二维平均场费米气体的基态能量

Gregorio Casadei[1], * 和 Sascha Lill[2], **

[1]电子邮箱：*gregorio.casadei@studenti.unimi.it*[2]*ORCID*：*0000-0002-9474-9914*，电子邮箱：*sali@math.ku.dk**米兰大学，*Via Cesare Saldini 50*，*20133* 米兰，意大利**哥本哈根大学，*Universitetsparken 5*，*DK-2100* 哥本哈根，丹麦

arXiv:2601.00750v1 [math-ph] 2 Jan 2026

2026年1月5日

摘要

我们严格证明了平均场区域中二维费米气体关联能的一个公式，该公式适用于其傅里叶变换 V 满足 $\hat{V}(\cdot)|\cdot| \in \ell^1$ 的势。此外，我们还证明了适用于 $\hat{V}(\cdot)^2|\cdot|^{1+\varepsilon} \in \ell^1$ 的类似上界，其中包括库仑势 $\hat{V}(k) \sim |k|^{-2}$。证明基于利用费米面周围缓慢增长的斑块进行近似玻色化。与近期三维情形的证明不同，我们需要对低能激发进行更精细的分析，因为这类激发数量较少，但贡献较大。

关键词：费米多体系统、费米气体、玻色化、基态能量

*2020*年数学主题分类：81V74, 81Q10, 82D20。

目录

1 引言与主要结果 2 2 数学定义 5 3 先验估计 6 4 不可玻色化项的界 11 5 分片构造 155.1 分片的构造.15 5.2 斑块算子与基本界.16**6 伪玻色型Bogoliubov变换 18 7 动能线性化 26**

8 定理1.1 的证明 **27**
8.1 迹的计算.27 8.2 下界.31 8.3 上界.33

A 数论估计　理论估计 3 **5**
A.1 月牙形区域上的逆能量和.35 A.2 环域上的逆能量和.41 A.3 环域交集中的点.42

1 引言与主要结果

过去几年中，严格的玻色化技术推动了费米气体数学研究的巨大进展。这些技术基于费米子对激发算符的构造，而这些算符近似表现得像玻色子算符。随后，费米子哈密顿量被近似为一个二次准玻色有效哈密顿量，并可通过 Bogoliubov 型变换将其对角化。Benedikter、Nam、Porta、Schlein 和 Seiringer [Ben+20; Ben+21; Ben+23] 首次利用基于补丁的玻色化，证明了三维平均场费米气体的关联能公式；这一结果此前尚无法通过数学方法获得 [GS94; HPR20]。不久之后，Christiansen、Hainzl 和 Nam [CHN23a; CHN23b; CHN24], 利用无补丁玻色化方法，将该结果推广到了库仑势情形。严格的近似玻色化还使得对三维平均场费米气体的动力学 [Ben+22]、激发谱 [CHN22]以及动量分布 [Lil25; BL25; BLN25] 进行研究成为可能。

对于稀薄热力学极限下的三维费米气体，Falconi、Giacomelli、Hainzl 和 Porta [Fal+21] 以及 Giacomelli [Gia23; Gia24]采用了类似的玻色化技术，改进了 [LSS05] 关于基态能量的现有结果。通过进一步改进这一技术，Giacomelli、Hainzl、Nam 和 Seiringer [Gia+24; Gia+25] 最近证明了 Huang 和 Yang [HY57]关于稀薄费米气体基态能量的猜想公式。

还要指出，Lauritsen 和 Seiringer [LS24b; LS24a] 以及 Lauritsen [Lau25]在不使用玻色化的情况下，得到了关于一、二、三维稀薄费米气体基态能量的类似结果。

本文证明了二维平均场费米气体关联能的一个公式，该公式对应于 [Ben+23; CHN23b] 中证明的三维公式。我们的公式具有 Rajagopal 和 Kimball [RK77, (21)], 所猜想的形式，它是 Gell-Mann 和 Brueckner [GB57, (19)] 所猜想的三维关联能公式在二维中的对应形式。为证明这一结果，我们将 [Ben+22] 中基于缓慢增长的斑块的近似玻色化方法改造并应用于二维。更确切地说，我们考虑环面 N 上的费米子 $\mathbb{T}^2 := [0, 2\pi]^2$，其由如下哈密顿量描述

$$H_N := \hbar^2 \sum_{j=1}^{N} (-\Delta_{x_j}) + \lambda \sum_{1 \le i < j \le N} V(x_i - x_j) \,, \tag{1.1}$$

该哈密顿量作用于反对称张量积空间 $L^2(\mathbb{T}^2)^{\otimes_{\mathrm{a}}N}$。平均场标度对应于取 $\hbar := N^{-\frac{1}{2}}$ 和 $\lambda := N^{-1}$，另请参见下文的讨论。此外，$-\Delta_{x_j}$ 是作用于第 j 个粒子的拉普拉斯算子，而 $V(x_i - x_j)$ 是某个 2π 周期对势函数 $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 对应的位置空间乘法算子。我们假设后者的傅里叶变换存在且满足

$$\hat{V}(k) = \hat{V}(-k) \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^2 , \qquad \hat{V} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^2) , \qquad \hat{V}(k) := \int_{\mathbb{R}^2} V(x) e^{-ik\cdot x} \mathrm{d}x . \tag{1.2}$$

我们的结果讨论了基态能量

$$E_{\mathrm{GS}} := \inf(\sigma(H_N)) = \inf_{\substack{\psi \in L^2(\mathbb{T}^2)^{\otimes_{\mathrm{a}}N} \\ \|\psi\|=1}} \langle \psi, H_N \psi \rangle , \tag{1.3}$$

其中，任何达到 $E_{\mathrm{GS}} = \langle \psi, H_N \psi \rangle$ 的 $\psi \in L^2(\mathbb{T}^2)^{\otimes_{\mathrm{a}}N}$, $\|\psi\| = 1$都称为基态。
在二维中选择平均场缩放 $\hbar = N^{-\frac{1}{2}}$, $\lambda = N^{-1}$的启发式依据如下：我们的目标是使动能和相互作用能都是广延量，也就是说，它们应当按 $\sim N$ 的 $N \to \infty$次幂缩放[1] 。由于每个 N 粒子都与 $\sim N$许多其他粒子相互作用，预期相互作用能按 $\sim \lambda N^2$缩放，因此需要选择 $\lambda \sim N^{-1}$。为了说明选择 $\hbar$的理由，考虑无相互作用的情形 $V = 0$。此时，基态由斯莱特行列式给出（称为费米球态或费米海态）

$$\psi_{\mathrm{FS}}(x_1, \ldots, x_N) := (N!)^{-\frac{1}{2}} \det\left((2\pi)^{-1} e^{ik_j x_\ell}\right)_{j,\ell=1}^N , \tag{1.4}$$

其中，$(k_j)_{j=1}^N \subset \mathbb{Z}^2$ 是一族使动能最小化的动量

$$E_{\mathrm{FS,kin}} := \left\langle \psi_{\mathrm{FS}}, \sum_{j=1}^N (-\Delta_{x_j}) \psi_{\mathrm{FS}} \right\rangle = \sum_{j=1}^N |k_j|^2 . \tag{1.5}$$

不失一般性，我们假设选择 N 使得 k_j 填满一个球，称为费米球：

$$\{k_j\}_{j=1}^N = B_{\mathrm{F}} , \qquad B_{\mathrm{F}} := \{k \in \mathbb{Z}^2 \mid |k| < k_{\mathrm{F}}\} , \tag{1.6}$$

对于某个合适的费米动量 $k_{\mathrm{F}} > 0$，满足

$$k_{\mathrm{F}}^2 = \frac{1}{2} \left(\inf_{p \in B_F^c} |p|^2 + \sup_{q \in B_F} |q|^2 \right) . \tag{1.7}$$

注意到，当 $N \to \infty$ 时，$k_{\mathrm{F}} \sim N^{\frac{1}{2}}$。因此我们预期 $E_{\mathrm{FS,kin}} \sim N k_{\mathrm{F}}^2 \hbar^2$，这促使我们选择 $\hbar \sim k_{\mathrm{F}}^{-1} \sim N^{-\frac{1}{2}}$。
对于一般的相互作用 $V \neq 0$，基态或 E_{GS} 没有已知的闭式表达式，但可以利用变分原理，以 ψ_{FS} 作为试探态，导出 E_{GS} 的一个简单上界：

$$E_{\mathrm{GS}} \leq E_{\mathrm{FS}} := \langle \psi_{\mathrm{FS}}, H_N \psi_{\mathrm{FS}} \rangle . \tag{1.8}$$

当 $E_{\mathrm{FS}} \sim N$ 时，我们严格证明了 E_{GS} 的次阶修正，其阶为 $\hbar = N^{-\frac{1}{2}}$。

[1]我们所说的 $A \sim B$ 是指存在常数 $c, C > 0$，使得 $cB \leq A \leq CB$。

定理 1.1（基态能量的上界和下界）。设相互作用势的傅里叶变换满足 $\hat{V}(k) = \hat{V}(-k) \geq 0$ 且 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |k|^{2-b}\hat{V}(k)^2 < \infty$，其中某个$b \in (0,\ 1)$成立。那么，

$$E_{\mathrm{GS}} \leq E_{\mathrm{FS}} + E^{\mathrm{RPA}} + o(N^{-\frac{1}{2}}) \,, \tag{1.9}$$

其中，定义 $\kappa := \pi^{-\frac{1}{2}}$，使得 $k_{\mathrm{F}} = \kappa N^{\frac{1}{2}} + o(N^{\frac{1}{2}})$，***RPA*** 能量

$$E^{\mathrm{RPA}} := \hbar\kappa \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \frac{|k|}{\pi} \int_0^\infty F\left(\frac{\hat{V}(k)}{4\pi}\left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}\right)\right) \mathrm{d}\lambda \,, \qquad F(x) := \log(1+x) - x \,, \tag{1.10}$$

有界于 $0 \geq E^{\mathrm{RPA}} \geq -CN^{-\frac{1}{2}}$。

此外，如果满足 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |k|\hat{V}(k) < \infty$，那么我们甚至有

$$E_{\mathrm{GS}} = E_{\mathrm{FS}} + E^{\mathrm{RPA}} + o(N^{-\frac{1}{2}}) \,. \tag{1.11}$$

证明。下界由命题 8.2 证明，上界由命题 8.3 证明。关于 E^{RPA} 的界由引理 8.1 得出，其中 $E^{\mathrm{RPA}} \leq 0$ 显然可由 $F(x) \leq 0$ 得到。 □

备注。1. 二维中的主要新意。与三维情形相比，二维中的主要复杂之处在于，相对耦合现在是 $\lambda/\hbar^2 = 1$，而不是 $N^{-\frac{1}{3}}$。这意味着，**二维平均场区域不再是小耦合区域**。某种程度上，这一点被以下事实所弥补：$\mathbb{R}^2$ 的某些子集所含格点远少于其三维对应集合。然而，有些估计不再成立。

虽然我们的证明遵循 [Ben+23] 的总体策略，并包含了 [CHN23b], 中的思想，但现在我们需要一个间隙论证（引理 3.4）来获得最优的先验界，这类似于 [Fal+21，引理 3.5] 中的论证。我们进一步通过三尺度分解获得了对不可玻色化项的界（引理 4.2）；这一分解取代了 [CHN23b，命题 2.3], 中的两尺度分解，随后还需仔细分析不同能量尺度下格点的数量。此外，引理 6.1 中关于低能激发的界相较于三维情形还需要额外的工作，并且我们需要推导出对格点求和的一些三维估计在二维情形下的对应结果（见附录 A）。

2. 关于势的条件。如果 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |k|\hat{V}(k) < \infty$，那么必定存在某个 $C > 0$，使得 $\hat{V}(k) \leq C|k|^{-1}\ \forall k \in \mathbb{Z}^2_*$，因为否则，该和将包含无穷多项 $\geq C$，从而发散。因此，$\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |k|^2\hat{V}(k)^2 < \infty$，所以特别地，断言 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |k|^{2-b}\hat{V}(k)^2 < \infty$ 对任意 $b \geq 0$ 均成立。

3. 库仑势。同样，若能为二维库仑势 $\hat{V}(k) \sim |k|^{-2}$建立一个下界，将是非常理想的。如上所述，带库仑势的三维费米气体的关联能最近已在 [CHN23a; CHN24] 中得到确立。然而，在 E_{GS} CHN [中获得下界的动能先验估计的方法依赖于相对耦合为 $\lambda/\hbar^2 \ll 1$，而这在二维中已不再成立。在这里，我们转而采用 [Ben+21; CHN23a] 中的 Onsager 型论证来推导先验界，但这仅限于 $\hat{\sum_k} V(k)|k| < \infty$ 的情形。尽管相对耦合为 1 阶，如何为二维库仑情形推导先验界，是一个值得未来研究的有趣问题。

我们还要提到，Rajagopal 和 Kimball [RK77] 最初的预测是针对 $V(x) \sim k^{-1}{}_{\mathrm{F}} \ |x|^{-1}$，因此 $\hat{V}(k) \sim k^{-1}{}_{\mathrm{F}} \ |k|^{-1}$。换句话说，将三维库仑势代入二维哈密顿量中。使用这一势将大幅简化分析，因为 $k^{-1}{}_{\mathrm{F}}$ 这一因子意味着相对耦合较弱。

本文其余部分的安排如下：第 2 节中，我们介绍一些记号，并对哈密顿量进行粒子–空穴变换。随后在第 3 节推导出证明 E_{GS} 下界所需的先验估计，并在第 4 节估计不可玻色化项。第 5 节中，我们介绍基于斑块的近似玻色化，并汇总玻色化误差界。在此基础上，我们在第 6 节定义近似玻色子的有效哈密顿量和 Bogoliubov变换。第 7 节给出动能的玻色化误差估计后，最后在第 8 节得出关于 E_{GS} 的界。

附录 A 包含一些针对二维情形的数论估计。

2 数学定义

我们主要采用 [Ben+21; Ben+23] 的记号，并在二次量子化框架下工作。二维环面 $\mathbb{T}^2 = [0, 2\pi]^2$ 上的费米子福克空间定义为

$$\mathcal{F} := \bigoplus_{N=0}^{\infty} L^2(\mathbb{T}^2)^{\otimes_{\mathrm{a}} N} \ , \tag{2.1}$$

真空矢量 $\Omega = (1, 0, 0, \ldots\ldots) \in \mathcal{F}$。对于 $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$，标准的费米子产生和湮灭算子为 $a^*(f)$ $a(f)$：$\mathcal{F} \to \mathcal{F}$其算子范数满足界$\|a^*(f)\|$，$\|a(f)\| \leq \|f\|_2$。对每个动量 $p \in \mathbb{Z}^2$，我们关联一个产生算子和湮灭算子

$$a_p^* := a^*(e_p) \ , \qquad a_p := a(e_p) \ , \qquad e_p := (2\pi)^{-1} e^{ip\cdot x} \ , \tag{2.2}$$

其中 $(e_p)_{p\in\mathbb{Z}^2} \subset L^2(\mathbb{T}^2)$ 是平面波正交归一基，且 a_p^*，a_p 满足典范反对易关系（正则反对易关系）

$$\{a_p, a_{p'}^*\} = \delta_{p,p'} \ , \qquad \{a_p, a_{p'}\} = \{a_p^*, a_{p'}^*\} = 0 \qquad \forall p, p' \in \mathbb{Z}^2 \ . \tag{2.3}$$

这使我们能够在动量空间中方便地重写 H_N（在 (1.1) 中定义）：若将 H_N在 $L^2(\mathbb{T}^2)^{\otimes_{\mathrm{a}} N}$ 上提升为作用于 $\mathcal{F}$ 的算子 $\mathcal{H}_N$，则经过简单计算可得

$$\mathcal{H}_N = \sum_{p\in\mathbb{Z}^2} \hbar^2 |p|^2 a_p^* a_p + \frac{1}{2(2\pi)^2 N} \sum_{k,p,q\in\mathbb{Z}^2} \hat{V}(k) a_{p+k}^* a_{q-k}^* a_q a_p \ . \tag{2.4}$$

为分析这个哈密顿量，我们引入酉粒子–空穴变换 $R : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$，它会翻转费米球（定义见 B_{F} (1.6)）内部的算子

$$R^* a_p R := \chi(p \in B_{\mathrm{F}}^c) a_p + \chi(p \in B_{\mathrm{F}}) a_p^* \ , \qquad B_{\mathrm{F}}^c := \mathbb{Z}^2 \setminus B_{\mathrm{F}} \ . \tag{2.5}$$

此变换生成费米海态 (1.4)，即 $\psi_{\mathrm{FS}} = R\Omega$。注意，$R^2 = 1$。与 [Ben+21]、[CHN23b], 对 $k \in \mathbb{Z}^2$的处理相同，我们引入月牙形区域、成对产生和平移

算子

$$L_k \coloneqq B_{\mathrm{F}}^{\mathrm{c}} \cap (B_{\mathrm{F}} + k)\ , \quad b^*(k) \coloneqq \sum_{p \in L_k} a_p^* a_{p-k}^*\ , \quad d(k) \coloneqq \sum_{p \in B_{\mathrm{F}}^{\mathrm{c}} \cap (B_{\mathrm{F}}^{\mathrm{c}} + k)} a_{p-k}^* a_p - \sum_{h \in B_{\mathrm{F}} \cap (B_{\mathrm{F}} - k)} a_{h+k}^* a_h\ , \tag{2.6}$$

其中 $b(0) = 0$ 且 $L_0 = \emptyset$。这使得可以方便地改写

$$R^* \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} a_{p+k}^* a_p R = b^*(k) + b(-k) + d(k)^*\ .$$

利用正则反对易关系 (2.3)，我们得到

$$\begin{aligned}
R^* \mathcal{H}_N R &= E_{\mathrm{FS}} + \mathbb{H}_0 + Q_{\mathrm{B}} + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathbb{X}\ , \\
\mathbb{H}_0 &\coloneqq \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} e(p) a_p^* a_p\ , \quad \text{with} \quad e(p) \coloneqq \hbar^2 \left| |p|^2 - k_{\mathrm{F}}^2 \right|\ , \\
Q_{\mathrm{B}} &\coloneqq \frac{1}{(2\pi)^2 N} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2_*} \hat{V}(k) \left(b^*(k) b(k) + \frac{1}{2} \big(b^*(k) b^*(-k) + b(-k) b(k) \big) \right)\ , \\
\mathcal{E}_1 &\coloneqq \frac{1}{2(2\pi)^2 N} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2_*} \hat{V}(k) d^*(k) d(k)\ , \\
\mathcal{E}_2 &\coloneqq \frac{1}{2(2\pi)^2 N} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2_*} \hat{V}(k) (d^*(k) b(-k) + \mathrm{h.c.})\ , \\
\mathbb{X} &\coloneqq -\frac{1}{2(2\pi)^2 N} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2_*} \hat{V}(k) \sum_{p \in L_k} (a_p^* a_p + a_{p-k}^* a_{p-k})\ ,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

其中 $\mathbb{Z}^2_* \coloneqq \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,\ 0)\}$。注意，与 [Ben+23 的 (2.5)、(2.6)] 相比，分母中多了一个 $(2\pi)^2$，这是由于我们采用了不同的傅里叶变换约定。

3 先验估计

为了控制误差项，我们需要对动能和激发数算符的幂的期望建立估计。本节将以与 [HPR20, (4.18)]，类似的方式，对近似基态推导此类估计；这些估计将有助于证明 E_{GS} 的下界。

定义 3.1。我们称 $\xi \in \mathcal{F}$ **属于一个近似基态** $\psi = R\xi$ 如果$R\xi \in L^2(\mathbb{T}^2)^{\otimes_{\mathrm{a}} N}$，$\|\xi\| = 1$，并且

$$\langle R\xi, H_N R\xi \rangle - E_{\mathrm{FS}} \leq C\hbar\ . \tag{3.1}$$

由于 $E_{\mathrm{GS}} \leq E_{\mathrm{FS}}$，对于任意基态 ψ_{GS}，向量 $\xi = R\psi_{\mathrm{GS}}$ 属于一个近似基态。我们首先使用与 [Ben+23 引理 4.1] 以及 [CHN23b 第 10 节.2]中类似的 Onsager 型论证，导出 $\mathbb{H}_0$ 的一个界。

引理 3.2 (昂萨格界)。 假设 $V \geq 0$ 和 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |k|V(k) < \infty$，并令 $\xi \in \mathcal{F}$ 满足 $R\xi \in L^2(\mathbb{T}^2)^{\otimes_{\mathrm{a}} N}$。那么，存在一个 $C > 0$，使得

$$\langle \xi, \mathbb{H}_0 \xi \rangle \leq \langle R\xi, H_N R\xi \rangle - E_{\mathrm{FS}} + CN^{-\frac{1}{2}} \sum_{q\in\mathbb{Z}^2_*} |q| \hat{V}(q) \,. \tag{3.2}$$

特别地，如果 ξ 属于定义 *3.1* 意义下的近似基态，那么

$$\langle \xi, \mathbb{H}_0 \xi \rangle \leq CN^{-\frac{1}{2}} \,. \tag{3.3}$$

证明。 与 [Ben+23 中的引理 4 一样，1], 我们配方为

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^2\times\mathbb{T}^2} \left(\sum_{i=1}^N \delta(x_i - x) - \frac{N}{(2\pi)^2} \right) V(x-y) \left(\sum_{j=1}^N \delta(x_j - y) - \frac{N}{(2\pi)^2} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \sum_{1\leq i<j\leq N} V(x_i - x_j) - N^2 \frac{\hat{V}(0)}{2(2\pi)^2} + N\frac{V(0)}{2} \,, \end{aligned}$$

这里我们认出第一项是 $N = \lambda^{-1}$ 乘以 H_N (1.1) 中的相互作用能。因此，加上动能，我们得到

$$\sum_{j=1}^N (-\hbar^2 \Delta_{x_j}) \leq H_N + \frac{V(0)}{2} - N\frac{\hat{V}(0)}{2(2\pi)^2} \,.$$

现在我们取 $R\xi$ 中的期望值。对 $R\xi \in L^2(\mathbb{T}^2)^{\otimes_{\mathrm{a}} N}$ 进行简单计算可得

$$\begin{aligned} \langle \xi, \mathbb{H}_0 \xi \rangle &= \left\langle R\xi, \left(\sum_{j=1}^N -\hbar^2 \Delta_{x_j} \right) R\xi \right\rangle - \sum_{p\in B_{\mathrm{F}}} \hbar^2 p^2 \\ &\leq \big(\langle R\xi, H_N R\xi \rangle - E_{\mathrm{FS}} \big) + E_{\mathrm{FS}} + \frac{V(0)}{2} - N\frac{\hat{V}(0)}{2(2\pi)^2} - \sum_{p\in B_{\mathrm{F}}} \hbar^2 p^2 \,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

费米海能量可以写为

$$E_{\mathrm{FS}} = N\frac{\hat{V}(0)}{2(2\pi)^2} - \frac{1}{2(2\pi)^2 N} \sum_{k,k'\in B_{\mathrm{F}}} \hat{V}(k-k') + \sum_{p\in B_{\mathrm{F}}} \hbar^2 p^2 \,.$$

接下来，注意到

$$\sum_{k,k'\in B_{\mathrm{F}}} \hat{V}(k-k') = \sum_{k\in B_{\mathrm{F}}} \left(\sum_{k'\in\mathbb{Z}^2} \hat{V}(k-k') - \sum_{k'\in B_{\mathrm{F}}^{\mathrm{c}}} \hat{V}(k-k') \right) = (2\pi)^2 N V(0) - \sum_{\substack{k\in B_{\mathrm{F}} \\ k'\in B_{\mathrm{F}}^{\mathrm{c}}}} \hat{V}(k-k') \,.$$

对于第二项，回想起 $\mathbb{Z}^2_* = \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$，我们有

$$\sum_{\substack{k\in B_{\mathrm{F}} \\ k'\in B_{\mathrm{F}}^{\mathrm{c}}}} \hat{V}(k-k') = \sum_{k\in B_{\mathrm{F}}} \sum_{q\in B_{\mathrm{F}}^{\mathrm{c}}+k} \hat{V}(q) = \sum_{q\in\mathbb{Z}^2_*} |L_q| \, \hat{V}(q) \leq CN^{\frac{1}{2}} \sum_{q\in\mathbb{Z}^2_*} |q| \hat{V}(q) \,. \tag{3.5}$$

结合（3.4）–（3.5）即可证明所声称的结果（3.2）。然后，根据近似基态的定义可立即得到（3.3）。 □

基于这一界，我们进一步推导出先验估计，其中涉及以下具有能隙的数算子。

定义 3.3。 回顾激发能 $e(p) = \hbar^2 ||p|^2 - k_{\mathrm{F}}^2|$。给定 $\delta \in [0, \frac{1}{2}]$，我们定义**能隙** $\mathcal{G}_\delta$ 以及**带能隙数算符** $\mathcal{N}_\delta$ 如下

$$\mathcal{G}_\delta := \{p \in \mathbb{Z}^2 \mid e(p) \leq \hbar N^{-\delta}\}, \qquad \mathcal{N}_\delta := \sum_{p \in \mathbb{Z}^2 \setminus \mathcal{G}_\delta} a_p^* a_p . \tag{3.6}$$

注意，由于采用晶格离散化，我们有 $e(p) \geq c\hbar^2$，因此已经存在一个自然能隙，对应于 $\delta = \frac{1}{2}$，其宽度为 $N^{-\frac{1}{2}}$。

在 [Ben+21] 中引入了一个类似的 $\mathcal{N}_\delta$，以处理这样一个事实：$\mathbb{H}_0$ 在由我们在 (6.29) 中定义的准 Bogoliubov 变换的三维对应物传播时并不稳定 T。我们出于同样的原因引入 $\mathcal{N}_\delta$。与三维情形不同，为了估计 $\mathcal{N}$ 相对于 $\mathbb{H}_0$，我们还需要以下"带能隙转换"。

引理 3.4（关于 $\mathcal{G}_\delta$ 的界及带能隙转换）。 给定 $\delta \in [0, \frac{1}{2}]$ 和任意 $\varepsilon > 0$，存在某些 C、$C_\varepsilon > 0$，使得对所有 $\xi \in \mathcal{F}$、$\|\xi\| = 1$，

$$|\mathcal{G}_\delta| \leq C_\varepsilon N^{\frac{1}{2}-\delta+\epsilon}, \quad \langle \xi, \mathcal{N}\xi \rangle \leq |\mathcal{G}_\delta| + CN^{\frac{1}{2}+\delta} \langle \xi, \mathbb{H}_0 \xi \rangle, \quad \langle \xi, \mathcal{N}_\delta \xi \rangle \leq CN^{\frac{1}{2}+\delta} \langle \xi, \mathbb{H}_0 \xi \rangle . \tag{3.7}$$

证明. 为了给 $|\mathcal{G}_\delta|$ 设定上界，注意到根据 $e(p)$ (2.7) 的定义，$\mathcal{G}_\delta$ 包含满足 $k_{\mathrm{F}}^2 - N^{\frac{1}{2}-\delta} \leq |p|^2 \leq k_{\mathrm{F}}^2 + N^{\frac{1}{2}-\delta}$ 的 $p \in \mathbb{Z}^2$。由于 $|p|^2$ 只能取整数值 $|p|^2 = n \in \mathbb{N}$，我们可以将 $\mathcal{G}_\delta$ 分解为 $\leq N^{\frac{1}{2}-\delta}$ 个形如 $S_n = \{p \in \mathbb{Z}^2 \mid |p|^2 = n\}$ 的球面。根据引理 A.2，每个球面有 $|S_n| \leq C_\varepsilon N^\varepsilon$ 个点。这就得到了 (3.7) 的第一个界。第二个界由 $p \notin \mathcal{N}_\delta \Rightarrow e(p) > N^{-\frac{1}{2}-\delta}$ 得出：

$$\langle \xi, \mathcal{N}\xi \rangle = \sum_{p \in \mathcal{G}_\delta} \langle \xi, a_p^* a_p \xi \rangle + \sum_{p \in \mathbb{Z}^2 \setminus \mathcal{G}_\delta} \frac{1}{e(p)} e(p) \langle \xi, a_p^* a_p \xi \rangle \leq |\mathcal{G}_\delta| + CN^{\frac{1}{2}+\delta} \langle \xi, \mathbb{H}_0 \xi \rangle .$$

第三个界可通过去掉含有 $p \in \mathcal{G}_\delta$ 的贡献直接得到。 □

在 我们最终的先验界的证明中，需要以下简单估计 s.

