arXiv:2601.00746v1 [math.GR] 2 Jan 2026

关于 $\mathfrak{X}$-传递群与共轭可分 $\mathfrak{X}$-子群

O. AL-RAISI 和 M. SHAHRYARI

摘要。对于给定的群簇 $\mathfrak{X}$，我们系统地发展了 CS$\mathfrak{X}$-群和 $\mathfrak{X}$T-群的理论，拓展了 [17] 中提出的思想。我们分析了这些类之间的相互作用，描述了它们的结构性质，并考察了它们与方程域及剩余 A-自由群之间的联系。此外，我们用初等方法证明，每个有限 CS$\mathfrak{X}$-群都属于 $\mathfrak{X}$。

美国数学学会学科分类 20E06,20E26, 20F70.
关键词CT-群；CSA-群；共轭可分子群；群簇；归纳类；全称类；剩余自由群；剩余A-自由群。

给定群 G 的子群 H 称为自正规化，如果对每个元素$x \in G \setminus H$，都有 $H \cap H^x = \{1\}$。如果群 G 的所有极大阿贝尔子群都自正规化，则称该群为共轭可分阿贝尔群（CSA）。CSA-群类范围广泛，在剩余自由群、非阿贝尔自由群的全称理论、极限群、指数群以及群上的代数几何中的方程域研究中发挥着重要作用（见 [2], [3], [12] , 和 [13]）。与 CSA-群密切相关的另一类群是 CT-群（交换传递群）。若交换性在其非单位元集合上构成传递关系，则称群为 CT 群。尽管定义简单，CT 群类在剩余自由群研究中也占据核心地位。每个 CSA-群都是 CT 群，但反之不成立。B. Baumslag 证明，在剩余自由的条件下，这两种性质等价。

近几十年来，人们投入了大量精力研究这些类及其推广。文献 [4] 引入了CT-群的一种推广，以扩展上述B. Baumslag定理。文献[6], 介绍了CSA群与CT-群之间的许多有趣关系，并对现有文献进行了广泛综述。

本文第二作者在 [17] 提出了一种构想，旨在推广 CSA 群和 CT-群的概念：设 $\mathfrak{X}$ 是一个群类。群 G 是一个 $\mathfrak{X}$T-群，当且仅当对于任意两个 $\mathfrak{X}$-子群

A 和 B，若 G满足假设 $A \cap B \neq \{1\}$，则 $\langle A,\ B\rangle$ 也是 G的一个$\mathfrak{X}$-子群。类似地，如果群 G 的所有极大$\mathfrak{X}$-子群都是自正规化的，则称 G 为 CS$\mathfrak{X}$-群。在 [17], 中，他考察了一个特殊情形：$\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_k$是幂零类不超过$k$的幂零群簇，其中 CSA 群和 CT-群是其特例。因此，[17]研究了 CS$\mathfrak{X}$-群类与 $\mathfrak{X}$T-群类之间的一般关系、它们的刻画、构造和公理化，以及它们与剩余 A-自由群的联系；这里 $\mathfrak{X}$是幂零类至多为 k的幂零群簇。此外，已有许多结果被证明在 $\mathfrak{X}$为簇 $\mathfrak{N}_k$时，仍适用于 CS$\mathfrak{X}$ 群和 $\mathfrak{X}$T-群。作为一项应用，[17] 中的思想被用于 [14]，以引入一大类群；按照群上的代数几何的意义，这些群是方程域（定义见 [2] ）。

本文发展了一般理论：对于给定的类 $\mathfrak{X}$（在大多数情况下取为一个簇），我们研究 CS$\mathfrak{X}$-群和 $\mathfrak{X}$T-群的类、它们之间的关系、刻画及构造。我们证明，在对类 $\mathfrak{X}$作出某些假设的条件下，先前的一些结果可推广到 CS$\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{X}$T-群。然而，在这一更一般的框架下，某些性质并不成立。

在第一个部分中，我们讨论类 $\mathfrak{X}$T 和 CS$\mathfrak{X}$ 的基本性质。在第二个部分中，我们使用一种完全初等的论证证明有限 CS$\mathfrak{X}$-群属于 $\mathfrak{X}$，该论证避开了表示论或有限单群分类中的任何结果。在第 3 节中，我们讨论包含关系 CS$\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$T，并通过一个反例说明这一包含关系一般并不成立。第 4 节表明，对于包含所有阿贝尔群的群的归纳类，每个不是 $\mathfrak{X}$-群的 CS$\mathfrak{X}$-群都是一个方程域。在第 5 节中，我们证明两个 CS$\mathfrak{X}$-群的自由积属于 CS$\mathfrak{X}$。随后一节中，我们证明，对于一大类簇，类 $\mathfrak{X}$T 和 CS$\mathfrak{X}$ 是普遍的。最后，在第 7 节中，我们考察类 $\mathfrak{X}$T、CS$\mathfrak{X}$ 与（完全）剩余 A-自由群之间的关系。

为明确起见，我们引入如下记号。群 G 的子集 X 生成的子群记为 $\langle X\rangle$，该子群的正规闭包记为 $\langle X^G\rangle$。共轭元 a^x（或 H^x）是 $x^{-1}ax$（类似地，$x^{-1}Hx$）。交换子 $[x,y]$ 是 $x^{-1}y^{-1}xy$，所有单交换子$[x_1,x_2,\dots,x_{k+1}]$ 均向左对齐。记号 $[x,_k y]$ 表示 $[x,y,\dots,y]$，其中 y 出现 k 次。对于群的一个类 $\{G_i\}_{i\in I}$，相应的自由积记为 $\prod^*_{i\in I} G_i$。由单个群 G（单个恒等式 $x \approx 1$）生成的簇记为 Var(G)（同样地，记为 Var($w \approx 1$)）。在大多数情况下，我们倾向于将一个定律 w（x_1，...，x_n）简单地记作相应自由群中的元素 w，即 ≈ 1。因此，每当我们说 w 是簇 $\mathfrak{X}$ 的一个恒等式时，我们指的是 $\mathfrak{X}$ 中的所有元素都满足定律 w（x_1，...，x_n）≈ 1。簇 $\mathfrak{X}$ 的所有 n 元恒等式的集合记为 id$_n$（$\mathfrak{X}$）；对于 $\mathfrak{X}$ 的所有恒等式的集合，我们记作 id($\mathfrak{X}$)。

1. 基本性质与广义中心化子

已知，群 G 是 CT 群，当且仅当对于 G 的每个极大阿贝尔子群 A，A 中每个非平凡元素的中心化子都是 A 本身。因此，在研究 $\mathfrak{X}$T 群和 CS$\mathfrak{X}$ 群时，将群中元素的中心化子这一概念加以推广似乎是自然的；本节正是这样做的。在下文中，我们将一个归纳类 定义为：对于一个类 $\mathfrak{X}$，若它对取子群以及取其成员所成任意链的并均封闭，则称其为归纳类。有趣的是，具有这一性质的每个类对于单射直系的直极限也封闭。这个格论中的经典事实可由超限归纳证明，读者可在 [11] 中找到相关证明（其中还证明了，即使一个类仅对良序链的并封闭，它也包含所有单射直系的极限）。因此，群属于归纳类 $\mathfrak{X}$ 当且仅当它的所有有限生成子群都属于 $\mathfrak{X}$。显然，所有全称类 （即在群的一阶语言中由全称句公理化的类），尤其是所有群簇，都是归纳的。

定义 1.1. 设 $\mathfrak{X}$ 是一个群的归纳类。给定一个群 G 和一个元素 $a \in G$，我们定义 a 在 G 中的 $\mathfrak{X}$-中心化子，记作 $C_{\mathfrak{X}}^{G}(a)$（或者当上下文已明确时，简记为 $C_{\mathfrak{X}}(a)$），定义如下：

$$C_{\mathfrak{X}}^{G}(a) = \{x \in G : \langle a, x\rangle \in \mathfrak{X}\}.$$

关于这个定义，有几点说明。首先，注意到如果 $\mathfrak{X}$ 包含所有循环群，那么 $\mathfrak{X}$-中心化子不会是空集，因为在这种情况下 $1 \in C_{\mathfrak{X}}(a)$。此外，显然，如果 $x \in C_{\mathfrak{X}}(a)$，那么 x^{-1} 也如此。然而，$C_{\mathfrak{X}}(a)$ 不一定是 G 的子群，因为 $C_{\mathfrak{X}}(a)$ 中两个元素的乘积不一定属于 $C_{\mathfrak{X}}(a)$。为说明这一点，设 $\mathfrak{X}$ 是后交换群簇，$G = S_4$、a =(2 3)、x =(1 2) 且 y =(2 3 4)。那么，x 和 y 都属于 $C_{\mathfrak{X}}(a)$，但 xy 不属于 $C_{\mathfrak{X}}(a)$。当然，当 $\mathfrak{X}$ 是阿贝尔群簇时，$C_{\mathfrak{X}}(a)$ 就是 a 在 G 中的中心化子，它确实是 G 的子群。

命题 1.1。设 $\mathfrak{X}$ 是一个群的归纳类。那么，群 G 属于 $\mathfrak{X}$T，当且仅当对于每个非单位元 $a \in G$，集合 $C_{\mathfrak{X}}(a)$ 为空，或为 $\mathfrak{X}$ 的 G 子群。

证明。假设 $G \in \mathfrak{X}$T 且 a 是 G 的一个非单位元。设 $C_{\mathfrak{X}}(a)$ 非空；我们必须证明它在乘法下封闭。因此，设 $x, y \in C_{\mathfrak{X}}(a)$。这意味着，$\langle a, x\rangle$ 和 $\langle a, y\rangle$ 是 G 的子群，并且属于 $\mathfrak{X}$。那么，假设 $G \in \mathfrak{X}$T 意味着 $\langle a, x, y\rangle \in \mathfrak{X}$，从而 $\langle a, xy\rangle \in \mathfrak{X}$。这说明 $C_{\mathfrak{X}}(a)$ 是 G 的子群。为了证明 $C_{\mathfrak{X}}(a) \in \mathfrak{X}$，我们必须证明 $C_{\mathfrak{X}}(a)$ 的每个有限生成子群都属于 $\mathfrak{X}$。设 $b_1, \ldots, b_n \in C_{\mathfrak{X}}(a)$。于是，我们有

$$\langle a, b_1\rangle, \ldots, \langle a, b_n\rangle \in \mathfrak{X},$$

因此，由 $\mathfrak{X}$T 可知，必有 $\langle a, b_1, \ldots\ldots, b_n\rangle \in \mathfrak{X}$。这意味着 $\langle b_1, \ldots\ldots, b_n\rangle \in \mathfrak{X}$，因此 $C_{\mathfrak{X}}(a) \in \mathfrak{X}$。

