP_{0,0}FX = b_0(0°) = 1 - \underline{@\&}$ '-@' $XFP_{2,3}X = e_2(-180°)$
$= q$ ' '-@' q^5, $XP_{2,3}P_{0,1}X \underline{= q^2}$ 以及 $XP_{0,0}FX + XFP_{2,3}X + XP_{2,3}P_{0,1}X = 1$。

e_2 的所有点都位于四边形 $P_{1,1}P_{2,3}FN$ 内；当 $90° \leq \alpha \leq 108°$ 时，它是S_2 的子集。

Therefore, $\pi_1(A_{PF}) \subset A_{PF}$. □

这两个映射合起来得到

$$\pi_0(A_{PF}) \cup \pi_1(A_{PF}) \subset A_{PF}$$

<u>推论 1（适</u>用于广义 A_{PF}）

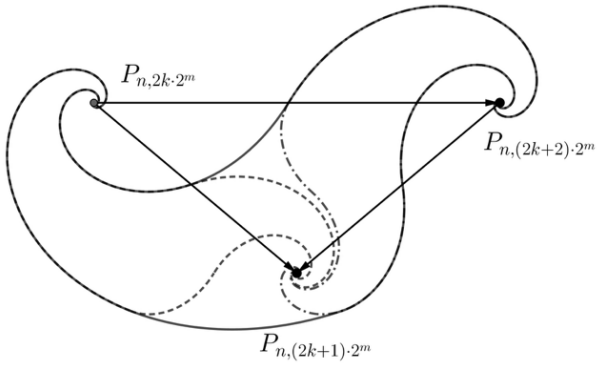


图 16：广义 A_{PF} 由 π_0 和 π_1 映射

$A_{PF}\left(\overline{P_{n,2k\cdot 2^m}P_{n,(2k+1)\cdot 2^m}}\right) \subset A_{PF}\left(\overline{P_{n,2k\cdot 2^m}P_{n,(2k+2)\cdot 2^m}}\right)$
$A_{PF}\left(\overline{P_{n,(2k+2)\cdot 2^m}P_{n,(2k+1)\cdot 2^m}}\right) \subset A_{PF}\left(\overline{P_{n,2k\cdot 2^m}P_{n,(2k+2)\cdot 2^m}}\right)$
$k, m, n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq 1$, $0 \leq m \leq n-1$, $0 \leq k \leq 2^{n-m-1} - 1$

6. 折纸折叠多边形 Q_n 是 A_{PF} 的子集

或者简单地说：所有龙都在鸭子里面。

<u>命题 2</u>

$$Q_n \backslash \left(\overline{P_{n,0}P_{n,1}} \cup \overline{P_{n,2^n-1}P_{n,2^n}}\right) \subset A_{PF}\ , n \in \mathbb{N}_0$$

证明分为两部分。首先，折纸多边形的所有顶点都是A_{PF} 的元素（引理 8）；其次，除第一条 $P_{n,0}P_{n,1}$ 和最后一条 $P_{n,2^n-1}P_{n,2^n}$以外的所有线段都是 A_{PF} 的子集（引理 10）。

引理 8

对于所有折纸折叠 折纸多边形 $Q_n, n \in \mathrm{N}_0$ 的顶点 $\mathrm{P}_{n,\ k}, k\epsilon\{0,1,2, \ldots, 2^n\}$ 是 A_P 的元素 $_F$.

证明（用数学归纳法）基础步骤：$\mathrm{P}_{0,\ 0}$、$\mathrm{P}_{0,\ 1}$ 和 $\mathrm{P}_{1,\ 1}$ 都是 A_{PF} 的元素。归纳步骤：设 $\mathrm{P}_{n,\ k}$ 是 A_{PF} 的一个元素。那么 $\pi_0\mathrm{w}\mathrm{P}_{n,\ k}\mathrm{x} \in \pi_0(A_{PF}) \subset A_{PF}$ 和 $\pi_1\mathrm{w}\mathrm{P}_{n,\ k}\mathrm{x} \in \pi_1(A_{PF}) \subset A_{PF}$。折纸多边形 Q_n、$n \geq 2$ 的所有顶点，均可通过对 $\mathrm{P}_{1,\ 1}$ 进行 π_0 和 π_1 的迭代应用得到。

关于线段：与 $\mathrm{P}_{1,\ 1}$ 相连的线段比较特殊，因为它们是某些线段在 π_0或 π_1下的像，而这些线段以 $\mathrm{P}_{0,\ 1}$ 为端点，且不属于 A_{PF}。

引理 9

对于 $90° \leq \alpha \leq 108°$，所有线段 $\overline{\mathrm{P}_{n,\ 2^{n-1}-1}\mathrm{P}_{n,\ 2^{n-1}}}$ 和 $\overline{\mathrm{P}_{n,\ 2^{n-1}}\mathrm{P}_{n,\ 2^{n-1}+1}}$，$n \geq 2$ 都是 A_{PF} 的子集。这些是所有以 $\mathrm{P}_{1,\ 1}$ =$\mathrm{P}_{n,\ 2^{n-1}}$为起点或终点的线段。

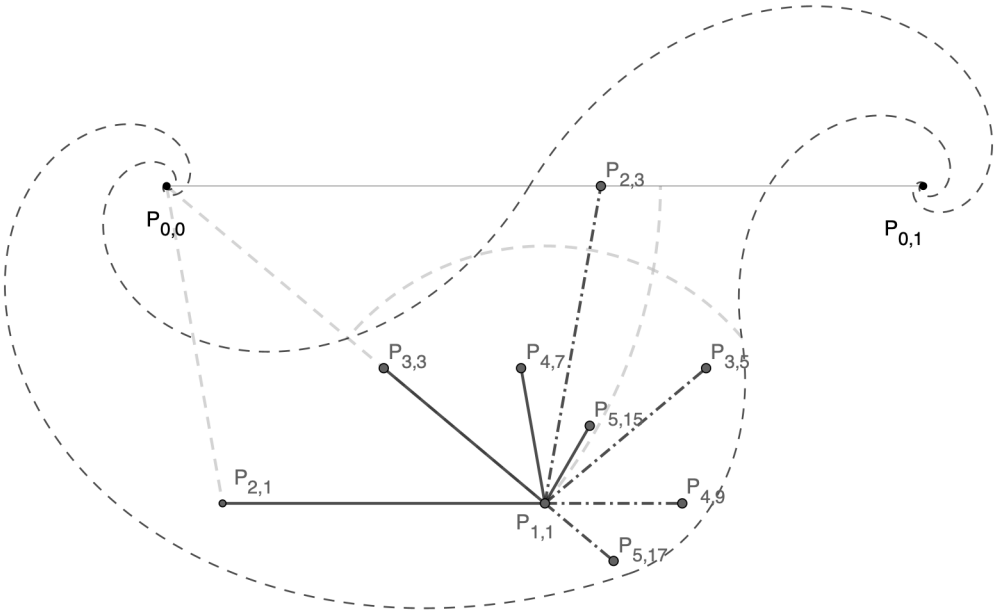


图 17：连接到 P1,1 的一些线段

关于 $P_{n,\ \overline{2^{n-1}-1}P_{n,\ 2^{n-1}}}$的证明，$n \geq 2$ 相对于 $P_{1,\ 1}$ 点 $P_{n,\ 2^{n-1}-1}$的极角为 $\varphi_n = -180° - (n-2)\beta$ ，距离为 $r_n = q^n$ 。

$n = 2$ 关于 $P_{2,\ 1}\overline{P_{2,\ 2}}$的证明。设 P 是 $P_{2,\ 1}P_{2,\ 2}$上的一点。根据三角形 $P\overline{P_{2,\ 2}P_{0,\ 0}}$ 中的正弦定理（图18）

$$\left|P_{0,0}P\right| = s(\varphi) = \frac{q\ \sin(\beta)}{\sin\left(180° - |\varphi|\right)} = \frac{q\ \sin(\beta)}{-\sin\left(\varphi\right)}$$

线段 $P_{2、}\overline{{}_{1}P_{2、\ 2}}$是 A_{PF} 的子集，
如果 $b_0(\varphi) < s(\varphi) < a_0(\varphi)$ 对于 $-2\beta \leq \varphi \leq -\beta$