引理 3.5 (关于 b 和 d 的朴素界). 对于 $k \in \mathbb{Z}^2_*$，令 L_k, $b(k)$ 和 $d(k)$ 如 (2.6) 中所定义。那么，对于所有 $\xi \in \mathcal{F}$，

$$\|b(k)\xi\|^2 \leq |L_k| \langle \xi, \mathcal{N}\xi \rangle, \qquad \|b^*(k)\xi\|^2 \leq |L_k| \langle \xi, (\mathcal{N}+1)\xi \rangle, \qquad \|d(k)\xi\|^2 \leq 8 \langle \xi, \mathcal{N}^2 \xi \rangle . \tag{3.8}$$

证明。 由柯西–施瓦茨不等式和 $\|a_{p-k}\| \leq 1$，

$$\|b(k)\xi\|^2 \leq \left(\sum_{p \in L_k} \|a_{p-k} a_p \xi\| \right)^2 \leq |L_k| \sum_{p \in L_k} \|a_p \xi\|^2 \leq |L_k| \langle \xi, \mathcal{N}\xi \rangle .$$

此外，利用正则反对易关系，我们估计

$$\|b^*(k)\xi\|^2 = \sum_{p,q\in L_k} \langle \xi, a_{p-k}a_p a_q^* a_{q-k}^* \xi\rangle$$
$$= \sum_{p,q\in L_k} \langle \xi, a_q^* a_{q-k}^* a_{p-k} a_p \xi\rangle - \sum_{p\in L_k} \langle \xi, (a_p^* a_p + a_{p-k}^* a_{p-k})\xi\rangle + |L_k| \leq \|b(k)\xi\|^2 + |L_k| \,.$$

为界定 $d(k)$，我们将其拆分为

$$\|d(k)\xi\|^2 \leq 2\|d_1(k)\xi\|^2 + 2\|d_2(k)\xi\|^2 \,,$$
$$d_1(k) := \sum_{p\in B_{\mathrm{F}}^c \cap (B_{\mathrm{F}}^c + k)} a_{p-k}^* a_p \,, \qquad d_2(k) := \sum_{h\in B_{\mathrm{F}} \cap (B_{\mathrm{F}} - k)} a_{h+k}^* a_h \,.$$

然后，利用正则反对易关系，再应用柯西–施瓦茨不等式和 $\mathcal{N} \leq \mathcal{N}^2$，我们得到

$$\|d_1(k)\xi\|^2 = \sum_{p,q\in B_{\mathrm{F}}^c \cap (B_{\mathrm{F}}^c + k)} \langle \xi, a_q^* a_{q-k} a_{p-k}^* a_p \xi\rangle \leq \left| \sum_{p,q\in\mathbb{Z}^2} \langle \xi, a_q^* a_{p-k}^* a_{q-k} a_p \xi\rangle \right| + \sum_{p\in\mathbb{Z}^2} \langle \xi, a_p^* a_p \xi\rangle$$
$$\leq \sum_{p,q\in\mathbb{Z}^2} \|a_{q-k} a_p \xi\|^2 + \langle \xi, \mathcal{N}\xi\rangle \leq 2\left\langle \xi, \mathcal{N}^2 \xi\right\rangle \,. \tag{3.9}$$

对 $d_2(k)$的估计是类似的。 □

我们的最终先验界现在如下所示。

引理 3.6（先验界）。设 $V \geq 0$ 和 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |k| V(k) < \infty$，并令 $\xi \in \mathcal{F}$ 属于定义 *3.1* 意义下的近似基态。则对每个 $\varepsilon > 0$，存在 C_ε、$C > 0$，使得

$$\langle \xi, \mathcal{N}_\delta \xi\rangle \leq C N^\delta \,, \qquad \langle \xi, \mathcal{N}\xi\rangle \leq C_\varepsilon N^{\frac{1}{4}+\varepsilon} \,. \tag{3.10}$$

此外，如果 $R\xi$ 还是 H_N的特征向量，那么

$$\begin{aligned} &\langle \xi, \mathcal{N}^2\xi\rangle \leq C_\varepsilon N^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \,, \qquad \langle \xi, \mathcal{N}\mathbb{H}_0\xi\rangle \leq C_\varepsilon N^{-\frac{1}{4}+\varepsilon} \,, \qquad \langle \xi, \mathcal{N}^2\mathbb{H}_0\xi\rangle \leq C_\varepsilon N^{\varepsilon} \,, \\ &\langle \xi, \mathcal{N}\mathcal{N}_\delta\xi\rangle \leq C_\varepsilon N^{\frac{1}{4}+\delta+\varepsilon} \,, \qquad \langle \xi, \mathcal{N}^2\mathcal{N}_\delta\xi\rangle \leq C_\varepsilon N^{\frac{1}{2}+\delta+\varepsilon} \,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

我们指出，在三维中，同样有 $\mathbb{H}_0 \sim \hbar$和 $\mathcal{N}_\delta \sim N^\delta$，但用 $\mathcal{N} \sim k_{\mathrm{F}}$代替我们的 $\mathcal{N} \sim k_{\mathrm{F}}^{2+\varepsilon}$。这是由于引理 3.4 中的能隙分割，它改进了我们在二维中的界。

证明。 前两个界可直接通过将 (3.3) 代入 (3.7)，并对 $\delta = \frac{1}{4}$和$\langle \xi, \mathcal{N}\xi\rangle$进行优化得到。为得到涉及 $\mathcal{N}$ 更高次幂的界，我们沿用 [CHN23b, 第 10 节2]的策略：引入 $\tilde{H}_N := R^* H_N R - E_{\mathrm{FS}}$，并注意到 $\frac{1}{2}\mathcal{N} = \sum_{p\in B_{\mathrm{F}}^c} a_p^* a_p = \sum_{h\in B_{\mathrm{F}}} a_h^* a_h$在物理激发态 $\xi \in R[L^2(\mathbb{T}^2)^{\otimes_{\mathrm{s}} N}]$上成立。首先，我们证明对于这类态

$$\langle \xi, \mathcal{N}^2\mathbb{H}_0\xi\rangle \leq C N^{-\frac{1}{2}} \langle \xi, (\mathcal{N}^2 + 1)\xi\rangle \,. \tag{3.12}$$

由引理 3.2，我们得到 $\langle \xi, \mathbb{H}_0 \xi \rangle \leq \langle R\xi, H_N R\xi \rangle - E_{\mathrm{FS}} + CN^{-\frac{1}{2}}$，这意味着

$$\begin{aligned}\left\langle \xi, \mathcal{N}^2 \mathbb{H}_0 \xi \right\rangle = \langle \xi, \mathcal{N}\mathbb{H}_0\mathcal{N}\xi \rangle &\leq \left\langle \xi, \mathcal{N}\tilde{H}_N\mathcal{N}\xi \right\rangle + CN^{-\frac{1}{2}} \left\langle \xi, \mathcal{N}^2\xi \right\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\left\langle \xi, \mathcal{N}^2\tilde{H}_N\xi \right\rangle + \left\langle \xi, \tilde{H}_N\mathcal{N}^2\xi \right\rangle - \left\langle \xi, [\mathcal{N}, [\mathcal{N}, \tilde{H}_N]]\xi \right\rangle \right) + CN^{-\frac{1}{2}} \left\langle \xi, \mathcal{N}^2\xi \right\rangle \\ &\leq \left| \left\langle \xi, [\mathcal{N}, [\mathcal{N}, \tilde{H}_N]]\xi \right\rangle \right| + CN^{-\frac{1}{2}} \left\langle \xi, \mathcal{N}^2\xi \right\rangle \ ,\end{aligned}$$

˜在最后一行中，我们用到 ξ 是 H_N的特征向量，其特征值由 (3.1) 可知为 $\leq C\hbar$。现在利用 (2.7) 显式计算双重对易子，并用到$[\mathcal{N}, a_p^* a_p] = 0$, $[\mathcal{N}, d(k)] = 0$，以及 $[\mathcal{N}, b(k)] = -2b(k)$:

$$\begin{aligned}&\left| \left\langle \xi, [\mathcal{N}, [\mathcal{N}, \tilde{H}_N]]\xi \right\rangle \right| = |\left\langle \xi, [\mathcal{N}, [\mathcal{N}, (\mathbb{H}_0 + Q_{\mathrm{B}} + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathbb{X})]]\, \xi \right\rangle| \\ &= |\left\langle \xi, [\mathcal{N}, [\mathcal{N}, (Q_{\mathrm{B}} + \mathcal{E}_2)]]\, \xi \right\rangle| \leq \frac{C}{N} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2_*} \hat{V}(k) \big(\|d(k)\xi\| \|b(-k)\xi\| + \|b^*(k)\xi\| \|b(-k)\xi\| \big) \\ &\leq CN^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2_*} \hat{V}(k) |L_k| \left\langle \xi, (\mathcal{N}^2 + 1)\xi \right\rangle \ ,\end{aligned}$$

在最后一行中，我们用到了引理 3.5[2] 。由 $|L_k| \leq C|k|N^{\frac{1}{2}}$和 $\sum_{k \in \mathbb{Z}^2_*} \hat{}V(k)|k| < \infty$，可得 (3.13)

$$\left| \left\langle \xi, [\mathcal{N}, [\mathcal{N}, \tilde{H}_N]]\xi \right\rangle \right| \leq CN^{-\frac{1}{2}} \left\langle \xi, (\mathcal{N}^2 + 1)\xi \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \left\langle \xi, \mathcal{N}^2 \mathbb{H}_0 \xi \right\rangle \leq CN^{-\frac{1}{2}} \left\langle \xi, (\mathcal{N}^2 + 1)\xi \right\rangle \ .$$

这就证明了 (3.12)。为了估计 $\langle \xi,\ \mathcal{N}^2\xi \rangle$，我们利用 H¨older 不等式写出:

$$\langle \xi, \mathcal{N}^2\xi \rangle \leq \left\langle \mathcal{N}\xi, \left(\sum_{p \in \mathcal{G}_\delta} a_p^* a_p + \sum_{p \notin \mathcal{G}_\delta} a_p^* a_p \right) \mathcal{N}\xi \right\rangle^{\frac{2}{3}} \leq \left(\langle \xi, \mathcal{N}^2\xi \rangle |\mathcal{G}_\delta| + \langle \xi, \mathcal{N} \left(\sum_{p \notin \mathcal{G}_\delta} a_p^* a_p \right) \mathcal{N}\xi \rangle \right)^{\frac{2}{3}} .$$

若 $p \notin \mathcal{G}_\delta$，则根据定义有 $e(p) \geq N^{-\delta - \frac{1}{2}}$，于是

$$\langle \xi, \mathcal{N} \left(\sum_{p \notin \mathcal{G}_\delta} a_p^* a_p \right) \mathcal{N}\xi \rangle = \sum_{p \notin \mathcal{G}_\delta} \frac{1}{e(p)} \langle \xi, \mathcal{N} e(p) a_p^* a_p \mathcal{N}\xi \rangle \leq N^{\delta + \frac{1}{2}} \langle \xi, \mathcal{N}^2 \mathbb{H}_0 \xi \rangle \ .$$

因此，结合 (3.7) $|\mathcal{G}_\delta| \leq C_\varepsilon N^{\frac{1}{2} - \delta + \varepsilon}$ 和 (3.12)，最终得到

$$\langle \xi, (\mathcal{N}^2 + 1)\xi \rangle \leq C_\varepsilon \left(N^{\frac{1}{2} - \delta + \varepsilon} + N^\delta \right)^{\frac{2}{3}} \langle \xi, (\mathcal{N}^2 + 1)\xi \rangle^{\frac{2}{3}} \ .$$

我们发现 $\delta = 1/4$ 是最优的，其中

$$\langle \xi, (\mathcal{N}^2 + 1)\xi \rangle \leq C_\varepsilon N^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \langle \xi, \mathcal{N}^2\xi \rangle \leq C_\varepsilon N^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \quad \overset{(3.12)}{\Rightarrow} \quad \langle \xi, \mathcal{N}^2 \mathbb{H}_0 \xi \rangle \leq C_\varepsilon N^\varepsilon \ .$$

[2]我们指出， [CHN23b 第 10 节2] 中的证明存在一个漏洞，因为 [CHN23b 的式（10.33）] 使用了错误的恒等式 $\sum_{p \in \mathbb{Z}^3} \|a_p \xi\|^2 = \langle \xi,\ R^* \mathcal{N} R\xi \rangle$。我们在此通过对（3.13）中的算子重新排序，再应用引理 3.5 中的朴素界，来弥补这一漏洞。

根据柯西–施瓦茨不等式，我们得到

$$\langle \xi, \mathcal{N}\mathbb{H}_0\xi\rangle \leq \langle \xi, \mathbb{H}_0\xi\rangle^{\frac{1}{2}}\langle \xi, \mathcal{N}^2\mathbb{H}_0\xi\rangle^{\frac{1}{2}} \leq C_\varepsilon N^{-\frac{1}{4}+\varepsilon} .$$

还需证明涉及带能隙数算符 (3.6) 的估计。根据定义

$$\mathcal{N}_\delta = \sum_{p\in\mathbb{Z}^2:e(p)\geq N^{-\frac{1}{2}-\delta}} \frac{1}{e(p)} e(p) a_p^* a_p \leq N^{\frac{1}{2}+\delta}\mathbb{H}_0 ,$$

因此，对于 $m = 0$， 1，2，我们得到

$$\mathcal{N}_\delta \mathcal{N}^m = \mathcal{N}^{\frac{m}{2}}\mathcal{N}_\delta\mathcal{N}^{\frac{m}{2}} \leq N^{\frac{1}{2}+\delta}\mathcal{N}^{\frac{m}{2}}\mathbb{H}_0\mathcal{N}^{\frac{m}{2}} = N^{\frac{1}{2}+\delta}\mathcal{N}^m\mathbb{H}_0 ,$$

由此立即得到所声称的界。 □

4 不可玻色化项的界

本节中，我们对 (2.7) 中定义的不可玻色化项 $\mathbb{X}$、$\mathcal{E}_1$ 和 $\mathcal{E}_2$ 给出界。此外，对于 [Ben+23 中奇异势情形的上界（如定理 A.1], 所示），我们将估计算子 $\mathbb{X}$ 和 $\mathcal{E}_1$；它们由 $\mathbb{X}$ 和 $\mathcal{E}_1$ 得到，方法是将 k 中的求和限制在某个固定且足够大的 $C > 0$ 对应的 $|k| < CN^{\frac{1}{2}}$ 上：

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbb{X}} &:= -\frac{1}{2(2\pi)^2 N} \sum_{k\in\mathbb{Z}^2_*:|k|<CN^{\frac{1}{2}}} \hat{V}(k) \sum_{p\in L_k} (a_p^* a_p + a_{p-k}^* a_{p-k}) , \\ \widetilde{\mathcal{E}}_1 &:= \frac{1}{2(2\pi)^2 N} \sum_{k\in\mathbb{Z}^2_*:|k|<CN^{\frac{1}{2}}} \hat{V}(k) d^*(k) d(k) . \end{aligned} \tag{4.1}$$

引理 4.1. 回顾 $\mathbb{X}$ 和 $\widetilde{\mathbb{X}}$ 的定义 (2.7) 和(4.1) 。若 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |k|^{2-b\hat{}}V(k)^2 < \infty$ 对某个 $b \in (0, 1)$ 成立，则存在一个 $C > 0$，使得对所有 $\xi \in \mathcal{F}$，

$$|\langle \xi, \widetilde{\mathbb{X}}\xi\rangle| \leq CN^{-1+\frac{b}{4}} \langle \xi, \mathcal{N}\xi\rangle . \tag{4.2}$$

此外，若 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} V(k) < \infty$ 和 ξ 属于定义 *3.1* 意义下的近似基态，则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $C_\varepsilon > 0$ 使得

$$|\langle \xi, \mathbb{X}\xi\rangle| \leq C_\varepsilon \hbar N^{-\frac{1}{4}+\varepsilon} . \tag{4.3}$$

证明。 根据 $\mathbb{X}$ 的定义,

$$\begin{aligned} |\langle \xi, \widetilde{\mathbb{X}}\xi\rangle| &\leq \frac{C}{N} \sum_{k\in\mathbb{Z}^2_*:|k|<CN^{\frac{1}{2}}} |\hat{V}(k)| \left| \sum_{p\in L_k} \langle \xi, a_p^* a_p \xi\rangle + \sum_{h\in L_k - k} \langle \xi, a_h^* a_h \xi\rangle \right| \\ &\leq \frac{C}{N} \langle \xi, \mathcal{N}\xi\rangle \sum_{k\in\mathbb{Z}^2_*:|k|<CN^{\frac{1}{2}}} \hat{V}(k) . \end{aligned}$$

由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^2_*:|k|<CN^{\frac{1}{2}}} \hat{V}(k) \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^2_*:|k|<CN^{\frac{1}{2}}} |k|^{b-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^2_*:|k|<CN^{\frac{1}{2}}} |k|^{2-b}\hat{V}(k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq CN^{\frac{b}{4}} , \quad (4.4)$$

由此得到 (4.2)。

为证明 (4.3)，我们将求和范围扩展至 $k \in \mathbb{Z}^2_*$，并注意到 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2_*} \hat{V}(k) < \infty$。于是，对于属于近似基态的 ξ，由引理 3.6 可得以下界：$\langle \xi, \mathcal{N}\xi \rangle \leq C_\varepsilon N^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$。 □

现在我们转而讨论项 $\mathcal{E}_1$ 和 $\widetilde{\mathcal{E}}_1$的定义 (2.7) 及 (4.1)。若 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |k|^{2-b}\hat{V}(k)^2 < \infty$ 对某个 $b \in (0, 1)$成立，则存在一个 $C > 0$，使得对所有 $\xi \in \mathcal{F}$，

$$|\langle \xi, \widetilde{\mathcal{E}}_1 \xi \rangle| \leq CN^{-1+\frac{b}{4}} \langle \xi, \mathcal{N}^2 \xi \rangle . \quad (4.5)$$

此外，若 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} V(k) < \infty$，且 $\xi \in \mathcal{F}$ 属于定义 *3.1* 意义下的近似基态，使得 $R\xi$ 是 H_N 的特征向量，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在一个常数 $C_\varepsilon > 0$，使得

$$\|d(k)\xi\|^2 \leq C_\varepsilon N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{68}+\varepsilon} , \qquad |\langle \xi, \mathcal{E}_1 \xi \rangle| \leq C_\varepsilon \hbar N^{-\frac{1}{68}+\varepsilon} . \quad (4.6)$$

证明. 为了界定 $\mathcal{E}_1$，我们使用引理 3.5 和 (4.4)：

$$|\langle \xi, \widetilde{\mathcal{E}}_1 \xi \rangle| \leq \frac{C}{N} \sum_{k\in\mathbb{Z}^2_*:|k|<CN^{\frac{1}{2}}} \hat{V}(k)\|d(k)\xi\|^2 \leq \frac{C}{N}\langle \xi, \mathcal{N}^2\xi \rangle \sum_{k\in\mathbb{Z}^2_*:|k|<CN^{\frac{1}{2}}} \hat{V}(k) \leq CN^{-1+\frac{b}{4}} \langle \xi, \mathcal{N}^2 \xi \rangle .$$

接下来，根据 $\mathcal{E}_1$ (2.7) 和 $d(k)$ (2.6) 的定义，我们有

$$|\langle \xi, \mathcal{E}_1 \xi \rangle| \leq \frac{C}{N} \sum_{k\in\mathbb{Z}^2_*} \hat{V}(k)\|d(k)\xi\|^2 , \qquad \|d(k)\xi\|^2 \leq 2\|d_1(k)\xi\|^2 + 2\|d_2(k)\xi\|^2 ,$$

$$d_1(k) := \sum_{p\in B_{\mathrm{F}}^c \cap (B_{\mathrm{F}}^c + k)} a^*_{p-k} a_p , \qquad d_2(k) := \sum_{h\in B_{\mathrm{F}} \cap (B_{\mathrm{F}} - k)} a^*_{h+k} a_h .$$

我们只考虑 $d_1(k)$，因为 $d_2(k)$ 可用类似方法控制。按照 (3.9) 的步骤，我们得到

$$\|d_1(k)\xi\|^2 \leq \underbrace{\left| \sum_{p,q\in B_{\mathrm{F}}^c \cap (B_{\mathrm{F}}^c + k)} \langle \xi, a^*_q a^*_{p-k} a_{q-k} a_p \xi \rangle \right|}_{=:A} + \underbrace{\sum_{p\in B_{\mathrm{F}}^c \cap (B_{\mathrm{F}}^c + k)} \langle \xi, a^*_p a_p \xi \rangle}_{=:B} .$$

由引理 3.6，我们很容易对 $B \le \langle \xi,\ \mathcal{N}\xi\rangle \le C_\varepsilon N^{\frac14+\varepsilon}$ 作出界估计。对于项 A，引入 $\mu_p>0$，对应 $p\in\mathbb{Z}^2$，其值稍后确定；然后应用柯西–施瓦茨不等式和正则反对易关系：

$$\begin{aligned} A &\le \left| \sum_{p,q\in B_{\mathrm{F}}^c\cap(B_{\mathrm{F}}^c+k)} \mu_p^{\frac12}\mu_p^{-\frac12}\langle \xi, a_q^* a_{p-k}^* a_{q-k} a_p \xi\rangle \right| \\ &\le \sum_{p,q\in B_{\mathrm{F}}^c\cap(B_{\mathrm{F}}^c+k)} \mu_p \langle \xi, a_p^* a_{q-k}^* a_{q-k} a_p \xi\rangle + \sum_{p,q\in B_{\mathrm{F}}^c\cap(B_{\mathrm{F}}^c+k)} \mu_p^{-1}\langle \xi, a_{p-k}^* a_q^* a_q a_{p-k}\xi\rangle \\ &\le \sum_{p\in B_{\mathrm{F}}^c\cap(B_{\mathrm{F}}^c+k)} \mu_p \langle \xi, a_p^* \mathcal{N} a_p \xi\rangle + \sum_{p\in B_{\mathrm{F}}^c\cap(B_{\mathrm{F}}^c+k)} \mu_p^{-1}\langle \xi, a_{p-k}^* \mathcal{N} a_{p-k}\xi\rangle\ , \end{aligned}$$

利用 $(\mathcal{N}+1)^\alpha a_p = a_p \mathcal{N}^\alpha$ 对所有 $p\in\mathbb{Z}^2$ 均成立，我们得到

$$A \le \sum_{p\in B_{\mathrm{F}}^c\cap(B_{\mathrm{F}}^c+k)} \mu_p \langle \mathcal{N}^{\frac12}\xi, a_p^* a_p \mathcal{N}^{\frac12}\xi\rangle + \sum_{p\in B_{\mathrm{F}}^c\cap(B_{\mathrm{F}}^c+k)} \mu_p^{-1}\langle \mathcal{N}^{\frac12}\xi, a_{p-k}^* a_{p-k}\mathcal{N}^{\frac12}\xi\rangle\ .$$

现在我们引入两个由 $0<\alpha<\delta<\frac12$ 标记的能量尺度截断，并将关于p的求和拆分为以下两个集合

$$\mathcal{S}_{k,\,\delta,\,\alpha}^{\geq} := \left\{ p\in B_{\mathrm{F}}^c\cap(B_{\mathrm{F}}^c+k)\ \middle|\ \min\{e(p)\ e(p-k)\} \ge \hbar N^{-\delta},\ \max\{e(p)\ e(p-k)\}\ge \hbar N^{-\alpha}\right\}, \tag{4.7}$$

并且 $\mathcal{S}_{k,\,\delta,\,\alpha}^{<} := B_{\mathrm{F}}^c\cap(B_{\mathrm{F}}^c+k)\setminus \mathcal{S}_{k\,\delta,\ ,\,\alpha}^{\geq}$。简记 $\phi := \mathcal{N}^{\frac12}\xi$，我们得到

$$A \le \sum_{p\in\mathcal{S}_{k,\delta,\alpha}^{<}} \left(\mu_p\langle\phi, a_p^* a_p\phi\rangle + \mu_p^{-1}\langle\phi, a_{p-k}^* a_{p-k}\phi\rangle\right) + \sum_{p\in\mathcal{S}_{k,\delta,\alpha}^{\geq}} \left(\mu_p\langle\phi, a_p^* a_p\phi\rangle + \mu_p^{-1}\langle\phi, a_{p-k}^* a_{p-k}\phi\rangle\right).$$