反过来，假设对于每个非单位元 $a \in G$， $C_{\mathfrak{X}}(a)$ 要么为空，要么是 G 的一个 $\mathfrak{X}$-子群。设 A 和 B 是 G 的 $\mathfrak{X}$-子群，并假设 $A \cap B$ 含有一个非单位元 a。我们将证明 $\langle A, B\rangle$ 是 G 的一个 $\mathfrak{X}$-子群。为此，注意到对每个 $x \in A$，都有 $\langle a, x\rangle \in \mathfrak{X}$，因为 a 和 x 都属于 A，而它是一个 $\mathfrak{X}$-群。这说明 $A \subseteq C_{\mathfrak{X}}(a)$。类似的论证表明 $B \subseteq C_{\mathfrak{X}}(a)$。但是我们假设 $C_{\mathfrak{X}}(a)$ 是 G 的一个 $\mathfrak{X}$- 子群，因此，如果 A 和 B 都是 $C_{\mathfrak{X}}(a)$ 的子群，那么 $\langle A, B\rangle$ 也是如此。特别地，$\langle A, B\rangle$ 是 G 的一个 $\mathfrak{X}$-子群，由此证明 G 是一个 $\mathfrak{X}$T-群。□

引理 1.1. 设 $\mathfrak{X}$ 是一个对群的子群封闭的群类。设 G 是一个群，且 a 是 G的一个非单位元。如果 $C_{\mathfrak{X}}(a)$ 是 G的一个 $\mathfrak{X}$-子群，那么它就是一个极大 G的 $\mathfrak{X}$-子群。

证明。设 a 是 G 的一个非单位元，并假设 $C_{\mathfrak{X}}(a)$ 是 G的一个$\mathfrak{X}$-子群。设 H 是 G 的一个 $\mathfrak{X}$-子群，且包含 $C_{\mathfrak{X}}(a)$，并注意，若 h 是 H的一个元素，则 $\langle a, h\rangle$ 是 H这个 $\mathfrak{X}$-群的一个子群，因此 $\langle a, h\rangle \in \mathfrak{X}$。但这意味着 $h \in C_{\mathfrak{X}}(a)$，这表明$H = C_{\mathfrak{X}}(a)$。□

引理 1.2. 设 $\mathfrak{X}$ 是一个对群的子群封闭的群类，且 G 是一个 $\mathfrak{X}$T-群。假设 M 是 G的一个极大 $\mathfrak{X}$-子群。那么，对每个 $a \in M \setminus \{1\}$，都有 $M = C_{\mathfrak{X}}(a)$。

证明。令 $a \in M \setminus \{1\}$。那么，对于每个 $x \in M$，都有 $\langle a,\ x\rangle \subseteq M$，因此，$x \in C_{\mathfrak{X}}(a)$。于是，$M \subseteq C_{\mathfrak{X}}(a)$，并且根据关于 M 的极大性假设，有 $M = C_{\mathfrak{X}}(a)$。□

命题 1.2。设 $\mathfrak{X}$ 是一个群的归纳类。假设$\mathrm{CS}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}\mathrm{T}$。那么，群 G 是一个 $\mathrm{CS}\mathfrak{X}$-群，当且仅当对于 G 的每个非单位元 a，$C_{\mathfrak{X}}(a)$ 为空，或是G的一个自正规化 $\mathfrak{X}$- 子群。

证明。如果 G 是一个 $\mathrm{CS}\mathfrak{X}$-群，那么根据假设，它是一个 $\mathfrak{X}$T-群，因此，每个非空的 $\mathfrak{X}$-中心化子都是一个极大 $\mathfrak{X}$-子群。因此，每个非空的 $\mathfrak{X}$-中心化子必定在 G 中自正规化。反之，如果每个非空的 $\mathfrak{X}$- 中心化子都是 G 的一个自正规化 $\mathfrak{X}$- 子群，那么根据前述引理，G 的每个极大 $\mathfrak{X}$-子群都在 G 中自正规化。□

命题 1.3。设 $\mathfrak{X}$ 是归纳的，G 是一个群。若 G 是一个 $\mathrm{CS}\mathfrak{X}$-群，则对所有 $a \in G \setminus \{1\}$ 和所有 $z \in G$，条件 $\langle a, a^z\rangle \in \mathfrak{X}$ 蕴含$\langle a, z\rangle \in \mathfrak{X}$。反之，若 G 是一个 $\mathfrak{X}$ T-群，且对所有 $a \in G\setminus\{1\}$ 和所有$z \in G$，条件 $\langle a, a^z\rangle \in \mathfrak{X}$ 蕴含 $\langle a, z\rangle \in \mathfrak{X}$，则 G 是一个 $\mathrm{CS}\mathfrak{X}$-群。

证明。假设 G 是一个 $\mathrm{CS}\mathfrak{X}$-群；令 $a \neq 1$ 和 z 为G的元素，并假设 $\langle a,\ a^z\rangle \in \mathfrak{X}$。令 M 为 G的一个极大 $\mathfrak{X}$-子群，其中包含 G的子群 $\langle a,\ a^z\rangle$。我们断言 $z \in M$。事实上，M 在 G 中是自正规化的，并且

$$1 \neq a \in M \cap M^{z^{-1}}.$$

因此， $z \in M$，进而 $\langle a,\ z\rangle \in \mathfrak{X}$。

接下来，假设 G 是一个 $\mathfrak{X}$T-群，并且对所有 $a \in G \setminus \{1\}$ 和所有 $z \in G$，条件 $\langle a, a^z\rangle \in \mathfrak{X}$ 蕴含 $\langle a, z\rangle \in \mathfrak{X}$。令 M 为 G 的一个极大 $\mathfrak{X}$-子群，并假设对于某个 $g \in G$，交集 $M \cap M^g$ 含有一个非平凡元素 a。现在，由于 $a \in M$ 和 $a \in M^g$，可得 $\langle a, a^z\rangle \subseteq M$，其中 $z = g^{-1}$。但于是， $\langle a, a^z\rangle$ 是 G 的一个 $\mathfrak{X}$-子群，因为它是 G 的 $\mathfrak{X}$-子群 M 的子群。因此， $\langle a, z\rangle \in \mathfrak{X}$。利用 G 的 $\mathfrak{X}$T-性质，我们可由 $\langle a, z\rangle \in \mathfrak{X}$ 和 $M \in \mathfrak{X}$ 得出 $\langle M, z\rangle \in \mathfrak{X}$。然而，假设 M 是 G 的一个极大 $\mathfrak{X}$-子群，因此必有 $\langle M, z\rangle = M$，这意味着 $z = g^{-1}$ 属于 M。这表明 M 是 G 的一个自正规化子群，并由此完成证明。□

容易验证，对于任意群类 $\mathfrak{X}$，类 $\mathfrak{X}$T 对子群封闭。当$\mathfrak{X}$ 是归纳的时，我们证明类 CS$\mathfrak{X}$ 具有类似的性质。

命题 1.4. 如果 $\mathfrak{X}$ 是一个归纳的群类，那么所有CS$\mathfrak{X}$-群构成的类对子群封闭。

证明。 设 G 是一个 $CS\mathfrak{X}$-群， H 是 G的一个子群；设 M 是 H 的一个极大$\mathfrak{X}$-子群， M' 是包含 M 的 G 的一个极大 $\mathfrak{X}$-子群（注意，由于假设 $\mathfrak{X}$ 是归纳的，根据佐恩引理， M_0 存在）。设$h \in H$满足 $M \cap M^h$非平凡。由 $M \cap M^h \subseteq M_0 \cap M_0^h$可知， $M_0 \cap M_0^h$不是 G的平凡子群；又由于 M_0 在 G中自正规化，我们推得 $h \in M_0$。因此， $h \in M_0 \cap H$。现在， $M \subseteq M_0 \cap H$，且 $M_0 \cap H$ 是 H 的一个 $\mathfrak{X}$-子群，因为类 $\mathfrak{X}$ 对子群封闭。但 M 是 H 的一个极大 $\mathfrak{X}$-子群，所以必有 $M = M_0 \cap H$。因此， $h \in M_0 \cap H = M$。□

下一个结果的特殊情形已针对 CT-群（见 [6]和[13]）以及满足 $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_k$ 的 $\mathfrak{X}$T-群（见 [17]）得到证明。

命题 1.5. 设 $\mathfrak{X}$ 是一个包含所有阿贝尔群的归纳类。若一个 $\mathfrak{X}$T-群 G 是可分解的，则 G 属于 $\mathfrak{X}$

证明。 设 G 属于 $\mathfrak{X}$T，并假设对于非平凡群 A 和 B，有 $G = A \times B$。设 $a_1,\ldots,a_n \in A$和 $b_1,\ldots,b_m \in B$ 是非单位元。我们知道，每个子群 $\langle a_i, b_1\rangle$ 都是阿贝尔群，因此属于 $\mathfrak{X}$。这表明

$$\langle a_1, \cdots, a_n, b_1\rangle \in \mathfrak{X},$$

重复同样的论证，我们得到

$$\langle a_1, \cdots, a_n, b_1, \ldots, b_m\rangle \in \mathfrak{X}.$$

现在，归纳性的假设意味着 $A \times B \in \mathfrak{X}$。 □

可以用类似的论证来验证下一个结果。请将本命题的最后一个结论与引理 7.2 进行比较。

命题 1.6. 设 $\mathfrak{X}$ 是一个包含所有阿贝尔群的归纳类。

(1) 若 G 的任意两个不同的极大 $\mathfrak{X}$-子群的交集是平凡的，则 G 是一个 $\mathfrak{X}$T-群。(2) 若 G 是一个 $\mathfrak{X}$T-群，则 G 的任意两个不同的极大 $\mathfrak{X}$-子群的交集是平凡的。(3) 若 G 是一个无挠 $\mathfrak{X}$T-群，且对于某个 x、某个 $y \in G$ 以及某些非零整数 n 和 m，有 $x^m = y^n$，则 $\langle x、 y\rangle \in \mathfrak{X}$。(4) 若一个 $\mathfrak{X}$T-群 G 不属于 $\mathfrak{X}$，则它是无中心的，因此不是幂零群。