$s(-\beta) = q < a_0(-\beta) = \frac{1}{1-q^4}q$

$s(-2\beta) = q^2 < a_0(-2\beta) = \frac{1}{1-q^4}q^2$

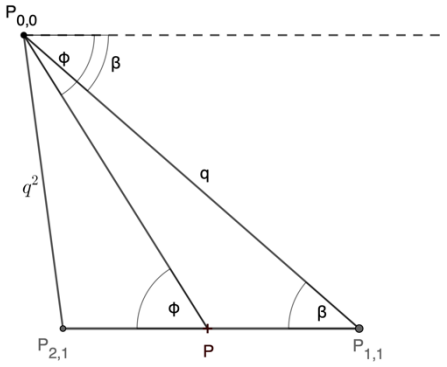


图18：线段$P_{2、\ 1}P_{2、\ 2}$（注：$\overline{P_{2、\ 2}} = P_{1、\ 1}$）

由于 $a_0(\varphi)$ 构成 A_{PF} 的凸子集（关于 P_0 $_0$），$s(\varphi) < a_0(\varphi)$，适用于$-2\beta \leq \varphi \leq -\beta$。
对于$-2\beta \leq \varphi \leq -\beta$，有$max\{b_0(\varphi)\} = b_0(-\beta) = \left(1 - q_{2\ 1-}\underline{q_4 : q}\right.$

并且$min\{s(\varphi)\} = s(-2\beta) = q^2$。
条件$max\{b_0(\varphi)\} < min\{s(\varphi)\} \Leftrightarrow \left(1 - q_{2\ 1-}q_4 : q \leq \underline{q^2}\right. \Leftrightarrow 1 - q - q^2 - q^4 + q^5 < 0$

数值分析表明，不等式对 $0.6 < q < 1$ 成立。
这适用于 $90° \leq \alpha \leq 108°$。

$n = 3$ 证明：$P_{3,\ }\overline{{}_{3}P_{3,\ 1}}P_{0,\ 0}$、$P_{3,\ 3}$ 和 $P_{3,\ 1}$共线（见图 17），且 $b_0(-\beta) = \left(1 - q_{2\ 1-}\right.$ $q_4 : \ q < q - q^3 < q$

$4 \leq n \leq 5$ $-180° - \beta \geq \varphi_n \geq -180° - \beta - \alpha$ 以及 $r_n \leq \frac{q^3}{1-q^4}$.
因此 P_n $\overline{{}_{,2!)\%-1}P_{n\ ,2!)\%}} \subset T_2$

$6 \leq n \leq \frac{\text{B2\$°}}{\beta} + 1$ $-360° + \beta \geq \varphi_n \geq -540° - \beta$ 和 $r_n \leq e_0(\varphi_n + 360°) = \frac{q^4}{1-q^4}q^{-\frac{\varphi_n}{\beta}}$。
因此 P_n $\overline{{}_{,2!)\%-1}P_{n\ ,2n-1}} \subset S_4 \cup T_1$

~~360°~~ $\beta + 1 < n$ 该论证对于更小的半径 r_n 重复。

$P_{n、\ 2^{n-1}}\overline{P_{n、\ 2^{n-1}+1}}$的证明，$n \geq 2$ 相对于$P_{1,\ 1}$ 点$P_{n、\ 2^{n-1}+1}$的极角为$\varphi_n = -360° - (n-4)\beta$，距离为$r_n = q^n$。

$n = 2$ 证明（对于 $\overline{P_{2,2}P_{2,3}}$）$90° \leq \alpha \leq 108°$ 得出 $1 - q^2 \leq q$，因此对于线段 $P_{2,2}P_{2,3}$ 上的所有点 P，不等式 $XP_{0,0}\overline{PX} \leq q$ 均成立。设 F 为从 $P_{0,0}$ 到直线 $P_{2,2}P_{2,3}$ 的垂足。当 $90° < \alpha < 120°$ 时，F 是 $P_{2,2}$ $P_{2,3}$ 上的内点，且 $XP_{0,0}FX$ 是从 $P_{0,0}$ 到 $P_{2,2}P_{2,3}$ 的最小距离。$XP_{0,0}FX = q \cdot sin(\alpha - \beta) =$ G1@& –’ " @& $(\overline{1 - q^2})$

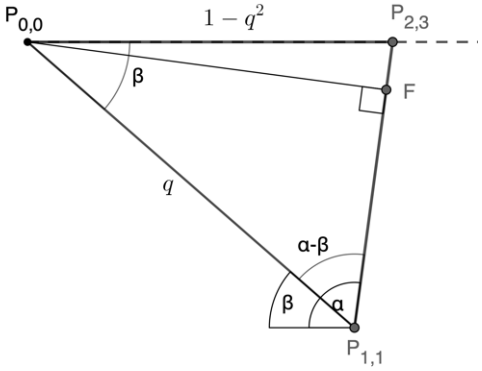


图19：线段$P_{2、\ 2}P_{2、\ 3}$（注：$\overline{P_{2、\ 2}} = P_{1、\ 1}$）

$max\{b_0(\varphi)\colon -\beta \le \varphi \le 0°\} = b_0(0°) = \left(1 - @\&\ '\text{-}@':.\right.$ 条件 XP0,0FX $> max\{b_0(\varphi)\}$ 等价于 G1@& –' "@& $(1-q^2) > \left(1 - @\&\ '\text{-}@':\right.$，并可转化为 $-4q^2 - 1\,(1 - q^2 - q^4 + q^6) - 2($ $q^2 - q^4 - q^6) > 0$。数值分析表明，这在 $q > 0.599$ 时成立，对应于 $\alpha \le 113°$。因此，P2,2 P2,3 ⊂ S_2 for ' " $\sqrt{2} \ge q \ge$ $^{\sqrt{5}}$–' "。

$3 \le n \le 5 + \frac{180°}{\beta}$ $\quad -360° + \beta \ge \varphi_n \ge -540° - \beta$ and $r_n \le e_0(\varphi_n + 360°) = \frac{q^4}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi_n}{\beta}}$.

Therefore, $\overline{P_{n,2^{n-1}} P_{n,2^{n-1}+1}} \subset S_4 \cup T_1$

$5 + \frac{180°}{\beta} \le n \le 5 + \frac{180°+\alpha}{\beta}$ $-540° - \beta \ge \varphi_n \ge -540° - \beta - \alpha$ 和 $r_n \le q_3$ 1 $-q_4$。因此，$P_{n,2^{n-1}} P_{n,2^{n-1}+1} \subset T_2 5 + \frac{180°+\alpha}{\beta} < n$ 该论证在更小的半径 r_n 下重复。

引理 10

对于所有折纸多边形 $Q_n, n \in \mathrm{N}$，$n \ge 2$ 线段 $P_{n,k}P_{n,k+1}$，$k \epsilon \{1,2, \dots, 2^n - 2\}$ 都是 A_{PF} 的子集。

备注

这些线段 $P_{n,0}P_{n,1}$（第一条线段）和 $P_{n,2^n-1}P_{n,2^n}$（最后一条线段）被排除在外。

证明（用数学归纳法）基础步骤：n = 2 根据引理 9，P2,1P2,2 和 P2,2P2,3 是A_{PF}的子集。归纳步骤：设 $P_{n,k}P_{n,k+1}$，$k \epsilon \{1,2, \dots, 2^n - 2\}$ 是A_{PF} 的子集。那么 π_0W$P_{n,k}P_{n,k+1}$X 是 $\pi_0(A_{PF})$的子集。$\pi_0(A_{PF}) \subset A_{PF}$（命题1 a）），因此 π_0W$P_{n,k}P_{n,k+1}$X $= P_{n+1,k}P_{n+1,k+1}$, $k \epsilon \{1,2, \dots, 2^n - 2\}$ 是A_{PF}的子集。π_1W$P_{n,k}P_{n,k+1}$X 是$\pi_1(A_{PF})$的子集。$\pi_1(A_{PF}) \subset A_{PF}$（命题1 b），因此 π_1W$P_{n,k}P_{n,k+1}$X $= P_{n+1,2^{n+1}-1}$(#&')P $_{n+1,2^{n+1}-1}$#, $k \epsilon \{1,2, \dots, 2^n - 2\}$ 是A_{PF}的子集。对于$k = 2^n - 1$，线段 $P_{n+1,2^n}$–'P $_{n+1,2^n}$ 和 $P_{n+1,2^n}P_{n+1,2^n}$&'是A_{PF}的子集，正如引理 9 中所证。

引理 8 和引理 10 给出了命题 2 的证明。

现在，一切都已准备就绪，可以陈述主要命题了。

7. 避免折纸多边形的交点 Q_n

命题 3

对于展开角 98.195° ≤ α ≤ 108° $\pi_0(A_{PF}) \cap \pi_1(A_{PF}) = \{P_{1,1}\}$。

证明

主要条件是 $c_1(\varphi) < d_2(\varphi)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi+\alpha}{\beta}} < \left(1-\frac{q^2}{1-q^4}\right) q^{-\frac{\varphi+2\alpha}{\beta}}$$

$$\Leftrightarrow q^{-\frac{\varphi+\alpha}{\beta}} < (1-q^2-q^4) q^{-\frac{\varphi+2\alpha}{\beta}}$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1-q^2-q^4-q^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