对于$p\in\mathcal{S}_{k,\,\delta,\,\alpha}^{<}$，我们选择 $\mu_p=1$，并使用 $\|a_p\|\le 1$；而对于 $p\in\mathcal{S}_{k\,\delta,\ ,\,\alpha}^{\geq}$，我们选择 $\mu_p = \sqrt{\frac{e\ (p)}{e\ (p-k)}}$，以便得到一个涉及 $\mathbb{H}_0$ 的界。接着我们应用引理 3.6：

$$\begin{aligned} A &\le 2\left|\mathcal{S}_{k,\delta,\alpha}^{<}\right|\|\phi\|^2 + \sum_{p\in\mathcal{S}_{k,\delta,\alpha}^{\geq}} \frac{1}{\sqrt{e(p)e(p-k)}}\left(e(p)\langle\phi, a_p^* a_p\phi\rangle + e(p-k)\langle\phi, a_{p-k}^* a_{p-k}\phi\rangle\right) \\ &\le 2\left|\mathcal{S}_{k,\delta,\alpha}^{<}\right|\langle\xi,\mathcal{N}\xi\rangle + CN^{\frac14+\frac{\alpha}{2}}N^{\frac14+\frac{\delta}{2}}\langle\xi,\mathcal{N}\mathbb{H}_0\xi\rangle \\ &\le C_\varepsilon\left|\mathcal{S}_{k,\delta,\alpha}^{<}\right|N^{\frac14+\varepsilon} + C_\varepsilon N^{\frac14+\frac{\alpha}{2}+\frac{\delta}{2}+\varepsilon}\ . \end{aligned} \tag{4.8}$$

为了估计 $\left|\mathcal{S}_{k,\,\delta,\,\alpha}^{<}\right|$，注意到 p 进入该集合有两种方式：$\mathcal{G}_\delta$ 中可以有 p 或 $p-k$，也可以同时有 p 和 $p-k$，位于 $\mathcal{G}_\alpha$ 中。因此，

$$\left|\mathcal{S}_{k,\delta,\alpha}^{<}\right| \le 2|\mathcal{G}_\delta| + \left|\mathcal{S}_{k,\alpha}^{<}\right|\ , \qquad \mathcal{S}_{k,\alpha}^{<} := \left\{p\in B_{\mathrm{F}}^c\cap(B_{\mathrm{F}}^c+k)\ \middle|\ \max\{e(p),e(p-k)\}<\hbar N^{-\alpha}\right\}\ . \tag{4.9}$$

集合 $\mathcal{S}_{k,\alpha}^{<}$ 是 $\mathbb{Z}^2$ 与两个厚度为 $\sim N^{-\alpha}$ 的环带的交集，我们利用引理 A.4 对其进行估计，得到

$$\left|\mathcal{S}_{k,\alpha}^{<}\right| \le C(N^{\frac34-\frac52\alpha}+N^{\frac14-\frac12\alpha})\ .$$

回顾引理 3.4 中的 $|\mathcal{G}_\delta| \le C_\varepsilon N^{\frac{1}{2}-\delta+\varepsilon}$，估计式 (4.8) 变为

$$\begin{aligned} A &\le C_\varepsilon \left(N^{\frac{1}{2}-\delta+\varepsilon} + N^{\frac{3}{4}-\frac{5}{2}\alpha} + N^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\alpha} \right) N^{\frac{1}{4}+\varepsilon} + C_\varepsilon N^{\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2}+\frac{\delta}{2}+\varepsilon} \\ &\le C_\varepsilon N^{\frac{1}{2}+2\varepsilon} \left(N^{-(\delta-\frac{1}{4})} + N^{-\frac{1}{8}+\frac{5}{2}(\frac{1}{4}-\alpha)} + N^{-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}(\frac{1}{4}-\alpha)} + N^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{4}-\alpha)+\frac{1}{2}(\delta-\frac{1}{4})} \right) . \end{aligned}$$

对 $\delta - \frac{1}{4} = \frac{1}{68}$ 和 $\frac{1}{4} - \alpha = \frac{3}{68}$ 进行优化，并重新定义 ε，可得

$$A \le C_\varepsilon N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{68}+\varepsilon} .$$

结合上述界 $B \le C_\varepsilon N^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$，证明即告完成。 □

与 [Ben+21] 中一样，我们通过在 $\mathcal{E}_1$ 和 $b(k)$ 之间进行插值来估计 $\mathcal{E}_2$。

引理 4.3。对于任意 $k \in \mathbb{Z}^2$，存在一个常数 $C > 0$，使得对所有 $\xi \in \mathcal{F}$，

$$\|b(k)\xi\|^2 \le CN\log(N)\langle \xi, \mathbb{H}_0\xi\rangle , \qquad \|b^*(k)\xi\|^2 \le CN\log(N)\langle \xi, \mathbb{H}_0\xi\rangle + C|k|N^{\frac{1}{2}} . \tag{4.10}$$

证明。证明类似于 [HPR20 的命题 4.7]：对于 $\lambda_{k,p} := \frac{1}{2}(e(p) + e(p-k))$，命题 A.1 给出了界 $\sum_{p\in L_k} \lambda_{k,p}^{-1} \le C\hbar^{-2}\log(N)$。利用柯西–施瓦茨不等式，然后利用 $\|a_{p-k}\|, \|a_p\| \le 1$，可得

$$\|b(k)\xi\|^2 \le \Big(\sum_{p\in L_k} \lambda_{k,p}^{-1} \Big) \Big(\sum_{p\in L_k} (e(p) + e(p-k)) \|a_{p-k}a_p\xi\|^2 \Big) \le CN\log(N)\, \langle \xi, \mathbb{H}_0\xi\rangle .$$

对于 $b^*(k)$，注意到 $|L_k| \le C|k|N^{\frac{1}{2}}$ 和 $\|b^*(k)\xi\|^2 \le |L_k| + \|b(k)\xi\|^2$。 □

引理 4.4。设 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} V(k) < \infty$ 和 $\xi \in \mathcal{F}$ 按定义 *3.1* 的意义属于一个近似基态，且 $R\xi$ 是 H_N的特征向量。回顾$\mathcal{E}_2$的定义(2.7) 。那么对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个常数 $C_\varepsilon > 0$ 使得

$$|\langle \xi, \mathcal{E}_2\xi\rangle| \le C_\varepsilon \hbar N^{-\frac{1}{136}+\varepsilon} . \tag{4.11}$$

证明。由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned} |\langle \xi, \mathcal{E}_2\xi\rangle| &\le \frac{C}{N} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}^2_*} \hat{V}(k) \left(\langle \xi, d(k)^* b(-k)\xi\rangle + \langle \xi, b(-k)^* d(k)\xi\rangle \right) \right| \\ &\le \frac{C}{N} \sum_{k\in\mathbb{Z}^2_*} \hat{V}(k) \|d(k)\xi\| \|b(-k)\xi\| . \end{aligned}$$

根据引理 4.2 和 4.3 对 $d(k)$ 和 $b(-k)$ 进行界定，并利用 (3.3) $\langle \xi, \mathbb{H}_0\xi\rangle \le CN^{-\frac{1}{2}}$，我们得到

$$|\langle \xi, \mathcal{E}_2\xi\rangle| \le C_\varepsilon N^{-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^2_*} \hat{V}(k) N^{\frac{1}{4}-\frac{1}{136}+\frac{\varepsilon}{2}} N^{\frac{1}{4}+\frac{\varepsilon}{2}} \le C_\varepsilon \hbar N^{-\frac{1}{136}+\varepsilon} .$$

□

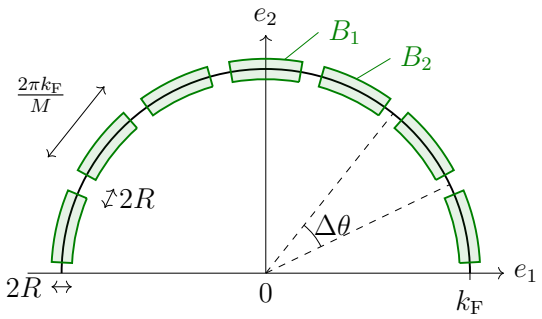

图1：费米面北半球周围分片分解的示例。此处展示了全部 $M = 14$ 斑块 B_α 的一半。这些斑块的厚度为 $2R$ ，彼此之间由宽度为 $2R$的走廊隔开，其中 R 随 N增大而缓慢增长。

5 分片构造

我们采用了 [Ben+20; Ben+22; Ben+23] 的二维斑块玻色化版本，也就是说，将费米面附近的区域分解为具有适当性质、彼此不相交的区域（“斑块”）。随后，我们在每个斑块中定义集体对激发算算符；它们的行为近似于玻色子算符，即在一个小误差范围内满足正则对易关系（CCR）。

5.1 分片的构造

与三维情形 [Ben+20；Ben+22；Ben+23]一样，我们采用 [Leo06],的算法过程，将费米面分解为直径一致有界的等面积盒。我们的分解由两个依赖于粒子数 N的参数刻画：

- 分片数 $M = M(N) \in \mathbb{N}$，我们假设它为偶数，
- 分片厚度 $R = R(N) > 0$。

稍后我们将在 N 中确定精确的依赖关系，以优化误差界。由于斑块应大于晶格间距 1，且费米面的半径和周长均按 $\sim k_F \sim N^{\frac{1}{2}}$ 缩放，因此有平凡的约束条件 $1 \ll R \ll N^{\frac{1}{2}}$ and $1 \ll M \ll N^{\frac{1}{2}}$。

费米圆上的平直分片。 在二维中，费米面 ∂B_F 就是一个圆，我们将其划分为 M 段圆弧，每段的张角均为 $\Delta\theta := 2\pi M^{-1}$。我们选择以 e_2 为中心放置第一段圆弧，如图1所示。于是，第 $\alpha \in \{1, \dots, M\}$ 段圆弧的中心位于 $\theta_\alpha := (\alpha - 1)\Delta\theta$。接下来，我们切去每段圆弧边缘的部分，从而形成宽度为 $2R$ 的走廊，这需要切去角度为 $\Delta\theta_{\text{corri}} := \frac{2R}{k_F}$ 的部分。剩余的角度由一个补丁覆盖的范围为 $\widetilde{\Delta\theta} := \Delta\theta - 2\Delta\theta_{\text{corri}}$。将 $\mathbb{S}^1$ 中与 e_2 成 θ 角的点记为 $\hat{\omega}(\theta)$，于是我们定义平坦斑块

$$P_\alpha := \{k_F\hat{\omega}(\theta) \mid \theta \in (\theta_\alpha - \tfrac{\widetilde{\Delta\theta}}{2}, \theta_\alpha + \tfrac{\widetilde{\Delta\theta}}{2})\}\,, \qquad \alpha \in \{1, \dots, M\}\,. \tag{5.1}$$

显然， $P_\alpha \subset \partial B_{\mathrm{F}}$ 与这些斑块互不相交。此外，我们要求走廊远小于斑块，即 $\Delta\theta_{\mathrm{corri}} \ll \Delta\theta$，这要求 $RM \ll N^{\frac{1}{2}}$。显然，根据构造，以下性质成立：

1. 每个平坦斑块的直径满足 $\mathrm{diam}(P_\alpha) = \frac{2\pi k_{\mathrm{F}}}{M} + O_N(1)$，对所有 $\alpha \in \{1,\dots,M\}$ 均成立。

2. 对每个 $\alpha \in \{1,\dots,M/2\}$，都有反射性质 $P_\alpha = -P_{\alpha+\frac{M}{2}}$。

费米圆周围的最终斑块。最后，我们将平坦斑块 P_α 沿径向延伸，从而得到斑块

$$B_\alpha := \big\{k \in \mathbb{Z}^2 \mid k_{\mathrm{F}} - R < |k| < k_{\mathrm{F}} + R\big\} \cap \left(\bigcup_{t\in(0,\infty)} tP_\alpha \right). \tag{5.2}$$

与 [Ben+20] 中一样， B_α 继承了 P_α 的反射性质，且直径有界。同样，这些 B_α 也两两不相交，并由大小为 $> R$ 的走廊隔开。

带状截断。当 $k \cdot \hat{\omega}_\alpha \to 0$ 时，一个斑块中的粒子-空穴对数量会变少，甚至为零，从而导致分母很小或为零的问题。我们采用与 [Ben+20] 中相同的方法来避免这个问题：对每个 $\alpha \in \{1,\dots,M\}$，令 $\hat{\omega}_\alpha := \hat{\omega}(\theta_\alpha) \in \mathbb{S}^1$ 为指向斑块 B_α 中心的向量。注意，$\hat{\omega}_\alpha$ 继承了反射对称性：对 $\alpha \in \{1,\dots,\frac{M}{2}\}$，有 $\hat{\omega}_\alpha = -\hat{\omega}_{\alpha+M/2}$。对于 $k \in \mathbb{Z}^2_*$， $|k| < R$，定义指标集 $\mathcal{I}_k := \mathcal{I}_k^+ \cup \mathcal{I}_k^-$ 如下

$$\mathcal{I}_k^+ := \big\{\alpha = 1,\dots,M \;\big|\; k\cdot\hat{\omega}_\alpha \geq N^{-\delta}\big\}\,, \qquad \mathcal{I}_k^- := \big\{\alpha = 1,\dots,M \;\big|\; k\cdot\hat{\omega}_\alpha \leq -N^{-\delta}\big\}\,, \tag{5.3}$$

其中 $\delta > 0$ 是一个稍后确定的指数。换言之，我们排除了与 k正交的某个窄带内的斑块。正如下文引理 5.1 的证明中所阐述的，我们施加约束条件

$$RN^\delta \ll M \ll R^{-2}N^{\frac{1}{2}-\delta}\,. \tag{5.4}$$

至此，分片构造完成，留下 $(M,\ R,\ \delta)$ 作为待优化的参数。注意，只有当 $\delta \in (0,\ \frac{1}{4})$ 时，(5.4) 才有意义。事实上，我们稍后会将 δ 选为任意小的数，并将 $R \sim N^{\delta'}$ 选为比 $0 < \delta' < \delta$ 还小的数。

5.2 斑块算子与基本界

与 [Ben+20] 中一样，我们现在将对算符 $b^*(k)$ $b(k)$ (2.6) 分配到各个斑块上。给定$k \in \mathbb{Z}^2_*$，满足 $|k| < R$，并给定 $\alpha \in \mathcal{I}_k^+$，我们定义粒子–空穴对产生算符

$$b_\alpha^*(k) := \frac{1}{n_\alpha(k)} \sum_{\substack{p:\ p\in B_{\mathrm{F}}^c\cap B_\alpha \\ p-k\in B_{\mathrm{F}}\cap B_\alpha}} a_p^* a_{p-k}^*\,, \qquad n_\alpha(k)^2 := \sum_{\substack{p:\ p\in B_{\mathrm{F}}^c\cap B_\alpha \\ p-k\in B_{\mathrm{F}}\cap B_\alpha}} 1\,. \tag{5.5}$$

因此，归一化常数 $n_\alpha(k)^2$ 统计了区域 B_α 中相对动量为 k 的粒子-空穴对数量。 $n_\alpha(k)$ 越大，对 b^*–算子的玻色近似就越好。此外，对于 $\alpha \in \mathcal{I}_k$，我们定义

$$c_\alpha^*(k) := \begin{cases} b_\alpha^*(k) & \text{if } \alpha \in \mathcal{I}_k^+ \\ b_\alpha^*(-k) & \text{if } \alpha \in \mathcal{I}_k^- \end{cases}\,, \tag{5.6}$$

其中 $k \in \Gamma^{\mathrm{nor}}$ 满足

$$\Gamma^{\mathrm{nor}} := \{k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2_* \mid |k| < R \ \text{ and } \ k_2 > 0 \ \text{ or } \ (k_2 = 0 \text{ and } k_1 > 0)\} . \tag{5.7}$$

该定义便于组合与 k 和 $-k$ 相关的模式，这是可能的，因为 $V(k) = V(-k)$。接下来，我们整理关于 $n_\alpha(k)$ 和 $c_\alpha(k)$ 的一些界，这些界与三维情形 [Ben+21; Ben+23] 中的结果相似或相同。

引理 5.1 (归一化常数)。 假设 $RN^\delta \ll M \ll R^{-1}N^{\frac{1}{2}-\delta}$。那么对于任意 $k \in \Gamma^{\mathrm{nor}}$、 $\alpha \in \mathcal{I}_k$，我们有

$$n_\alpha(k)^2 = \frac{2\pi k_{\mathrm{F}}}{M}|k \cdot \hat{\omega}_\alpha|\big(1 + \mathcal{O}(RM^{-1}N^\delta + RMN^{-\frac{1}{2}+\delta})\big) . \tag{5.8}$$

证明。 通过调整 [Ben+20 第 6] 节和 [Ben+23 引理 5.1] 中的论证以适用于二维情形即可得到。

这里， k 与补丁曲面之间的角度用 $|\hat{k} \cdot \hat{\omega}_\alpha| \geq N^{-\delta}|k|^{-1}$ 近似，其中 $\hat{k} := k/|k|$，但实际上在一个补丁内变化幅度为 $\sim \frac{2\pi}{M}$，从而导致阶为 $M^{-1}N^\delta|k| \leq M^{-1}N^\delta R$ 的相对误差。

此外，将投影补丁（称为 P^k_α）近似为其晶格离散化所产生的误差现在为 $\mathcal{O}(1)$，而一条与补丁相交的直线最多可承载 R 个粒子-空穴对，从而导致绝对误差 $\mathcal{O}(R)$，因此相对误差为 $\mathcal{O}(RMN^{-\frac{1}{2}+\delta})$。对 M 的假设是使两个相对误差均为 $\ll 1$所必需的。 □

引理 5.2 （近似正则对易关系）。设 k、 $\ell \in \Gamma^{\mathrm{nor}}$、 $\alpha \in \mathcal{I}_k$ 和 $\beta \in \mathcal{I}_\ell$。则，上述定义的算子$c_\alpha$（$k$） c^*_β（k）满足以下近似玻色对易关系：

$$[c_\alpha(k), c_\beta(\ell)] = 0 = [c^*_\alpha(k), c^*_\beta(\ell)] , \quad [c_\alpha(k), c^*_\beta(\ell)] = \delta_{\alpha,\beta}(\delta_{k,\ell} + \mathcal{E}_\alpha(k, \ell)) , \tag{5.9}$$

其中误差算子 $\mathcal{E}_\alpha$（k、 ℓ）定义为

$$\mathcal{E}_\alpha(k, \ell) := -\frac{1}{n_\alpha(k)n_\alpha(\ell)}\left(\sum_{\substack{p:\ p\in B^c_{\mathrm{F}}\cap B_\alpha \\ p-\ell, p-k\in B_{\mathrm{F}}\cap B_\alpha}} a^*_{p-\ell}a_{p-k} + \sum_{\substack{h:\ h\in B_{\mathrm{F}}\cap B_\alpha \\ h+\ell, h+k\in B^c_{\mathrm{F}}\cap B_\alpha}} a^*_{h+\ell}a_{h+k} \right) . \tag{5.10}$$

此外， $\mathcal{E}_\alpha$（k、 ℓ） $= \mathcal{E}_\alpha$（ℓ、 k）*与 $\mathcal{N}$对易，并且对于任意 $\gamma \in \mathcal{I}_k \cap \mathcal{I}_\ell$和 $\psi \in \mathcal{F}$，我们有以下界

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k\cap\mathcal{I}_\ell} |\mathcal{E}_\alpha(k, \ell)|^2 \leq C\big(MN^{-\frac{1}{2}+\delta}\mathcal{N}\big)^2 , \quad \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k\cap\mathcal{I}_\ell} \|\mathcal{E}_\alpha(k, \ell)\psi\| \leq CM^{\frac{3}{2}}N^{-\frac{1}{2}+\delta}\|\mathcal{N}\psi\| . \tag{5.11}$$

证明。 证明过程与 [Ben+21, 引理 5.2], 另见 [Ben+23, 引理 5.2] 中的证明类似。注意，我们的因子 $N^{-\frac{1}{2}+\delta}$ 与三维情形不同，因为 (5.8) 也有所不同。 □

引理 5.3 (转换为带隙数算子)。 回顾带能隙数算子$\mathcal{N}_\delta$ (3.6)。令 $\delta > 0$ 如带状截断(5.3) 中所述，并令 $k \in \Gamma^{\mathrm{nor}}$。那么，对于 $M \gg N^\delta$，

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k} c^*_\alpha(k)c_\alpha(k) \leq \mathcal{N}_\delta . \tag{5.12}$$

此外，对于任意 $\psi \in \mathcal{F}$，

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k} \|c_\alpha(k)\psi\| \le M^{\frac12}\|\mathcal{N}_\delta^{\frac12}\psi\|\,, \qquad \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k} \|c_\alpha^*(k)\psi\| \le M^{\frac12}\|(\mathcal{N}_\delta+M)^{\frac12}\psi\|\,, \tag{5.13}$$

并且对任意 $f \in \ell^2(\mathcal{I}_k)$，

$$\Big\|\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k} f_\alpha c_\alpha(k)\psi\Big\| \le \|f\|_{\ell^2}\|\mathcal{N}_\delta^{\frac12}\psi\|\,, \qquad \Big\|\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k} f_\alpha c_\alpha^*(k)\psi\Big\| \le \|f\|_{\ell^2}\|(\mathcal{N}_\delta+1)^{\frac12}\psi\|\,. \tag{5.14}$$

证明。 证明与 [Ben+21 中引理 5.3], 类似，其中需要 $M \gg N^\delta$ 来确保 diam(B_α) $\le CN^{\frac12}M^{-1} \ll N^{\frac12-\delta}$，因此最终有 $e(p) + e(p-k) \ge cN^{-\frac12-\delta}$。 □

如 [Ben+21 的 (5.11)], 所示，对 $g\colon\ \mathbb{Z}^2\times\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ 我们定义加权对算子

$$c_\alpha^g(k) := \frac{1}{n_\alpha(k)} \sum_{\substack{p:\ p\in B_{\mathrm F}^c\cap B_\alpha\\ p\mp k\in B_{\mathrm F}\cap B_\alpha}} g(p,k)a_{p\mp k}a_p \qquad \text{for } \alpha\in\mathcal{I}_k^\pm\,. \tag{5.15}$$

引理 5.4 (加权对算子)。 回顾 (3.6) $\mathcal{N}_\delta$，并令 $\delta > 0$ 如 (5.3) 中所示。则对所有 $k \in \Gamma^{\mathrm{nor}}$ 和 $\psi \in \mathcal{F}$，有

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k} \|c_\alpha^g(k)\psi\| \le CM^{\frac12}\|g\|_\infty\|\mathcal{N}_\delta^{\frac12}\psi\|\,, \qquad \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k} \|c_\alpha^g(k)^*\psi\| \le CM^{\frac12}\|g\|_\infty\|(\mathcal{N}_\delta+M)^{\frac12}\psi\|\,, \tag{5.16}$$

并且对所有 $f \in \ell^2(\mathcal{I}_k)$ 也成立

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k} f_\alpha c_\alpha^g(k)\psi\Big\| &\le \|g\|_\infty\|f\|_{\ell^2}\|\mathcal{N}_\delta^{\frac12}\psi\|\,,\\ \Big\|\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k} f_\alpha c_\alpha^g(k)^*\psi\Big\| &\le \|g\|_\infty\|f\|_{\ell^2}\|(\mathcal{N}_\delta+1)^{\frac12}\psi\|\,.\end{aligned} \tag{5.17}$$

证明。 证明与 [Ben+21 中引理 5.4]类似。 □

6 伪玻色 Bogoliubov变换

回想一下， $Q_{\mathrm B}$ 根据关联哈密顿量 (2.7)。为了得到 E_{GS} 的上界，类比~ ~ $\mathbb{X}$和 $\mathcal{E}_1$ (4.1)，我们定义低动量限制

$$\widetilde{Q}_{\mathrm B} := \frac{1}{(2\pi)^2N} \sum_{k\in\mathbb{Z}^2_*:|k|<CN^{\frac12}} \hat V(k)\left(b^*(k)b(k) + \frac12\big(b^*(k)b^*(-k) + b(-k)b(k)\big)\right)\,. \tag{6.1}$$

~与 [Ben+23] 中一样，我们用 (5.6) 中引入的对算子来近似 $Q_{\mathrm B}$ 和 $Q_{\mathrm B}$：

$$\begin{aligned}Q_{\mathrm B}^R := \frac{1}{(2\pi)^2N} \sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}} \hat V(k)\Bigg(&\sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{I}_k^+} n_\alpha(k)n_\beta(k)c_\alpha^*(k)c_\beta(k) + \sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{I}_k^-} n_\alpha(k)n_\beta(k)c_\alpha^*(k)c_\beta(k)\\ &+ \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k^+,\beta\in\mathcal{I}_k^-} n_\alpha(k)n_\beta(k)c_\alpha^*(k)c_\beta^*(k) + \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k^-,\beta\in\mathcal{I}_k^+} n_\alpha(k)n_\beta(k)c_\alpha(k)c_\beta(k)\Bigg)\,.\end{aligned} \tag{6.2}$$

这种近似相当于忽略赤道附近走廊和斑块的贡献；下面的引理保证了这些贡献很小。

引理 6.1. 回顾 Q_{B} 和 $\widetilde{Q}_{\mathrm{B}}$的定义 (2.7) 和 (6.1) 。若 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}|k|^{2-b}\hat{V}(k)^2<\infty$，其中 $b\in(0,1)$，则存在 $C,C_\varepsilon>0$，使得对所有 $\xi\in\mathcal{F}$，

$$\begin{aligned}
&|\langle\xi,(\widetilde{Q}_{\mathrm{B}}-Q_{\mathrm{B}}^R)\xi\rangle|\\
&\leq C\hbar R^2M^{\frac{3}{2}}N^{-\frac{1}{4}+\frac{b}{4}+\frac{\delta}{2}}\sup_{\lambda\in[0,1]}\langle T_\lambda\xi,(\mathcal{N}+1)^3T_\lambda\xi\rangle\\
&\quad+C_\varepsilon\hbar R^{1+\frac{b}{2}}N^{\varepsilon}\big(N^{\frac{1}{4}}\langle\xi,\mathbb{H}_0\xi\rangle^{\frac{1}{2}}+1\big)\big(N^{\frac{1}{4}}\langle\xi,\mathbb{H}_0\xi\rangle^{\frac{1}{2}}\big(N^{-\frac{1}{8}}+N^{-\frac{\delta}{2}}+RM^{\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}\big)+RN^{-\frac{1}{4}}\big)\,.
\end{aligned}\tag{6.3}$$