类 $\mathfrak{X}$T 和 C$\mathfrak{S}\mathfrak{X}$ 还具有另外两个性质；当 $\mathfrak{X}$ 为归纳的时，它们也是归纳的。

命题 1.7。 如果 $\mathfrak{X}$ 是一个群的归纳类，那么 $\mathfrak{X}$T也是如此。

证明。 设 $\mathfrak{X}$ 是一个群的归纳类。我们知道，类 $\mathfrak{X}$T 对子群封闭。还需证明：如果 $(G_i)_{i\in I}$ 是 $\mathfrak{X}$T 中元素的一个升链，那么该链的并集 G 属于 $\mathfrak{X}$T。注意，我们可以将指标集 I 视为一个线性有序集，使得$i \leq j$ 蕴含 $G_i \subseteq G_j$。设 A 和 B 是 $\mathfrak{X}$-子群，分别属于 G，并假设$A\cap B$ 包含 G中的一个非单位元 x。对于每个 $i \in I$，令 $A_i = A\cap G_i$和 $B_i = B \cap G_i$；注意，每个 A_i 以及每个 B_i 都属于 $\mathfrak{X}$。由于 $x \in G$和 G 是 $(G_i)_{i\in I}$的并集，因此必存在一个 $i_0 \in I$ 使得 $x \in G_{i_0}$；由此， $x \in A_{i_0} \cap B_{i_0}$。因此，对于每个 $i \geq i_0$，交集 $A_i \cap B_i$ 均为非平凡的，所以，join $H_i = \langle A_i, B_i\rangle$ 是 G的一个 $\mathfrak{X}$-子群。最后，显然

$$\langle A, B\rangle = \bigcup_{i\geq i_0} H_i.$$

由于群类 $\mathfrak{X}$ 是归纳的，且 $(H_i)_{i\in I}$ 是一个升链，因此我们得出 $\langle A, B\rangle$ 属于 $\mathfrak{X}$。□

命题 1.8。 设 $\mathfrak{X}$ 是一个群的归纳类，且满足 C$\mathfrak{S}\mathfrak{X}$ $\subseteq\mathfrak{X}$T。那么，C$\mathfrak{S}\mathfrak{X}$ 是一个群的归纳类。

证明。 我们已经证明，若群类 $\mathfrak{X}$ 是归纳的且满足 C$\mathfrak{S}\mathfrak{X}$ $\subseteq$ $\mathfrak{X}$T，则 C$\mathfrak{S}\mathfrak{X}$ 对子群封闭；因此，尚需证明 C$\mathfrak{S}\mathfrak{X}$ 对升链封闭。为此，设 $(G_i)_{i\in I}$ 是由 C$\mathfrak{S}\mathfrak{X}$-群构成的升链，并令 G 为该链的并。设M 是 G 的一个极大 $\mathfrak{X}$-子群，并假设对某个 $g \in G$有 $M \cap M^g \neq \{1\}$；考虑一个非单位元 $x = m^g \in M \cap M^g$，其中 $m \in M$。我们知道存在一个指标 $j \in I$，使得 g， x， $m \in G_j$。此外，我们还有

$$x \in (G_j \cap M)^g \cap (G_j \cap M).$$

我们证明 $G_j \cap M$ 是 G_j 的极大 $\mathfrak{X}$ 子群。设 $G_j \cap M \subsetneq K \subseteq G_j$，其中 K 是一个 $\mathfrak{X}$ 子群。回顾前述命题， G 属于 $\mathfrak{X}$T，且我们有 $M \cap K \neq \{1\}$（因为它包含 x）。因此，$\langle M$， $K\rangle$ 是 G 的一个 $\mathfrak{X}$ 子群，因此根据 M 的极大性，我们有 $K \subseteq M$。这意味着 $K = G_j \cap K \subseteq G_j \cap M$。因此， $G_j \cap M$ 是一个

G_j 的极大 $\mathfrak{X}$ 子群。由于 G_j 是 $\mathsf{CS}\mathfrak{X}$，我们必有 $g \in G_j \cap M$，进而有 $g \in M$，这就证明了 M 在 G 中是自正规化的。□

尽管人们可能会预期迭代 $\mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}\mathrm{T}$ 会产生无穷多个新群类，但以下结果表明，当 $\mathfrak{X}$ 对子群封闭时，情况并非如此。

命题 1.9。对于每个子群封闭群类 $\mathfrak{X}$，都有 $\mathfrak{X}\mathrm{T}^2 = \mathfrak{X}\mathrm{T}$，其中 $\mathfrak{X}\mathrm{T}^2$ 表示群类 $(\mathfrak{X}\mathrm{T})T$。

证明。包含关系 $\mathfrak{X}\mathsf{T} \subseteq \mathfrak{X}\mathsf{T}^2$ 显然成立。对于反向包含，设 $G \in \mathfrak{X}\mathsf{T}^2$，并令 A 和 B 为 $\mathfrak{X}$ 的子群，且它们是 G 的 $A \cap B \neq \{1\}$。由于假设 $\mathfrak{X}$ 对子群封闭，A 和 B 都属于群类 $\mathfrak{X}\mathsf{T}$。现在利用 $G \in \mathfrak{X}\mathsf{T}^2$，这一假设，我们得到 $H = \langle A,\ B\rangle \in \mathfrak{X}\mathsf{T}$。但 A 和 B 都是 $\mathfrak{X}$-群 $\mathfrak{X}\mathsf{T}$ H 的子群，因此必有 $A \cap B \neq \{1\}$ $\langle A,\ B\rangle \in \mathfrak{X}$。这说明 $G \in \mathfrak{X}\mathsf{T}$，从而证明得证。□

对于赋值 $\mathfrak{X} \mapsto \mathsf{CS}\mathfrak{X}$，在施加更强假设的情况下，类似结果同样成立。

命题 1.10。对于满足 $\mathrm{CS}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}\mathrm{T}$ 的每个群的归纳类 $\mathfrak{X}$，我们有 $\mathrm{CS}^2\mathfrak{X} = \mathrm{CS}\mathfrak{X}$，其中 $\mathrm{CS}^2\mathfrak{X} = \mathrm{CS}(\mathrm{CS}\mathfrak{X})$。

证明。令 $G \in \mathsf{CS}\mathfrak{X}$，并注意到唯一的极大 $\mathsf{CS}\mathfrak{X}$-子群是 G 本身，而它是自正规化的。这证明了 $G \in \mathsf{CS}^2\mathfrak{X}$。接下来，设 $G \in \mathsf{CS}^2\mathfrak{X}$，并令 M 为 G 的一个极大 $\mathfrak{X}$-子群。显然，$\mathfrak{X} \subseteq \mathsf{CS}\mathfrak{X}$，因此 M 是 G 的一个 $\mathsf{CS}\mathfrak{X}$-子群。由于类 $\mathfrak{X}$ 是归纳的且 $\mathsf{CS}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}\mathsf{T}$，如上所述，类 $\mathsf{CS}\mathfrak{X}$ 也是归纳的。因此，我们可以将 M 扩展为 G 的一个极大 $\mathsf{CS}\mathfrak{X}$-子群 M'。现在，M 是包含于 M' 中的 G 的一个极大 $\mathfrak{X}$-子群，因此 M 必须是 $\mathsf{CS}\mathfrak{X}$-群 M' 的一个极大 $\mathfrak{X}$-子群；作为这样的子群，M 在 M' 中是自正规化的。此外，由于假设 G 是一个 $\mathsf{CS}^2\mathfrak{X}$-群，我们可以推断 M' 在 G 中是自正规化的。最后，容易看出自正规性具有传递性；也就是说，由于 M 在 M' 中是自正规化的，且 M' 在 G 中是自正规化的，立即可得 M 在 G 中是自正规化的。这表明 $G \in \mathsf{CS}\mathfrak{X}$，从而证明完毕。□

如上所述，关于 $\mathsf{CS}\mathfrak{X}$-群性质的大多数命题都依赖于假设 $\mathsf{CS}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}\mathsf{T}$。已知当 $\mathfrak{X}$ 是阿贝尔群簇以及当 $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_k$ 时，这一包含关系成立。我们将进一步给出具有这一性质的簇的例子；不过，正如我们将看到的，也存在反例。

2. 有限 $\mathsf{CS}\mathfrak{X}$-群

有限CSA群是阿贝尔群。所有已知的这一事实的证明都依赖于表示论、有限单群分类或 Feit-Thompson 定理。读者可参见 [6], [7], 或 [10]。在 [17] 中，针对 $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_k$ 的情形证明了一个类似的结果：有限 $\mathsf{CS}\mathfrak{X}$ 群属于 $\mathfrak{X}$。

[17] 中给出的证明依赖于有限弗罗贝尼乌斯群的结构。在本节中，我们将为以下结果给出一个完全初等的证明。

定理 2.1. 设 $\mathfrak{X}$ 是满足以下条件的群类：
(1) 每个有限循环群都是 $\mathfrak{X}$-群。(2) 每个有限
CS$\mathfrak{X}$-群都属于 $\mathfrak{X}$T。
那么，每个有限CS$\mathfrak{X}$-群都是 $\mathfrak{X}$-群。

在给出证明之前，值得指出一个更一般的结论也成立。不过，其证明需要用到弗罗贝尼乌斯群的性质（参见 [8]，了解弗罗贝尼乌斯群的结构）。

命题 2.1. 设 $\mathfrak{X}$ 是一个包含所有有限循环群的群类。那么，每个有限CS$\mathfrak{X}$-群都属于 $\mathfrak{X}$。

