arXiv:2601.00758v1 [math.CO] 2 Jan 2026

超图的有理码度图兰密度

Jun Gao* Oleg Pikhurko* Mingyuan Rong† Shumin Sun*

2026年1月5日

摘要

设 H 是一个 k-图 （即一个 k-均匀超图）。其 最小余度 $\delta_{k-1}(H)$ 是满足以下条件的最大整数 t： $V(H)$ 的每个 $(k-1)$-子集都包含在 H 的至少 t 条超边中。族 $\mathcal{F}$ 中 k-图的 余度图兰密度 $\gamma(\mathcal{F})$ 是满足以下条件的 $\gamma > 0$ 的下确界：每个具有 $n \to \infty$ 个顶点且满足 $\delta_{k-1}(H) \geq (\gamma + o(1))\, n$ 的 k-图 H 都包含 $\mathcal{F}$ 中某个成员作为子图。

我们证明，对于每个整数 $k \geq 3$ 和每个有理数 $\alpha \in [0,1)$，都存在一个 k-图的有限族 $\mathcal{F}$，使得 $\gamma(\mathcal{F}) = \alpha$。

此外，对于每个 $k \geq 3$，我们证明了非主性的一种强形式：存在两个 k-图 F_1 和 F_2，使得 $\{F_1, F_2\}$ 的余度图兰密度严格小于每个 F_i的余度图兰密度。这回答了 Mubayi 和 Zhao 提出的问题 [《组合理论杂志（*A*辑）》114 (2007) 1118–1132]。

1 引言

对于一个整数 $k \geq 2$， k-均匀超图 （简称 k-图） H 由顶点集 V（H）和边集 E（H）$\subseteq \binom{V(H)}{k}$组成，也就是说，每条超边都是 k元子集，且属于V（H）。给定一个由 k-图构成的（可能无限的）族 $\mathcal{F}$， $\mathcal{F}$的图兰数记作 ex(n， $\mathcal{F}$)，定义为不含 $\mathcal{F}$ 中任何元素作为子图的 n顶点 k-图的超边数的最大值。图兰密度 π（$\mathcal{F}$）定义为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{ex}(n,\mathcal{F})}{\binom{n}{k}},$$

通过标准的平均论证可知，该极限存在。超图的图兰问题众所周知十分困难，即使是看似简单的情形，我们所知也相当有限，例如 $\mathcal{F}$ 禁止含有 4 个顶点的完全 3-均匀超图。有关更多背景，请参阅综述 [9, 18]。

在本文中，我们研究由 Mubayi 和 Zhao [15]引入的一种变体，即余度图兰密度。给定一个 k-图 H 和一个 $(k-1)$-顶点子集 $S \subseteq V(H)$，令$d_H(S)$（或 $d(S)$）表示包含 S 作为子集的 H的超边数。令 $N_H(S)$（或$N(S)$）表示 S的邻域，即 $N_H(S)$: $= \{v \in V(H)$: $S \cup \{v\} \in E(H)\}$。 H 的最小余度 $\delta_{k-1}(H)$定义为所有 $(k-1)$-顶点子集 S of $V(H)$ 上 $d(S)$ 的最小值。给定一个由 k-图构成的族 $\mathcal{F}$，余度图兰数 co-ex($n, \mathcal{F}$)

*英国考文垂华威大学数学研究所和 DIMAP。研究经费由 ERC 高级资助 101020255 提供。电子邮箱: {jun.gao,o.pikhurko,shumin.sun}@warwick.ac.uk

†中国合肥中国科学技术大学数学科学学院。研究经费由中国国家重点研发计划项目 2023YFA1010201、国家自然科学基金资助项目编号 12125106 以及中国科学技术大学优秀博士生海外学习项目提供。电子邮箱：rong_ming_yuan@mail.ustc.edu.cn

是一个 n-顶点 $\mathcal{F}$-自由 k-图 H 所能达到的 $\delta_{k-1}(H)$ 的最大值，而 $\mathcal{F}$ 的余度图兰密度定义为

$$\gamma(\mathcal{F}) \coloneqq \lim_{n\to\infty} \frac{\text{co-ex}(n,\mathcal{F})}{n},$$

其中，对于任意 k-图族 $\mathcal{F}$，已知该极限存在，参见 [15, 命题 1.2]。当 $\mathcal{F}=\{F\}$ 是单个 k-图时，我们通常省略花括号，改写为 ex(n, F)、$\pi(F)$、co-ex(n, F) 和 $\gamma(F)$。

对于每个 $k\geq 2$，令

$$\Pi_k \coloneqq \{\pi(\mathcal{F})\colon \mathcal{F} \text{ is a family of } k\text{-graphs}\} \subseteq [0,1).$$