此外，若 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}|k|\hat{V}(k)<\infty$，且 ξ 属于定义 *3.1* 意义下的近似基态，则

$$|\langle\xi,(Q_{\mathrm{B}}-Q_{\mathrm{B}}^R)\xi\rangle|\leq C_\varepsilon\hbar N^{\varepsilon}\big(R^{-\frac{1}{2}}+N^{-\frac{1}{8}}+N^{-\frac{\delta}{2}}+RM^{\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}\big)\,.\tag{6.4}$$

证明。首先注意，对于 $|k|\geq R$，有 $k\notin\Gamma^{\mathrm{nor}}$（比较 (5.7)），因此 k 不会对 Q_{B}^R产生贡献。于是，

$$\begin{aligned}
|\langle\xi,(Q_{\mathrm{B}}-Q_{\mathrm{B}}^R)\xi\rangle|&\leq\frac{C}{N}\sum_{k\in\mathbb{Z}^2_*:|k|\geq R}\hat{V}(k)\Big(\langle\xi,b^*(k)b(k)\xi\rangle+|\langle\xi,b(k)b(-k)\xi\rangle|\Big)\\
&\quad+\frac{C}{N}\sum_{k\in\mathbb{Z}^2_*:|k|<R}\hat{V}(k)\big(\|b(k)\xi\|+\|b^*(-k)\xi\|\big)\|r^R(k)\xi\|\,,
\end{aligned}$$

其中，$|k|<R$ 的玻色化误差定义为

$$r^R(k)\coloneqq b(k)-\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k^+}n_\alpha(k)c_\alpha(k)\,.\tag{6.5}$$

$|\langle\xi,(\widetilde{Q}_{\mathrm{B}}-Q_{\mathrm{B}}^R)\xi\rangle|$ 的同一公式也成立，但需满足附加约束条件 $|k|<CN^{\frac{1}{2}}$。

情形 $|k|\geq R$. 对于 Q_{B}，我们按照 [Ben+23，引理 A.3]，中的相同步骤，使用引理 3.5 和 $\sum_{|k|<CN^{\frac{1}{2}}}\hat{V}(k)|k|^{\frac{1}{2}}\leq N^{\frac{1+b}{4}}$（比较式 (4.4)），得到

$$\begin{aligned}
&\frac{C}{N}\sum_{k\in\mathbb{Z}^2_*:R\leq|k|<CN^{\frac{1}{2}}}\hat{V}(k)\Big(\langle\xi,b^*(k)b(k)\xi\rangle+|\langle\xi,b(k)b(-k)\xi\rangle|\Big)\\
&\leq CR^2M^{\frac{3}{2}}N^{-\frac{3}{4}+\frac{b}{4}+\frac{\delta}{2}}\sup_{\lambda\in[0,1]}\langle T_\lambda\xi,(\mathcal{N}+1)^3T_\lambda\xi\rangle\,.
\end{aligned}\tag{6.6}$$

对于 Q_{B}，与 [Ben+23 中的引理 6.1]，一样，我们使用引理 4.3 和 3.2 得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\sum_{|k|\geq R}\hat{V}(k)\left(\|b(k)\xi\|+\|b^*(-k)\xi\|\right)\|r^R(k)\xi\|\leq\frac{C}{N}\sum_{|k|\geq R}\hat{V}(k)\left(N^{\frac{1}{2}}+|k|N^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(N^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\log(N)\\
&\leq CN^{-\frac{1}{2}}\log(N)\sum_{|k|>R}\hat{V}(k)|k|^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}\leq C\hbar R^{-\frac{1}{2}}\log(N)\,.
\end{aligned}$$

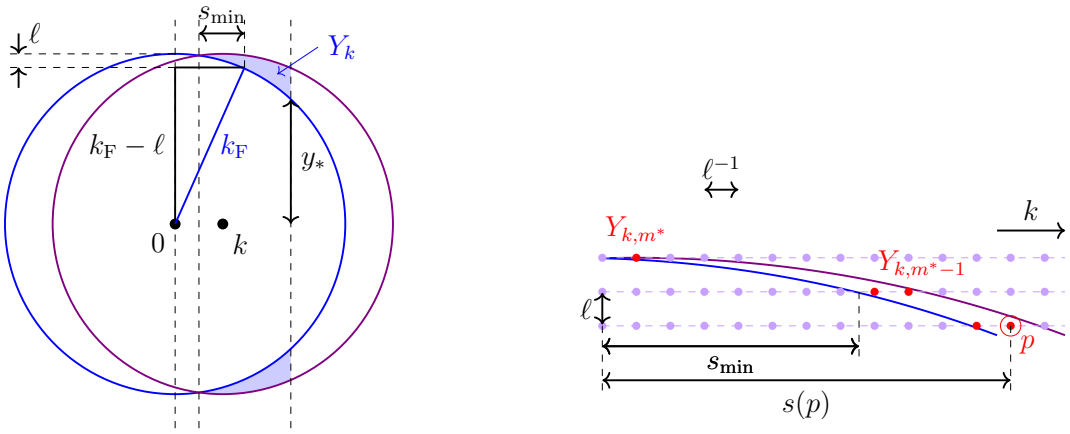

图 2：**左**：集合 Y_k 的示意图，以及用于确定 $s_{\min}$的几何考量。**右**：我们将集合 Y_k 分解为与 k平行的平面 $Y_{k,\,m}$。对于点 $p \in Y_{k,\,m}$，对激发能随后为 $\lambda_{k,\,p} = \hbar^2|k|s(p)$；利用 $s(p) \geq s_{\min}$，可方便地对 $|m| \neq m^*$给出下界。

C ˜**ase** $|k| < R$. 这里，Q_{B} 和 Q_{B} 的误差相同，且与以下量成正比

$$\frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2_* : |k| < R} \hat{V}(k) \left(\|b(k)\xi\| + \|b^*(-k)\xi\| \right) \|r^R(k)\xi\|$$

我们记

$$\|r^R(k)\xi\| \leq \sum_{p \in Y_k} \|a_{p-k} a_p \xi\| + \sum_{p \in U_k \setminus Y_k} \|a_{p-k} a_p \xi\| \,,$$

其中，U_k 跟踪所有未玻色化对，特别是带状截断[3]在（5.3）中排除的 Y_k：

$$U_k := L_k \setminus \bigcup_{\alpha=1}^{M} (B_\alpha \cap (B_\alpha + k)) \,, \qquad Y_k := \{ p \in U_k \mid \lambda_{k,p} \leq \hbar N^{-\delta} \} \,, \tag{6.7}$$

其激发能为 $\lambda_{k,\,p} := \frac{1}{2}\hbar^2(|p|^2 - |p-k|^2)$。注意，引入 $\hat{k} := k/|k|$ 以及距离 $s(p) := (p \cdot \hat{k} - \frac{|k|}{2})$，即 p 在 k方向上到月牙形区域的尖端 $B_{\mathrm{F}}^c \cap (B_{\mathrm{F}} + k)$的距离，见图 2，我们有 $\lambda_{k,\,p} = \hbar^2|k|s(p)$。于是，对 Y_k 的截断为

$$\lambda_{k,p} \leq \hbar N^{-\delta} \quad \Leftrightarrow \quad s(p) \leq |k|^{-1} N^{\frac{1}{2}-\delta} \,. \tag{6.8}$$

现在，我们将 Y_k 分解为与$\hat{k}$平行（即与$\hat{k}^\perp$ 垂直）的平面：$= \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \hat{k}$，其中两个平面之间的距离为 $\ell = |k|^{-1} \gcd(k_1, k_2) \leq 1$:

$$Y_{k,m} := \{ p \in Y_k \mid p \cdot \hat{k}^\perp = m\ell \} \,, \qquad m \in \mathbb{Z} \,, \tag{6.9}$$

[3]注意，若 p 被带状截断 (5.3) 排除，则对于某个 $\alpha \notin \mathcal{I}_k$，有 $p \in B_\alpha$ 或 $p - k \in B_\alpha$。于是我们写作 $\hbar^{-2}\lambda_{k,\,p} = (p \cdot k - \frac{|k|^2}{2}) \leq |p \cdot k - k_{\mathrm{F}}(k \cdot \hat{\omega}_\alpha)| + k_{\mathrm{F}}|k \cdot \hat{\omega}_\alpha|$，其中根据带状截断，$k_{\mathrm{F}}|k \cdot \hat{\omega}_\alpha| \leq \pi^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}-\delta}$。由斑块几何可得，$|p \cdot k - k_{\mathrm{F}}(k \cdot \hat{\omega}_\alpha)| \leq |k||p - k_{\mathrm{F}}\hat{\omega}_\alpha| \leq |k|(R + Ck_{\mathrm{F}}M^{-1})$，因此结合 $M \gg RN^\delta \gg |k|N^\delta$，我们得出 $\hbar^{-2}\lambda_{k,\,p} \leq \pi^{-\frac{1}{2}}(1 + o_N(1))|k|^{-1}N^{\frac{1}{2}-\delta}$。这意味着当 N 足够大时，(6.8) 成立，因此集合 Y_k 确实覆盖了所有被带状截断排除的 p。

参见图 2。这里，$Y_{k,\,m}$ 只有在以下条件成立时才非空

$$m_* \le |m| \le m^* \,, \qquad m_* := \inf\{m \in \mathbb{N} \mid m\ell \ge y_*\} \,, \qquad m^* := \sup\{m \in \mathbb{N} \mid m\ell < k_{\mathrm{F}}\} \,, \tag{6.10}$$

其中 $y_* > 0$ 的定义使其满足（比较式 (6.8)）

$$k_{\mathrm{F}}^2 - y_*^2 = \big(\tfrac{|k|}{2} + |k|^{-1}N^{\frac{1}{2}-\delta}\big)^2 \quad \Rightarrow \quad y_* \ge cN^{\frac{1}{2}} \,, \qquad k_{\mathrm{F}}^2 - y_*^2 \le N^{1-2\delta} + R^2 \,. \tag{6.11}$$

这里，$R^2 \ll N^{1-2\delta}$，因为 $\delta \in (0, \frac{1}{4})$，而 R 将取为 $\sim N$ 的一个足够小的幂。现在分别考虑 $m \in \{-m^*, m^*\}$ 和 $|m| \le m^* - 1$ 两种情况：令 $Y_k := Y_k \setminus (Y_{k,\,-m^*} \cup Y_{k,\,m^*})$。那么[4]

$$\sum_{p \in Y_k} \|a_{p-k}a_p\xi\| \le |Y_{k,-m^*}| + |Y_{k,m^*}| + \left(\sum_{p \in \tilde{Y}_k} \lambda_{k,p}^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \langle \xi, \mathbb{H}_0 \xi\rangle^{\frac{1}{2}} \,. \tag{6.12}$$

每个平面上点的间距为 ℓ^{-1}，因此每个平面上的点数不超过$|Y_{k,\,m}| \le \ell|k| + 1 \le |k| + 1 \le 2R$，特别地，$m \in \{-m^*, m^*\}$ 也满足这一点。

对于 $|m| \le m^* - 1$，注意到由于 $|k| < R$，月牙形区域非常薄，因此 $s(p)$ 有一个下界（即能隙），见图 2：

$$s(p) \ge s_{\min} = \sqrt{k_{\mathrm{F}}^2 - (k_{\mathrm{F}} - \ell)^2} - \frac{|k|}{2} \quad \Rightarrow \quad s_{\min} \ge C\sqrt{k_{\mathrm{F}}\ell} - R \ge CN^{\frac{1}{4}}|k|^{-\frac{1}{2}} \,. \tag{6.13}$$

同样，$p \in Y_{k,\,m}$ 满足 $s(p) \ge \sqrt{k_{\mathrm{F}}^2 - (m\ell)^2 - \frac{|k|}{2}}$，且由于 $|k| < R \ll s_{\min} \le s(p)$，我们有 $s(p) \ge c\sqrt{k_{\mathrm{F}}^2 - (m\ell)^2}$。由于每个平面包含 $\le (|k| + 1)$ 个点，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{p \in \tilde{Y}_k} \lambda_{k,p}^{-1} = \sum_{p \in \tilde{Y}_k} \frac{1}{\hbar^2 |k| s(p)} \le C\hbar^{-2}|k|^{-1}(|k|+1) \sum_{m_* \le |m| \le m^*-1} \big(k_{\mathrm{F}}^2 - (m\ell)^2\big)^{-\frac{1}{2}} \\
&\le C\hbar^{-2}\left(s_{\min}^{-1} + \int_{m_*}^{m^*-1} \big(k_{\mathrm{F}}^2 - (m\ell)^2\big)^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}m\right) \le C\hbar^{-2}\left(s_{\min}^{-1} + \ell^{-1}\int_{y_*}^{k_{\mathrm{F}}-\ell} \big(k_{\mathrm{F}}^2 - y^2\big)^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}y\right) \\
&\le C\hbar^{-2}\left(s_{\min}^{-1} + |k|\Big[\arctan\Big(\tfrac{y}{\sqrt{k_{\mathrm{F}}^2 - y^2}}\Big)\Big]_{y=y_*}^{k_{\mathrm{F}}-\ell}\right) .
\end{aligned}$$

利用 $\arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$，其中 $\arctan(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$，我们得出

$$\sum_{p \in \tilde{Y}_k} \lambda_{k,p}^{-1} \le C\hbar^{-2}\Big(s_{\min}^{-1} + |k|\tfrac{\sqrt{k_{\mathrm{F}}^2 - y_*^2}}{y_*}\Big) \le CN|k|(N^{-\frac{1}{4}} + N^{-\delta}) \,,$$

其中，我们通过 (6.13) 对 $s^{-1}{}_{\min}$ 进行了估计，并通过 (6.11) 估计了 $\sqrt{k_{\mathrm{F}}^2 - y_*^2}$ 和 y_*。

然后，回顾$|Y_{k,\,m^*}|$, $|Y_{k,\,-m^*}| \le CR$，(6.12) 变为

$$\sum_{p \in Y_k} \|a_{p-k}a_p\xi\| \le C|k|^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}}\langle \xi, \mathbb{H}_0\xi\rangle^{\frac{1}{2}}(N^{-\frac{1}{8}} + N^{-\frac{\delta}{2}}) + CR \,. \tag{6.14}$$

[4]注意，命题 A.1 已经给出了界 $\sum_{p \in \tilde{Y}_k} \lambda_{k\,,\,p}^{-1} \le C\hbar^{-2}\log(N)$。然而，这对本引理而言还不够：我们需要 $\sum_{p \in \tilde{Y}_k} \lambda_{k\,,\,p}^{-1} = \hbar^{-2}o_N(1)$。

对于 $p \in U_k \setminus Y_k$，我们利用更大的谱隙 $e(p) + e(p-k) = 2\lambda_{k,\,p} > 2\hbar N^{-\delta}$：

$$\begin{aligned}\sum_{p\in U_k\setminus Y_k} \|a_{p-k}a_p\xi\| &\le C\Bigg(\sum_{p\in U_k\setminus Y_k} \hbar^{-1}N^{\delta}(e(p)+e(p-k))\|a_{p-k}a_p\xi\|^2\Bigg)^{\frac{1}{2}} |U_k\setminus Y_k|^{\frac{1}{2}} \\ &\le CRM^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}\,\langle \xi, \mathbb{H}_0\xi\rangle^{\frac{1}{2}}\ ,\end{aligned}$$

这里我们使用了 $|U_k \setminus Y_k| \le CMR^2$，因为该集合由面积为 $\le CR^2$ 的 M 条走廊组成。综合所有界，我们得到

$$\|r^R(k)\xi\| \le C|k|^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}}\langle \xi, \mathbb{H}_0\xi\rangle^{\frac{1}{2}}\big(N^{-\frac{1}{8}} + N^{-\frac{\delta}{2}} + RM^{\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}\big) + CR\,. \tag{6.15}$$

将此结果与关于 $\|b^\sharp(k)\xi\|^2 \le CN\log(N)\langle \xi,\ \mathbb{H}_0\xi\rangle + C|k|N^{\frac{1}{2}}$ with $\sharp \in \{*,\cdot\}$ 的界 (4.10) 结合起来，并按照 (4.4) 估计 $\sum_{|k|<R}\hat{V}(k)|k| \le CR^{2+b}$，即可得到 (6.3)。

对于 (6.4)，我们直接估计 $\sum_k V(k)|k| < \infty$，并利用引理 3.2：对于近似基态，$\langle \xi, \mathbb{H}_0\xi\rangle \le CN^{-\frac{1}{2}}$。 □

相比之下，动能 $\mathbb{H}_0$ 无法直接用准玻色子对算符 c 和 c^* 表示。然而，如 [Ben+23] 中所示，它相对于对易子的行为为

$$[\mathbb{H}_0, c^*_\alpha(k)] = \frac{1}{n_\alpha(k)}\sum_{p\in L_k\cap B_\alpha}(e(p)+e(p-k))a^*_pa^*_{p-k} \simeq 2\hbar\kappa|k\cdot\hat{\omega}_\alpha|c^*_\alpha(k)\,, \tag{6.16}$$

其中，我们将色散关系线性化为 $e(p) + e(p-k) \simeq 2\hbar\kappa|k\cdot\hat{\omega}_\alpha|$，其中 $\kappa = \pi^{-\frac{1}{2}}$，因此 $k_{\mathrm{F}} = \kappa N^{\frac{1}{2}}$。由此，启发式地，

$$\mathbb{H}_0 \simeq 2\hbar\kappa\sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k}|k\cdot\hat{\omega}_\alpha|c^*_\alpha(k)c_\alpha(k) =: \mathbb{D}_{\mathrm{B}}\,. \tag{6.17}$$

于是，我们可以将 $(\mathbb{H}_0 + Q_{\mathrm{B}})$ 近似为如下形式：定义 $g(k) \in \mathbb{R}$, $u(k)$ $v(k) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_k^+|}$，以及 $d(k)$ $b(k) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}_k^+|\times|\mathcal{I}_k^+|}$，其中

$$\begin{aligned} &g(k) := \frac{1}{2(2\pi)^2}\hat{V}(k)\,, \qquad u_\alpha(k) := |\hat{k}\cdot\hat{\omega}_\alpha|^{\frac{1}{2}}\,, \qquad v_\alpha(k) := k_{\mathrm{F}}^{-\frac{1}{2}}|k|^{-\frac{1}{2}}n_\alpha(k) \ \text{ for } \alpha\in\mathcal{I}_k^+\,, \\ &d(k) := \mathrm{diag}\{u_\alpha(k)^2 \mid \alpha\in\mathcal{I}_k^+\}\,, \qquad b(k) := g(k)|v(k)\rangle\langle v(k)|\,, \end{aligned} \tag{6.18}$$

其中 $\hat{k} := k/|k|$，以及实对称矩阵 $|\mathcal{I}_k| \times |\mathcal{I}_k|$

$$D(k) := \begin{pmatrix} d(k) & 0 \\ 0 & d(k)\end{pmatrix}\,, \qquad W(k) := \begin{pmatrix} b(k) & 0 \\ 0 & b(k)\end{pmatrix}\,, \qquad \widetilde{W}(k) := \begin{pmatrix} 0 & b(k) \\ b(k) & 0\end{pmatrix}\,. \tag{6.19}$$

那么，对于有效哈密顿量

$$h_{\mathrm{eff}}(k) := \sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{I}_k}\Big((D(k)+W(k))_{\alpha,\beta}c^*_\alpha(k)c_\beta(k) + \frac{1}{2}\widetilde{W}(k)_{\alpha,\beta}(c^*_\alpha(k)c^*_\beta(k) + c_\beta(k)c_\alpha(k))\Big)\,, \tag{6.20}$$

我们有

$$\mathbb{H}_0 + Q_{\mathrm{B}} \simeq \mathbb{D}_{\mathrm{B}} + Q_{\mathrm{B}}^R = \sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}} 2\hbar\kappa|k| h_{\mathrm{eff}}(k)\ . \tag{6.21}$$

为简化记号，我们常常省略对 k 的显式依赖。类比于 [Ben+23 第 7], 节，我们现在引入两个近似玻色子的 Bogoliubov变换，以近似对角化准玻色哈密顿量。简要回顾其构造策略：我们将 h_{eff} 写成分块矩阵形式

$$h_{\mathrm{eff}} \simeq \mathbb{H} - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(D+W)\ , \qquad \mathbb{H} \coloneqq \frac{1}{2}((c^*)^T, c^T)\begin{pmatrix} D+W & \widetilde{W} \\ \widetilde{W} & D+W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ c^* \end{pmatrix}\ . \tag{6.22}$$

引入 $|\mathcal{I}_k| \times |\mathcal{I}_k|$ 矩阵

$$\begin{aligned} E &\coloneqq \left((D+W-\widetilde{W})^{1/2}(D+W+\widetilde{W})(D+W-\widetilde{W})^{1/2}\right)^{1/2}\ , \\ S_1 &\coloneqq (D+W-\widetilde{W})^{1/2}E^{-1/2}\ , \\ K &\coloneqq \log|S_1^T|\ , \end{aligned} \tag{6.23}$$

利用极分解 $S_1 = O|S_1|$，我们可以对角化

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D+W & \widetilde{W} \\ \widetilde{W} & D+W \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh K & \sinh K \\ \sinh K & \cosh K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} O^T & 0 \\ 0 & O^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh K & \sinh K \\ \sinh K & \cosh K \end{pmatrix}\ . \end{aligned} \tag{6.24}$$

与 [Ben+23 第 9] 节以及 [CHN23a], 中一样，这个初始变换最终会被证明不足以给出下界：近似 $\mathbb{H}_0 \simeq \mathbb{D}_{\mathrm{B}}$ 在哈密顿量中产生了贡献 $-\mathbb{D}_{\mathrm{B}}$，只有在满足 $E \geq D$ 时才能得到补偿。但这通常并不成立。因此，我们采用 [Ben+23 第 7]~ 节中的第二个准玻色玻格留博夫变换，它将得到一个对角分块矩阵 $P \geq D$：我们引入 $|\mathcal{I}_k| \times |\mathcal{I}_k|$ 矩阵 $U := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, 并注意到

$$U^T(D+W+\widetilde{W})U = \begin{pmatrix} d+2b & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\ , \qquad U^T(D+W-\widetilde{W})U = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d+2b \end{pmatrix}\ , \tag{6.25}$$

$$\begin{aligned} U^T E U &= \begin{pmatrix} \left(d^{1/2}(d+2b)d^{1/2}\right)^{1/2} & 0 \\ 0 & \left((d+2b)^{1/2}d(d+2b)^{1/2}\right)^{1/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (X^*X)^{1/2} & 0 \\ 0 & (XX^*)^{1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & APA^T \end{pmatrix}\ , \end{aligned} \tag{6.26}$$

其中 $X \coloneqq (d+2b)^{1/2}d^{1/2} = AP$，且 A 为正交的， $P \coloneqq (X^*X)^{1/2}$ 刻画了 X 的极分解。最后，令

$$\widetilde{O} \coloneqq U\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}U^T\ , \qquad \widetilde{P} \coloneqq \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}\ , \tag{6.27}$$

~~~并注意到 $E = OPO^T$，我们得出最终的对角化结果

$$\begin{pmatrix} D+W & \widetilde{W} \\ \widetilde{W} & D+W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh K & \sinh K \\ \sinh K & \cosh K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{O} & 0 \\ 0 & \widetilde{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{P} & 0 \\ 0 & \widetilde{P} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \widetilde{O}^T & 0 \\ 0 & \widetilde{O}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O^T & 0 \\ 0 & O^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh K & \sinh K \\ \sinh K & \cosh K \end{pmatrix} . \tag{6.28}$$

因此，若（$\mathbb{D}_{\mathrm{B}}+Q_{\mathrm{B}}^R$）恰好是玻色子的，则下列酉变换可将其对角化：

$$\begin{aligned} T &\coloneqq T_1 , \qquad T_\lambda \coloneqq \exp\left(\frac{\lambda}{2} \sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}} \sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{I}_k} K(k)_{\alpha,\beta} c_\alpha^*(k) c_\beta^*(k) - \mathrm{h.c.} \right) , \qquad \lambda \in \mathbb{R} , \\ Z &\coloneqq Z_1 , \qquad Z_\lambda \coloneqq \exp\left(\lambda \sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}} \sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{I}_k} L(k)_{\alpha,\beta} c_\alpha^*(k) c_\beta(k) \right) , \qquad \lambda \in \mathbb{R} , \end{aligned} \tag{6.29}$$

其中，$K(k)$ 定义于式 (6.23) 中，而 $L(k)$ 给出如下：

$$L(k) \coloneqq \log\Big(O(k)\widetilde{O}(k) \Big) . \tag{6.30}$$

于是，酉对角化可得：

$$Z^*T^*\mathbb{H}TZ \simeq \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{I}_k} \widetilde{P}_{\alpha,\beta} c_\alpha^*(k) c_\beta(k) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\widetilde{P} \geq \mathbb{D}_{\mathrm{B}} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}E , \tag{6.31}$$

~ ~其中，注意到 $P \geq D$ 且 $\mathrm{Tr}P \geq \mathrm{Tr}E$，即可得到最后一行。结合式 (6.22)，对角化由此得到的能量为

$$\hbar\kappa \sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}} |k| \mathrm{Tr}\left(E(k) - D(k) - W(k) \right) \simeq E^{\mathrm{RPA}} . \tag{6.32}$$

我们将严格证明这一近似。为此，我们先整理关于变换 T_λ 和 Z_λ 的一些估计。

引理 6.2 (T 的 Bogoliubov 核)。对于 $k \in \Gamma^{\mathrm{nor}}$，$K(k)$ 是一个实对称矩阵，并且存在一个 $C > 0$，使得对所有 $k \in \Gamma^{\mathrm{nor}}$ 和 $\alpha, \beta \in \mathcal{I}_k$，均有

$$|K(k)_{\alpha,\beta}| \leq C\frac{\hat{V}(k)}{M} , \qquad \|K(k)\|_{\mathrm{HS}} \leq C\hat{V}(k) . \tag{6.33}$$

证明。该证明是对 [Ben+22 中引理 2.5] 在二维情形下的直接改编。唯一的修改是，对我们而言，$v_\alpha = k^{-\frac{1}{2}_{\mathrm{F}}}|k|^{-\frac{1}{2}}n_\alpha(k)$ 中的 $\hbar^{\frac{1}{2}}$替代了 [Ben~+22 式 (2.15)] 中的 $\hbar$因子。令 $u_\alpha \coloneqq |\hat{k}\cdot\hat{\omega}_\alpha(k)|^{\frac{1}{2}}$，则我们仍然有 $v_\alpha \simeq Cu_\alpha M^{-\frac{1}{2}}$，与三维情形一样。证明的其余部分随后按照 [Ben+22 中的引理 2.5]进行。 □

引理 6.3. 令 $\delta > 0$、$M > 0$ 和 $R > 0$ 如第 *5* 节中所定义。则存在一个 $C > 0$，使得对于任意 $k \in \Gamma^{\mathrm{nor}}$，均有

$$\begin{aligned} \|L(k)\|_{\mathrm{HS}} &\leq C\hat{V}(k)(1 + \delta\log(N))^2 , \\ \|L(k)\|_{\mathrm{op}} &\leq C\hat{V}(k)(1 + \delta\log(N)) . \end{aligned} \tag{6.34}$$
~~~