证明。令 G 为有限 CS$\mathfrak{X}$-群，并设 G 不属于 $\mathfrak{X}$。考虑 G的两个极大 $\mathfrak{X}$-子群 A 和 B。注意到由于 $\mathfrak{X}$ 包含所有有限循环群，我们可以推断 A 和 B 是非平凡的；又由于G 不属于 $\mathfrak{X}$，我们可以得出结论： A 和 B 是 G 的真子群。 A 和 B 的自正规性意味着它们是 G中的弗罗贝尼乌斯补，因此它们是共轭元（见 [8]）。这意味着，对于某个 $x \in G$，$B = A^x$ 成立，因而 G 的每个极大 $\mathfrak{X}$-子群都具有这种形式。现在，对于任意元素 $g \in G$，循环子群 $\langle g \rangle$ 必包含于某个极大 $\mathfrak{X}$-子群中，从而得到

$$G = \bigcup_x A^x.$$

这导致矛盾 $G = A$。 □

现在我们回到定理 2.1，并给出其证明。

证明。假设 G 是有限 CS$\mathfrak{X}$-群。第一步是得到 G 的一个特殊覆盖，如下所示。我们先取 G的一个非平凡元素m_1。该元素生成 G的一个非平凡循环子群 $\langle m_1 \rangle$；根据我们的假设，它是一个 $\mathfrak{X}$-群。由于假设 G 是有限的，因此存在 G 的一个极大 $\mathfrak{X}$- 子群 M_1，其中包含这个循环群。如果这个群 M_1 恰好是 G，那么 G 是一个 $\mathfrak{X}$-群，证明完毕。否则，我们考虑 G中 M_1 的所有不同共轭元构成的集合 $[M_1]$，其数量为 $[G\colon N_G(M_1)]$。注意，由于M_1 在 G 中自正规化， $N_G(M_1) = M_1$，因此 $[M_1]$ 的大小实际上是 $[G : M_1]$。现在，$[M_1]$ 中的每个元素都是一个极大 $\mathfrak{X}$-子群。此外，自正规性意味着，对于每个 $x \in G \setminus M_1$， M_1 与 M_1^x的交集是平凡的。而且，若 $[M_1]$中的 M_1^x和 M_1^y是不同元素，则 $M_1^x \cap M_1^y = \{1\}$。事实上，若 $M_1^x \cap M_1^y \neq \{1\}$，则 $M \cap M^{yx^{-1}} \neq \{1\}$； M_1的自正规性迫使 $M_1 = M_1^{yx^{-1}}$成立，因此 $M_1^x = M_1^y$，这与假设矛盾。现在，如果 $[M_1]$ 中所有成员的并集 U_1 恰好等于 G，那么我们就得到了所需的 G覆盖。否则，我们就在$G\setminus U_1$中取一个元素 m_2；该元素生成一个循环群，它包含于一个极大

G 的 M_2 $\mathfrak{X}$-子群，正如前面所述。注意，由于 M_2 包含$m_2 \in G \setminus U_1$， $\mathfrak{X}$ T-性质意味着 $[M_1]$ 中的任何成员都不会与M_2 有非平凡交集。事实上，这里还能进一步说明：集合 $[M_2]$（即 M_2的所有不同共轭元组成的集合）中的任何元素，都不会与 $[M_1]$中的任何元素有非平凡交集。事实上，若 $M_1^x \cap M_2^y \neq \{1\}$，则 $\mathfrak{X}$T-性质将推出$M_1^x = M_2^y$，进而导致矛盾。设 $U_1 \cup U_2 = G,$，其中U_2 是 $[M_2]$中所有成员的并集。那么，我们就得到了所需的 G覆盖；否则，我们按上述方法继续。由于假设 G 是有限的，这一过程必将终止，最终得到 G的互不相同的极大 $\mathfrak{X}$-子群M_1，.....， M_r，它们满足以下条件：

(1) 对于每个 i 和 j （其中 $i \neq j$），集合 $[M_i]$ 的每个成员都与集合 $[M_j]$的每个成员平凡相交。(2) 如果 U_i 是 $[M_i]$的所有成员的并集，那么

$$G = \bigcup_{i=1}^{r} U_i.$$

(3) 每个 M_i 都包含一个非单位元 m_i。

有了 G 的这个特殊覆盖，我们可以如下计算 G 中元素的数量：

$$\begin{aligned} |G| - 1 &= \sum_{k=1}^{r} [G : N_G(M_k)](|M_k| - 1) \\ &= \sum_{k=1}^{r} [G : M_k](|M_k| - 1) \\ &= \sum_{k=1}^{r} \frac{|G|}{|M_k|}(|M_k| - 1). \end{aligned}$$

将两边除以 $|G|$ 得到

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{|G|} &= \sum_{k=1}^{r} (1 - \frac{1}{|M_k|}) \\ &= r - \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{|M_k|}. \end{aligned}$$

重新整理后得到如下结果

$$r = 1 + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{|M_k|} - \frac{1}{|G|} < 1 + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{|M_k|}.$$

现在回想一下，每个 M_k 都包含一个非单位元，使得对于每个 k，$1/|M_k| \leq 1/2$ 。将这一点与上文结合，可得以下不等式

$$r < 1 + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{|M_k|} \leq 1 + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{2} = 1 + r/2.$$

也就是说， $r < 2$，因此， $r = 1$。也就是说， G 实际上是 $[M_1]$ 的所有成员的并集 U_1 。当然，这意味着 $G = M_1$ ，从而表明 G属于 $\mathfrak{X}$。□

作为一个应用，我们现在也给出以下结果的一个初等证明。

推论 2.1. 设 $\mathfrak{X}$ 是一个包含所有有限循环群的群的归纳类，并假设 $\mathrm{CS}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}\mathrm{T}$。如果一个 $\mathrm{CS}\mathfrak{X}$-群 G 是局部有限的，那么它属于该类 $\mathfrak{X}$。

证明。 要证明局部有限的 $\mathrm{CS}\mathfrak{X}$-群 G 属于 $\mathfrak{X}$，只需证明 G 的每个有限生成子群 H 都属于 $\mathfrak{X}$。但是， G 的有限生成子群 H 是有限群，并且根据命题 1.4，它是一个 $\mathrm{CS}\mathfrak{X}$-群。这就得到了所需结果。□

一个自然的问题是对各种类 $\mathfrak{X}$ 中的有限 $\mathfrak{X}\mathrm{T}$-群进行分类。有限 CT 的情形已经解决（完整的历史见 [6]）。然而，对于其他情形，分类问题仍未解决，不过或许可以针对某些特殊的群簇得到一些结果。

3. $\mathrm{CS}\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}\mathrm{T}$ 的蕴含关系

如前所述，CSA-群类包含于 CT-群类；当 $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_k$ 为幂零类至多为 k 的幂零群簇时，情况也相同（见 [17]）。本节将证明，对于任意幂零群的归纳类，同样的性质也成立。但如前所强调的，存在一些簇 $\mathfrak{X}$ ，使得蕴含关系 $\mathrm{CS}\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}\mathrm{T}$ 不成立；下文将给出这样的簇的一个例子。

命题 3.1. 设 $\mathfrak{X}$ 是一个群的归纳类，且其中每个元素都是幂零的。那么，$\mathrm{CS}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}\mathrm{T}$。

证明。 设 G 是一个 $\mathrm{CS}\mathfrak{X}$-群。假设 A 和 B 是 G 的 $\mathfrak{X}$-子群，且 $A \cap B \neq \{1\}$；令 $A \cap B$ 中的一个非平凡元素为 x。由于 $\mathfrak{X}$ 是一个群的归纳类，佐恩引理推出存在一个包含 A 的极大 $\mathfrak{X}$-子群 M，它是 G 的子群；我们将证明 $B \subseteq M$。为此，取 $b \in B$，并注意到根据我们的假设，B 是幂零的。假设 B 的幂零类为 k，并观察到

$$1 = [b,_k x] = [b,_{k-1} x]^{-1} x^{-1} [b,_{k-1} x] x \in M.$$

但 x 本身属于 M，因此，

$$1 \neq x \in M \cap M^{[b,_{k-1} x]^{-1}}.$$

由于 M 在 G 中是自正规化的，我们得出 $[b,_{k-1} x] \in M$。但接下来，根据

$$[b,_{k-1} x] = [b,_{k-2} x]^{-1} x^{-1} [b,_{k-2} x] x \in M$$

我们（如前所述）推得 $[b,_{k-2} x] \in M$。重复这一过程，最终可知必有 $[b, x] = b^{-1} x^{-1} b x \in M$。再次利用自正规性

结合 M 以及 $x \in M$ 这一事实，我们得到所需结果，即 $b \in M$。这表明 $B \subseteq M$，因此，$\langle A,\ B\rangle \subseteq M$。最后，由于我们假设 $\mathfrak{X}$ 对子群封闭，故可得 $\langle A,\ B\rangle$ 是一个 $\mathfrak{X}$-群，从而完成证明。□

现在，假设 p 是奇素数，并考虑由二面体群 D_{2p}生成的簇 $\mathfrak{X}$ =Var(D_{2p})。考虑群 D_{2p}的以下几个副本：

$$A = \langle a_1, a_2 :\ a_1^2 = a_2^p,\ a_1a_2 = a_2^{-1}a_1\rangle,$$
$$B = \langle\ b_1, b_2 :\ b_1^2 = b_2^p,\ b_1b_2 = b_2^{-1}b_1\rangle.$$

接着，考虑合并自由积 $G = A *_{a_1=b_1} B$。

定理 3.1. 群 G 属于 CS$\mathfrak{X}$ ，但不属于 $\mathfrak{X}$T。

证明。首先，注意簇 $\mathfrak{X}$ 是局部有限的。将 A 和 B 视为 G的子群。我们有 $A,\ B \in \mathfrak{X}$和 $A \cap B \neq \{1\}$。但是，$\langle A,\ B\rangle = G \notin \mathfrak{X}$。这表明 G 不属于 $\mathfrak{X}$T。在证明 G 是一个 CS$\mathfrak{X}$-群之前，我们先证明 A 和 B 是 G的自正规化子群。只需证明 A 是自正规化的，因为关于 B 的论证类似。设 $A \cap A^g \neq \{1\}$ 对某个 $g \in G$成立。令

$$g = x_1y_1x_2y_2 \cdots x_my_m$$

是 g 的约化形式，使得，

$$x_i \in A \setminus \langle a_1\rangle \quad \text{for} \quad 2 \leq i \leq m$$

and

$$y_i \in B \setminus \langle b_1\rangle \quad \text{for} \quad 1 \leq i \leq m-1.$$

存在一个非单位元 $h \in A$ ，使得

$$y_m^{-1}x_m^{-1} \cdots y_1^{-1}x_1^{-1}hx_1y_1 \cdots x_my_m \in A.$$

这表明 $m = 1$，因此，$y_1^{-1}x_1^{-1}hx_1y_1 \in A$。我们知道

$$x_1^{-1}hx_1 = a_1^ia_2^r \quad \text{for some} \quad i = 0, 1,\ 0 \leq r \leq p-1$$

and

$$y_1 = b_1^jb_2^s \quad \text{for some} \quad j = 0, 1,\ 0 \leq s \leq p-1.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} y_1^{-1}x_1^{-1}hx_1y_1 &= b_2^{-s}b_1^{-j}a_1^ia_2^rb_1^jb_2^s \\ &= b_2^{-s}a_1^{i-j}a_2^ra_1^Jb_2^s \\ &= b_2^{-s}a_1^ia_2^{-r}b_2^s \\ &= a_1^ib_2^sa_2^{-r}b_2^s, \end{aligned}$$