著名的 Erdős–Simonovits–Stone 定理 [4, 5] 蕴含，对于任意图族 $\mathcal{F}$，$\pi(\mathcal{F}) = \min_{F\in\mathcal{F}} 1-\frac{1}{\chi(F)-1}$，其中 $\chi(F)$ 表示 F的色数。这意味着$\Pi_2 = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{r-1}{r}, \dots\}$。$\Pi_2$ 的良序性质促使我们作出如下定义：若存在 $\delta>0$，使得不存在满足 $\pi(\mathcal{F})\in(a,\ a+\delta)$ 的 k-图族 $\mathcal{F}$，则称实数 $a\in[0,1)$ 是 k 的一个跳跃值。于是，$[0,1)$ 中的每个实数都是 $k=2$的跳跃值。对于一般的均匀度 k，对 Π_k 的研究历史悠久且成果丰硕，可追溯至著名的 Erdős 跳跃猜想（例如参见 [1, 3, 7, 8, 17]）。

Mubayi 和 Zhao [15] 开启了对余度图兰密度中类似问题的研究。类似地，对于 $k\geq 2$，令

$$\Gamma_k \coloneqq \{\gamma(\mathcal{F})\colon \mathcal{F} \text{ is a family of } k\text{-graphs}\} \subseteq [0,1).$$

对于 $k=2$ 的情形，由 Erdős–Simonovits–Stone 定理的度数版本可知 $\Gamma_2 = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{r-1}{r}, \dots\}$。在他们的论文中，Mubayi 和 Zhao [15, 定理 1.6]证明，对于 $k\geq 3$ 的情形，Γ_k 不含跳跃；也就是说，Γ_k 在 $[0,1)$ 中是稠密的。他们还猜想，$\Gamma_k=[0,1)$，即对于每个 $0\leq\alpha<1$，都存在一个由 k-图构成的族 $\mathcal{F}$，使得 $\gamma(\mathcal{F})=\alpha$。请注意，在他们的猜想中，这个族可以是无限的。事实上，如果我们只考虑有限族，那么该猜想显然不成立，因为（在同构意义下）有限族的集合由 k-图构成，是可数的，而区间 $[0,1)$ 中的实数集合是不可数的。我们的第一个结果通过给出一个有限的 k-图族，验证了他们对每个有理数 $\alpha\in[0,1)$ 提出的猜想；其证明受到 [15] 中定理 1.6 证明的启发。

定理 1.1。固定 $k\geq 3$。对于每个有理数 $\alpha\in[0,1)$，存在一个由 k-均匀超图组成的有限族$\mathcal{F}$，使得 $\gamma(\mathcal{F})=\alpha$。

很自然地会猜想，$[0,1)$ 中的每个有理数值都可以实现为单个 k-均匀超图的余度图兰密度。

猜想 1.2。固定 $k\geq 3$。对于每个有理数 $\alpha\in[0,1)$，存在一个 k-均匀超图F，使得 $\gamma(F)=\alpha$。

目前，已知具有非零余度图兰密度的 3-均匀超图只有少数零星例子。具体而言，$\gamma(K_4^{(3)-})=\frac{1}{4}$ [6]，其中 $K_4^{(3)-}$ 表示从四个顶点上的完全 3- 均匀超图中删去一条超边后所得的超图；$\gamma(F_{3,2})=\frac{1}{2}$ [12]，其中 $F_{3,2}$ 是法诺平面；以及对于所有满足 $3\nmid\ell$ [11, 16] 的 $\ell\geq 10$，$\gamma(C_3^\ell)=\frac{1}{3}$，其中 C_3^ℓ 是长度为 ℓ 的紧 3-均匀圈。此外，Keevash 和 Zhao [10] 构造了一个 3-均匀超图：对于每一对整数 $k\geq 3$ 和 $r\geq 2$，该超图的余度图兰密度等于 $\frac{r-1}{r}$。

如果一个族 $\mathcal{F}$ 的 k-图的图兰密度严格小于其中每个成员的密度，我们就称其为非主族。当 $k=2$ 时，Erdős–Simonovits–Stone 定理意味着

不存在这样的族。受探究图与超图之间差异的启发，Mubayi 和 Rödl [14] 猜想，对于 $k \geq 3$, 非主族是存在的。Balogh [2] 通过构造一个由 3-图组成的有限非主族，证实了这一猜想。后来，Mubayi 和 Pikhurko [13] 将这一结果推广，证明对于每个 $k \geq 3$，都存在一个大小为二的非主 k-图族。Mubayi 和 Zhao [15] 证明了一个关于 γ 的类似结果，表明存在一个由 k-图组成的有限族 $\mathcal{F}$，使得 $0 < \gamma(\mathcal{F}) < \min_{F \in \mathcal{F}} \gamma(F)$。与 π 的情形类似，他们 [15, 在第 1131] 页提出了这样一个问题：能否构造两个 k-图 F_1、F_2，使得 $0 < \gamma(\{F_1, F_2\}) < \min\{\gamma(F_1)\ \gamma(F_2)\}$。Sudakov（见第 1131] 页）指出，对于偶数 $k \geq 4$，可以利用 [13] 的框架推导出这样的构造。我们的下一个结果解决了所有 $k \geq 3$ 的这一问题。