右侧在 [0,1] 中单调递减，其零点位于 q = 0.6615289 和 q = 0.6615339 之间。因此，当 $q \leq$ 0.6615289 时，$c_1(\varphi) < d_2(\varphi)$ 成立，对应于 $\alpha \geq 98.195°$。

为详细证明 $\pi_0(A_{PF}) \cap \pi_1(A_{PF}) = \{P_{1,1}\}$ 在 98.195° ≤ α ≤ 108° 时成立，将平面划分为三对半平面：

- 由直线 $P_{0,0}P_{1,1}$ 划分为包含 $P_{2,1}$ 的 H_0 和包含 $P_{2,3}$ 的 H_1 - 由直线 $P_{2,3}P_{1,1}$ 划分为包含 $P_{0,1}$ 的 H_2 和包含 $P_{0,0}$ 的 H_3 - 由直线 $P_{0,0}P_{0,1}$ 划分为包含 $P_{1,1}$ 的 H_4 和不包含 $P_{1,1}$的 H_5

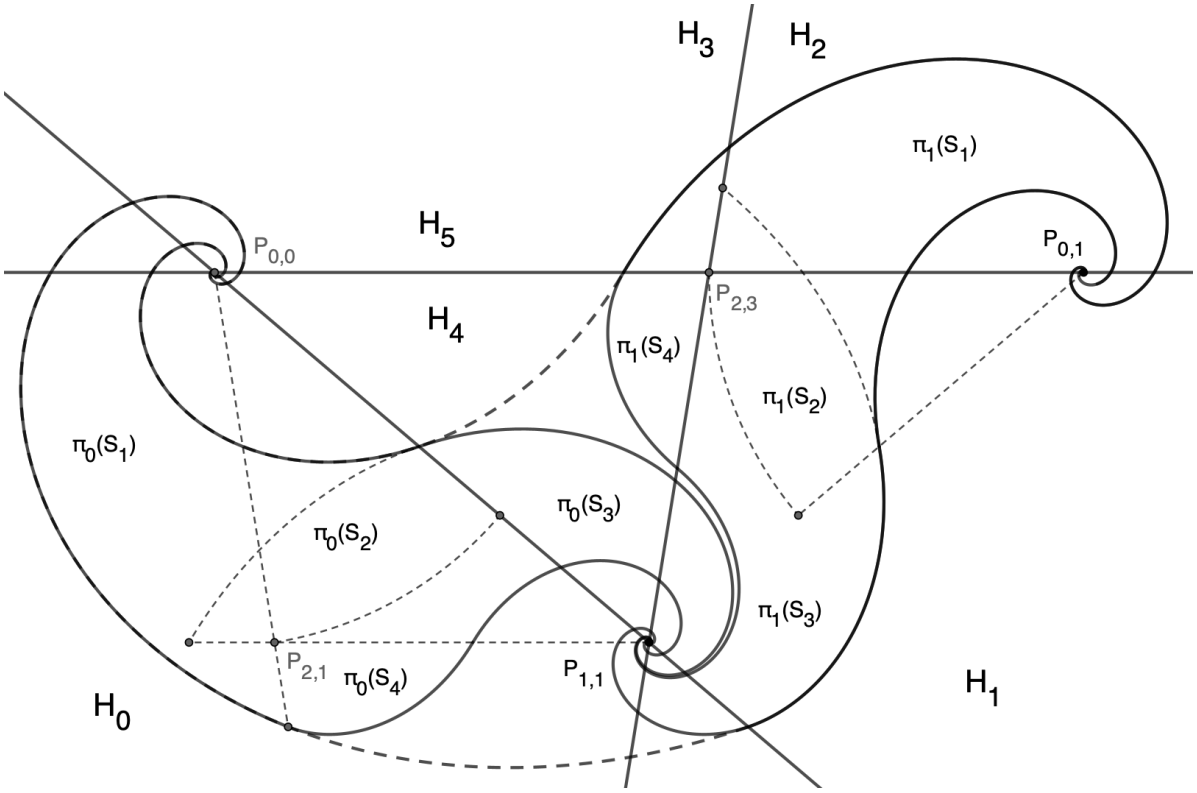


图20：$\alpha = 99°$ $\pi_0(A_{PF})$ 和 $\pi_1(A_{PF})$ 明显分离

证明整理如下表：

∩	$\pi_0(S_1)$	$\pi_0(S_2)$	$\pi_0(S_3)$	$\pi_0(S_4)$
$\pi_1(S_1)$	1.	∅	2.	∅
$\pi_1(S_2)$	3.	∅	4.	∅
$\pi_1(S_3)$	5.	6.	7.	8.
$\pi_1(S_4)$	9.	∅	10.	∅

$\pi_0(S_2)$ 和 $\pi_0(S_4)$ 是 H_0 的子集。$\pi_1(S_1)$、$\pi_1(S_2)$ 和 $\pi_1(S_4)$ 是 H_1 的子集，因为点 $P_{0,1}$ 到直线 $P_{0,0}P_{1,1}$ 的距离大于点 $P_{0,1}$

与这三个集合中任意一点之间的距离。这就得到了表中的 ∅ 。

1. $\pi_0(S_1) \cap \pi_1(S_1)$ 由于 $\pi_1(S_1) \subset H_1$ ，计算时只需考虑 $\pi_0(S_1) \cap H_1$ 。$P \in \pi_0(S_1) \cap H_1 \Rightarrow$ XP0,0PX $\leq a_1(-180° - \beta) =$ ’ ’–@’ q^-)%,-°)* * 应用三角不等式：X$P_{0,1}P$X $\geq$ X$P_{0,0}P_{0,1}$X $-$ X$P_{0,0}P$X $\geq 1 -$ ’ ’–@’q^-)%,-°)* * 。$Q \in \overline{\pi_1(S_1)} \Rightarrow$ XP0,1QX $\leq a_2(-180°) =$ ’ ’–@’ q^-)%,-°$/ * ’ ’–@’ q^-)%,-°$/ * < 1 -$ ’ ’–@’ q^-)%,-°)* * 对 $q \leq$ ’ " $\sqrt{2}$ 成立。对于任意 $P \in \pi_0(S_1) \cap H_1$ 和 $Q \in \pi_1(S_1)$，不等式 XP0,1QX $<$ X$P_{0,1}P$X 均成立。这意味着 $(\pi_0(S_1) \cap H_1) \cap \pi_1(S_1) = \emptyset$，因此 $\pi_0(S_1) \cap \pi_1(S_1) = \emptyset$。

2. $\pi_0(S_3) \cap \pi_1(S_1)$ 由于 $\pi_1(S_1) \subset H_1$ 仅需在计算中考虑 $\pi_0(S_3) \cap H_1$ 。$\pi_1(S_1)$ 被直线 P_0, $_0P_{0,1}$ 分成 $\pi_1(S_1) \cap H_5$ 和 $\pi_1(S_1) \cap H_4$ 。$P \in \pi_0(S_3) \cap H_1 \Rightarrow$ XP1,1PX $\leq c_1(-180° - \beta) =$ ’ ’–@’ q^3 引理 6 a) 表明 $\pi_0(S_3) \cap H_1 \subset H_4$ 。因此 $(\pi_0(S_3) \cap H_1) \cap (\pi_1(S_1) \cap H_5) = \emptyset$。应用三角不等式：X$P_{0,1}P$X $\geq$ X$P_{1,1}P_{0,1}$X $-$ X$P_{1,1}P$X $\geq q -$ ’ ’–@’ $q^3Q \in \pi_1(S_1) \cap H_4 \Rightarrow$ XP0,1QX $\leq a_2(-360°) =$ ’ ’–@’ q^-)(0-°$/ * ’ ’–@’ q^-)(0-°$/ * < q -$ ’ ’–@’ q^3 对 $q \leq$ ’ "$\sqrt{2}$ 成立。对于任意 $P \in \pi_0(S_3) \cap H_1$ 和 $Q \in \pi_1(S_1) \cap H_4$，不等式 XP0,1QX $<$ X$P_{0,1}P$X 成立。这意味着 $(\pi_0(S_3) \cap H_1) \cap (\pi_1(S_1) \cap H_4) = \emptyset$，因此 $\pi_0(S_3) \cap \pi_1(S_1) = \emptyset$ 。