显然，除以下情况外，这个最后的元素长度为 3：

(1) $s = 0$。在这种情况下，我们有 $y_1 = b_1^j = a_1^j$ ，所以 $g = x_1a_1^j \in A$。

(2) $r = 0$。在这种情况下，$g^{-1}hg = a_1^ib_2^{2s} \in A$ ，这意味着 $b_2^{2s} = 1$。由于 $s \neq 0$，奇素数 p 必须整除 $2s$ ，这是不可能的，因为$0 < s \leq p-1$。

这表明 A 是 G 的自正规化子群；类似地， B 是 G 的自正规化子群。

现在，我们已准备好证明 G 属于 $\mathsf{CS}\mathfrak{X}$ 类。设 M 是 $\mathfrak{X}$ 的极大子群，且 G。我们断言， M 要么包含在 A 的某个共轭元中，要么包含在 B的某个共轭元中。回顾一下，当 M 有限时，这一结论成立。不过，目前我们只知道 M 是局部有限的。令

$$T = \{Ag : g \in G\} \cup \{Bg : g \in G\},$$

并按如下方式定义 G 在 T 上的右作用：

$$(Ag)x = Agx, \quad (Bg)x = Bgx.$$

对于每个有限子集 $S \subseteq M$，有

$$\langle S\rangle \subseteq A^g \text{ or } \langle S\rangle \subseteq B^g,$$

对某个 $g \in G$成立。例如，假设我们有 $\langle S\rangle \subseteq A^g$。那么 Ag 是 $\langle S\rangle$ 的不动点，我们将其记为

$$Ag \in \mathrm{Fix}_T(\langle S\rangle).$$

因此，对于所有有限子集 $S \subseteq M$，集合 $\mathbf{Fix}_T(\langle S\rangle)$ 都非空；它也是有限的。为说明这一点，设 Ag 和 Ah 属于 $\mathbf{Fix}_T(\langle S\rangle)$。那么$A^g \cap B^h \neq \{1\}$，因此， $gh^{-1} \in A$ 由 A的自正规性可得。于是，

$$|\{Ah : Ah \in \mathrm{Fix}_T(\langle S\rangle)\}| \leq |A| = 2p.$$

类似的论证表明，若某个陪集 Bh 属于 $\mathbf{Fix}_T(\langle S\rangle)$，则此类元素的个数至多为 $2p$。这意味着，对于任意有限子集 $S \subseteq M$，我们有

$$0 \neq |\mathrm{Fix}_T(\langle S\rangle)| \leq 4p.$$

定义一个集合

$$T_M = \{\mathrm{Fix}_T(\langle S\rangle) : S \subseteq M \setminus \{1\} \text{ and } |S| < \infty\}.$$

假设 S_0 是 $M \setminus \{1\}$ 的一个有限子集，使得 $\mathbf{Fix}_T(\langle S_0\rangle)$ 尽可能小。那么，对于任意其他的 S，我们有

$$\mathrm{Fix}_T(\langle S_0 \cup S\rangle) \subseteq \mathrm{Fix}_T(\langle S_0\rangle),$$

因此，

$$\mathrm{Fix}_T(\langle S_0 \cup S\rangle) = \mathrm{Fix}_T(\langle S_0\rangle).$$

But,

$$\mathrm{Fix}_T(\langle S_0 \cup S\rangle) \subseteq \mathrm{Fix}_T(\langle S_0\rangle) \cap \mathrm{Fix}_T(\langle S\rangle)$$

这也表明 $\mathbf{Fix}_T(\langle S_0\rangle)$ $\subseteq \mathbf{Fix}_T(\langle S\rangle)$[。] 因此， T_M 中各元素的交非空，进而意味着对于某个 $g \in G$，$M \subseteq A^g$。现在，由于 M 的极大性，我们有 $M = A^g$，从而 M 是自正规化的，这就证明了 G 是 $\mathsf{CS}\mathfrak{X}$。□

请注意，上述簇 $\mathfrak{X}$ 是后交换的。对于后交换群的簇 $\mathfrak{A}_2$ ，我们建立了一个弱于 $\mathfrak{X}\mathbf{T}$ 性质的性质；证明见下文。

命题 3.2. 设 $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}_2$ 为后交换群簇。设 G 为一个 CS$\mathfrak{X}$-群。那么，对于任意 $\mathfrak{X}$-子群 A和 B，若 $A \cap B$非阿贝尔，则子群 $\langle A, B\rangle$ 为后交换群。

证明。设 A 和 B 为 G 的后交换子群，且 $A \cap B$ 非阿贝尔；设 $x, y \in A \cap B$，其中 $[x, y] \neq 1$，并设 M为包含 A的 G 的极大后交换子群。我们将证明 $B \subseteq M$。为此，设$b \in B$ ，并注意到，由于 x、 y和 b 都是后交换群 B的元素，

$$1 = [[x, b], [x, y]] = [x, b]^{-1}[x, y]^{-1}[x, b][x, y] \in M.$$

由于 $[x, y] \in M$，我们推得

$$1 \neq [x, y]^{-1} \in M \cap M^{[x,b]^{-1}}.$$

由于 M在 G中自正规化，我们推得 $[x, b] = x^{-1}b^{-1}xb \in M$。但是$x \in M$，因此 $1 \neq x \in M \cap M^b$；再次利用 M 的自正规性，可知 $b \in M$。因此， $B \subseteq M$，于是 $\langle A, B\rangle$ 为后交换群。□

4. 方程域

如前所述，本文的主要思想源于群上的代数几何问题。为求完整，我们回顾必要的背景知识，然后证明，任何包含所有循环群的归纳类都会产生一大类方程域。

我们采用与 [2], [5], 和 [14]相同的记号。设 G 是一个群， $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 是一个变量集。设 $\mathbb{F}[X]$ 是由 X 生成的自由群，$G[X] = G * \mathbb{F}[X]$ 是 G 与 $\mathbb{F}[X]$的自由积。 $G[X]$ 中的每个元素都是变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 上的群字，其系数取自 G。如果 $w(x_1, \ldots, x_n) \in G[X]$, 那么 $w(x_1, \ldots, x_n) \approx 1$ 称为一个群方程。集合

$$\{(g_1, \ldots, g_n) \in G^n : w(g_1, \ldots, g_n) = 1\}$$

是给定方程在 G 中的解集。系数来自 G 的方程组是任意一组方程 $S \approx 1$, 其中 $S \subseteq G[X]$。与此方程组对应的代数集是在 G^n 中满足 $S \approx 1$ 所有方程的公共解的集合。我们将此代数集记为 $V_G(S)$。

假设对每个 $S \subseteq G[X]$, 都存在一个有限子集 $S_0 \subseteq S$ ，使得 $V_G(S) = V_G(S_0)$。在这种情况下，我们称群 G 为方程诺特群。若 G 是方程诺特群，则每个代数集都可以唯一地分解为有限个不可约代数集的并。群 G 称为整域，当且仅当对于每个自然数 n， G^n 中的任意两个代数集的并仍是一个代数集。关于整域的概念，还有一种以零因子为基础的定义。一个

元素 $x \in G$ 称为零因子，如果存在一个非单位元$y \in G$ ，使得对每个 $g \in G$，都有 $[x^g, y] = 1$。文献 [5], 证明了， G 是整域当且仅当 G 不含任何非平凡零因子。不难看出， G 是整域当且仅当它满足如下性质：对每个非平凡正规子群 $K \leq G$，中心化子$C_G(K)$是平凡的。例如，每个非阿贝尔自由群都是整域。这一结论可以推广到 CSA 群。已有证明表明，每个 CSA 群都是整域（另见 [2]）；这一结果又推广到了 CS$\mathfrak{X}$ 群的情形，其中 $\mathfrak{X}$ 是幂零类至多为 k 的幂零群簇（见 [14]）。现在，我们给出一个更一般的结果。

定理 4.1. 设 $\mathfrak{X}$ 是一个包含所有循环群的群的归纳类。若 G 是一个非 $\mathfrak{X}$ 群的 CS$\mathfrak{X}$-群，则 G 是一个方程域。

证明。 反设 G 含有非平凡零因子。也就是说， G 包含一对非单位元 x, y ，使得对所有 $g \in G$， $[x^g, y] = 1$。 G 的子群 $\langle y \rangle$ 是循环的，因此它是 G 的一个$\mathfrak{X}$-子群，并且包含 y。由于我们假设 $\mathfrak{X}$ 对链的并封闭，佐恩引理蕴含存在 G 的一个极大$\mathfrak{X}$-子群 M ，它包含 y。注意，对所有 $g \in G$，我们有

$$1 = [x^g, y] = (x^g)^{-1} y^{-1} x^g y \in M;$$

由于 $y \in M$ 也成立，对于每个 $g \in G$，我们得到

$$1 \neq y^{-1} \in M \cap M^{(x^g)^{-1}}.$$

由于 M 在 G中自正规化，我们得出对所有 $g \in G$， $x^g \in M$ 。特别地， $x \in G$。但此时，任取 $g \in G$

$$1 \neq x \in M \cap M^{g^{-1}}.$$

再次利用 M 是自正规化的这一事实，我们得出 $G \subseteq M$，进而得到 $G = M$。这与我们的假设矛盾，即 G 不是一个 $\mathfrak{X}$-群，由此完成证明。□

5. 自由积

在本节中， $\mathfrak{X}$ 表示一个群簇。利用自由积构造，我们得到更多 CS$\mathfrak{X}$-群；同样的思路也可用于构造新的 $\mathfrak{X}$T-群。下文中，群族 $\{G_i\}_{i \in I}$ 的自由积记为 $\prod^*_{i \in I} G_i$。请回忆，任意两个阶至少为三的群的自由积都包含自由群$\mathbb{F}_2$。这一事实将在下一个结果的证明中用到。