证明. 该结论可通过与 [Ben+23 中引理 7.2] 相同的策略得出。 □

引理 6.4 (数算子的稳定性). 令 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}|k|^{2-b}\hat{}V(k)^2<\infty$，其中 $b\in(0,1)$，并回顾 (6.29)中的 T_λ, Z_λ。那么，对任意 $m\in\mathbb{N}$，都存在一个常数 $C_m>0$，使得对所有 $\lambda\in[-1,1]$，我们有

$$T_\lambda^*\mathcal{N}^m T_\lambda \le C_m \exp(C_m R^{\frac{b}{2}})(\mathcal{N}+1)^m \,. \tag{6.35}$$

此外，若 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}V(k)<\infty$，则有如下界

$$T_\lambda^*\mathcal{N}^m T_\lambda \le C_m(\mathcal{N}+1)^m \,, \qquad T_\lambda^*\mathcal{N}_\delta\mathcal{N}^m T_\lambda \le C_m(\mathcal{N}_\delta+1)(\mathcal{N}+1)^m \,, \tag{6.36}$$

$$Z_\lambda^*\mathcal{N}^m Z_\lambda = \mathcal{N}^m \,, \qquad Z_\lambda^*\mathcal{N}_\delta\mathcal{N}^m Z_\lambda \le C_m N^{C_m\delta}\mathcal{N}_\delta\mathcal{N}^m \,. \tag{6.37}$$

证明. 对于 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}V(k)<\infty$，证明与 [Ben+21 引理 7.2] 和 [Ben+23 引理 7.3] 中相同。对于 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}|k|^{2-b}\hat{}V(k)^2<\infty$，我们采用对 [Ben+23 引理 A.2] 的修改，将其用于 [Ben+20 命题 4.6]，并比较 (4.4)。

$$\sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}}\|K(k)\|_{\mathrm{HS}} \le C\sum_{k\in\mathbb{Z}^2_*:|k|<R}\hat{V}(k) \le CR^{\frac{b}{2}} \,.$$

□

下一个引理指出，算子 T 和 Z 的行为类似于玻色玻戈留波夫变换，但存在误差 $\mathfrak{E}$ 和 $\mathfrak{F}$。因此，我们将它们称为伪玻色（或准玻色）Bogoliubov变换。

引理 6.5 （近似玻色玻戈留波夫变换）。设 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}|k|V(k)$。那么，对任意 $\lambda\in[-1,1],\, k\in\Gamma^{\mathrm{nor}},\, \gamma\in\mathcal{I}_k$ 有

$$\begin{aligned} T_\lambda^* c_\gamma(k) T_\lambda &= \tilde{c}_\gamma(\lambda,k)+\mathfrak{E}_\gamma(\lambda,k) \,, \\ \tilde{c}_\gamma(\lambda,k) &\coloneqq \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k}\cosh(\lambda K(k))_{\alpha,\gamma}c_\alpha(k)+\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k}\sinh(\lambda K(k))_{\alpha,\gamma}c_\alpha^*(k) \,, \end{aligned} \tag{6.38}$$

$$Z_\lambda^* c_\gamma(k) Z_\lambda = \sum_{\beta\in\mathcal{I}_k}\exp(\lambda L(k))_{\gamma,\beta}c_\beta(k)+\mathfrak{F}_\gamma(\lambda,k) \,, \tag{6.39}$$

误差估计为

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma\in\mathcal{I}_k}\|\mathfrak{E}_\gamma(\lambda,k)\psi\| &\le CMN^{-\frac{1}{2}+\delta}\left\langle\psi,(\mathcal{N}_\delta+M)(\mathcal{N}+1)^2\psi\right\rangle^{\frac{1}{2}} \,, \\ \sum_{\gamma\in\mathcal{I}_k}\|\mathfrak{F}_\gamma(\lambda,k)\psi\| &\le CM^{\frac{3}{2}}N^{-\frac{1}{2}+C\delta}\left\langle\psi,\mathcal{N}_\delta\mathcal{N}^2\psi\right\rangle^{\frac{1}{2}} \,, \end{aligned} \tag{6.40}$$

对于 $\psi\in\mathcal{F}$。如果只知道 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}|k|^{2-b}\hat{}V(k)^2<\infty$，其中某个 $b\in(0,1)$，那么仍然有 e

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{I}_k}\|\mathfrak{E}_\gamma(\lambda,k)\psi\| \le CMN^{-\frac{1}{2}+\delta}e^{CR^{\frac{b}{2}}}\left\langle\psi,(\mathcal{N}_\delta+M)(\mathcal{N}+1)^2\psi\right\rangle^{\frac{1}{2}} \,. \tag{6.41}$$

在两种情况下，对于 $\tilde{c}_\gamma(k):=\tilde{c}_\gamma(1,\,k)$ 以下界成立

$$\|\tilde{c}_\alpha(k)\psi\|, \|\tilde{c}_\alpha^*(k)\psi\| \le C\|(\mathcal{N}_\delta+1)^{\frac{1}{2}}\psi\| \,. \tag{6.42}$$

证明。 (6.38)–(6.41) 的证明与 [Ben+23，引理 7.4] 和 [Ben+23，引理 7.5], 类似，使用了引理 5.2、5.3 和 6.4。现在考虑算子 $\tilde{c}_\alpha(k)$，并注意到

$$\big|\cosh(K(k))_{\alpha,\beta} - \delta_{\alpha,\beta}\big| + \big|\sinh(K(k))_{\alpha,\beta}\big| \leq \frac{C}{M} \,.$$

由引理 5.3 可得 $\|c_\alpha(k)\psi\| \leq \|\mathcal{N}_\delta^{\frac{1}{2}}\psi\|$ 和 $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k} \|c_\alpha^*(k)\psi\| \leq M^{\frac{1}{2}}\|(\mathcal{N}_\delta + M)^{\frac{1}{2}}\psi\|$，因此

$$\begin{aligned}
\|\tilde{c}_\alpha(k)\psi\| &\leq \sum_{\beta\in\mathcal{I}_k} \|\cosh(K(k))_{\alpha,\beta} c_\beta(k)\psi\| + \sum_{\beta\in\mathcal{I}_k} \|\sinh(K(k))_{\alpha,\beta} c_\beta^*(k)\psi\| \\
&\leq \sum_{\beta\in\mathcal{I}_k} \delta_{\alpha,\beta}\|c_\beta(k)\psi\| + \frac{C}{M}\sum_{\beta\in\mathcal{I}_k} \|c_\beta(k)\psi\| + \frac{C}{M}\sum_{\beta\in\mathcal{I}_k} \|c_\beta^*(k)\psi\| \\
&\leq C\|(\mathcal{N}_\delta + 1)^{\frac{1}{2}}\psi\| \,,
\end{aligned}$$

其中我们用到了 $|\cosh(K(k))_{\alpha,\beta}| \leq |\cosh(K(k))_{\alpha,\beta} - \delta_{\alpha,\beta}| + \delta_{\alpha,\beta}$。类似的论证也适用于 $\|\tilde{c}_\alpha^*(k)\psi\|$。 □

7 动能的线性化

得益于引理 6.5，我们现在可以将上一节中的启发式论证严格化。

引理 7.1 (动能对易子)。 对于所有 $k \in \Gamma^{\mathrm{nor}}$ 和所有 $\alpha \in \mathcal{I}_k$，我们有

$$\begin{aligned}
[\mathbb{H}_0, c_\alpha^*(k)] &= 2\kappa\hbar|k\cdot\hat{\omega}_\alpha| c_\alpha^*(k) + \hbar\mathfrak{E}_\alpha^{\mathrm{lin}}(k)^* \,, \\
[\mathbb{D}_{\mathrm{B}}, c_\alpha^*(k)] &= 2\kappa\hbar|k\cdot\hat{\omega}_\alpha| c_\alpha^*(k) + \hbar\mathfrak{E}_\alpha^{\mathrm{B}}(k)^* \,,
\end{aligned} \tag{7.1}$$

其中存在一个 $C > 0$，使得[5] 对所有 $f \in \ell^2(\mathcal{I}_k)$ 以及 $\psi \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k} \|\mathfrak{E}_\alpha^{\mathrm{lin}}(k)\psi\| &\leq C|k|M^{-\frac{1}{2}}\langle\psi, \mathcal{N}_\delta\psi\rangle^{\frac{1}{2}} \,, \\
\left\| \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k} f_\alpha \mathfrak{E}_\alpha^{\mathrm{lin}}(k)\psi \right\| &\leq C|k|M^{-1}\|f\|_2\langle\psi, \mathcal{N}_\delta\psi\rangle^{\frac{1}{2}} \,, \\
\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k} \|\mathfrak{E}_\alpha^{\mathrm{B}}(k)\psi\| &\leq C|k|R^2M^{\frac{3}{2}}N^{-\frac{1}{2}+\delta}\langle\psi, \mathcal{N}_\delta\mathcal{N}^2\psi\rangle^{\frac{1}{2}} \,.
\end{aligned} \tag{7.2}$$

证明。 与 [Ben+21 的引理 8.2], 证明类似，我们得到 $\mathfrak{E}_\alpha^{\mathrm{lin}}(k) = c_\alpha^g(g)$，其中某个 g 满足界 $\mathrm{diam}(B_\alpha) \leq CN^{\frac{1}{2}}M^{-1}$as $\|g\|_{\ell^\infty} \leq C|k|M^{-1}$。然后，我们应用引理 5.4，得到 $\mathfrak{E}_\alpha^{\mathrm{lin}}(k)$ 的界。 $\mathfrak{E}_\alpha^{\mathrm{B}}(k)$ 的界可仿照 [Ben+21 中的 (8.6)], ，结合引理 5.2 和 5.3，以及 $\sum_{\ell\in\Gamma^{\mathrm{nor}}} 1 \leq CR^2$ 得到。 □

[5]注意，在 [Ben+23中对 $\mathfrak{E}_\alpha^{\mathrm{B}}(k)$的类似三维界 (8.2)], 右侧缺少一个 $|k|$ a $|k|$ ，但这并不影响证明的正确性。

引理 7.2 ($\mathbb{H}_0 - \mathbb{D}_{\mathrm{B}}$) (近似 *Bogoliubov* 不变性) 。设 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |k|V(k) < \infty$。那么，存在一个常数 $C > 0$，使得对所有 $\psi \in \mathcal{F}$，都有

$$\begin{aligned}
&|\langle T\psi, (\mathbb{H}_0 - \mathbb{D}_{\mathrm{B}})T\psi\rangle - \langle \psi, (\mathbb{H}_0 - \mathbb{D}_{\mathrm{B}})\psi\rangle| \\
&\leq C\hbar\Big(M^{-1}\langle \psi, (\mathcal{N}_\delta + 1)\psi\rangle + R^2 M N^{-\frac{1}{2}+\delta}\langle \psi, (\mathcal{N}_\delta + 1)\psi\rangle^{\frac{1}{2}}\langle \psi, (\mathcal{N}_\delta + 1)(\mathcal{N} + 1)^2\psi\rangle^{\frac{1}{2}}\Big) , \\
&|\langle Z\psi, (\mathbb{H}_0 - \mathbb{D}_{\mathrm{B}})Z\psi\rangle - \langle \psi, (\mathbb{H}_0 - \mathbb{D}_{\mathrm{B}})\psi\rangle| \\
&\leq C\hbar\Big(M^{-1}N^{C\delta}\langle \psi, \mathcal{N}_\delta\psi\rangle + R^2 M^{\frac{3}{2}} N^{-\frac{1}{2}+C\delta}\langle \psi, \mathcal{N}_\delta\psi\rangle^{\frac{1}{2}}\langle \psi, \mathcal{N}_\delta\mathcal{N}^2\psi\rangle^{\frac{1}{2}}\Big) .
\end{aligned} \tag{7.3}$$

如果只知道某个 $b \in (0, 1)$ 中的 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |k|^{2-b}\, \hat{}V(k)^2 < \infty$，那么我们仍然有

$$\begin{aligned}
&|\langle T\psi, (\mathbb{H}_0 - \mathbb{D}_{\mathrm{B}})T\psi\rangle - \langle \psi, (\mathbb{H}_0 - \mathbb{D}_{\mathrm{B}})\psi\rangle| \\
&\leq C\hbar e^{CR^{\frac{b}{2}}}\Big(M^{-1}\langle \psi, (\mathcal{N}_\delta + 1)\psi\rangle + M N^{-\frac{1}{2}+\delta}\langle \psi, (\mathcal{N}_\delta + 1)\psi\rangle^{\frac{1}{2}}\langle \psi, (\mathcal{N}_\delta + 1)(\mathcal{N} + 1)^2\psi\rangle^{\frac{1}{2}}\Big) .
\end{aligned} \tag{7.4}$$

证明。 证明过程与 [Ben+21 引理 8.1] 以及 [Ben+23 引理 8.3] 中的相同论证一致。 □

8 定理1.1的证明

我们将证明分为三个步骤。第一部分致力于计算关联能，后两部分分别涉及基态能量的下界和上界。

8.1 迹的计算

回顾（6.32），有效赝玻色算符的对角化得到了一个近似的关联能

$$E^{\mathrm{RPA}} \simeq \hbar\kappa \sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}} |k| \mathrm{Tr}\left(E(k) - D(k) - W(k)\right) .$$

下一个引理将使这一近似变得严谨。

引理 8.1 (迹的计算**)**。 回顾 $E(k)$、 $D(k)$ 和 $W(k)$的定义 (6.19) 和(6.23)，以及 E^{RPA} 的定义 (1.10) 。若对某个 $b \in (0, 1)$，有 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |k|^{2-b}\, \hat{}V(k)^2 < \infty$，则存在某个 $C > 0$，使得

$$\begin{aligned}
&\left|E^{\mathrm{RPA}} - \hbar\kappa \sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}} |k| \mathrm{Tr}\left(E(k) - D(k) - W(k)\right)\right| \\
&\leq C\hbar R^{\frac{2+b}{2}}\left(N^{-\frac{\delta}{2}} + R^{\frac{1}{2}} M^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{\delta}{2}} + R^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} N^{-\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}\right) + C\hbar R^{b-1} .
\end{aligned} \tag{8.1}$$

ˆ若甚至有 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}|k|V(k)<\infty$，则

$$\begin{aligned}&\left|E^{\mathrm{RPA}}-\hbar\kappa\sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}}|k|\mathrm{Tr}\left(E(k)-D(k)-W(k)\right)\right|\\&\leq C\hbar\big(R^{-1}+N^{-\frac{\delta}{2}}+R^{\frac{1}{2}}M^{-\frac{1}{2}}N^{\frac{\delta}{2}}+R^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}\big)\,.\end{aligned}\tag{8.2}$$

在这两种情况下，

$$|E^{\mathrm{RPA}}|\leq C\hbar\,.\tag{8.3}$$

证明。 通过与三维情形 [Ben+20中相同的计算，并回顾 $g(k)$、 $v_\alpha(k)$和 $u_\alpha(k)$的定义（6.18），可得（5.14）], ，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\left(E(k)-D(k)-W(k)\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\log\big(1+Q_k(\lambda)\big)\mathrm{d}\lambda-2g(k)\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k^+}v_\alpha^2(k)\,,\\&\qquad\text{where}\quad Q_k(\lambda):=2g(k)\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k^+}\frac{u_\alpha^2(k)v_\alpha^2(k)}{u_\alpha^4(k)+\lambda^2}\,.\end{aligned}\tag{8.4}$$

现在注意到 $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty Q_k(\lambda)\mathrm{d}\lambda=2g(k)\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k^+}v_\alpha^2(k)$，因此可以写成

$$\hbar\kappa\sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}}|k|\mathrm{Tr}\left(E(k)-D(k)-W(k)\right)=\hbar\kappa\sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}}|k|\frac{2}{\pi}\int_0^\infty F\big(Q_k(\lambda)\big)\mathrm{d}\lambda\,,\tag{8.5}$$

其中 $F(x)=\log(1+x)-x$。另一方面，利用对称性 $k\mapsto -k$，我们有

$$\begin{aligned}&E^{\mathrm{RPA}}=E_<^{\mathrm{RPA}}+E_\geq^{\mathrm{RPA}}\,,&&E_<^{\mathrm{RPA}}:=\hbar\kappa\sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}}|k|\frac{2}{\pi}\int_0^\infty F\big(\widetilde{Q}_k(\lambda)\big)\mathrm{d}\lambda\,,\\&\widetilde{Q}_k(\lambda):=2\pi g(k)\left(1-\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}\right)\,,&&E_\geq^{\mathrm{RPA}}:=\hbar\kappa\sum_{k\in\mathbb{Z}^2:|k|\geq R}\frac{|k|}{\pi}\int_0^\infty F\big(\widetilde{Q}_k(\lambda)\big)\mathrm{d}\lambda\,.\end{aligned}\tag{8.6}$$

因此，只需估计 $E_\geq^{\mathrm{RPA}}$，以及将 $Q_k(\lambda)$ 替换为 $\widetilde{Q}_k(\lambda)$ 所产生的误差。我们先处理后者。由（5.8）可得

$$Q_k(\lambda)=2g(k)\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k^+}\sigma(p_\alpha)\frac{u_\alpha(k)^4}{u_\alpha(k)^4+\lambda^2}\big(1+\mathcal{O}\big(RM^{-1}N^\delta+RMN^{-\frac{1}{2}+\delta}\big)\big)\,,\tag{8.7}$$

其中， $\sigma(p_\alpha)=2\pi/M$ 是以 p_α为中心的单位圆弧，其测度为 p_α。为计算该和，我们定义 θ_α 为ˆk 与ˆω_α之间的夹角，因此 $\cos(\theta_\alpha)=u_\alpha(k)^2$。然后，由于该划分受直径约束，即 $\sup_{\hat{\omega}\in p_\alpha}|\theta(\hat{\omega})-\theta_\alpha|\leq C/M$，其中 $\theta(\hat{\omega})=\theta$ 是 k 与ˆω之间的ˆ夹角。于是，

$$\begin{aligned}&\left|\int_{p_\alpha}\frac{\cos^2(\theta(\hat{\omega}))}{\cos^2(\theta(\hat{\omega}))+\lambda^2}\mathrm{d}\sigma(\hat{\omega})-\sigma(p_\alpha)\frac{\cos^2(\theta_\alpha)}{\cos^2(\theta_\alpha)+\lambda^2}\right|\leq\int_{p_\alpha}\left|\frac{\cos^2(\theta(\hat{\omega}))}{\cos^2(\theta(\hat{\omega}))+\lambda^2}-\frac{\cos^2(\theta_\alpha)}{\cos^2(\theta_\alpha)+\lambda^2}\right|\mathrm{d}\sigma\\&\leq\sup_{\hat{\omega}\in p_\alpha}\left|\frac{d}{d\theta}\frac{\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)+\lambda^2}\right|\frac{C}{M}\sigma(p_\alpha)\leq\sup_{\hat{\omega}\in p_\alpha}\left|\frac{2\lambda^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{(\cos^2(\theta)+\lambda^2)^2}\right|\frac{C}{M^2}\leq\sup_{\hat{\omega}\in p_\alpha}\frac{CM^{-2}}{|\cos(\theta(\hat{\omega}))|}\,.\end{aligned}$$

由于$\alpha \in \mathcal{I}_k^+$（参见（5.3）），我们有 $\cos(\theta_\alpha) > N^{-\delta}|k|^{-1} \geq N^{-\delta}R^{-1}$；又因为我们假设（5.4） $M \gg RN^\delta$，所以对于任意$\hat{}\omega \in p_\alpha$，也有 $\cos(\theta(\hat{}\omega)) > N^{-\delta}R^{-1}$，因此

$$\left| \int_{p_\alpha} \frac{\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)+\lambda^2} \mathrm{d}\sigma - \sigma(p_\alpha) \frac{\cos^2(\theta_\alpha)}{\cos^2(\theta_\alpha)+\lambda^2} \right| \leq CRM^{-2}N^\delta \, .$$

因此，我们得出结论：

$$\left| \int_{\mathbb{S}^1_{\text{reduced}}} \frac{\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)+\lambda^2} \mathrm{d}\sigma - \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_k^+} \sigma(p_\alpha) \frac{\cos^2(\theta_\alpha)}{\cos^2(\theta_\alpha)+\lambda^2} \right| \leq CRM^{-1}N^\delta \, , \tag{8.8}$$

其中，$\mathbb{S}^1_{\text{reduced}} := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}_k^+} p_\alpha$ 是单位半圆，不包括宽度为 $N^{-\delta}|k|^{-1}$的带状区域。此外，由于 $\cos^2(\theta)(\cos^2(\theta)+\lambda^2)^{-1} \leq 1$，我们可以将其与整个单位半圆上的积分进行比较，该积分记为 $\mathbb{S}^1_{\text{half}}$

$$\left| \int_{\mathbb{S}^1_{\text{half}}} \frac{\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)+\lambda^2} \mathrm{d}\sigma - \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_k^+} \sigma(p_\alpha) \frac{\cos^2(\theta_\alpha)}{\cos^2(\theta_\alpha)+\lambda^2} \right| \leq C(N^{-\delta} + RM^{-1}N^\delta) \, . \tag{8.9}$$

现在我们计算半圆上的积分。首先，利用 $\cos^2(\theta) = (1+\cos(2\theta))/2$ 以及对称性 $\cos^2(\pi-\theta) = \cos^2(\theta)$，可以写成

$$\int_{\mathbb{S}^1_{\text{half}}} \frac{\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)+\lambda^2} \mathrm{d}\sigma = \int_0^\pi \frac{\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)+\lambda^2} \mathrm{d}\sigma = \int_0^\pi \frac{1+\cos(2\theta)}{2\lambda^2+\cos(2\theta)+1} \mathrm{d}\theta \, .$$

令 $z := e^{i2\theta}$，并令 γ 为复单位圆。则

$$\int_{\mathbb{S}^1_{\text{half}}} \frac{\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)+\lambda^2} \mathrm{d}\sigma = -\frac{i}{2} \int_\gamma \frac{(z+1)^2}{z((z+1)^2+4\lambda^2 z)} \mathrm{d}z \, .$$

我们有三个极点：$z=0$，$z=z_+$，$z=z_-$，其中 $z_\pm := -1-2\lambda^2 \pm 2\lambda\sqrt{1+\lambda^2}$。注意，如果 $\lambda \in (0, \infty)$，那么 z_+ 位于单位圆内，而 z_- 位于单位圆外；而如果 $\lambda \in (-\infty, 0)$，则情况相反。我们关注的是 $\lambda \in (0, \infty)$的情形，因此有

$$-\frac{i}{2} \int_\gamma \frac{(z+1)^2}{z^3+z+4\lambda^2 z^2+2z^2} \mathrm{d}z = \pi \left[1 + \frac{(z_++1)^2}{z_+(z_+-z_-)} \right] \, ,$$

最终我们得出结论：

$$\int_{\mathbb{S}^1_{\text{half}}} \frac{\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)+\lambda^2} \mathrm{d}\sigma = \pi \left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}} \right) \, . \tag{8.10}$$

$\hat{}$由于 $g(k) \leq V(k)$，利用（8.7）和（8.9），我们得到

$$\left| Q_k(\lambda) - \widetilde{Q}_k(\lambda) \right| \leq C\hat{V}(k) \big(N^{-\delta} + RM^{-1}N^\delta + RMN^{-\frac{1}{2}+\delta} \big) \, . \tag{8.11}$$

注意，对于 $x \geq 0$，函数 $F(x) = \log(1+x) - x$ 具有单位利普希茨常数，因此

$$\left|F\big(Q_k(\lambda)\big) - F\big(\widetilde{Q}_k(\lambda)\big)\right| \leq \left|Q_k(\lambda) - \widetilde{Q}_k(\lambda)\right| \leq C\hat{V}(k)\big(N^{-\delta} + RM^{-1}N^{\delta} + RMN^{-\frac{1}{2}+\delta}\big) \,. \tag{8.12}$$

现在我们必须比较关于 λ 的积分。利用对任意 $x \geq 0$ 都有 $|F(x)| \leq x$，且 $0 \leq u_\alpha(k)^4 \leq 1$，可得

$$\left|F\big(Q_k(\lambda)\big)\right| \leq Cg(k) \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_k^+} \sigma(p_\alpha) \frac{u_\alpha(k)^4}{u_\alpha(k)^4 + \lambda^2} \leq Cg(k) \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_k^+} \frac{1}{M\lambda^2} \leq C\frac{\hat{V}(k)}{\lambda^2} \,. \tag{8.13}$$

现在，由 (8.6) 可知

$$\left|F\big(\widetilde{Q}_k(\lambda)\big)\right| \leq 2\pi g(k) \left|1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}\right| \leq C\frac{\hat{V}(k)}{\lambda^2} \,. \tag{8.14}$$

Take $\Lambda > 0$，留待稍后优化。然后，将 (8.12)–(8.14) 合并，可得

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^\infty F\big(Q_k(\lambda)\big)\mathrm{d}\lambda - \int_0^\infty F\big(\widetilde{Q}_k(\lambda)\big)\mathrm{d}\lambda\right| \leq \int_0^\Lambda \left|F\big(Q_k(\lambda)\big) - F\big(\widetilde{Q}_k(\lambda)\big)\right| \mathrm{d}\lambda + C\int_\Lambda^\infty \frac{\hat{V}(k)}{\lambda^2}\mathrm{d}\lambda \\
&\leq C\hat{V}(k)\Lambda\big(N^{-\delta} + RM^{-1}N^{\delta} + RMN^{-\frac{1}{2}+\delta}\big) + C\hat{V}(k)\Lambda^{-1} \\
&\leq C\hat{V}(k)\big(N^{-\frac{\delta}{2}} + R^{\frac{1}{2}}M^{-\frac{1}{2}}N^{\frac{\delta}{2}} + R^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}\big) \,,
\end{aligned} \tag{8.15}$$