3. $\pi_0(S_1) \cap \pi_1(S_2)$ $\pi_0(S_1) \subset H_3$ 与 $\pi_1(S_2) \subset H_2$ 以及 H_2 与 H_3 是相对于直线 P2, 3P1, 1 互不相交的半平面，因此可推出 $\pi_0(S_1) \cap \pi_1(S_2) = \emptyset$

4. $\pi_0(S_3) \cap \pi_1(S_2)$ 由于 $\pi_1(S_2) \subset H_2$ ，计算时只需考虑 $\pi_0(S_3) \cap H_2$ 。$P \in \pi_0(S_3) \cap H_2 \Rightarrow$ XP1,1PX $\leq c_1(-180° - \alpha) =$ ’ ’–@’ q^-)%,-° * 应用三角不等式：X$P_{0,1}P$X $\geq$ X$P_{1,1}P_{0,1}$X $-$ X$P_{1,1}P$X $\geq q -$ ’ ’–@’q /$&* *$Q \in \pi_1(S_2) \Rightarrow$ XP0,1QX $\leq q^2$ 且 $q^2 < q -$ ’ ’–@’ q /$&* * 对 $q < 0.67$. 成立。对于任意 $P \in \pi_0(S_3) \cap H_2$ 和 $Q \in \pi_1(S_2)$，不等式 XP0,1QX $<$ X$P_{0,1}P$X成立。这意味着 $(\pi_0(S_3) \cap H_2) \cap \pi_1(S_2) = \emptyset$ ，因此 $\pi_0(S_3) \cap \pi_1(S_2) = \emptyset$ 。

5. $\pi_0(S_1) \cap \pi_1(S_3)$ 直线 $P_{0,0}P_{1,1}$ 将两个集合都分开。因此，有两种情况。情况 1：$(\pi_0(S_1) \cap H_0) \cap (\pi_1(S_3) \cap H_0)$ 直线 P0,0P2,1 将平面分成两个半平面。$\pi_1(S_3) \cap H_0$ 完全位于其中一个半平面内，记为 H’。因此，计算时只需考虑 $\pi_0(S_1) \cap H_0 \cap H'$。设 P 是

$\pi_0\ S_1\ \cap H_0 \cap H \qquad \varphi \qquad P_{0\,0}$ ( ) ′ 上的一个点，

$-\beta - k\ \ 360\ \geq \varphi \geq -2\beta - k\ \ 360\ \ k = 1\ 2\ 3$

其相对于中心 , , · ° · °, , , ,... 的极坐标角为 Then XP0,0PX $\leq a_1(-\beta - 360°) =$ ’ ’–@’ q^-) 5*)&/ * .

应用三角不等式：$\mathrm{X}P_{1,1}P\mathrm{X} \geq \mathrm{X}P_{0,0}P_{1,1}\mathrm{X} - \mathrm{X}P_{0,0}P\mathrm{X} \leq q -$ ’ ’–@’ q^{-})5*)&/ *$Q \in \pi_1(S_3)$ $\cap H_0 \Rightarrow \mathrm{XP_{1,1}QX} \leq c_2(-\beta - 360°) =$ ’ ’–@’ q^{-})*)(0-°$&/ * ’ ’–@’ q^{-})*)(0-°$&/ * $< q -$ ’ ’–@’ q^{-})5*)&/ * 对 $q \leq$ ’ "$\sqrt{2}$ " 成立。对于任意 $P \in \pi_0(S_1) \cap H_0 \cap H'$ 和 $Q \in \pi_1($ $S_3) \cap H_0$, 不等式 $\mathrm{XP_{1,1}QX} < \mathrm{X}P_{1,1}P\mathrm{X}$ 成立。这意味着 $(\pi_0(S_1) \cap H_0 \cap H') \cap (\pi_1(S_3) \cap H_0) = \emptyset$ ，因此 $(\pi_0(S_1) \cap H_0) \cap (\pi_1(S_3) \cap H_0) = \emptyset$ 。

情况 2：$(\pi_0(S_1) \cap H_1) \cap (\pi_1(S_3) \cap H_1)$ 由于计算中只需考虑 $\pi_0(S_1) \cap H_1 \subset H_3$ only $\pi_1(S_3) \cap H_1 \cap H_3$ 。$P \in \pi_0(S_1) \cap H_1 \Rightarrow \mathrm{XP_{0,0}PX} \leq a_1(-180° - \beta) =$ ’ ’–@’ q^{-})%,-°)* * 。应用三角不等式：$\mathrm{X}P_{1,1}P\mathrm{X} \geq \mathrm{X}P_{0,0}P_{1,1}\mathrm{X} - \mathrm{X}P_{0,0}P\mathrm{X} \geq q -$ ’ ’–@’ q^{-})%,-°)* * 。$Q \in \pi_1(S_3)$ $\cap H_1 \cap H_3 \Rightarrow \mathrm{XP_{1,1}QX} \leq c_2(-\beta - 540°) =$ ’ ’–@’ q^{-})*)5’-°$&/ * ’ ’–@’ q^{-})*)5’-°$&/ * $< q -$ ’ ’–@’ q^{-})%,-°)* * 对$q \leq$ ’ "$\sqrt{2}$ 成立。对于任意 $P \in \pi_0(S_1) \cap H_1$ 和 $Q \in \pi_1(S_3)$ $\cap H_1 \cap H_3$, 不等式 $\mathrm{XP_{1,1}QX} < \mathrm{X}P_{1,1}P\mathrm{X}$ 成立。这意味着 $(\pi_0(S_1) \cap H_1) \cap (\pi_1(S_3)$ $\cap H_1 \cap H_3) = \emptyset$ ，因此 $(\pi_0(S_1) \cap H_1) \cap (\pi_1(S_3) \cap H_1) = \emptyset$ 。

6. $\pi_0(S_2) \cap \pi_1(S_3)$ 由于 $\pi_0(S_2) \subset H_0$ 只有 $\pi_1(S_3) \cap H_0$ 需要纳入计算考量。$P \in \pi_0$ $(S_2) \Rightarrow \mathrm{XP_{0,0}PX} \leq q^2$应用三角不等式：$\mathrm{X}P_{1,1}P\mathrm{X} \geq \mathrm{X}P_{0,0}P_{1,1}\mathrm{X} - \mathrm{X}P_{0,0}P\mathrm{X} \geq q - q^2$ $Q \in \pi_1(S_3) \cap H_0 \Rightarrow \mathrm{XP_{1,1}QX} \leq c_2(-\beta - 360°) =$ ’ ’–@’ q^{-})*)(0-°$&/ * ’ ’–@’ q^{-}) *)(0-°$&/ * $< q - q^2$ 对于 $q < 0.69$ 成立。对于任意 $P \in \pi_0(S_2)$ 和 $Q \in \pi_1(S_3) \cap H_0$, 不等式 $\mathrm{XP_{1,1}QX} < \mathrm{X}P_{1,1}P\mathrm{X}$ 成立。这意味着 $\pi_0(S_2) \cap (\pi_1(S_3) \cap H_0) = \emptyset$ ，因此 π_0 $(S_2) \cap \pi_1(S_3) = \emptyset$ 。

7. $\pi_0(S_3) \cap \pi_1(S_3)$
对于极角为 $-180° \geq \varphi > -180° - \alpha$ 的情况，只有 $\pi_0(S_3)$ 有定义。
对于 $-180° - \alpha \geq \varphi$ ，从 $P_{1,1}$ 发出的极角为 φ 的射线会与 $\pi_0(S_3)$ 和 $\pi_1(S_3)$ 相交无穷多次。情况如图21所示。

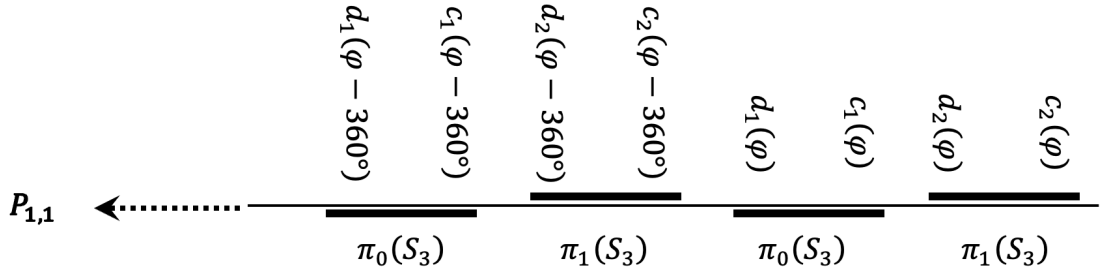


图21：$\pi_0(S_3)$ 与 $\pi_1(S_3)$ 的无穷多个交点（情况7）

c_2（$\varphi - k \cdot 360°$）与 d_2（$\varphi - k \cdot 360°$）之间的点，$k \epsilon \mathrm{N}_0$ 属于 π_1（S_3）；c_1（$\varphi - k \cdot 360°$）与 d_1（$\varphi - k \cdot 360°$）之间的点，$k \epsilon \mathrm{N}_0$ 属于 π_0（S_3）。