定理 5.1。 设 A 和 B 是 CS$\mathfrak{X}$-群，且不含对合。则自由积 $G = A * B$ 属于 CS$\mathfrak{X}$。

证明。 设 M 是 G的一个极大 $\mathfrak{X}$-子群。根据 Kurosh 子群定理， M 具有如下形式

$$M = \mathbb{F}[X] * \left(\prod_{i \in I}^{*} K_i^{x_i} \right) * \left(\prod_{j \in J}^{*} L_j^{y_j} \right),$$

其中， $X \subseteq G$, $\mathbb{F}[X]$ 是由 X生成的自由群，每个 K_i 都是 A的非平凡子群，每个 L_j 都是 B的非平凡子群，并且每个 x_i和y_j 都是 G的元素。下面讨论几种情形:

(1) 假设 M 的上述自由积分解至少包含两个自由因子。那么，自由群 $\mathbb{F}_2$ 是 M 的子群，这意味着 $\mathbb{F}_2 \in \mathfrak{X}$。因此， $\mathfrak{X}$ 是全体群的簇。由此，$M = G$ 是自正规化的，这显然成立。

(2) 假设对于某个 $K_i \leq A$ 或某个 $L_j \leq B$， $M = K_i^{x_i}$或 $M = L_j^{y_j}$ 以及元素 x_i， $y_j \in G$成立。不失一般性，我们可以假设 $M = K_i^{x_i}$。这意味着对于某个 $x \in G$， $M \subseteq A^x$ 成立。假设对于某个 $g \in G$，有 $M \cap M^g \neq \{1\}$。那么，$(M \cap M^g)^{x^{-1}} \neq \{1\}$，因此，

$$M^{x^{-1}} \cap M^{gx^{-1}} \neq \{1\}.$$

我们知道 $M^{x^{-1}} \subseteq A$和 $M^g \subseteq A^{xg}$，因此 $M^{gx^{-1}} \subseteq A^{xgx^{-1}}$。由此，

$$A \cap A^{xgx^{-1}} \neq \{1\}.$$

由于 A 是 G的自由因子，我们必有 $xgx^{-1} \in A$。因此， $g \in A^x$。但是，根据我们的假设， A^x 是一个 CS$\mathfrak{X}$-群。由于 M 是 A^x的极大 $\mathfrak{X}$-子群，我们可以得出结论： M 在 A^x中自正规化，因此，假设 $M \cap M^g \neq 1$意味着 $g \in M$。这证明 M 在 G中自正规化。

(3) 最后一种情况是 $M = \langle z \rangle$ 为无限循环群的情形。若 z 的循环约化长度等于一，则 z 属于 A 的一个共轭元，或属于 B的一个共轭元。因此，我们可以使用与前一种情况类似的论证。于是，假设 z 的循环约化长度大于一。令 $M \cap M^g \neq \{1\}$，其中 $g \in G$。那么，存在两个非零整数 m 和 n，使得 $g^{-1}z^n g = z^m$。比较等式两边的循环约化长度，可得 $m = \pm n$。若 $m = n$，则 $gz^n = z^n g$，从而，$[g, z^n] = 1$。这意味着 g与 M的所有元素都可交换，因此，子群 $\langle g, M \rangle$ 是阿贝尔群。回顾一下， M是属于 $\mathfrak{X}$的一个无限循环群，因此每个阿贝尔群都是 $\mathfrak{X}$的一个元素。现在，由于 M 是 G的一个极大 $\mathfrak{X}$-子群，我们必有$M = \langle g, M \rangle$，因此， $g \in M$。剩下需要讨论的是 $m = -n$的情形。在这种情况下，我们有 $g^{-1}z^n g = z^{-n}$，因此，$[g^2, z^n] = 1$。我们知道 $g^2 \neq 1$，因为 A 和 B 都不含

任何对合。因此， g 与 z可交换，同样可以运用上述论证得出 $g \in M$。

因此， G 属于 CS$\mathfrak{X}$。 □

6. CS$\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{X}$T 作为全称类

CT 和 CSA 类是全称类；它们可以用群的一阶语言中的全称句公理化（见 [6]）。当 $\mathfrak{X}$ 是类至多为 k 的幂零群簇时， $\mathfrak{X}$T 和 CS$\mathfrak{X}$ 类也如此（见 [17]）。本节将这一结论推广到一大类簇：有限基簇 $\mathfrak{X}$ ，其二生成元相对自由群 $\mathfrak{X}$ 是有限表示的。注意，这包括所有有限基局部有限簇以及所有几乎幂零簇。回顾一下，如果一个簇由有限多个恒等式定义，

$$\mathfrak{X} = \mathrm{Var}(w_1 \approx 1, \ldots, w_m \approx 1),$$

那么它可以由单个恒等式定义

$$w_1(x_1, \ldots, x_n)w_2(y_1, \ldots, y_n)\cdots \approx 1$$

其中 x_1、……、 x_n、 y_1、……、 y_n、…… 是互不相同的变量。因此，在下文中，假定每个有限基簇都由单个恒等式定义。对于每个簇 $\mathfrak{X}$， $\mathfrak{X}$的二生成元相对自由元记作 $F_2(\mathfrak{X})$。

定理 6.1。 设 $\mathfrak{X}$ 是一个有限基簇，且 $F_2(\mathfrak{X})$ 是有限表示的。那么，类 $\mathfrak{X}$T 是普适的。此外，若 $\mathrm{CS}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}\mathrm{T}$，则 $\mathrm{CS}\mathfrak{X}$ 也是普适的。

证明。 设 $\mathfrak{X}$ =Var($w \approx 1$)。根据假设，我们有一个有限表示

$$F_2(\mathfrak{X}) = \langle X | R \rangle$$

其中 $|X| = 2$。令 $w(\mathbb{F}_2)$ 表示与字 w 对应的自由群 $\mathbb{F}_2$ 的词子群。此外，设 $\langle R^{\mathbb{F}_2} \rangle$ 是 $\mathbb{F}_2$ 中 R 的正规闭包。因此，

$$F_2(\mathfrak{X}) = \frac{\mathbb{F}_2}{w(\mathbb{F}_2)} \cong \frac{\mathbb{F}_2}{\langle R^{\mathbb{F}_2} \rangle},$$

由于上述同构的两边都是相对自由的，子群$\langle R^{\mathbb{F}_2} \rangle$ 是词子群，因此，

$$w(\mathbb{F}_2) = \langle R^{\mathbb{F}_2} \rangle.$$

由于 $R \subseteq w(\mathbb{F}_2)$，存在 $\mathbb{F}_2$ 的有限子集 S ，使得 $R = w(S)$。因此，

$$w(\mathbb{F}_2) = \langle w(S)^{\mathbb{F}_2} \rangle.$$

现在，设 $A = \langle X \rangle$ 是一个有限生成群，满足 $|X| = 2$，使得对于某个 $\mathbb{F}_2$ 的正规子群 K，有 $A = \mathbb{F}_2/K$。那么，对于 $\mathbb{F}_2$ 的某个有限子集 S，我们有

$$w(A) = w(\frac{\mathbb{F}_2}{K}) = \frac{w(\mathbb{F}_2)K}{K} = \frac{\langle w(S)^{\mathbb{F}_2}\rangle K}{K}.$$

因此，

$$w(A) = \langle w(\bar{S})^{\mathbb{F}_2/K}\rangle,$$

其中 $\bar{S} = \{sK : \ s \in S\}$ 是有限的。因此，$w(A) = \langle w(\bar{S})^A\rangle$。由此，我们证明了存在一个有限子集 $S \subseteq \mathbb{F}_2$（它仅取决于 $\mathfrak{X}$），使得对于每个二生成群 A，$w(A) = \langle w(\bar{S})^A\rangle$。这意味着，要验证一个二生成群 A 属于 $\mathfrak{X}$，只需验证群 A 中有限多个等式 $w(S) = \{1\}$。

现在，我们可以证明类 $\mathfrak{X}$T 是普适的。我们将把上述结果与命题 1.1 一起使用。注意，根据我们刚刚证明的结论，存在自由群中由 x 和 y 生成的一个有限子集 $S(x, y)$（它仅取决于 $\mathfrak{X}$），使得一个二生成群 $A = \langle a, b\rangle$ 属于 $\mathfrak{X}$ 当且仅当 $w(S(a, b)) = \{1\}$。定义一阶公式$Q(x, y)$如下：

$$\bigwedge_{x_1,\ldots,x_n \in S(x,y)} (w(x_1, \ldots, x_n) \approx 1).$$

因此，在群 G 中，$Q(a, b)$ 成立，当且仅当 $\langle a, b\rangle \in \mathfrak{X}$。

现在，我们使用命题 1.1：给定一个群 G，对于 G 的所有非单位元 x，要么 $C_G^{\mathfrak{X}}(x) = \emptyset$，要么 $C_G^{\mathfrak{X}}(x) \leq G$ 这一性质可转化为以下句子，我们将其称为 $\mathrm{Sub}_{\mathfrak{X}}$：

$$\forall x \forall y \forall z (x \neq 1 \wedge Q(x, y) \wedge Q(x, z) \longrightarrow Q(x, y^{-1}z)).$$

此外，性质 $C_G^{\mathfrak{X}}(x) \in \mathfrak{X}$ 可转化为以下句子集，其中每个 $n \geq 1$ 对应一个句子，该句子集可记为 $\mathfrak{X}^n$：

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \forall x (x \neq 1 \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} Q(x, x_i) \longrightarrow w(x_1, \ldots, x_n) \approx 1).$$

因此，具有 $\mathfrak{X}$T 性质可由上述全称句集公理化。换言之，群 G 属于 $\mathfrak{X}$T，当且仅当它是该句集的模型

$$\{\mathrm{Sub}_{\mathfrak{X}}, \mathfrak{X}^n : \ n \geq 1\}.$$

接下来，假设 $\mathsf{CS}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$T。根据 1.3，我们知道，一个 $\mathfrak{X}$T-群 G 属于 $\mathfrak{X}$，当且仅当

$$\forall x \neq 1 \forall z (\langle x, x^z\rangle \in \mathfrak{X} \longrightarrow \langle x, z\rangle \in \mathfrak{X})$$

这转化为（$\mathrm{Mal}_{\mathfrak{X}}$）：

$$\forall x \forall z (x \neq 1 \wedge Q(x, x^z) \longrightarrow Q(x, z)).$$

因此，成为 CS$\mathfrak{x}$ 的性质可由集合自动化表示

$$\{\mathrm{Sub}_{\mathfrak{X}}, \mathrm{Mal}_{\mathfrak{X}}, \mathfrak{X}^n : \ n \geq 1\}.$$