其中，在最后一步中，我们对 Λ 进行了优化。比较 (8.5) 和 (8.6)，得到

$$\begin{aligned}
&\left|E_<^{\mathrm{RPA}} - \hbar\kappa \sum_{k \in \Gamma^{\mathrm{nor}}} |k| \mathrm{Tr}\,(E(k) - D(k) - W(k))\right| \\
&\leq C\hbar\big(N^{-\frac{\delta}{2}} + R^{\frac{1}{2}}M^{-\frac{1}{2}}N^{\frac{\delta}{2}} + R^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}\big) \sum_{k \in \mathbb{Z}^2 : |k| < R} |k|\hat{V}(k) \,.
\end{aligned} \tag{8.16}$$

与 (4.4) 中一样，$\sum_{k\in\mathbb{Z}^2:\ |k|<R} |k|\,\hat{V}(k) \leq CR^{2+b}$。若 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |k|\,\hat{V}(k) < \infty$，则右端的和甚至是 $\leq C$。为了估计 $E_\geq^{\mathrm{RPA}}$，我们利用 $\widetilde{Q}_k(\lambda) \leq V_{(k)}$ 关于 $k \in \mathbb{Z}^2$ 一致有界这一事实，因此由泰勒展开，

$$F(\widetilde{Q}_k(\lambda)) \leq C\widetilde{Q}_k(\lambda)^2 \,.$$

因此，

$$\begin{aligned}
|E_\geq^{\mathrm{RPA}}| &\leq C\hbar \sum_{k\in\mathbb{Z}^2:|k|\geq R} |k| \int_0^\infty |\widetilde{Q}_k(\lambda)|^2 \,\mathrm{d}\lambda \leq C\hbar \sum_{k\in\mathbb{Z}^2:|k|\geq R} |k|\hat{V}(k)^2 \int_0^\infty \left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}\right)^2 \mathrm{d}\lambda \\
&\leq C\hbar \sum_{k\in\mathbb{Z}^2:|k|\geq R} |k|\hat{V}(k)^2 \Big(\int_0^1 1 \,\mathrm{d}\lambda + \int_1^\infty \frac{1}{\lambda^4}\mathrm{d}\lambda\Big) \leq C\hbar R^{b-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^2:|k|\geq R} |k|^{2-b}\hat{V}(k)^2 \leq C\hbar R^{b-1} \,.
\end{aligned}$$

若 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |k|\hat{V}(k) < \infty$，则 $\hat{V}(k) \leq C|k|^{-1}$（见注释 2），因此 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2:\ |k|\geq R} |k|^2\,\hat{V}(k)^2$，且取 $b = 0$ 时该界成立。结合关于 $|E_\geq^{\mathrm{RPA}}|$ 的界与 (8.16)，即可得到 (8.1) 和 (8.2)。

为证明 (8.3)，我们仿照 $|E^{\mathrm{RPA}}_{\geq}|$ 的处理方法，得到

$$|E^{\mathrm{RPA}}| \leq C\hbar \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |k| \int_0^\infty |\widetilde{Q}_k(\lambda)|^2 \,\mathrm{d}\lambda \leq C\hbar \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |k|\hat{V}(k)^2 \leq C\hbar \,.$$

□

8.2 下界

命题 8.2。 设 $V(k) = V(-k) \geq 0$ 以及 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |k|V(k) < \infty$。则存在 $C > 0$和 $a > 0$，使得

$$E_{\mathrm{GS}} \geq E_{\mathrm{FS}} + E^{\mathrm{RPA}} - CN^{-\frac{1}{2}-a} \,. \tag{8.17}$$

证明。我们按照 [Ben+21 第 10] 节以及 [Ben+23 第 9] 节中的方法进行：令 ψ_{GS} 为 H_N 的基态，且 $\xi := R\psi_{\mathrm{GS}}$，这显然属于定义 3.1 意义下的近似基态。此外，$R\xi$ 显然是 H_N 的特征向量，因此引理 3.6 的所有先验界均适用。由 (2.7) 可知，基态能量为

$$E_{\mathrm{GS}} = \langle \psi_{\mathrm{GS}}, H_N\psi_{\mathrm{GS}}\rangle = \langle \xi, (\mathbb{H}_0 + Q_{\mathrm{B}} + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathbb{X})\xi\rangle + E_{\mathrm{FS}} \,.$$

我们回顾 $\mathcal{E}_1 \geq 0$。然后，由引理 4.1、4.4 和 6.1，得到

$$|\langle \xi, \mathbb{X}\xi\rangle| \leq C_\varepsilon \hbar N^{-\frac{1}{4}+\varepsilon} \,, \qquad |\langle \xi, \mathcal{E}_2\xi\rangle| \leq C_\varepsilon \hbar N^{-\frac{1}{136}+\varepsilon} \,,$$

$$|\langle \xi, (Q_{\mathrm{B}} - Q^R_{\mathrm{B}})\xi\rangle| \leq C_\varepsilon \hbar N^{\varepsilon}\big(R^{-\frac{1}{2}} + N^{-\frac{1}{8}} + N^{-\frac{\delta}{2}} + RM^{\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}\big) \,.$$

我们得出结论

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{GS}} \geq & E_{\mathrm{FS}} + \langle \xi, (\mathbb{D}_{\mathrm{B}} + Q^R_{\mathrm{B}})\xi\rangle + \langle \xi, (\mathbb{H}_0 - \mathbb{D}_{\mathrm{B}})\xi\rangle \\ & - C_\varepsilon \hbar N^{\varepsilon}(N^{-\frac{1}{136}} + R^{-\frac{1}{2}} + N^{-\frac{\delta}{2}} + RM^{\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}) \,. \end{aligned} \tag{8.18}$$

利用引理 3.6、6.4 和 7.2，并记 $\xi = TZ\eta$，我们可以估计

$$\begin{aligned} \langle \xi, (\mathbb{H}_0 - \mathbb{D}_{\mathrm{B}})\xi\rangle &\geq \langle \eta, (\mathbb{H}_0 - \mathbb{D}_{\mathrm{B}})\eta\rangle - C_\varepsilon\hbar(M^{-1}N^{C\delta} + R^2M^{\frac{3}{2}}N^{-\frac{1}{4}+C\delta+\frac{\varepsilon}{2}}) \\ &\geq -\langle \eta, \mathbb{D}_{\mathrm{B}}\eta\rangle - C_\varepsilon\hbar(M^{-1}N^{C\delta} + R^2M^{\frac{3}{2}}N^{-\frac{1}{4}+C\delta+\frac{\varepsilon}{2}}) \,, \end{aligned} \tag{8.19}$$

其中我们用到了 $\mathbb{H}_0 \geq 0$。为了处理 $(\mathbb{D}_{\mathrm{B}} + Q^R_{\mathrm{B}})$，我们写作（对比 (6.20) 和 (6.21)）

$$\mathbb{D}_{\mathrm{B}} + Q^R_{\mathrm{B}} = \sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}} 2\hbar\kappa|k|h_{\mathrm{eff}}(k) \,. \tag{8.20}$$

利用引理 6.5，如 [Ben+21 中的做法，第 10], 节通过 T 共轭得到结果 in

$$T^*h_{\mathrm{eff}}(k)T = h^{\mathrm{diag}}_{\mathrm{eff}}(k) + \mathfrak{E}^{\mathrm{diag}}(k) \,, \tag{8.21}$$

其中 $\mathfrak{E}^{\mathrm{diag}}(k)$ 在式 (8.25) 及以下内容中有界，且首阶项为

$$\begin{aligned} h_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{diag}}(k) &:= \sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{I}_k} \Big(\big(D(k)+W(k)\big)_{\alpha,\beta} \tilde{c}_\alpha^*(k)\tilde{c}_\beta(k) + \frac{1}{2}\widetilde{W}(k)_{\alpha,\beta}\big(\tilde{c}_\alpha^*(k)\tilde{c}_\beta^*(k) + \tilde{c}_\beta(k)\tilde{c}_\alpha(k)\big)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(E(k)-D(k)-W(k)\big) + \sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{I}_k} \mathfrak{K}(k)_{\alpha,\beta} c_\alpha^*(k)c_\beta(k) + \mathfrak{E}^{\mathrm{no}}(k)\ , \\ \mathfrak{E}^{\mathrm{no}}(k) &:= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k} \Big(2\sinh(K(k))\big(D(k)+W(k)\big)\sinh(K(k)) + \\ &\quad + \cosh(K(k))\widetilde{W}(k)\sinh(K(k)) + \sinh(K(k))\widetilde{W}(k)\cosh(K(k))\Big)_{\alpha,\alpha} \mathcal{E}_\alpha(k,k)\ , \end{aligned} \tag{8.22}$$

其中 $\mathfrak{K}(k) := O(k)E(k)O(k)^T$，参见 (6.23) 及下文； $\mathcal{E}_\alpha(k,\ \ell)$ 定义见 (5.10)。为估计正规排序误差 $\mathfrak{E}^{\mathrm{no}}(k)$，注意到由引理 6.2 和 5.1，以及 $D,\ W,\ W$ 的定义式 (6.19),

$$\begin{aligned} |\sinh(K(k))_{\alpha,\beta}|, |W(k)_{\alpha,\beta}|, |\widetilde{W}(k)_{\alpha,\beta}| \le C\hat{V}(k)M^{-1}\ , \qquad \|\cosh(K(k))\|, \|\sinh(K(k))\| \le C\ , \\ \|W(k)\|, \|\widetilde{W}(k)\| \le C\hat{V}(k)\ , \qquad |D(k)_{\alpha,\beta}| \le \delta_{\alpha,\beta}\ , \qquad \|D(k)\| \le 1\ , \end{aligned} \tag{8.23}$$

因此，省略 k 指标后,

$$\Big|\Big(2\sinh(K)\big(D+W\big)\sinh(K) + \cosh(K)\widetilde{W}\sinh(K) + \sinh(K)\widetilde{W}\cosh(K)\Big)_{\alpha,\alpha}\Big| \le C\frac{\hat{V}(k)}{M}\ .$$

由 (5.10) 和引理 5.1（其中 $|k\cdot\hat{}\omega_\alpha| \ge N^{-\delta}$），显然可得

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k} |\langle\xi, \mathcal{E}_\alpha(k,k)\xi\rangle| &\le \sup_{\alpha\in\mathcal{I}_k} \frac{1}{n_\alpha(k)^2}\langle\xi,\mathcal{N}\xi\rangle \le CN^{-\frac{1}{2}+\delta}M\langle\xi,\mathcal{N}\xi\rangle \\ \Rightarrow \quad \pm\mathfrak{E}^{\mathrm{no}}(k) &\le C\hat{V}(k)N^{-\frac{1}{2}+\delta}\mathcal{N}\ . \end{aligned}$$

由此得出

$$h_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{diag}}(k) \ge \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(E(k)-D(k)-W(k)\big) + \sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{I}_k} \mathfrak{K}(k)_{\alpha,\beta}c_\alpha^*(k)c_\beta(k) - C\hat{V}(k)N^{-\frac{1}{2}+\delta}\mathcal{N}\ . \tag{8.24}$$

接下来，利用引理 6.5 计算 $\mathfrak{E}^{\mathrm{diag}}(k)$，其中 $\mathfrak{E}_\alpha(k) := \mathfrak{E}_\alpha(1,\ k)$；比较 [Ben+21, (10.6)]

$$\begin{aligned} |\langle Z\eta, \mathfrak{E}^{\mathrm{diag}}(k)Z\eta\rangle| \le & \sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{I}_k} \big(D(k)+W(k)\big)_{\alpha,\beta}\big(2\|\tilde{c}_\alpha(k)Z\eta\|\|\mathfrak{E}_\beta(k)Z\eta\| + \|\mathfrak{E}_\alpha(k)Z\eta\|\|\mathfrak{E}_\beta(k)Z\eta\|\big) \\ & + 2\sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{I}_k} \widetilde{W}(k)_{\alpha,\beta}\big(\|\tilde{c}_\alpha(k)Z\eta\|\|\mathfrak{E}_\beta(k)^*Z\eta\| + \|\mathfrak{E}_\alpha(k)Z\eta\|\|\mathfrak{E}_\beta(k)^*Z\eta\|\big) \\ & + 2\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_k} \|\mathfrak{E}_\alpha(k)Z\eta\|\Big\|\sum_{\beta\in\mathcal{I}_k} \widetilde{W}(k)_{\alpha,\beta}\tilde{c}_\beta^*(k)Z\eta\Big\|\ . \end{aligned} \tag{8.25}$$

然后，我们应用引理 6.5 以及矩阵元界 (8.23)，得出

$$\begin{aligned} |\langle Z\eta, \mathfrak{E}^{\mathrm{diag}}(k)Z\eta\rangle| \le & CMN^{-\frac{1}{2}+\delta}\langle Z\eta, (\mathcal{N}_\delta+M)(\mathcal{N}+1)^2Z\eta\rangle^{\frac{1}{2}}\langle Z\eta,(\mathcal{N}_\delta+1)Z\eta\rangle^{\frac{1}{2}} \\ & + CM^2N^{-1+2\delta}\langle Z\eta, (\mathcal{N}_\delta+M)(\mathcal{N}+1)^2Z\eta\rangle\ . \end{aligned} \tag{8.26}$$

将 (8.21) 代入 (8.20)，并应用 (8.24) 和 (8.26)，得到

$$\begin{aligned}
&\langle \xi, (\mathbb{D}_{\mathrm{B}} + Q_{\mathrm{B}}^R)\xi \rangle \\
&\geq \hbar\kappa \sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}} |k| \mathrm{Tr}\big(E(k) - D(k) - W(k)\big) + 2\hbar\kappa \sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}} \sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{I}_k} |k| \mathfrak{K}(k)_{\alpha,\beta} \langle Z\eta, c_\alpha^*(k) c_\beta(k) Z\eta \rangle \\
&\quad - C\hbar \sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}} |k| \Big(\hat{V}(k) N^{-\frac{1}{2}+\delta} \langle \xi, (\mathcal{N}+1)\xi \rangle + M N^{-\frac{1}{2}+\delta} \langle \xi, (\mathcal{N}_\delta + M)(\mathcal{N}+1)^2 \xi \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \xi, (\mathcal{N}_\delta + 1)\xi \rangle^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + M^2 N^{-1+2\delta} \langle \xi, (\mathcal{N}_\delta + M)(\mathcal{N}+1)^2 \xi \rangle \Big) ,
\end{aligned}$$

我们在 $Z\eta = T^*\xi = T_{-1}\xi$ 中将期望值传递到 ξ 中的期望值，使用了引理 6.4。利用引理 3.6 给出的先验界，并结合 $\sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}} |k| \leq CR^3$，我们得出

$$\begin{aligned}
&\langle \xi, (\mathbb{D}_{\mathrm{B}} + Q_{\mathrm{B}}^R)\xi \rangle \\
&\geq \hbar\kappa \sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}} |k| \mathrm{Tr}\big(E(k) - D(k) - W(k)\big) + 2\hbar\kappa \sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}} \sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{I}_k} |k| \mathfrak{K}(k)_{\alpha,\beta} \langle Z\eta, c_\alpha^*(k) c_\beta(k) Z\eta \rangle \\
&\quad - C_\varepsilon \hbar N^\varepsilon R^3 \Big(M N^{-\frac{1}{4}+2\delta} + M^{\frac{3}{2}} N^{-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta} + M^2 N^{-\frac{1}{2}+3\delta} + M^3 N^{-\frac{1}{2}+2\delta} \Big) . \qquad (8.27)
\end{aligned}$$

类似地，利用引理 6.5，我们通过变换 Z 对 $\mathfrak{K}(k)$ 进行近似对角化。类比于 [Ben+23，结合引理 3.6 和式 (9.15)], ，我们得到

$$\begin{aligned}
&2\kappa\hbar \sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}} \sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{I}_k} |k| \mathfrak{K}(k)_{\alpha,\beta} \langle Z\eta, c_\alpha^*(k) c_\beta(k) Z\eta \rangle \\
&\geq \langle \eta, \mathbb{D}_{\mathrm{B}} \eta \rangle - C\hbar \sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}} |k| \big(M^2 N^{-\frac{1}{2}+C\delta} \langle \eta, \mathcal{N}_\delta \eta \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \eta, \mathcal{N}_\delta \mathcal{N}^2 \eta \rangle^{\frac{1}{2}} + M^{\frac{7}{2}} N^{-1+C\delta} \langle \eta, \mathcal{N}_\delta \mathcal{N}^2 \eta \rangle \big) \\
&\geq \langle \eta, \mathbb{D}_{\mathrm{B}} \eta \rangle - C_\varepsilon \hbar R^3 \big(M^2 N^{-\frac{1}{4}+C\delta+\varepsilon} + M^{\frac{7}{2}} N^{-\frac{1}{2}+C\delta+\varepsilon} \big) , \qquad (8.28)
\end{aligned}$$

将 (8.19) 和 (8.27) 代入 (8.18)，再代入 (8.28) 和引理 8.1，我们得到

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{GS}} \geq & E_{\mathrm{FS}} + E^{\mathrm{RPA}} - C_\varepsilon \hbar N^\varepsilon \big(R^3 M^2 N^{-\frac{1}{4}+C\delta} + R^3 M^{\frac{7}{2}} N^{-\frac{1}{2}+C\delta} + M^{-1} N^{C\delta} \\
& + N^{-\frac{1}{136}} + R^{-\frac{1}{2}} + N^{-\frac{\delta}{2}} + R M^{\frac{1}{2}} N^{-\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}} + R^{\frac{1}{2}} M^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{\delta}{2}} \big) . \qquad (8.29)
\end{aligned}$$

先选取 $M = N^{2C\delta}$，再令 $\delta < \frac{1}{20C}$ 足够小，然后取 $R = N^{4\alpha}$，使 $\alpha < \frac{\delta}{4}$ 足够小，最后取 $\varepsilon = \alpha$，我们便得到下界 (8.17)。 □

8.3 上界

命题 8.3。设 $\hat{V}(k) = \hat{V}(-k) \geq 0$ 且 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |k|^{2-b} \hat{V}(k)^2 < \infty$ 其中某个 $b \in (0,1)$.

那么，

$$E_{\mathrm{GS}} \leq E_{\mathrm{FS}} + E^{\mathrm{RPA}} + o(N^{-\frac{1}{2}}) . \qquad (8.30)$$

证明。与 [Ben+23 中相同，为了得到上界，我们使用试探态 $\psi = RT\Omega$，其中 R 和 T 在 (2.5) 和 (6.29) 中定义，并令 $\xi := T\Omega$。于是，我们可以使用 $\mathcal{N}_\delta \leq \mathcal{N}$，引理 6.4 给出了以下先验界：

$$\langle \tilde{\xi}, \mathcal{N}^m \tilde{\xi} \rangle \leq C_m e^{C_m R^{\frac{b}{2}}} \langle \Omega, (\mathcal{N}+1)^m \Omega \rangle \leq C_m e^{C_m R^{\frac{b}{2}}} \qquad \forall m \in \mathbb{N} . \qquad (8.31)$$

为了得到 $\mathbb{H}_0$ 的先验界，我们写作

$$\langle\tilde{\xi},\mathbb{H}_0\tilde{\xi}\rangle=\langle\tilde{\xi},\mathbb{D}_{\mathrm{B}}\tilde{\xi}\rangle+\langle\tilde{\xi},(\mathbb{H}_0-\mathbb{D}_{\mathrm{B}})\tilde{\xi}\rangle\ ,$$

其中 $\mathbb{D}_{\mathrm{B}}$ 在 (6.17) 中定义。利用引理 5.3 和 (8.31)，并使用 $R^3\ll e^{CR^2}$，我们得到 $\langle\tilde{\xi},\mathbb{D}_{\mathrm{B}}\tilde{\xi}\rangle\leq C\hbar e^{CR^{\frac{b}{2}}}$；再由引理 7.2 和 (8.31)，可得

$$\langle\tilde{\xi},(\mathbb{H}_0-\mathbb{D}_{\mathrm{B}})\tilde{\xi}\rangle=\langle\Omega,T^*(\mathbb{H}_0-\mathbb{D}_{\mathrm{B}})T\Omega\rangle\leq C\hbar e^{CR^{\frac{b}{2}}}\big(M^{-1}+MN^{-\frac{1}{2}+\delta}\big)\ . \tag{8.32}$$

综上，我们得到先验界

$$\langle\tilde{\xi},\mathbb{H}_0\tilde{\xi}\rangle\leq C\hbar e^{CR^{\frac{b}{2}}}\ .$$

现在回顾 (2.7)：

$$E_{\mathrm{GS}}\leq\langle\tilde{\psi},H_N\tilde{\psi}\rangle=\langle\tilde{\xi},(\mathbb{H}_0+Q_{\mathrm{B}}+\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2+\mathbb{X})\tilde{\xi}\rangle+E_{\mathrm{FS}}\ .$$

首先注意，ξ 中的激发数是 4 的整数倍，而 $\mathcal{E}_2$ 使激发数改变 2，因此 $\langle\xi,\ \mathcal{E}_2\xi\rangle=0$。接下来注意，试探态 ξ 只包含动量为 $|p|\leq k_{\mathrm{F}}+R<CN^{\frac{1}{2}}$ 的激发，其中 $C>0$ 足够大。因此我们可以写成

$$E_{\mathrm{GS}}\leq\langle\tilde{\xi},(\mathbb{H}_0+\widetilde{Q}_{\mathrm{B}}+\widetilde{\mathcal{E}}_1+\widetilde{\mathbb{X}})\tilde{\xi}\rangle+E_{\mathrm{FS}}\ , \tag{8.33}$$

其中在 $\widetilde{Q}_{\mathrm{B}}$、$\widetilde{\mathcal{E}}_1$ 和 $\widetilde{\mathbb{X}}$ 中，我们将范围限制为 $|k|<CN^{\frac{1}{2}}$，见 (6.1) 和 (4.1)。利用引理 4.1 和引理 4.2，以及 (8.31)，我们便得到

$$\langle\tilde{\xi},\widetilde{\mathbb{X}}\tilde{\xi}\rangle\leq CN^{-1+\frac{b}{4}}\langle\tilde{\xi},\mathcal{N}\tilde{\xi}\rangle\leq C\hbar e^{CR^{\frac{b}{2}}}N^{-\frac{1}{2}+\frac{b}{4}}\ ,\quad\langle\tilde{\xi},\widetilde{\mathcal{E}}_1\tilde{\xi}\rangle\leq CN^{-1+\frac{b}{4}}\langle\tilde{\xi},\mathcal{N}^2\tilde{\xi}\rangle\leq C\hbar e^{CR^{\frac{b}{2}}}N^{-\frac{1}{2}+\frac{b}{4}}\ .$$

将这些界与引理 6.1 及（8.32）结合，我们得到

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{GS}}\leq E_{\mathrm{FS}}&+\langle\tilde{\xi},(\mathbb{D}_{\mathrm{B}}+Q_{\mathrm{B}}^R)\tilde{\xi}\rangle+C_\varepsilon\hbar e^{CR^{\frac{b}{2}}}N^\varepsilon\\&\times\big(N^{-\frac{1}{2}+\frac{b}{4}}+M^{\frac{3}{2}}N^{-\frac{1}{4}+\frac{b}{4}+\frac{\delta}{2}}+N^{-\frac{1}{8}}+N^{-\frac{\delta}{2}}+M^{-1}+MN^{-\frac{1}{2}+\delta}\big)\ .\end{aligned} \tag{8.34}$$

对于剩余项 $\langle\tilde{\xi},(\mathbb{D}_{\mathrm{B}}+Q_{\mathrm{B}}^R)\tilde{\xi}\rangle$，我们按照 (8.20)–(8.28) 中的方法进行，其中现在 $c_\beta(k)\Omega=0$ 且 $\langle\Omega,\mathfrak{E}^{\mathrm{no}}\Omega\rangle=0$。

$$\begin{aligned}&\langle\tilde{\xi},(\mathbb{D}_{\mathrm{B}}+Q_{\mathrm{B}}^R)\tilde{\xi}\rangle=\sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}}2\hbar\kappa|k|\langle\Omega,T^*h_{\mathrm{eff}}(k)T\Omega\rangle\\&=\hbar\kappa\sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}}|k|\Big(\mathrm{Tr}\big(E(k)-D(k)-W(k)\big)+2\langle\Omega,\mathfrak{E}^{\mathrm{diag}}(k)\Omega\rangle\Big)\\&\leq\hbar\kappa\sum_{k\in\Gamma^{\mathrm{nor}}}|k|\mathrm{Tr}\big(E(k)-D(k)-W(k)\big)+C\hbar e^{CR^{\frac{b}{2}}}\big(M^{\frac{3}{2}}N^{-\frac{1}{2}+\delta}+M^3N^{-1+2\delta}\big)\\&\leq E^{\mathrm{RPA}}+C\hbar e^{CR^{\frac{b}{2}}}\big(N^{-\frac{\delta}{2}}+M^{-\frac{1}{2}}N^{\frac{\delta}{2}}+M^{\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}+M^{\frac{3}{2}}N^{-\frac{1}{2}+\delta}+M^3N^{-1+2\delta}\big)+C\hbar R^{b-1},\end{aligned} \tag{8.35}$$

其中在倒数第二行，我们按照 (8.26) 对 $\mathfrak{E}^{\mathrm{diag}}(k)$ 进行了估计；在最后一行，我们利用引理 8.1 计算了迹。将 (8.35) 代入 (8.34)，得到

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{GS}} \leq E_{\mathrm{FS}} + E^{\mathrm{RPA}} + C_\varepsilon \hbar e^{CR^{\frac{b}{2}}} N^{\varepsilon} \big(& N^{-\frac{1}{2}+\frac{b}{4}} + M^{\frac{3}{2}} N^{-\frac{1}{4}+\frac{b}{4}+\frac{\delta}{2}} + N^{-\frac{1}{8}} + N^{-\frac{\delta}{2}} \\ & + M^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{\delta}{2}} + M^{\frac{3}{2}} N^{-\frac{1}{2}+\delta} + M^3 N^{-1+2\delta} \big) + C\hbar R^{b-1} \,. \end{aligned} \tag{8.36}$$

最后，我们选择补丁大小 R 随 N 缓慢增长，使得 $e^{CR^2} < N^{\varepsilon}$，然后固定 $M = N^{4\delta}$，接着选择足够小的 ε，$\delta > 0$，使得 $2\varepsilon + 14\delta - \frac{1-b}{4} < 0$。 —— □

致谢

作者谨向 Niels Benedikter 致谢，感谢他所提供的有益讨论。SL 得到了欧盟（ERC FermiMath 编号 101040991 和 ERC MathBEC 编号 101095820）的支持。文中表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究理事会执行局的观点和意见。欧盟和资助机构均不对这些观点和意见负责。SL 还部分得到了意大利国家数学物理小组的支持。

声明

作者声明不存在任何利益冲突。

数据可用性

作为纯数学研究，本文没有相关数据集 .