如果 $c_2(\varphi) > d_2(\varphi) > c_1(\varphi) > d_1(\varphi) > c_2(\varphi - 360°)$ f, 这些区间两两不相交 or 所有 $-180° - \alpha \geq \varphi$。*&($\frac{\varphi}{d_2\ \varphi\ > c_1\ \varphi} > 1$ $q \leq -\sqrt{2}$) R&( ) ' ' @' @&

对 ' " ( ) ( ) 在开头进行了计算，得出条件 $q \leq 0.6615289$，对应于 $\alpha \geq 98.195°$。*%(6) R%(6) = ' '-@' -@& > 1 对 $q \leq$ ' "$\sqrt{2}d_1(\varphi) = \left(1 - @\&\ '-@': q^{-\varphi}\right.$ $/ *$，$c_2($ $\overline{\varphi - 360°)} = ' '$-@' $q^{-\varphi}$)'* *$d_1(\varphi)^{-} > c_2(\varphi - 360°)$ 可简化为 $1 - q^2 - q^4 - q^{4+\frac{\alpha}{-}} * > 0$, 当 $q \leq$ ' "$\sqrt{2}$ 时成立。因此，$\pi_0(S_3) \cap \pi_1(S_3) = \{P_{1,1}\}$。

8. $\pi_0(S_4) \cap \pi_1(S_3)$ 由于计算中只需考虑 $\pi_0(S_4) \subset H_0$ only $\pi_1(S_3) \cap H_0$ 。$P \in \pi_0($ $S_4) \Rightarrow$ $XP_{2,1}PX \leq e_1(0°) = ' '$-@' $q^{-})$'* * 。应用三角不等式：$XP_{1,1}PX \geq XP_{2,1}P_1,$ $_1X - XP_{2,1}PX \geq q^2 - ' '$-@'$q^{-})$'* * 。$Q \in \pi_1(S_3) \cap H_0 \Rightarrow XP_{1,1}QX \leq c_2(-\beta - 360$ °) = ' '-@' $q^{-})$*)(0-°$&/ * ' '-@' $q^{-})$*)(0-°$&/ * $< q^2 -$ ' '-@' $q^{-})$'* * 对 $q < 0.$ 68 成立。对于任意 $P \in \pi_0(S_4)$ 和 $Q \in \pi_1(S_3) \cap H_0$，不等式 $XP_{1,1}QX < XP_{1,1}PX$ 成立。这意味着 $\pi_0(S_4) \cap (\pi_1(S_3) \cap H_0) = \emptyset$，因此 $\pi_0(S_4) \cap \pi_1(S_3) = \emptyset$。

9. $\pi_0(S_1) \cap \pi_1(S_4)$ 由于 $\pi_1(S_4)$ 仅需在计算中考虑 $\subset H_1$ $\pi_0(S_1) \cap H_1$ 。$P \in \pi_0(S_1)$ $\cap H_1 \Rightarrow$ $XP_{0、0}PX \leq a_1(-180° - \beta) = ' '$-@' $q^{-})$%,-°)* * 。应用三角不等式：$XP_{2、3}P$ $X \geq XP_{0、0}P_{2、3}X - XP_{0、0}PX \geq 1 - q^2 - ' '$-@'$q^{-})$%,-°)* * 。$Q \in \pi_1(S_4) \Rightarrow XP_{2、3}$ $QX \leq e_2(-\alpha) = ' '$-@' $q^{-\frac{-4\beta}{}}$* ' '-@'$q^{-\frac{-4\beta}{}}$* $< 1 - q^2 -$ ' '-@' $q^{-})$%,-°)* * 对 $q <$ 0成立。69. 对于任意 $P \in \pi_0(S_1) \cap H_1$ 和 $Q \in \pi_1(S_4)$，不等式 $XP_{2、3}QX < XP_{2、3}PX$成立。这意味着 $(\pi_0(S_1) \cap H_1) \cap \pi_1(S_4) = \emptyset$，因此 $\pi_0(S_1) \cap \pi_1(S_4) = \emptyset$。

10. $\pi_0(S_3) \cap \pi_1(S_4)$ $c_1(-180° - \alpha)$ 定义螺旋线 c_1 上的点 R_1，而 $e_2(-\alpha)$ 定义螺旋线 e_2 上的点 R_2。设 t_1 为 c_1 在 R_1处的切线。设 t_2 为 e_2 在 R_2处的切线。由于 P_1、$_1$、R_1、R_2 和 P_2、$_3$ 共线，因此 t_1 和 t_2 平行。$c_1(-180° - \alpha) < d_2(-180° - \alpha) =XP_2$、$_3P_1$、$_1$X $- e_2(-\alpha)$ 表明 t_1 和 t_2 是不同的直线。c_1 和 t_2 位于由 t_1所确定的不同半平面内。e_2 和 t_1 位于由 t_2所确定的不同半平面内。因此，$\pi_0(S_3) \cap \pi_1(S_4) = \emptyset$。

□

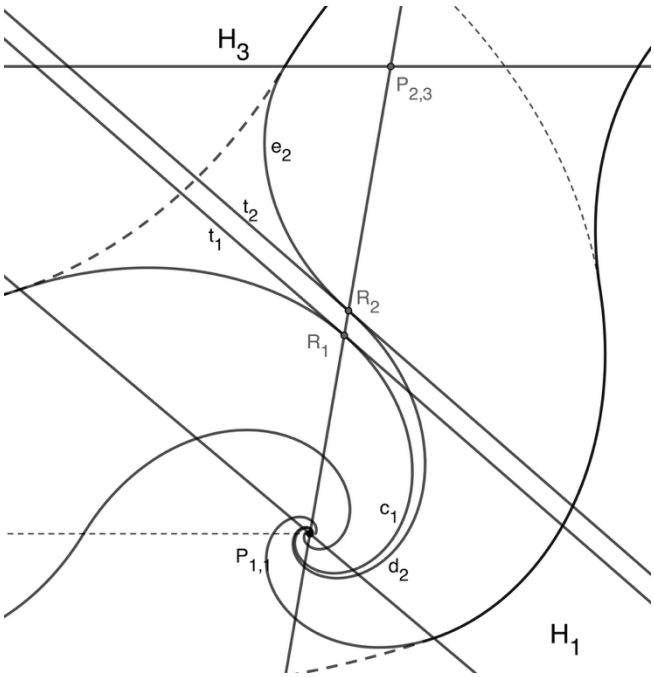


图 22：$\pi_0(S_3)$ 和 $\pi_1(S_4)$（情况 10）

推论 2（针对广义 A_{PF}）对于展开角 $98.195° \leq \alpha \leq 108°$ A_{PF}wP$_{n,}$ $_{2k\cdot 2^m}$P$_{n,}$ $_{(2k+1)\cdot 2^m}$X $\cap$ A_{PF}wP$_{n,}$ $_{(2k+2)\cdot 2^m}$P$_{n,}$ $_{(2k+1)\cdot 2^m}$X $= \{$P$_{n,}$ $_{(2k+1)\cdot 2^m}\}$。

定理 1

对于展开角 $98.195° \leq \alpha \leq 108°$，折纸多边形 Q_n 不会相交 s.