□

满足 6.1 假设的簇有很多例子，其中包括类至多为 k 的幂零群簇、每个有限基局部有限簇（等价地，每个具有有限公理秩的局部有限簇），以及一般而言，每个几乎有限幂零簇。不过，我们不确定是否还存在其他非平凡例子。A. Olshanskii 关于是否存在非平凡的有限表示相对自由群且该群并非几乎幂零的旧问题，至今仍未解决（见 [9] 中的问题 11.73）。可以利用上述定理构造无穷多个 $\mathfrak{x}$T 群和 CSX 群的例子。

推论 6.1。设 $\mathfrak{x}$ 是一个有限基簇，且相对自由元 $F_2(\mathfrak{x})$ 是有限表示的。那么， $\mathfrak{x}$T 群的任意超积都是 $\mathfrak{x}$T。此外，若 $\mathrm{CS}\mathfrak{x} \subseteq \mathfrak{x}\mathrm{T}$，则 $\mathrm{CS}\mathfrak{x}$群的每个超积都是 $\mathrm{CS}\mathfrak{x}$。

例如，若有两个没有对合的 CS$\mathfrak{x}$-群 A 和 B，那么对于任意集合 I 以及其上的任意超滤子 $\mathcal{U}$，超幂 $(A * B)^I/\mathcal{U}$就是一个新的 CS$\mathfrak{x}$-群。因此，我们拥有无限多个新的 CS$\mathfrak{x}$-群（因而也有方程域）。

7. 剩余自由群

众所周知，CT-群与 CSA-群的类和剩余自由群及完全残余自由群的类密切相关，因此在研究非阿贝尔自由群的全称理论时发挥着重要作用（见 [1], [3], 和 [15]）。文献 [1]证明，在具有剩余自由这一性质的前提下，每个 CT-群都属于 CSA 类；文献 [17]将这一结果推广到了情形 $\mathfrak{x} = \mathfrak{N}_k$。在本节最后，我们将把这套理论推广到更广泛的簇。

我们先回顾一些基本概念。设 A 是一个群。 A-自由群是由若干个 A 的副本作自由积得到的。显然，如果 A 是一个无限循环群，那么 A-自由群就是普通自由群。

以下两个事实可以验证（见 [17]）：
(1) 如果 $|A| \geq 3$，那么 $A * A * A$ 嵌入 $A * A$ 中。(2) 如果 $|A| \geq 3$，那么自由群 $\mathbb{F}_2$ 嵌入 $A * A$ 中。

下文中我们始终假设 A 不含对合。若对于 G 中的每个非单位元 g，都存在一个从 G 到某个 A-自由群 F 的同态，使得 g 映射为 F 中的非单位元，则称群 G 是剩余 A-自由的。若对于 G 中任意有限个互不相同的非平凡元素 g_1、……、 g_n，都存在一个从 G 到某个 A-自由群 F 的同态，将 g_1、……、 g_n 中的每一个映射为

F 中的一个非单位元。注意，当 A 是一个不含对合的群时，每个（完全）剩余自由群都是（完全）剩余 A-自由的。

定理 7.1。设 $\mathfrak{X}$ 是一个有限基簇，使得相对自由元 $F_2(\mathfrak{X})$ 是有限表示的。设 $A \in \mathfrak{X}$ 是一个非平凡的有限生成方程诺特群，不含对合，并假设CS $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}\mathrm{T}$。则每个完全残余 A-自由群都属于 $\mathrm{CS}\mathfrak{X}$。

证明。设有限生成群 G 是完全残余 A-自由的。我们应用 [5] 的统一定理（定理 A）；由于群 $H = A * A$ 既是有限生成的，又是方程诺特的（见 [16]的定理 9.1），G 嵌入 H的一个超积 $H^I/\mathcal{U}$ 中。现在，$A \in \mathfrak{X} \subseteq \mathsf{CS}\mathfrak{X}$，且 A 不含任何对合，因此 $H \in \mathsf{CS}\mathfrak{X}$。但是，根据 6.1，类 $\mathsf{CS}\mathfrak{X}$ 是普适的，所以 $H^I/\mathcal{U}$ 也是一个 $\mathsf{CS}\mathfrak{X}$-群，从而 $G \in \mathsf{CS}\mathfrak{X}$。如果 G 不是有限生成的，那么我们可以利用类 $\mathsf{CS}\mathfrak{X}$ 是普适的这一事实；因此，G 是一个 $\mathsf{CS}\mathfrak{X}$-群，当且仅当 G 的每个有限生成子群都是如此。□

本节余下部分将需要用到边缘子群；下面简要回顾这一概念。考虑一个字 $w = w(x_1,\ldots,x_n)$和一个群 G。相应的边缘子群 $w^*(G)$由所有满足下述条件的元素 $g \in G$组成：对任意 $g_1,\ldots,g_n \in G$ 以及任意 $1 \le i \le n$，均有

$$w(g_1,\ldots,g_{i-1},gg_i,g_{i+1},\ldots,g_n) = w(g_1,\ldots,g_i,\ldots,g_n).$$

关于子群 $w^*(G)$，有两个基本但重要的观察。首先，容易看出 $w^*(G)$是 G 的特征子群。其次，若 $\mathfrak{X}$ 是一个群簇，则当且仅当对每个 $w \in \mathrm{id}(\mathfrak{X})$，都有 $G \in \mathfrak{X}$ 和 $w^*(G) = G$。我们定义

$$\mathfrak{X}^*(G) = \bigcap_{w \in \mathrm{id}(\mathfrak{X})} w^*(G).$$

这称为与簇 $\mathfrak{X}$相对应的 G 的边缘子群。

引理 7.1。设 $\mathfrak{X}$ 是一个簇，A 是 $\mathfrak{X}$ 中的非平凡元素，且 $\mathfrak{X}$ 不含对合。设 G 是残余 A-自由的，且 N 是 G 的一个正规子群，并属于簇 $\mathfrak{X}$。那么，$N \subseteq \mathfrak{X}^*(G)$。

证明。反设 $N \not\subseteq \mathfrak{X}^*(G)$，且令 $a \in N \setminus \mathfrak{X}^*(G)$。那么，存在一个恒等式 $w \in \mathrm{id}_n(\mathfrak{X})$，使得 $a \notin w^*(G)$。因此，存在一个指标 $1 \le i \le n$ 和元素 $g_1,\ldots,g_n \in G$，使得

$$w(g_1,\ldots,g_{i-1},ag_i,g_{i+1},\ldots,g_n) \ne w(g_1,\ldots,g_n).$$

但是，G 是剩余 A-自由的，因此存在一个同态 $\alpha\colon G \to A*A$，使得

$$\alpha(w(g_1,\ldots,g_{i-1},ag_i,g_{i+1},\ldots,g_n)) \ne \alpha(w(g_1,\ldots,g_n)),$$

这意味着

$$w(\alpha(g_1),\ldots,\alpha(a)\alpha(g_i),\ldots,\alpha(g_n)) \ne w(\alpha(g_1),\ldots,\alpha(g_n)).$$

注意，这意味着 $\alpha(a) \neq 1$。现在，假设 $K = \mathrm{Im}(\alpha) \leq A * A$（ α 的像）。我们有 $K \notin \mathfrak{X}$。根据 Kurosh 子群定理，我们有

$$K = \mathbb{F}[X] * \prod_{i \in I}^{*} K_i^{x_i},$$

其中 $X \subseteq A * A$, $\mathbb{F}[X]$ 是由 X 生成的自由群，每个 K_i 都是 A 的子群，且每个 x_i 都属于 $A * A$。我们有以下几种情况：

(1) $K = \mathbb{F}[X]$。由于 $N \trianglelefteq G$，我们有 $\alpha(N) \trianglelefteq K$。此外， $\alpha(a) \neq 1$，且由于 $a \in N$，我们有 $\alpha(N) \neq 1$。进一步， $N \in \mathfrak{X}$ 意味着 $\alpha(N) \in \mathfrak{X}$。因此， $\alpha(N)$ 是一个自由群，并且有两种可能：i- 如果 $\alpha(N)$ 不是阿贝尔群，那么 $\mathbb{F}_2$ 嵌入于 $\alpha(N)$，从而 $\mathbb{F}_2 \in \mathfrak{X}$。这意味着 $\mathfrak{X}$ 是全体群的簇，因此，$\mathfrak{X}^*(G) = G$。ii- 如果 $\alpha(N)$ 是循环群，那么由于它也是 $\mathbb{F}[X]$ 的正规子群，我们必有 $|X| = 1$。因此， K 是一个无限循环群，且 $\alpha(N)$ 是 K 的非平凡子群。于是 $K \cong \alpha(N) \in \mathfrak{X}$，这就产生了矛盾。

(2) 设 $K = B * C$，其中因子 B 和 C 均非平凡。由于 A 不含任何对合元，B 和 C 也不含对合元。我们有

$$\{1\} \neq \alpha(N) \trianglelefteq K, \quad \alpha(N) \in \mathfrak{X}.$$

因此，存在两种情况

i- $\alpha(N)$ 是 B 或 C 的某个共轭元的子群。但若此情况发生，则 $\alpha(N)$ 将不是 K 的正规子群。

ii- $\alpha(N)$ 是两个非平凡群的自由积。同样，在这种情况下，我们得出结论： $\mathbb{F}_2$ 嵌入 $\alpha(N)$，因此 $\mathfrak{X}$ 是全体群的簇。

证明至此完成。 □

引理 7.2. 若 $\mathfrak{X}$ 是一个包含所有阿贝尔群的群簇，且 G 是一个不属于 $\mathfrak{X}$ 的 $\mathfrak{X}$ T-群，则 $\mathfrak{X}^*(G) = \{1\}$。

证明。 反设 $a \neq 1$ 是 $\mathfrak{X}^*(G)$ 的一个元素。令 $g \in G$ 为任意元素。于是，子群 $\langle a, g \rangle$ 中的每个元素都具有如下形式

$$u(a, g) = a^{\lambda_1} g^{\eta_1} a^{\lambda_2} g^{\eta_2} \cdots a^{\lambda_r} g^{\eta_r}$$