A 数论估计

A.1 月牙形区域上的逆能量和

以下结果是 [CHN23b 中命题 A.2] 的二维对应结果。

命题 A.1。令 $k \in \mathbb{Z}^2$，并回顾对于 $p \in L_k = B_{\mathrm{F}}^c \cap (B_{\mathrm{F}} + k)$ 的对激发能 $\lambda_{k,p} = \frac{1}{2}\hbar^2(|p|^2 - |p-k|^2)$，其中 $\hbar = N^{-\frac{1}{2}}$。那么，

$$\hbar^2 \sum_{p \in L_k} \lambda_{k,p}^{-1} \leq C \log(N) \,. \tag{A.1}$$

注意，三维中的类似界的量级为 k_{F}，因此几乎大了 k_{F} 倍。

证明。我们采用与 [CHN23b], 类似的方法，分别处理 $|k| < 2k_{\mathrm{F}}$ 和 $|k| \geq 2k_{\mathrm{F}}$ 两种情况。

情况 $|k| < 2k_{\mathrm{F}}$。在月牙形区域的尖端处，也就是说，当 $m \approx m_*$ 时，我们预计 $\lambda_k^{-1}{}_{,p}$ 会发散。因此，我们将月牙形区域划分为"主体"区域和"尖端"区域：在主体区域中，我们可以用积分估计该和：

$$L_k^{\mathrm{Bulk}} := \left\{ p \in L_k \;\middle|\; \hat{k} \cdot p - \tfrac{|k|}{2} > \tfrac{3}{2}\sqrt{2} \right\} , \qquad L_k^{\mathrm{Tip}} := L_k \setminus L_k^{\mathrm{Bulk}} . \tag{A.2}$$

若将 $\mathcal{C}_p = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2 + p$ 称为格点 p 周围的方框，则有

$$\hbar^2 \sum_{p \in L_k^{\mathrm{Bulk}}} \lambda_{k,p}^{-1} = \int \hbar^2 \sum_{q \in L_k^{\mathrm{Bulk}}} \chi_{\mathcal{C}_q}(p) \lambda_{k,q}^{-1} \mathrm{d}p \, . \tag{A.3}$$

Not可知，对所有 $p \in \mathcal{C}_q$，$\hat{k} \cdot q \geq \hat{k} \cdot p - \frac{\sqrt{2}}{2}$，因此我们可以将被积函数控制为

$$\begin{aligned} &\hbar^2 \sum_{q \in L_k^{\mathrm{Bulk}}} \chi_{\mathcal{C}_q}(p) \lambda_{k,q}^{-1} \leq \left(|k| \left(\hat{k} \cdot p - \tfrac{|k|}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)^{-1} \\ \Rightarrow \quad &\hbar^2 \sum_{p \in L_k^{\mathrm{Bulk}}} \lambda_{k,p}^{-1} \leq \int_{S^{\mathrm{Bulk}}} \left(|k| \left(\hat{k} \cdot p - \tfrac{|k|}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)^{-1} \mathrm{d}p \, , \end{aligned} \tag{A.4}$$

其中 $S^{\mathrm{Bulk}} := \bigcup_{p \in L_k^{\mathrm{Bulk}}} \mathcal{C}_p$。我们扩大此积分域以便于计算：

$$\overline{S}^{\mathrm{Bulk}} := \left\{ p \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |p| \geq k_{\mathrm{F}} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad |p - k| < k_{\mathrm{F}} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad \hat{k} \cdot p > \tfrac{|k|}{2} + \sqrt{2} \right\} , \tag{A.5}$$

并将其拆分为 $\overline{S}^{\mathrm{Bulk}} = S^1 \cup S^2$，其中

$$S^1 := \left\{ p \in \overline{S}^{\mathrm{Bulk}} \;\middle|\; \hat{k} \cdot p < k_{\mathrm{F}} - \tfrac{\sqrt{2}}{2} \right\} , \qquad S^2 := \left\{ p \in \overline{S}^{\mathrm{Bulk}} \;\middle|\; \hat{k} \cdot p \geq k_{\mathrm{F}} - \tfrac{\sqrt{2}}{2} \right\} . \tag{A.6}$$

Then

$$\hbar^2 \sum_{p \in L_k^{\mathrm{Bulk}}} \lambda_{k,p}^{-1} \leq \underbrace{\int_{S^1} \left(|k| \left(\hat{k} \cdot p - \tfrac{|k|}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)^{-1} \mathrm{d}p}_{=: \, I_1} + \underbrace{\int_{S^2} \left(|k| \left(\hat{k} \cdot p - \tfrac{|k|}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)^{-1} \mathrm{d}p}_{=: \, I_2} . \tag{A.7}$$

我们先估计 I_1。令 $k \cdot p = z$，则有

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\frac{|k|}{2} + \sqrt{2}}^{k_{\mathrm{F}} - \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{2}{|k| \left(z - \frac{|k|}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} \left(\sqrt{\left(k_{\mathrm{F}} + \tfrac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - (z - |k|)^2} - \sqrt{\left(k_{\mathrm{F}} - \tfrac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - z^2} \right) \mathrm{d}z \\ &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{k_{\mathrm{F}} - \frac{|k|}{2} - \sqrt{2}} 2|k|^{-1} t^{-1} \left(\sqrt{a_+^2 - b_+^2} - \sqrt{a_-^2 - b_-^2} \right) \mathrm{d}t \, , \end{aligned}$$

其中我们进行了变量替换 $t := z - \frac{|k|}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$，并引入了

$$a_+ := k_{\mathrm{F}} + \tfrac{\sqrt{2}}{2} , \qquad b_+ := t - \tfrac{|k| - \sqrt{2}}{2} , \qquad a_- := k_{\mathrm{F}} - \tfrac{\sqrt{2}}{2} , \qquad b_- := t + \tfrac{|k| + \sqrt{2}}{2} .$$

我们对平方根作如下估计:

$$\sqrt{a_+^2-b_+^2}-\sqrt{a_-^2-b_-^2}=\frac{a_+^2-b_+^2-a_-^2+b_-^2}{\sqrt{a_+^2-b_+^2}+\sqrt{a_-^2-b_-^2}}\leq\frac{2\sqrt{2}k_{\mathrm{F}}+2|k|(t+\frac{\sqrt{2}}{2})}{\sqrt{a_+^2-b_+^2}}\,. \tag{A.8}$$

当 $|k|\leq k_{\mathrm{F}}$ 时，我们有 $a_++b_+\geq\frac{1}{2}k_{\mathrm{F}}$，因此

$$a_+^2-b_+^2=(a_++b_+)(a_+-b_+)\geq\tfrac{1}{2}k_{\mathrm{F}}\left(k_{\mathrm{F}}-t+\tfrac{|k|}{2}\right)\,,$$

因此

$$\sqrt{a_+^2-b_+^2}-\sqrt{a_-^2-b_-^2}\leq Ck_{\mathrm{F}}^{-1/2}\frac{k_{\mathrm{F}}+|k|t}{\left(k_{\mathrm{F}}-t+\frac{|k|}{2}\right)^{1/2}}\,.$$

当 t 接近其最大值 $t=k_{\mathrm{F}}-\frac{|k|}{2}-\sqrt{2}$ 时，分母可能变得很大。不过，如果 $t\leq\frac{k_{\mathrm{F}}}{2}$，我们就可以安全地对其进行界定

$$\sqrt{a_+^2-b_+^2}-\sqrt{a_-^2-b_-^2}\leq Ck_{\mathrm{F}}^{-1/2}\frac{k_{\mathrm{F}}+|k|t}{(k_{\mathrm{F}}+|k|)^{1/2}}\leq C\left(1+\frac{|k|}{k_{\mathrm{F}}}t\right)\,.$$

反过来，对于 $t\geq\frac{k_{\mathrm{F}}}{2}$，我们可以方便地估计分子中的 $t^{-1}\leq Ck^{-1}{}_{\mathrm{F}}$。因 s

$$\begin{aligned}
I_1&\leq C\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{k_{\mathrm{F}}}{2}}|k|^{-1}t^{-1}\left(1+\frac{|k|}{k_{\mathrm{F}}}t\right)\mathrm{d}t+C\int_{\frac{k_{\mathrm{F}}}{2}}^{k_{\mathrm{F}}-\frac{|k|}{2}-\sqrt{2}}|k|^{-1}t^{-1}k_{\mathrm{F}}^{-1/2}\frac{k_{\mathrm{F}}+|k|t}{\left(k_{\mathrm{F}}-t+\frac{|k|}{2}\right)^{1/2}}\mathrm{d}t\\
&\leq C\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{k_{\mathrm{F}}}{2}}(|k|^{-1}t^{-1}+k_{\mathrm{F}}^{-1})\mathrm{d}t+C\int_{\frac{k_{\mathrm{F}}}{2}}^{k_{\mathrm{F}}-\frac{|k|}{2}-\sqrt{2}}\frac{|k|^{-1}+1}{k_{\mathrm{F}}^{1/2}\left(k_{\mathrm{F}}-t+\frac{|k|}{2}\right)^{1/2}}\mathrm{d}t\\
&\leq C+C|k|^{-1}\log(k_{\mathrm{F}})\,.
\end{aligned}$$

当 $k_{\mathrm{F}}<|k|<2k_{\mathrm{F}}$ 时，我们有 $a_+-b_+\geq k_{\mathrm{F}}$，并估计

$$\sqrt{a_+^2-b_+^2}-\sqrt{a_-^2-b_-^2}\leq\frac{C(k_{\mathrm{F}}+|k|t)}{k_{\mathrm{F}}^{\frac{1}{2}}(t+\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}}\leq Ck_{\mathrm{F}}^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}\,. \tag{A.9}$$

因此,

$$I_1\leq C\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{k_{\mathrm{F}}}k_{\mathrm{F}}^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\leq C\,. \tag{A.10}$$

接下来我们估计 I_2。回顾约束条件 (A.2) $z=\hat{k}\cdot p>\frac{|k|}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2}\Rightarrow t\geq\sqrt{2}$，因此积分从 $z_*:=\max\{k_{\mathrm{F}}-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{|k|}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2}\}$ and $t_*:=\max\{k_{\mathrm{F}}-\frac{|k|}{2}-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ 开始:

$$\begin{aligned}
I_2&=\int_{z_*}^{k_{\mathrm{F}}+|k|+\frac{\sqrt{2}}{2}}2\left(\left(k_{\mathrm{F}}+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-(z-|k|)^2\right)^{1/2}|k|^{-1}\left(z-\tfrac{|k|}{2}-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1}\mathrm{d}z\\
&\leq Ck_{\mathrm{F}}\int_{z_*}^{k_{\mathrm{F}}+|k|+\frac{\sqrt{2}}{2}}|k|^{-1}\left(z-\tfrac{|k|}{2}-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1}\mathrm{d}z=Ck_{\mathrm{F}}\int_{t_*}^{k_{\mathrm{F}}+\frac{|k|}{2}}|k|^{-1}t^{-1}\mathrm{d}t\\
&=Ck_{\mathrm{F}}|k|^{-1}\log\left(\frac{k_{\mathrm{F}}+\frac{|k|}{2}}{t_*}\right)\,.
\end{aligned}$$

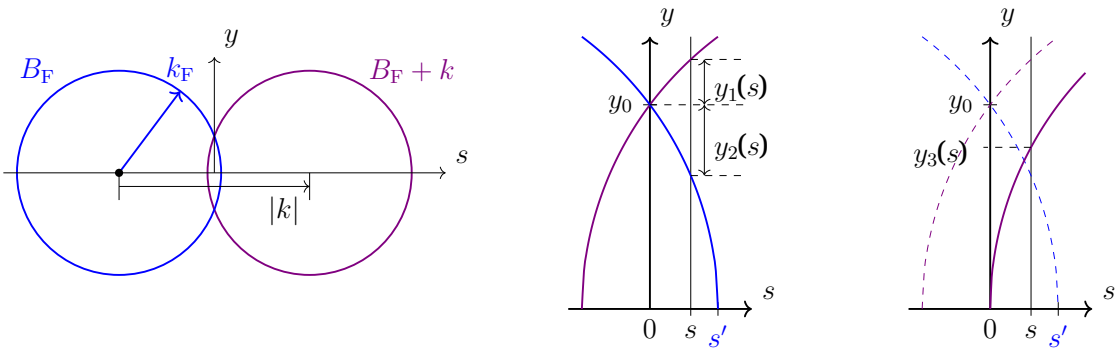

图3：**左**：对于 $|k| \approx 2k_F$，月牙形区域 L_k 几乎与平移后的费米球 $B_F + k$ 完全相同；只有 $s = 0$ 周围的一小块球冠被切去。**右**：$B_F^c \cap (B_F + k)$ 与固定 $s < s'$ 处垂直线的交集长度由 $y_1(s) + y_2(s)$ 给出，它在 $s = 0$ 时从 0 开始，随后迅速增大。因此，必须利用 $y_1(s)$、$y_2(s)$ 和 $y_3(s)$ 的性质仔细估计它。

如果 $|k| \le k_F$，那么，由于 $t_* = k_F - \frac{|k|}{2} - \sqrt{2}$ and $\log(1 + x) \le x$，

$$I_2 \le Ck_F|k|^{-1} \frac{\sqrt{2} + |k|}{k_F - \frac{|k|}{2} - \sqrt{2}} \le Ck_F|k|^{-1} \frac{|k|}{k_F} \le C \, .$$

在 $k_F < |k| < 2k_F$ 的情况下，我们有 $t_* \ge \sqrt{2}$，因此

$$I_2 \le Ck_F|k|^{-1} \log(1 + Ck_F) \le C \log(k_F) \, .$$

至此，对 L_k^{Bulk} 的分析告一段落。
为处理 L_k^{Tip}，我们将其分解为间距为 $\ell = |k|^{-1} \gcd(k_1, k_2)$ 的平面。这些平面由下式给出

$$L_k^m := \{p \in L_k \mid \hat{k} \cdot p = \ell m\} \quad \Rightarrow \quad L_k^{\mathrm{Tip}} = \bigcup_{m=m_*}^{m^*} L_k^m \, , \tag{A.11}$$

其中，m_* 和 m^* 由下式给出

$$m_* := \inf \left\{ m \in \mathbb{N} \mid \tfrac{|k|}{2} < \ell m \right\} , \qquad m^* := \sup \left\{ m \in \mathbb{N} \,\middle|\, \ell m \le \tfrac{|k|}{2} + \tfrac{3}{2}\sqrt{2} \right\} . \tag{A.12}$$

取 $\lambda_{k,\,p} = \hbar^2|k|(\ell m - \frac{|k|}{2})$，引入 $s_m := \ell m - \frac{|k|}{2}$，可得

$$\hbar^2 \sum_{p \in L_k^{\mathrm{Tip}}} \lambda_{k,p}^{-1} = \sum_{m=m_*}^{m^*} |k|^{-1} \left(\ell m - \tfrac{|k|}{2} \right)^{-1} |L_k^m| = \sum_{m=m_*}^{m^*} |k|^{-1} s_m^{-1} |L_k^m| \, . \tag{A.13}$$

现在我们断言

$$|L_k^m| \le C + C\ell\sqrt{k_F s_m} \, . \tag{A.14}$$

对于 $|k| \le k_F$，这显然成立，因为尖端的张角固定为 $\le \frac{\pi}{3}$，所以 $|L_k^m| \le C + Cs_m$ with $s_m \le \frac{3}{2}\sqrt{2}$。对于 $|k| \ge k_F$，这一论证并不适用，因为张角

当 $|k| \approx 2k_{\mathrm{F}}$ 时趋近于 π。为证明 (A.14)，我们接下来按如下方式进行，见图3：我们引入连续平面

$$L(s) \coloneqq \left\{ p \in L_k \;\middle|\; \hat{k} \cdot p = s + \tfrac{|k|}{2} \right\} \cap B_{k_{\mathrm{F}}}(0)^c \cap (B_{k_{\mathrm{F}}}(0) + k) \,, \qquad s \in \mathbb{R} \,, \tag{A.15}$$

并将 $2y(s)$ 记为 $L(s)$ 的体积。令 $s' \coloneqq k_{\mathrm{F}} - \frac{|k|}{2}$ 和 $y_0 \coloneqq \sqrt{k_{\mathrm{F}}^2 - (k_{\mathrm{F}} - s')^2}$。于是，我们可以将 $y(s) = y_1(s) + y_2(s)$ 写成

$$y_1(s) \coloneqq \sqrt{k_{\mathrm{F}}^2 - (k_{\mathrm{F}} - s' - s)^2} - y_0 \,, \qquad y_2(s) \coloneqq \begin{cases} y_0 - \sqrt{k_{\mathrm{F}}^2 - (k_{\mathrm{F}} - s' + s)^2} & \text{for } s < s' \\ y_0 & \text{for } s \geq s' \end{cases} .$$

我们将其与 $y_3(s)$ 进行比较：$= \sqrt{k_{\mathrm{F}}^2 - (k_{\mathrm{F}} - s)^2} \leq \sqrt{2} k_{\mathrm{F}} s$：最初，$y(0) = y_3(0)$。对于 $0 \leq s < s'/2$，有 $\mathrm{d}\,\mathrm{d}_s y_1(s) \leq \mathrm{d}\,\mathrm{d}_s y_3(s)$ 以及 $\mathrm{d}\,\mathrm{d}_s y_2(s) \leq \mathrm{d}\,\mathrm{d}_s y_3(s)$，因此 $y(s) \leq 2y_3(s)$。对于 $s'/2 \leq s \leq \frac{3}{2}\sqrt{2}$（仅当 $s' \leq 3\sqrt{2}$ 时才会发生），我们既有 $y_1(s) \sim \sqrt{k_{\mathrm{F}}} s$ 和 $y_3(s) \sim \sqrt{k_{\mathrm{F}}} s$，也有 $y_2(s) \leq C y_3(s)$，由此 $y(s) \leq C y_3(s) \leq C\sqrt{k_{\mathrm{F}}} s$。回想一下，平面上的晶格间距为 ℓ^{-1}，而晶格离散化会导致误差 C，我们得到 $|L_k^m| \leq C + \ell y(s) \leq C + C\ell\sqrt{k_{\mathrm{F}}} s_m$，从而证明了（A.14）。

此外，通过晶格离散化，$\hbar^{-2}\lambda_{k,\,p} = |k| s_m \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow s_m^{-1}|k|^{-1} \leq 2$。
进一步地，由于 $\ell \leq 1$，我们有 $|L_k^m| \leq C + C\sqrt{|k| s_m} \leq C|k| s_m$，因此每个平面的贡献为 $\leq C$，并且可以在（A.13）中去掉前两个平面：

$$\begin{aligned}
\hbar^2 \sum_{p \in L_k^{\mathrm{Tip}}} \lambda_{k,p}^{-1} &\leq \frac{|L_{m_*}|}{|k| s_{m_*}} + \frac{|L_{m_*+1}|}{|k| s_{m_*+1}} + C \sum_{m=m_*+2}^{m^*} (|k|^{-1} s_m^{-1} + k_{\mathrm{F}}^{1/2} s_m^{-1/2} |k|^{-1} \ell) \\
&\leq C + C|k|^{-1}\ell^{-1} \sum_{m=0}^{m^*-m_*-2} (m+2)^{-1} + C k_{\mathrm{F}}^{1/2} |k|^{-1} \ell^{1/2} \sum_{m=0}^{m^*-m_*-2} (m+2)^{-1/2} \\
&\leq C + C|k|^{-1}\ell^{-1} \int_0^{C\ell^{-1}} \frac{1}{m+1} \mathrm{d}m + C k_{\mathrm{F}}^{1/2} |k|^{-1} \ell^{1/2} \int_0^{C\ell^{-1}} \frac{1}{\sqrt{m+1}} \mathrm{d}m \\
&\leq C + C|k|^{-1}\ell^{-1} \log\left(1 + \ell^{-1}\right) + C k_{\mathrm{F}}^{1/2} |k|^{-1} \\
&\leq C + C \log(1 + |k|) + C k_{\mathrm{F}}^{1/2} |k|^{-1} \leq C \log(k_{\mathrm{F}}) \,,
\end{aligned}$$

其中，最后两行使用了 $|k|^{-1} \leq \ell \leq 1$ 和 $k_{\mathrm{F}} \leq |k| < 2k_{\mathrm{F}}$。

对于 $|k| < k_{\mathrm{F}}$，当 $\lambda_{k,\,p} \geq \frac{1}{2}\hbar^2$ 时，我们估计

$$\hbar^2 \sum_{p \in L_k^{\mathrm{Tip}}} \lambda_{k,p}^{-1} \leq 2|S_k^{\mathrm{Tip}}| \,, \qquad S_k^{\mathrm{Tip}} \coloneqq \bigcup_{p \in L_k^{\mathrm{Tip}}} (p + [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]^2) \,.$$

尖端沿 k 方向的延伸量为 $\frac{3}{2}\sqrt{2} \ll k_{\mathrm{F}}$，因此 S_k^{Tip} 沿该方向的延伸量为 $\leq \frac{5}{2}\sqrt{2}$。通过对 $y_1(s)$ 和 $y_2(s)$ 进行泰勒展开，我们还估算了 S_k^{Tip} 垂直于 k 的延伸量，并得出结论

$$|S_k^{\mathrm{Tip}}| = \tan(\alpha)(\tfrac{5}{2}\sqrt{2})^2 + \mathcal{O}(k_{\mathrm{F}}^{-1}) \,,$$

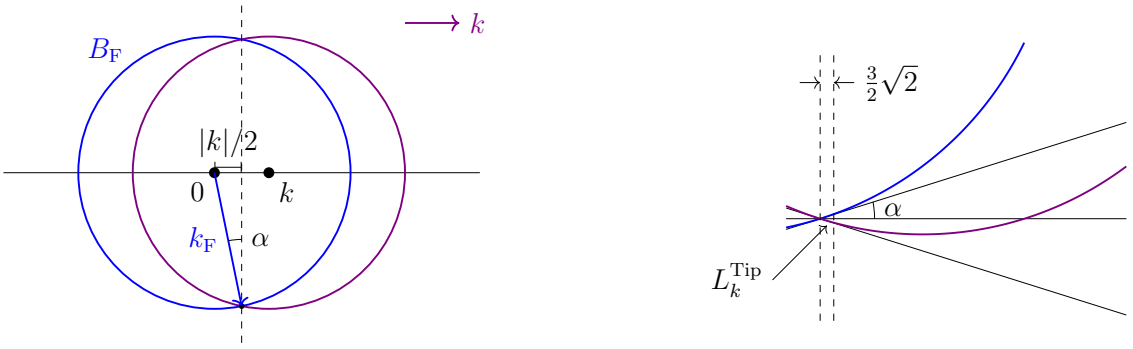

图4：**左**：角度 α 由 $\sin(\alpha) = \frac{|k|}{2k_F}$ 给出。对于 $|k| \leq k_F$，我们有 $\alpha \leq \frac{\pi}{6}$。**右**：月牙形区域的张角 L_k 为 2α，对于 $|k| < k_F$，尖端 L_k^{Tip} 可用三角形进行线性近似。

其中 $\sin(\alpha) := \frac{|k|}{2k_F} \leq \frac{1}{2}$，见图4，因此月牙形区域的张角为 2α。于是，$\alpha \leq \frac{\pi}{6}$，我们得出结论 $|S_k^{\mathrm{Tip}}| \leq C$。将所有界相加，最终结果为

$$\hbar^2 \sum_{p \in L_k} \lambda_{k,p}^{-1} \leq C \log(k_F) \leq C \log(N) \quad \text{for } |k| < 2k_F \,. \tag{A.16}$$

情形 $|k| \geq 2k_F$。此处，$\lambda_{k,p}$ 可能会变小，如果 $k \cdot p \approx k_F - |k|$。因此我们将其拆分

$$L_k = L_k^{\mathrm{Cap}} \cup L_k^{\mathrm{Rest}} \,, \qquad L_k^{\mathrm{Cap}} := \left\{ p \in L_k \;\middle|\; \hat{k} \cdot p - \tfrac{|k|}{2} \leq C' \right\} \,,$$

对于某个充分大的常数 $C' > 0$。我们用与上文 L_k^{Bulk} 类似的支配论证来估计关于 L_k^{Rest} 的和：取 $z = \hat{k} \cdot p$，有 $\hbar^{-2}\lambda_{k,p} = |k| \left(z - \frac{|k|}{2} \right)$，因此

$$\hbar^2 \sum_{p \in L_k^{\mathrm{Rest}}} \lambda_{k,p}^{-1} \leq C \int_{|k|-k_F+C'}^{|k|+k_F} |k|^{-1} \left(z - \tfrac{|k|}{2} \right)^{-1} \sqrt{k_F^2 - (z - |k|)^2} \, \mathrm{d}z \,.$$

由于平移后的费米球 $B_{k_F}(k)$ 被抛物线

$$\left\{ p \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (\hat{k}^\perp \cdot p)^2 = |k| \big(\hat{k} \cdot p - \tfrac{|k|}{2} \big) \right\} \,, \qquad \hat{k}^\perp := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right) \hat{k} \,,$$

我们有 $\sqrt{k_F^2 - (z-|k|)^2} \leq \sqrt{|k|} \sqrt{z - \frac{|k|}{2}}$，因此

$$\hbar^2 \sum_{p \in L_k^{\mathrm{Rest}}} \lambda_{k,p}^{-1} \leq C \int_{|k|-k_F+C'}^{|k|+k_F} |k|^{-\frac{1}{2}} \left(z - \tfrac{|k|}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}z \leq C k_F^{-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\tfrac{|k|}{2} + k_F} - \sqrt{\tfrac{|k|}{2} - k_F + C'} \right) \leq C \,,$$

其中用到了 $\sqrt{a+b} - \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$。

关于 L_k^{Cap}，我们像处理月牙形区域尖端时那样，将集合分解为若干平面。对球冠有贡献的最低和最高 m 是

$$M_* := \inf \{ m \in \mathbb{N} \mid |k| - k_F < \ell m \} \,, \qquad M^* := \sup \left\{ m \in \mathbb{N} \;\middle|\; \ell m \leq \tfrac{|k|}{2} + C' \right\} \,. \tag{A.17}$$