证明

折纸多边形 Q_n 由 $Q_n = \pi_0(Q_{n-1}) \cup \pi_1(Q_{n-1})$ 构造而成。$\pi_0(A_{PF}) \cap \pi_1(A_{PF}) =$ {P$_{1,}$ $_1$} 这意味着，$\pi_0(A_{PF})$ 的所有线段（它们是 $\pi_0(Q_{n-1})$ 的子集）都不会与 $\pi_1(A_{PF})$ 中的任何线段相交，而后者是 $\pi_1(Q_{n-1})$ 的子集。

该论证分别排除了 $\pi_0(Q_{n-1})$ 开头的线段 $\overline{\text{P}_{n,}\ _0\text{P}_{n,}\ _1}$ 和末尾的 $\overline{\text{P}_{n,}\ _{2^{n-1}-1}\text{P}_{n,}\ _{2^{n-1}}}$，以及 $\pi_1(Q_{n-1})$ 开头的线段 $\overline{\text{P}_{n,}\ _{2^{n-1}}\text{P}_{n,}\ _{2^{n-1}+1}}$ 和末尾的 $\overline{\text{P}_{n,}\ _{2^n-1}\text{P}_{n,}\ _{2^n}}$。

讨论这四条线段：

1. $\overline{\text{P}_{n,}\ _0\text{P}_{n,}\ _1}$ 与 $\pi_1(Q_{n-1})$ 的任何线段都不相交，因为以 P$_{0,}$ $_0$ 为中心、q^n 为半径的圆与 $\pi_1(A_{PF})$ 不相交。

2. 对于 $\pi_1(Q_{n-1})$ 末端的线段 P$_{n,\ 2^{n-1}}$P $_{n,\ 2^n}$，同样的论证也成立。

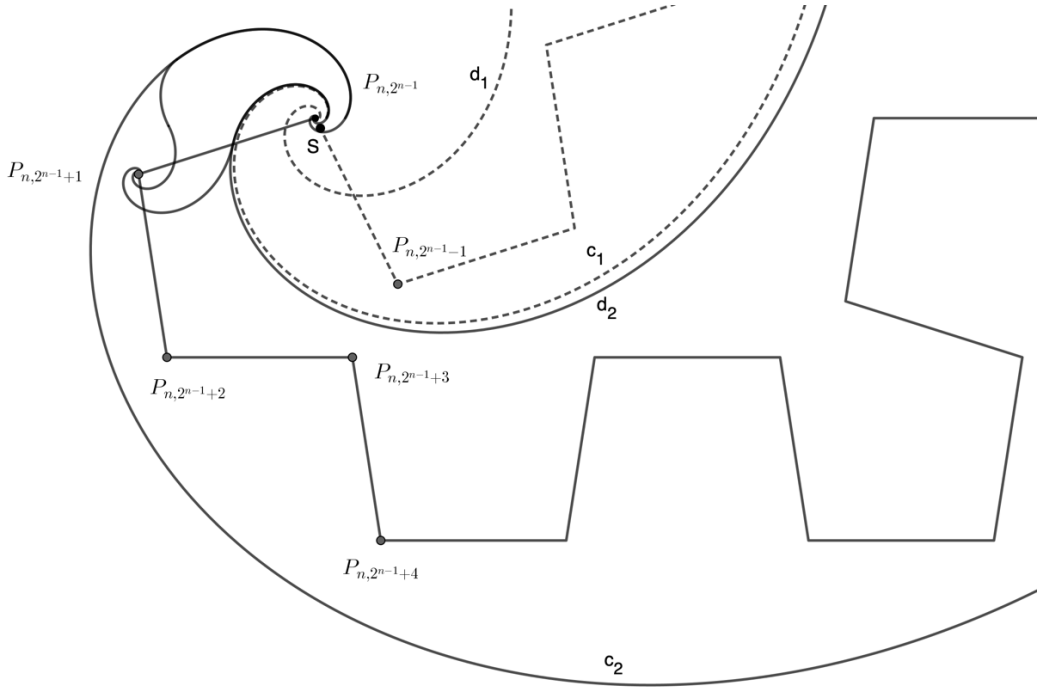


图23：P$_{n,\ 2^{n-1}}$处的情况

3. 假设，在线段 P$_{n,2^{n-1}}$P$_{n,2^{n-1}+1}$处与线段 P$_{n,k}$P$_{n,k+1}$相交于点 S，后者是 $\pi_1(Q_{n-1})$ 的一条线段。因此，$2^{n-1} \le k \le 2^n - 1$。情况 1：$S \notin \pi_1(A_{PF})$ 此时，S 只能是与第一条线段 P$_{n,2^{n-1}}$P$_{n,2^{n-1}}$&’ 相交的交点，或是与 $\pi_1(Q_{n-1})$ 的最后一条线段 P$_{n,2^n}$–’P $_{n,2^n}$ 相交的交点。第一条线段 P$_{n,2^{n-1}}$P$_{n,2^{n-1}}$&’：如果 $S =$ P$_{n,2^{n-1}}$P$_{n,2^{n-1}}$&’ ∩P$_{n,2^{n-1}}$–’P $_{n,2^{n-1}}$，那么 S =P$_{n,2^{n-1}}$。这并非所讨论意义上的交点。最后一条线段 P$_{n,2^n}$–’P $_{n,2^n}$：设 Q 是 P$_{n,2^n}$–’P $_{n,2^n}$ 上的一点。那么 XQP$_{n,2^n}$X $\le q^n$。S ∈ P$_{n,2^{n-1}}$–’P $_{n,2^{n-1}}$ 可得 XSP$_{n,2^{n-1}}$X $\le q^n$。应用三角不等式：XSP$_{n,2^n}$X $\ge$ XP$_{n,2^{n-1}}$P$_{n,2^n}$X $- XSP_{n,2^{n-1}}$X $= q - q^n q - q^n > q^n$ 对 $q \le$ ’ "$\sqrt{2}$ 和 $n \ge$ 4 成立。对于 S ∈P$_{n,2^{n-1}}$–’P $_{n,2^{n-1}}$ 以及任意 $Q \in$P$_{n,2^n}$–’P $_{n,2^n}$，不等式 XQP$_{n,2^n}$X < XSP$_{n,2^n}$X 成立。这意味着 $S \notin$ P$_{n,2^n}$–’P $_{n,2^n}$，因此 S 不是 P$_{n,2^n}$–’P $_{n,2^n}$ 与 P$_{n,2^{n-1}}$–’P $_{n,2^{n-1}}$ 的交点。情况 2：$S \in \pi_1(A_{PF})$ S ∈ P$_{n,2^{n-1}}$–’P $_{n,2^{n-1}}$ 与 P$_{n,2^{n-1}}$–’P $_{n,2^{n-1}}$ 相对于点 P$_{n,2^{n-1}}$ 的极角为 $-180° -(n-2)\beta$。因此 XSP$_{n,2^{n-1}}$X $\le c_2(-540° - (n-2)\beta) = \frac{1}{1-q^4} q^{-54}$ $°–(!–")-&"E- $= \frac{1}{1-q^4} q^n q^4 q^{\alpha}$- 所以 ’ ’–@’$q^n q^4 q^{\alpha}$ * $< q^n$ 点 S 是 A_{PF}wP$_{n,2^{n-1}}$P$_{n,2^{n-1}}$&’x 的一个元素，这意味着 S 属于所有 A_{PF}wP$_{n,2^{n-1}}$P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}x , $0 \le m \le n-2$ (命题1的推论 1

命题1）。现在，主要思路是：因为 $S \in A_{PF}$wP$_{n,2^{n-1}}$P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}x , $0 \le m \le n-2$ 和 A_{PF}wP$_{n,2^{n-1}}$P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}x $\cap$ A_{PF}wP$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}\$%P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}x $= \{$P$_{n,2^{n-1}}$&"$^m\}$ (推论2)，且 $S \neq$P$_{n,2^{n-1}}$&"1（并非所讨论意义上的交点），由此可知 S 不可能是 A_{PF} wP$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}\$%P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}x 的元素。因此，S 不可能是线段 P$_{n,2^{n-1}}$–'P $_{n,2^{n-1}}$ 与任何线段 P$_{n,2^{n-1}}$&#P $_{n,2^{n-1}}$&#&' , $2^m + 1 \le k \le 2^{m+1} - 2$ 的交点，即任何属于 A_{PF} wP$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}\$%P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}x 的线段。特殊线段 P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}&'（第一条）和 P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}\$%–'P $_{n,2^{n-1}}$&"^{m}\$%（最后一条）必须单独处理

d

分别地。证明按参数 m 进行分类讨论：m = 0：由于 $S \in A_{PF}$wP$_{n,2^{n-1}}$P$_{n,2^{n-1}}$&'x, 因此 $S \notin A_{PF}$wP$_{n,2^{n-1}}$&'P $_{n,2^{n-1}}$&"x。A_{PF}wP$_{n,2^{n-1}}$&'P $_{n,2^{n-1}}$&"x 的特殊情形涉及线段 P$_{n,2^{n-1}}$&'P $_{n,2^{n-1}}$&"。该线段上的所有点相对于 P$_{n,2^{n-1}}$ 的极角均为 φ，满足 $-180° -(n-2)\beta - \alpha + \beta \ge \varphi \ge -180° - (n-2)\beta - \alpha$。S 位于线段 P$_{n,2^{n-1}}$–' P $_{n,2^{n-1}}$ 上，该线段相对于 P$_{n,2^{n-1}}$ 的极角为 $\varphi = -180° - (n-2)\beta$。由于这些角度范围互不相交，S 不可能是这两条线段的交点。m = 1：由于 $S \in A_{PF}$wP$_{n,2^{n-1}}$ P$_{n,2^{n-1}}$&"x，因此 $S \notin A_{PF}$wP$_{n,2^{n-1}}$&"P $_{n,2^{n-1}}$&1x。只需考虑特殊线段。