对于某些整数 $\lambda_1, \eta_1, \ldots, \lambda_r, \eta_r$。由于 $\mathfrak{X}^*(G) \trianglelefteq G$，我们可以将 $u(a, g)$ 改写为

$$u(a, g) = g^{\alpha} b, \quad \alpha \in \mathbb{Z}, \ b \in \mathfrak{X}^*(G).$$

设 $w \in \mathrm{id}_n(\mathfrak{X})$ 且 $u_1, \ldots, u_n \in \langle a, g \rangle$。对于每个 i，都有

$$u_i = g^{\alpha_i} b_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}, \ b_i \in \mathfrak{X}^*(G).$$

因此，

$$w(u_1, \ldots, u_n) = w(g^{\alpha_1} b_1, \ldots, g^{\alpha_n} b_n) = w(g^{\alpha_1}, \ldots, g^{\alpha_n}) = 1.$$

注意，最后一个等式成立是因为 $\mathfrak{X}$ 包含所有阿贝尔群。因此， $\langle a,\ g\rangle \in \mathfrak{X}$ 对所有 $g \in G$均成立。现在，只需利用假设$G \in \mathfrak{X}\mathrm{T}$ 即可得出

$$\langle a, g_1, \ldots, g_m\rangle \in \mathfrak{X},$$

对于每个有限集合 g_1，.. .., $g_m \in G$。这表明 $G \in \mathfrak{X}$，矛盾。□

现在，在剩余 A-自由假设下，我们准备证明每个 $\mathfrak{X}\mathrm{T}$-群都属于 $\mathrm{CS}\mathfrak{X}$。

定理7.2。设 $\mathfrak{X}$ 是一个包含所有阿贝尔群的簇，并假设 $\mathrm{CS}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}\mathrm{T}$。设 $A \in \mathfrak{X}$ 是一个不含任何对合的群。那么，每个剩余 A-自由的 $\mathfrak{X}\mathrm{T}$-群都属于 $\mathrm{CS}\mathfrak{X}$。

证明。假设 $G \notin \mathrm{CS}\mathfrak{X}$。那么，根据1.3，存在元素 $x,\ z$ 使得$x \neq 1$、 $\langle x,\ x^z\rangle \in \mathfrak{X}$，以及 $\langle x,\ z\rangle \notin \mathfrak{X}$。令 $G_0 = \langle x,\ z\rangle$。注意， G_0是剩余 A-自由的，并且是 $\mathfrak{X}\mathrm{T}$。令 $N = \langle x^{G_0}\rangle$。我们证明 $N \in \mathfrak{X}$。注意，

$$N = \langle u^{-1}xu :\ u \in G_0\rangle.$$

由于 $\langle x,\ x^z\rangle \in \mathfrak{X}$，通过对 x 和 z进行共轭，所有子群

$$\langle x, z^{-1}xz\rangle,\ \langle x, x^{-1}z^{-1}xzx\rangle,\ \langle z^{-1}xz, z^{-2}xz^2\rangle$$

都属于 $\mathfrak{X}$。利用 $\mathfrak{X}\mathrm{T}$的假设，我们得到

$$\langle x, z^{-1}xz, x^{-1}z^{-1}xzx, z^{-1}xz, z^{-2}xz^2\rangle \in \mathfrak{X}.$$

这意味着

$$\langle u^{-1}xu :\ u \in G_0,\ |u| \leq 2\rangle \in \mathfrak{X},$$

其中， $|u|$ 表示群 u 在 G_0 中相对于生成集 $\{x,\ z\}$的字长。使用类似的论证，我们看到

$$\langle u^{-1}xu :\ u \in G_0,\ |u| \leq m\rangle \in \mathfrak{X}$$

对于每个 $m \geq 1$均成立。这意味着 $N \in \mathfrak{X}$ ，因此根据7.1，我们有$N \subseteq \mathfrak{X}^*(G_0)$。但是，7.2意味着 $N = \{1\}$ ，这与矛盾相矛盾。因此， G 属于$\mathrm{CS}\mathfrak{X}$。□

作为一个特殊情形，我们有以下推论。

推论7.1. 设 $\mathfrak{X}$ 是一个包含所有阿贝尔群的簇，并假设 $\mathrm{CS}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}\mathrm{T}$。那么，每个剩余自由 $\mathfrak{X}\mathrm{T}$-群都属于$\mathrm{CS}\mathfrak{X}$。

我们还有以下结果。

定理 7.3. 设 $\mathfrak{X}$ 是一个包含所有阿贝尔群的簇，并假设 $\mathrm{CS}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}\mathrm{T}$。设 $A \in \mathfrak{X}$ 是一个没有对合的群，且 $G \in \mathfrak{X}\mathrm{T} \setminus \mathfrak{X}$ 是残余 A-自由的。那么， G 是完全残余 A-自由的。

证明。由引理 7.2 可知 $\mathfrak{X}^*(G) = \{1\}$，因此 G 没有非平凡的正规 $\mathfrak{X}$-子群。我们用归纳法进行证明。假设对所有非单位元 $x_1,\ldots,x_{m-1} \in G$，都存在一个同态 $\alpha\colon G \to A * A$，使得

$$\alpha(x_1) \neq 1, \ldots, \alpha(x_{m-1}) \neq 1,$$

并设 $g_1,\ldots,g_m \in G$ 为非单位元。假设对每个 $x \in G$，都有 $g_m^x \in C_{\mathfrak{X}}(g_1)$。注意，根据命题 1.1，广义中心化子 $C_{\mathfrak{X}}(g_1)$ 是一个子群，因此，$H = \langle g_m^G \rangle \subseteq C_{\mathfrak{X}}(g_1)$ 是 G 的一个非平凡正规 $\mathfrak{X}$-子群。这一矛盾表明，存在 $x \in G$ 使得 $g_m^x \notin C_{\mathfrak{X}}(g_1)$。这意味着 $\langle g_1, g_m^x \rangle \notin \mathfrak{X}$，因此存在一个恒等式 $w \in \mathrm{id}_n(\mathfrak{X})$ 以及一些元素

$$u_1, \ldots, u_n \in \langle g_1, g_m^x \rangle$$

使得 $w(u_1,\ldots,u_n) \neq 1$。注意，每个 u_i 都是一个字 $u_i = u_i(g_1, g_m^x)$。现在，考虑集合

$$\{g_2, \ldots, g_{m-1}, w(u_1, \ldots, u_n)\}$$

其元素至多有 $m-1$ 个。根据归纳假设，存在一个同态 $\alpha\colon G \to A * A$ 使得

$$\alpha(g_2) \neq 1, \ldots, \alpha(g_{m-1}) \neq 1, \alpha(w(u_1, \ldots, u_n)) \neq 1.$$

设 $\alpha(g_1) = 1$ 或 $\alpha(g_m) = 1$。在第一种情况下，对于所有 $1 \leq i \leq n$，$\alpha(u_i)$ 都是 $\alpha(g_m)$ 的幂；在第二种情况下，对于所有 $1 \leq i \leq n$，$\alpha(u_i)$ 都是 $\alpha(g_1)$ 的幂。因此，在这两种情况下，我们都有

$$\alpha(w(u_1, \ldots, u_n)) = w(\alpha(u_1), \ldots, \alpha(u_n)) = 1.$$

这一矛盾表明，$\alpha(g_1) \neq 1$，……，$\alpha(g_m) \neq 1$。 □

如果考虑 A 是一个无限循环群的特殊情形，那么可得到如下结果。

推论 7.2。设 $\mathfrak{X}$ 是一个包含所有阿贝尔群的簇，并假设 $\mathrm{CS}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}\mathrm{T}$。设 $G \in \mathfrak{X}\mathrm{T} \setminus \mathfrak{X}$ 是剩余自由的。那么，G 是完全残余自由的。

参考文献

[1] Baumslag B. 剩余自由群。《伦敦数学会会刊》**17**(3), 1967, pp. 402- 418.[2] Baumslag G., Myasnikov A., Remeslennikov V. 群上的代数几何：*I.* 代数集与理想理论。《代数学杂志》**219**(1), 1999, pp. 16-79. [3] Champetier C., Guirardel V. 极限群作为自由群的极限. Israel J. of Math- ematics, **146**, 2005, pp. 1-75. [4] Ciobanu L., Fine B., Rosenberger G. 推广 *Benjamin Baumslag* 定理的群类。《代数通讯》**44**(2), 2016, pp. 656-667. [5] Daniyarova E., Myasnikov A., Remeslennikov V. 群上代数结构的代数几何，*II*：基础理论。《数学科学杂志》, 2012, **185**(3), pp. 389-416. [6] Fine B., Gaglione A., Rosenberger G., Spellman D. 关于 CT 和 CSA 群及相关思想。《群论杂志》, 2016, **19**, pp. 923-940.

[7] Houcine A. O.关于超稳定 CSA 群。《纯粹与应用逻辑年刊》, 2008, **1541** 1( ), pp. -[8] Isaacs M. 有限群的特征标理论。AMS Chelsea出版社, 1976. [9] Khukhro E. I., Mazurov V. D. 群论中的未解问题。Sobolev数学研究所, 2022, **20**. [10] Marin I. 强不可分解有限群。《数学论丛》, 2008, **26**3 261 267 ( ), pp. - . [11] Markowsky G. C. 链完备偏序集与有向集及其应用。《普适代数》, 1976, **6**, pp. 53 68. [12] Myasnikov A., Remeslennikov V. 次数群 *I.* 理论基础与张量完备化. Siberian Math. J., **35**(5), 1994, pp. 986-996. [13] Myasnikov A., Remeslennikov V. 指数群 *II*：中心化子扩张与 CSA 群的张量完备化. Internat. J. Algebra Comput., **6**(6), 1996, pp. 678-711.[14] Al-Raisi O., Shahryari M. 作为方程域的新群类. Bull. Iran. Math. Soc. **51**, Article no. 43, 2025. [15] Remeslennikov V. ∃-自由群. Siberian Math. J., **30**(6), 1989, pp. 998-1001. [16] Sela Z. 群上的丢番图几何 *X*：群自由积的初等理论. ArXiv:1012.0044, 2010. [17] Shahryari M. 关于幂零子群的共轭可分性. Journal of Group The- ory, **27**(6), 2024, pp. 1171-1185. O. Al-Raisi：数学系，理学院，苏丹卡布斯大学，马斯喀特，阿曼
M. Shahryari：数学系，理学院，苏丹卡布斯大学，马斯喀特，阿曼电子邮箱：
m.ghalehlar@squ.edu.om