注意， $M^* \le M_* + C'$。此外，对于 $|k| > 2k_{\mathrm{F}} + 2C'$，我们有 $M^* < M_*$，且球冠为空，因此可以将范围限制为 $|k| \le 2k_{\mathrm{F}} + 2C'$。现在的界与尖端处的界类似：我们仍有 $|L_k^m| \le C + C\ell\sqrt{k_{\mathrm{F}} s_m}$，其中$\lambda_{k,p} = \hbar^2|k|s_m$，且 $s_m = \ell m - \frac{|k|}{2}$位于第 m个平面上。特别地，每个平面的贡献为 $\le C$，因此我们可以去掉前两个平面：

$$\begin{aligned}
\hbar^2 \sum_{p \in L_k^{\mathrm{Cap}}} \lambda_{k,p}^{-1} &= \frac{|L_{M_*}|}{|k| s_{M_*}} + \frac{|L_{M_*+1}|}{|k| s_{M_*+1}} + C \sum_{m=M_*+2}^{M^*} \frac{1 + \ell\sqrt{k_{\mathrm{F}} s_m}}{|k| s_m} \\
&\le C + C|k|^{-1}\ell^{-1} \sum_{m=0}^{M^*-M_*-2} (m+2)^{-1} + Ck_{\mathrm{F}}^{\frac{1}{2}}|k|^{-1}\ell^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{M^*-M_*-2} (m+2)^{-\frac{1}{2}} \\
&\le C + C|k|^{-1}\ell^{-1} \int_0^{C'\ell^{-1}} \frac{1}{m+1}\mathrm{d}m + Ck_{\mathrm{F}}^{\frac{1}{2}}|k|^{-1}\ell^{\frac{1}{2}} \int_0^{C'\ell^{-1}} \frac{1}{\sqrt{m+1}}\mathrm{d}m \\
&\le C + C|k|^{-1}\ell^{-1}\log(1+|k|) + Ck_{\mathrm{F}}^{\frac{1}{2}}|k|^{-1} \le C\log(k_{\mathrm{F}}) \le C\log(N) ,
\end{aligned}$$

其中我们使用了 $\ell^{-1} \le |k| \le Ck_{\mathrm{F}}$。因此，我们证明了对于任意 $k \in \mathbb{Z}^2$，(A.1) 都成立。 □

A.2 环带上的逆能量和

以下数论结果是众所周知的 [HW，定理 338]:

引理 A.2 (球面上的点的界)。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 $C_\varepsilon > 0$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$,

$$r_2(n) := |\{p \in \mathbb{Z}^2 \mid |p|^2 = n^2\}| \le C_\varepsilon n^\varepsilon . \tag{A.18}$$

我们利用这一结果证明以下与 [CHN24，引理 3.2] 类似的结论。回忆一下，$e(p) = \hbar^2||p|^2 - k_{\mathrm{F}}^2|$，其中不失一般性地，我们选取了$^-k_{\mathrm{F}} = \frac{1}{2}\left(\inf_{p\in B_F^c}|p|^2 - \sup_{q\in B_F}|q|^2\right)$。

引理 A.3。给定 $\varepsilon > 0$，存在某个 $C_\varepsilon > 0$，使得对于任意满足$|A| \le |B_{2k_{\mathrm{F}}}(0) \cap \mathbb{Z}^2|$的 $A \subset \overline{\mathbb{Z}^2}$，我们有

$$\hbar^2 \sum_{p\in A} e(p)^{-1} \le C_\varepsilon N^\varepsilon . \tag{A.19}$$

注意，按照 [CHN24], 的约定，这个界的量级为 $k_{\mathrm{F}}^\varepsilon$，与三维情形相比小了一个 k_{F} 因子。

证明。首先，注意到

$$\hbar^2 \sup_{|p|>2k_{\mathrm{F}}} e(p)^{-1} = \sup_{|p|>2k_{\mathrm{F}}} ||p|^2 - k_{\mathrm{F}}^2|^{-1} < \frac{1}{3}k_{\mathrm{F}}^{-2} = \hbar^2 \inf_{|p|\le 2k_{\mathrm{F}}} e(p)^{-1} . \tag{A.20}$$

因此，通过重新排序，我们可以将注意力限制在$\overline{A = B_{2k_{\mathrm{F}}}(0) \cap \mathbb{Z}^2}$。若记 $m := \sup_{q\in B_F}|q|^2$ 和 $m' := \inf_{p\in B_F^c}|p|^2$，则可得到球面的分解

$$\sum_{p\in\overline{B_{2k_{\mathrm{F}}}(0)}\cap\mathbb{Z}^2} ||p|^2 - k_{\mathrm{F}}^2|^{-1} = \sum_{n=1}^{\lfloor 4k_{\mathrm{F}}^2\rfloor} \frac{r_2(n)}{|n-k_{\mathrm{F}}^2|} = \sum_{n=1}^{m} \frac{r_2(n)}{k_{\mathrm{F}}^2 - n} + \sum_{n=m'}^{\lfloor 4k_{\mathrm{F}}^2\rfloor} \frac{r_2(n)}{n - k_{\mathrm{F}}^2} =: S^1 + S^2 . \tag{A.21}$$

这里，根据 k_{F} 的定义，有 $|n-k_{\mathrm{F}}^2| \geq \frac{1}{2}$。因此，结合引理 A.2 和 $N \sim k_{\mathrm{F}}^2$,

$$S^1 \leq C_\varepsilon \sum_{n=1}^{m} \frac{n^\varepsilon}{k_{\mathrm{F}}^2-n} \leq C_\varepsilon k_{\mathrm{F}}^\varepsilon \Big(2+\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{k_{\mathrm{F}}^2-n}\Big) \leq C_\varepsilon k_{\mathrm{F}}^\varepsilon \Big(2+\int_2^m \frac{\mathrm{d}t}{k_{\mathrm{F}}^2-t}\Big) \leq C_\varepsilon k_{\mathrm{F}}^\varepsilon \log\Big(\frac{k_{\mathrm{F}}^2}{k_{\mathrm{F}}^2-m}\Big)$$
$$\leq C_\varepsilon N^\varepsilon \log(N) \leq C_\varepsilon N^\varepsilon \,.$$

同样，对于 S^2，我们有

$$S^2 \leq C_\varepsilon k_{\mathrm{F}}^\varepsilon \Big(2+\sum_{n=m'+1}^{\lfloor 4k_{\mathrm{F}}^2 \rfloor} \frac{1}{n-k_{\mathrm{F}}^2}\Big) \leq C_\varepsilon k_{\mathrm{F}}^\varepsilon \Big(2+\int_{m'}^{4k_{\mathrm{F}}^2-1} \frac{\mathrm{d}t}{t-k_{\mathrm{F}}^2}\Big) \leq C_\varepsilon N^\varepsilon \log(N) \leq C_\varepsilon N^\varepsilon \,.$$

将其代入 (A.21)，即可得到所需结果。 □

A.3 环带交集中的点

以下估计是引理 4 中 $\mathcal{E}_1$ 上界的关键组成部分。 2.

引理 A.4 (环带交集中的点)。 对于任意 $N = |B_{k_{\mathrm{F}}}(0)|$，考虑环带 $\mathcal{A} := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid k_{\mathrm{F}} \leq |p| < k_{\mathrm{F}} + \Delta\}$，其厚度 $\Delta > 0$ 满足 $cN^{-\alpha} < \Delta < CN^{-\alpha}$，其中某个 $\alpha \in (0, 1/2)$。那么，对于 $k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$，我们有

$$|\mathcal{A} \cap (\mathcal{A}+k) \cap \mathbb{Z}^2| \leq C(N^{\frac{3}{4}-\frac{5}{2}\alpha} + N^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\alpha}) \,. \tag{A.22}$$

证明。 当 N 足够大时，我们有 $|k| \geq 1 > \Delta$，因此若 $|k| < 2k_{\mathrm{F}}$，则 $\mathcal{A} \cap (\mathcal{A}+k)$ 由两个区域组成，每个区域都由连接四个点的四段圆弧围成，见图 5。我们考虑其中一个区域，并将其顶点记为 P_1、P_2、P_3 和 P_4，其特征为

$$\begin{aligned} &|P_1| = |P_1 - k| = k_{\mathrm{F}} + \Delta \,, && |P_2| = k_{\mathrm{F}} \,, \quad |P_2 - k| = k_{\mathrm{F}} + \Delta \,, \\ &|P_3| = k_{\mathrm{F}} + \Delta \,, \quad |P_3 - k| = k_{\mathrm{F}} \,, && |P_4| = |P_4 - k| = k_{\mathrm{F}} \,. \end{aligned} \tag{A.23}$$

集合 $\mathcal{A} \cap (\mathcal{A}+k) \cap \mathbb{Z}^2$ 随后分解为若干个平面，这些平面与 k 平行或正交；我们对平面数量以及每个平面上的点数进行界定。为此，我们区分五种情形：令 k_{crit} 为满足 $|P_2 - P_3| = |k| = k_{\mathrm{crit}}$ 的 $|k|$ 值，即，

$$(k_{\mathrm{F}} + \Delta)^2 = k_{\mathrm{F}}^2 + k_{\mathrm{crit}}^2 \qquad \Rightarrow \qquad k_{\mathrm{crit}} = \sqrt{2k_{\mathrm{F}}\Delta + \Delta^2} \sim N^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}} \,. \tag{A.24}$$

因此， P_2 恰好在 0 的正上方，而 P_3 恰好在 k 的正上方。

情形 1： $1 \leq |k| \leq k_{\mathrm{crit}}$。 我们将 $\mathcal{A} \cap (\mathcal{A}+k) \cap \mathbb{Z}^2$ 分解为若干平面 $\mathcal{A}_m$，这些平面平行于 $\hat{k} = k/|k|$，因而正交于 $\hat{k}^\perp := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \hat{k}$，相邻两个平面之间的间距为 $\ell = |k|^{-1} \gcd(k_1, k_2) \leq 1$:

$$\mathcal{A}_m := \{p \in \mathcal{A} \cap (\mathcal{A}+k) \cap \mathbb{Z}^2 \mid p \cdot \hat{k}^\perp = m\ell\} \,, \qquad m \in \mathbb{Z} \,. \tag{A.25}$$

设 P_j 在由 $(\hat{k}, \hat{k}^\perp)$ 张成的坐标系中的坐标为 $x_j := P_j \cdot \hat{k}$ 和 $y_j := P_j \cdot \hat{k}^\perp$，见图 5。不失一般性，设 $y_j > 0$。那么，只有在以下情况下， $\mathcal{A}_m$ 才可能非空:

$$m_* \leq |m| \leq m^* \,, \qquad m_* := \inf\{m \in \mathbb{N} \mid m\ell \geq \min(y_2, y_4)\} \,, \quad m^* := \sup\{m \in \mathbb{N} \mid m\ell \leq y_1\} \,. \tag{A.26}$$

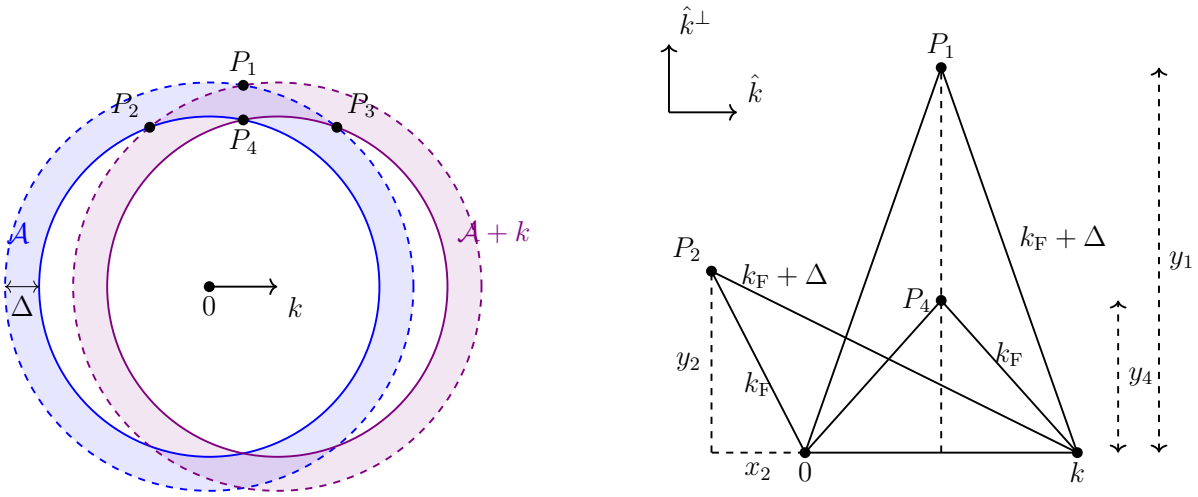

图 5：**左图**：对于 $1 \le |k| < 2k_F$，两个环带 $\mathcal{A} \cap (\mathcal{A}+k)$ 的交集由两个区域组成，每个区域都由连接四个点 P_1、P_2、P_3 和 P_4 的四段圆弧围成。**右图**：将交点 P_j 放入由 $\hat{k}$ 和 $\hat{k}^\perp$ 张成的坐标系中，即可定义坐标 x_j 和 y_j

非空平面的数量因此有如下界：

$$2(m^* - m_* + 1) \le \tfrac{2}{\ell}(1 + |y_1 - y_2| + |y_1 - y_4|)\,. \tag{A.27}$$

根据勾股定理，我们得出

$$y_4^2 = k_F^2 - \frac{|k|^2}{4}\,, \quad y_1^2 = (k_F+\Delta)^2 - \frac{|k|^2}{4} \quad \Rightarrow \quad |y_1 - y_4| = \frac{2k_F\Delta + \Delta^2}{y_1 + y_4} \le C\Delta \le CN^{-\alpha}\,, \tag{A.28}$$

其中最后两步用到了 $|k| \ll k_F$ 蕴含 $(y_1 + y_4) \ge Ck_F$。此外，

$$y_2^2 = k_F^2 - x_2^2 = (k_F+\Delta)^2 - (|x_2| + |k|)^2 \quad \Rightarrow \quad |x_2| = \frac{2k_F\Delta + \Delta^2 - |k|^2}{2|k|} \le CN^{\frac{1}{2}-\alpha}|k|^{-1}\,,$$

因此特别有 $|x_2| \ll k_F$，从而 $y_2 \ge ck_F$，并且我们有

$$(k_F+\Delta)^2 - \frac{|k|^2}{4} = y_1^2 = (y_2 + (y_1 - y_2))^2 \ge 2y_2(y_1 - y_2) + y_2^2$$
$$\Rightarrow \quad |y_1 - y_2| \le \frac{(k_F+\Delta)^2 - \frac{|k|^2}{4} - y_2^2}{2y_2} = \frac{2k_F\Delta + \Delta^2 - \frac{|k|^2}{4} + x_2^2}{2y_2} \le C(N^{-\alpha} + N^{\frac{1}{2}-2\alpha}|k|^{-2})\,. \tag{A.29}$$

结合 (A.27)，平面的数量至多为

$$2(m^* - m_* + 1) \le C\ell^{-1}(N^{\frac{1}{2}-2\alpha}|k|^{-1} + 1 + N^{-\alpha})\,. \tag{A.30}$$

The 平面上可容纳的最大点数受以下条件限制（见图6 ）

$$|\mathcal{A}_m| \le 2\ell\sqrt{(k_F+\Delta)^2 - k_F^2} + 1 \le C\ell\sqrt{k_F\Delta} + C \le C\ell N^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}\,, \tag{A.31}$$

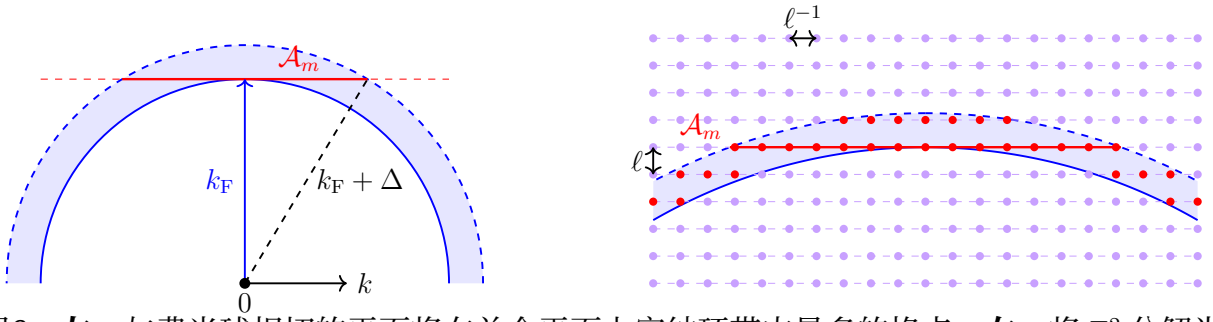

图6：**左**：与费米球相切的平面将在单个平面上容纳环带内最多的格点。**右**：将 $\mathbb{Z}^2$ 分解为与 k平行的平面。图中展示了一种 $|\mathcal{A}_m|$ 变为最大的情形。注意，两个平面之间的距离为 ℓ，而一个平面上两个格点之间的间距为 ℓ^{-1}。

其中我们使用了 $\ell\sqrt{k_{\mathrm{F}}\Delta} \geq c|k|^{-1}N^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}} \geq c|k|^{-1}k_{\mathrm{crit}} \geq c$。结合 $|k| \geq 1$，最终的界为

$$|\mathcal{A}\cap(\mathcal{A}+k)\cap\mathbb{Z}^2| = \sum_{m_*\leq|m|\leq m^*} |\mathcal{A}_m| \leq C(N^{\frac{1}{2}-2\alpha}|k|^{-1}+1)N^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}} \leq C(N^{\frac{3}{4}-\frac{5}{2}\alpha}+N^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\alpha}) \ . \quad \text{(A.32)}$$

情形2： $k_{\mathrm{crit}} < |k| \leq k_{\mathrm{F}}$。此时，非空平面的数量有界为 $2(m^* - m_* + 1) \leq \frac{2}{\ell}($ $1 + |y_1 - y_4|)$，其中关于 $|y_1 - y_4|$ 的界（A.28）仍然成立。因此，平面的数量仍由（A.30）给出上界。每个平面上的格点数量估计（A.31）与 k无关，因此（A.32）仍然成立。

情形3： $k_{\mathrm{F}} < |k| \leq 2k_{\mathrm{F}}$。这里可能出现 $y_1 \ll k_{\mathrm{F}}$，因此 (A.28) 不再成立。取而代之，我们将 $\mathcal{A}\cap(\mathcal{A}+k)\cap\mathbb{Z}^2$ 分解为与 k 正交的平面，

$$\tilde{\mathcal{A}}_m := \{p \in \mathcal{A}\cap(\mathcal{A}+k)\cap\mathbb{Z}^2 \mid p\cdot\hat{k} = m\ell\} \ , \qquad m \in \mathbb{Z} \ , \quad \text{(A.33)}$$

这些平面仅在以下条件成立时才非空

$$\tilde{m}_* \leq |m| \leq \tilde{m}^* \ , \qquad \tilde{m}_* := \inf\{m \in \mathbb{N} \mid m\ell \geq x_2\} \ , \quad \tilde{m}^* := \sup\{m \in \mathbb{N} \mid m\ell \leq x_3\} \ . \quad \text{(A.34)}$$

平面的数量至多为 $2(\tilde{m}^* - \tilde{m}_* + 1) \leq \frac{2}{\ell}(1 + x_3 - x_2)$。由勾股定理和 $x_3 + x_2 = |k| \geq k_{\mathrm{F}}$，可得

$$\begin{aligned} y_2^2 = k_{\mathrm{F}}^2 - x_2^2 = (k_{\mathrm{F}}+\Delta)^2 - x_3^2 \quad &\Rightarrow \quad (x_3 - x_2)(x_3 + x_2) = 2k_{\mathrm{F}}\Delta + \Delta^2 \\ \Rightarrow \quad (x_3 - x_2) \leq 2\Delta + \Delta^2 k_{\mathrm{F}}^{-1} &\leq CN^{-\alpha} \ . \end{aligned} \quad \text{(A.35)}$$

通过与 (A.31) 相同的论证，我们得出 $|\tilde{\mathcal{A}}_m| \leq C\ell N^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}$，因此 -

$$|\mathcal{A}\cap(\mathcal{A}+k)\cap\mathbb{Z}^2| = \sum_{\tilde{m}_*\leq|m|\leq\tilde{m}^*} |\tilde{\mathcal{A}}_m| \leq C(1+N^{-\alpha})N^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}} \leq CN^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\alpha} \ . \quad \text{(A.36)}$$

情形4： $2k_{\mathrm{F}} < |k| \leq 2k_{\mathrm{F}} + 2\Delta$。</style}此时，交点 P_1、P_2 和 P_3 可能不再存在。尽管如此，我们仍然可以将 $\mathcal{A}\cap(\mathcal{A}+k)\cap\mathbb{Z}^2$ 分解为平面 $\tilde{\mathcal{A}}_m$。$\mathcal{A}\cap(\mathcal{A}+k)$ 在 k方向上的延伸现在受 $2\Delta \leq CN^{-\alpha}$ 限制，因此有 $\leq C\ell^{-1}(1+CN^{-\alpha})$

许多平面，它们仍满足 $|\tilde{\mathcal{A}}_m| \leq C\ell N^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}$。因此，(A.36) 仍然成立。

情形5： $|k| > 2k_{\mathrm{F}} + 2\Delta$。这种情形很简单，因为 $\mathcal{A} \cap (\mathcal{A} + k) = \emptyset$。

□

参考文献

[Ben+20] Niels Benedikter 等：《平均场区域中费米气体关联能的最优上界》。发表于《数学物理通讯》374.3（2020年），第 2097–2150 页。[Ben+21] Niels Benedikter 等：《弱相互作用费米气体的关联能》。发表于《数学创刊》225.3（2021），第 885–979 页。[Ben+22] Niels Benedikter 等：《费米子多体动力学的玻色化》。发表于 Annales Henri Poincar´e，第 23 卷，第 5 期，Springer，2022年，第 1725–1764 页。[Ben+23] Niels Benedikter 等：《大相互作用势下弱相互作用费米气体的关联能》。发表于《理性力学与分析档案》247.4（2023），第 65 页。[BL25] Niels Benedikter 和 Sascha Lill：《随机相位近似下费米气体的动量分布》。发表于 Journal of Mathematical Physics 66.8（2025）。[BLN25] Niels Benedikter、Sascha Lill 和 Diwakar Naidu：《随机相位近似下具有库仑相互作用的费米气体的动量分布》。发表于 arXiv 预印本 arXiv:2511.03654（2025）。[CHN22] Martin Ravn Christiansen、Christian Hainzl 和 Phan Th`anh Nam：《关于电子气的有效准玻色哈密顿量：集体激发与等离激元模式》。发表于 Letters in Mathematical Physics 112.6（2022），第 114 页。[CHN23a] Martin Ravn Christiansen、Christian Hainzl 和 Phan Th`anh Nam：《电子气关联能的 Gell-Mann–Brueckner 公式：平均场区域中的严格上界》。发表于《数学物理通讯》401.2（2023），第 1469–1529 页。[CHN23b] Martin Ravn Christiansen、Christian Hainzl 和 Phan Thanh Nam：《平均场区域中相互作用费米气体的随机相位近似》。发表于《数学论坛：Pi》第 11 卷，剑桥大学出版社，2023年，e32。[CHN24] Martin Ravn Christiansen、Christian Hainzl 和 Phan Th`anh Nam：《平均场区域中电子气的关联能》。发表于 arXiv 预印本 arXiv:2405.01386（2024）。[Fal+21] Marco Falconi 等：《通过 Bogoliubov理论研究稀薄费米气体》。发表于 Annales Henri Poincar´e，第 22 卷，第 7 期，Springer，2021年，第 2283–2353 页。[GB57] Murray Gell-Mann 和 Keith A. Brueckner：《高密度电子气的关联能》。发表于《物理评论》106（1957年），第 364–368 页。URL：https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120701027。

[Gia+24] Emanuela L Giacomelli 等：《低密度费米气体的黄-杨公式：上界》。发表于 arXiv 预印本 arXiv:2409.17914（2024）。[Gia+25] Emanuela L Giacomelli 等：《低密度费米气体的黄-杨猜想》。发表于 arXiv 预印本 arXiv:2505.22340（2025）。[Gia23] Emanuela L Giacomelli：《三维稀薄费米气体的最优上界》。发表于《泛函分析杂志》285.8（2023），第 110073 页。[Gia24] Emanuela L Giacomelli：《三维低密度费米气体的最优下界》。发表于 arXiv 预印本 arXiv:2410.08904（2024）。[GS94] Gian Michele Graf 和 Jan Philip Solovej：《适用于具有库仑相互作用的量子系统的关联估计》。发表于 Reviews in Mathematical Physics 6.05a （ 1994 ），第 977–997 页。[HPR20] Christian Hainzl、Marcello Porta 和 Felix Rexze：《平均场区域中相互作用费米子系统的关联能》。发表于《数学物理通讯》374.2（2020），第 485–524 页。[HW] G. H. Hardy 和 E. M. Wright。《数论导引》。 ISBN: 9780199219865。[HY57] Kerson Huang 和杨振宁：《具有硬球相互作用的量子力学多体问题》。发表于《物理评论》105.3（1957年），第 767 页。[Lau25] Asbjørn Bækgaard Lauritsen：《通过簇展开得到稀薄费米气体基态能量的近最优上界》。发表于 Annales Henri Poincar ´e，第 26 卷，第 1 期，Springer，2025年，第 203–243 页。[Leo06] Paul Leopardi：《将单位球面划分为面积相等且直径较小的区域》。发表于《数值分析电子汇刊》25.12（2006年），第 309–327 页。[Lil25] Sascha Lill：《通过弗里德里希图得到费米气体的玻色化动量分布》。发表于《奇点、渐近与极限模型》，Springer，2025年，第 131–157 页。[LS24a] Asbjørn Bækgaard Lauritsen 和 Robert Seiringer：《稀薄自旋极化费米气体的基态能量：下界》。发表于 arXiv 预印本 arXiv:2402.17558（2024）。[LS24b] Asbjørn Bækgaard Lauritsen 和 Robert Seiringer：《稀薄自旋极化费米气体的基态能量：通过簇展开得到的上界》。发表于《泛函分析杂志》286.7（2024），第 110320 页。[LSS05] Elliott H Lieb、Robert Seiringer 和 Jan Philip Solovej：《低密度费米气体的基态能量》。发表于《物理评论A辑：原子、分子与光学物理》71.5（2005），第 053605 页。[RK77] AK Rajagopal 和 John C Kimball：《二维电子系统中的关联》。发表于《物理评论B辑》15.5（1977年），第 2819 页。