第一条线段 P$_{n,\ 2^{n-1}+2}$P $_{n,\ 2^{n-1}+3}$：这条线段上的所有点相对于 P$_{n,\ 2^{n-1}}$ 的极角均为 φ，满足 $-180° - (n-2)\beta - \alpha + 2\beta \ge \varphi \ge -180° -(n-2)\beta - \alpha + \beta$。S 位于线段 P$_{n,\ 2^{n-1}-1}$P $_{n,\ 2^{n-1}}$ 上，该线段相对于 P$_{n,\ 2^{n-1}}$ 的极角为 $\varphi = -180° - (n-2)\beta$。由于这些角度范围互不重叠，S 不可能是两条线段的交点。

最后一条线段 P$_{n,2^{n-1}}$&BP $_{n,2^{n-1}}$&1：该线段上的所有点相对于 P$_{n,2^{n-1}}$的极角均为$\varphi = -180° -(n-2)\beta - \alpha + 2\beta$。S 位于线段 P$_{n,2^{n-1}}$–'P $_{n,2^{n-1}}$ 上，该线段相对于 P$_{n,2^{n-1}}$ 的极角为 $\varphi = -180° - (n-2)\beta$。由于这些角不同，S 不可能是两条线段的交点。一般情况：$2 \le m \le n-2$由于 $S \in A_{PF}$wP$_{n,2^{n-1}}$P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}x，因此 $S \notin A_{PF}$wP$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}\$%x 。因此，S 不是 P$_{n,2^{n-1}}$–'P $_{n,2^{n-1}}$ 与任意线段 P$_{n,k}$P$_{n,k+1}$, $2^{n-1} + 2^m + 1 \le k \le 2^{n-1} + 2^{m+1} - 2$ 的交点。第一条线段 P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}&'：设 Q 是 P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}&' 上的一点。则 XQP$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}X $\le q^n$。对 S 应用三角不等式可得

XSP$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}X $\geq$ XP$_{n,2^{n-1}}$P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}X $-$ XSP$_{n,2^{n-1}}$X
$= q^{n-m} - \frac{1}{1-q^4} q^n q^4 q^{\alpha} - q^{n-m} - , , - @ ' \; q^n q^4 q^{\alpha} * > q^n$ 对 $q \leq$ ' "$\sqrt{2}$ 和 $m \geq 2$成立。对于 S $\in$P$_{n,2^{n-1}}$–'P $_{n,2^{n-1}}$ 以及任意 $Q \in$P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}&', 不等式 XQP$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}X < XSP$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}X成立。这意味着 $S \notin$ P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}&', 因此 S 不是 P$_{n,2^{n}}$–'P $_{n,2^{n}}$ 与 P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}&' 的交点。最后一条线段 P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}$%–'P $_{n,2^{n-1}}$&"^{m}$%: 设 Q 是 P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}$%–'P $_{n,2^{n-1}}$&"^{m}$% 上的一点。则 XQP$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}$%X $\leq q^n$。对于 S, 三角不等式给出 XSP$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}$%X $\geq$ XP$_{n,2^{n-1}}$P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}$%X $- $XSP_{n,2^{n-1}}X = q^{n-(m+1)} - \frac{1}{1-q^4} q^n q^4 q^{\alpha} - q^{n-(m+1)} - , ,$ - @ ' $q^n q^4 q^{\alpha} * > q^n$ 对 $q \leq$ ' "$\sqrt{2}$ 和 $m \geq 2$成立。对于 S $\in$P$_{n,2^{n-1}}$–'P $_{n,2^{n-1}}$ 以及任意 $Q \in$P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}$%–'P $_{n,2^{n-1}}$&"^{m}$%, 不等式 XQP$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}$%X <XSP$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}$%X成立。这意味着 $S \notin$ P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}$%–'P $_{n,2^{n-1}}$&"^{m}$%, 因此 S 不是 P$_{n,2^{n}}$–'P $_{n,2^{n}}$ 与 P$_{n,2^{n-1}}$&"^{m}$%–'P $_{n,2^{n-1}}$&"^{m}$% 的交点。

因此，线段 P$_{n,\ 2^{n-1}}$P$_{n,\ 2^{n-1}-1}$ 与 $\pi_1(Q_{n-1})$ 的任何线段都不相交。

4. 第 3 条中的类似论证同样适用于 P$_{n,2^{n-1}}$P$_{n,2^{n-1}+1}$，以及它与 $\pi_0(Q_{n-1})$ 的线段的交点。

将鸭子应用于 $P_{4,7}$ 和 $P_{4,11}$ 之间的间隙

折纸多边形的每条线段经过迭代过程，都会演变成一个更小的折纸多边形副本。因此，任何线段的局部鸭形包络都构成其起点和终点之间所有后续线段的边界。

这一原理应用于由点 $P_{4,7}, P_{4,8}, \ldots$、$P_{4,11}$ 以及 $P_{4,7}$ 和 $P_{4,11}$ 之间的间隙所形成的闭环。如果生成折纸多边形的迭代过程在此区域避免了交点，那么假设所有折纸多边形都不会出现交点[2]。

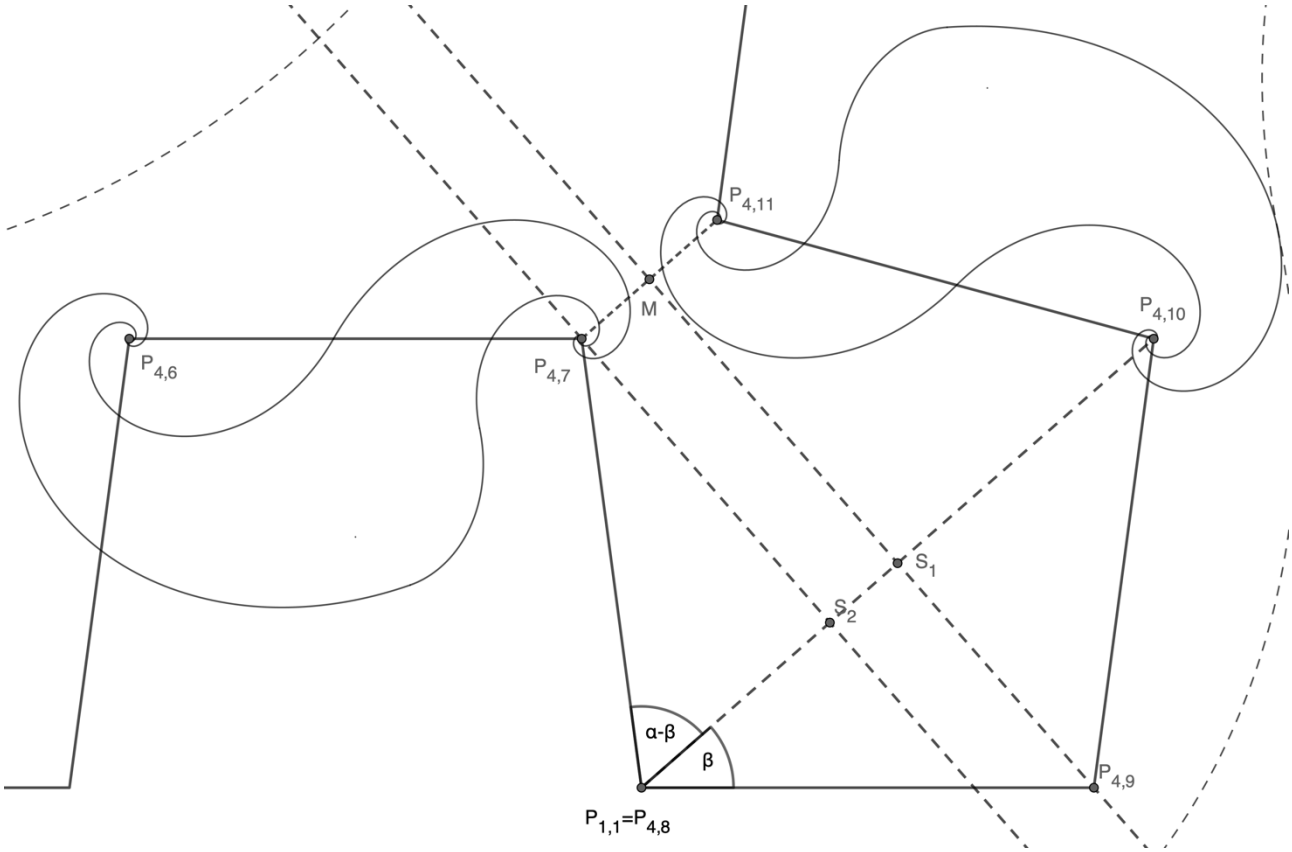


图24：$A_{PF}.P_{4,6}P_{4,7}$////////////// 和 $A_{PF}.P_{4,10}P_{4,11}$//////////////////

引理 11

如果展开　角 $a \geq 96.241°$，那么 $A_{PF}\left(P_{4,}\overrightarrow{\quad_6P_{4\,7}}\right)$ 和 $A_{PF}\left(P_{4,}\overrightarrow{\quad_{10}P_{4\,11}}\right)$，将不会相交。

证明

Q_4 中所有线段的长度均为q^4。关于点 S_1 和 S_2，请参见图24。

$$\left|P_{4,7}P_{4,11}\right| = 2\left(\left|P_{4,8}S_1\right| - \left|P_{4,8}S_2\right|\right)$$

$$= 2q^4\big(cos\beta - cos(\alpha-\beta)\big) = 2q^4\big(cos\beta - cos(180° - 3\beta)\big) = 2q^4(cos\beta + cos3\beta)$$

[2] D. Knuth 写道 [1]：“最棘手的自交点似乎出现在 $7\cdot 2^n$ 和 $11\cdot 2^n$附近。”

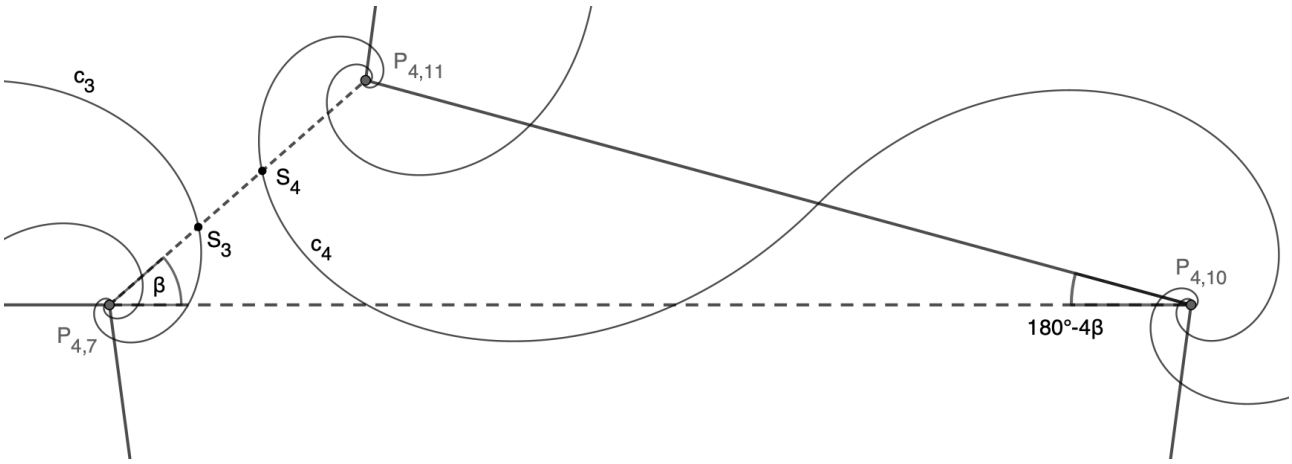


图25：图24的放大图

S_3 和 S_4 这两点见图25。

如果 XP4,7S3X +XP4,11S4X < XP4,7P4,11X，则可避免两只鸭子相交。

线段 P4 $\overline{}$,6P4,7 与 P0相比 $\overline{}$,0P0,1，经过 q^4 膨胀但不旋转。

因此，P4处的外螺旋 ,7 由 $c_3(\varphi) = q^4$ 给出 $\frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi}{+\alpha\beta}}, \varphi \le -180°$，中心 P4 ,7

因此，XP4,7S3X $= c_3(-360° + \beta) = c_3(-2\alpha - 4\beta + \beta) = q^4$ $\frac{1\ 4}{1-q} q^{\overline{)))(**.}}$

线段 P4,10$\overline{\text{P4,11}}$ 相较于 P0,0P0,1，放大了q^4 并旋转了4β。

因此，围绕 P4,11 的外螺旋由下式给出

$$c_4(\varphi) = q^4 \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{\varphi+\alpha-4\beta}{\beta}}, \varphi \le -180° + 4\beta, \qquad \text{center } P_{4,11}$$

$$\text{Therefore, } \left|P_{4,11}S_4\right| = c_4(-180° + \beta) = c_4(-\alpha - 2\beta + \beta) = q^4 \frac{1}{1-q^4} q^5$$

由此得到

$$\left|P_{4,7}S_3\right| + \left|P_{4,11}S_4\right| < \left|P_{4,7}P_{4,11}\right|$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-q^4} q^{-\frac{-\alpha-3\beta}{\beta}} + \frac{1}{1-q^4} q^5 < 2(cos\beta + cos3\beta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{q^3}{1-q^4}\left(q^{\frac{\alpha}{\beta}} + q^2\right) < 2(cos\beta + cos3\beta)$$

该不等式的数值解（3 位数字）为:

α（度）	β（度）	q	左侧	右侧	<
96.235	41.883	0.6715777	0.3238188	0.3234373	FALSE
96.236	41.882	0.6715724	0.3238001	0.3234915	FALSE
96.237	41.882	0.6715672	0.3237814	0.3235457	FALSE
96.238	41.881	0.6715619	0.3237627	0.3235999	FALSE
96.239	41.881	0.6715567	0.3237439	0.3236541	FALSE
96.240	41.880	0.6715514	0.3237252	0.3237083	FALSE
96.241	41.880	0.6715462	0.3237065	0.3237625	TRUE
96.242	41.879	0.6715409	0.3236878	0.3238167	TRUE
96.243	41.879	0.6715357	0.3236691	0.3238709	TRUE
96.244	41.878	0.6715304	0.3236504	0.3239251	TRUE
96.245	41.878	0.6715252	0.3236317	0.3239793	TRUE

猜想
如果避免了 $A_{PF}\left(P_4、\overrightarrow{{}_6P_{4\,7}}\right)$ {style id='5'>、和 $A_{PF}\left(P_4、\overrightarrow{{}_{10}P_{4\,11}}\right)$、在 $P_{4,7}$ 和 $P_{1、11}$ 之间的间隙中的交点，则对于所有折纸多边形都能避免交点。根据引理 11，当展开角 a ≥ 96, 241° 时，这一条件得到满足。

总结
对于折纸多边形的展开角 $\alpha \leq 90°$，我们知道：

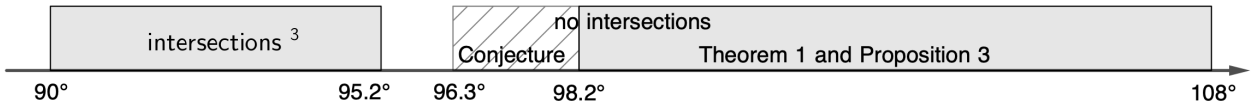


图 26：本文结果的示意图

$90° < \alpha \leq 95.126°$	交点（来自 10th 迭代）[3]
$95.126 < \alpha < 96.241$	不确定区间
$96.241 \leq \alpha < 98.195$	猜想：不存在交点
$98.195 \leq \alpha \leq 108°$	无交集，已由定理 1 证明

此外

$99.3438 < \alpha \leq 180°$	无交集 [7]

参考文献

1. D. E. Knuth，《Selected Papers on Fun and Games》，第 571–614 页。CSLI Lecture Notes 192，CSLI Publications，斯坦福，加利福尼亚州（2011） 2. M. Mendès France，《非齐次伊辛链与折纸折叠》，载于《数论与物理》（莱乌什，1989），Springer Proc. Phys. 47，施普林格（1990），第 195–202 页。 3. R. Albers，《折纸折叠》，博士论文，不来梅大学（2006）。网址：https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:gbv:46-diss000105747 4. S. Tabachnikov，《重新审视龙曲线》，Math. Intelligencer 36（2014），13–17 5. J.-P. Allouche、M. Mendès France、G. Skordev，《折纸龙曲线及由自动序列生成的曲线的不相交性》，Integers 18A（2018） 6. Y. Kamiya，《关于两个角恰好相接的龙曲线》，Theoret. Comput. Sci.，938（2022），65–80 7. S. Akiyama、Y.Kamiya、F.Wen，《不相交龙形曲线》（2024）。网址：https://arxiv.org/html/2401.07002v1 8. F.Wen，《龙形曲线的凸包》（2022）。网址：https://arxiv.org/abs/2208.12434v1