定理 1.3。对于每个 $k \geq 3$，存在 k-图 F_1 和 F_2，使得

$$0 < \gamma(\{F_1, F_2\}) < \min\{\gamma(F_1), \gamma(F_2)\}.$$

组织结构。本文的其余部分安排如下。定理 1.1 在第 2 节中证明。第 3 节的定理 3.2 重新证明了 Keevash 和 Zhao [10,定理 1.3] 的结果，即对于每个 r，存在一个 k-图 F_r^k，其余度图兰密度等于 $\frac{r-1}{r}$。虽然我们的 k-图 F_r^k比 [10], 中的图更加复杂，但其定义经过调整，使得 F_2^k能够配合我们关于存在一个非主 2-元素 k-图族的定理 1.3 证明。定理 1.3 本身将在第 4 节中证明。

在全文中，固定 $k \geq 3$ 表示所考虑超图的元数。

2 定理 1.1 的证明

为证明定理 1.1，我们需要针对每个有理数 $\alpha \in [0, 1)$，构造一个由 k-图 $\mathcal{F}_\alpha$ 组成的有限族，使得 $\gamma(\mathcal{F}_\alpha) = \alpha$。我们将使用以下定义来构造我们的 k-图族。

定义 *2.1*（*(s, t)*-扩张）。设 s和 t 为满足 $s \geq t \geq 1$的整数。对于一个 k-图 F，令 $F(s, t)$ 表示按如下方式构造的 k-图族。令 $\mathcal{A}(F) = \binom{V(F)}{k-1}$ 表示 $V(F)$ 的所有 $(k-1)$-子集构成的族，并令 $\mathcal{T}(F) = \binom{\mathcal{A}(F)}{s}$ 表示 $\mathcal{A}(F)$ 的所有 s-子集构成的集合。将 $\mathcal{T}(F) = \{T_1, T_2, \ldots, T_r\}$ 枚举为 $r = \binom{|\mathcal{A}(F)|}{s} = \binom{\binom{|V(F)|}{k-1}}{s}$。此外，定义

$$\mathcal{P}(F) \coloneqq \{(P_1, P_2, \ldots, P_r) : P_i \subseteq T_i \text{ and } |P_i| = t \text{ for each } i \in [r]\}.$$

因此 $|\mathcal{P}(F)| = \binom{s}{t}^r$。对于每个 $(P_1, P_2, \ldots, P_r) \in \mathcal{P}(F)$，令 $F(P_1, P_2, \ldots, P_r)$ 表示由 F添加 r 个不同的新顶点 $v_1, v_2, \ldots, v_r$ 得到的 k-图，并且对于每个 $i \in [r]$，添加所有形如 $\{v_i\} \cup Y$ 的超边，其中 $Y \in P_i$。我们称这个 k-图族

$$F(s, t) \coloneqq \left\{F(P_1, P_2, \ldots, P_r) : (P_1, P_2, \ldots, P_r) \in \mathcal{P}(F)\right\}$$

F的(s, t)-扩展。此外，对于一个 k-图族，令

$$\mathcal{F}(s, t) \coloneqq \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F(s, t)$$

表示 $\mathcal{F}$ 的（s，t）-扩展。在不会引起混淆的情况下，我们分别用 $\mathcal{A}$、$\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{P}$ 表示 $\mathcal{A}$（F）$\mathcal{T}$（F）和 $\mathcal{P}$（F）。

粗略地说， $F(s,\ t)$ 中的每个 k-图，都是通过添加顶点得到的；这些顶点分别对应于由 s 个互不相同的 $(k-1)$-顶点集合组成的集合，并且每个新增顶点恰好与其中的 t 个 $(k-1)$-集合构成 t 条超边。族 $F(s,\ t)$ 是所有以这种方式构造的 k-图组成的集合。

下面给出一个只有一条超边 $F=\{a,b,c\}$、 $s=2$、 $t=1$ 的 3-均匀超图示例。于是我们有

$$\mathcal{A}=\{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\} \text{ and } \mathcal{T}=\{\{\{a,b\},\{b,c\}\},\{\{a,b\},\{a,c\}\},\{\{b,c\},\{a,c\}\}\}.$$

于是， $(P_1,P_2,P_3)\in\mathcal{P}$ 的数量为 $\binom{s}{t}^r=2^3$。对于每个 $(P_1,P_2,P_3)\in\mathcal{P}$，我们构造一个 3-均匀超图 $F(P_1,P_2,P_3)$。例如，对于 $(P_1,P_2,P_3)=(\{\{a,b\}\},\{\{a,b\}\},\{\{b,c\}\})\in\mathcal{P}$， $F(P_1,P_2,P_3)$ 是定义在顶点集上的 3-均匀超图

$$\{a,b,c,v_1,v_2,v_3\} \text{ and edge set } \{\{a,b,c\},\{a,b,v_1\},\{a,b,v_2\},\{b,c,v_3\}\}.$$

族 $F(s,t)$ 是所有满足以下条件的 3-均匀超图 $F(P_1,P_2,P_3)$ 的集合：所有 $(P_1,P_2,P_3)\in\mathcal{P}$。我们有 $|F(s,t)|\le 2^3$，因为 $|\mathcal{P}|=2^3$，并且通过上述过程得到的一些 3-均匀超图是同构的。在这种情况下， $F(s,t)$ 由所有如下得到的 3-均匀超图组成：向一条超边 $\{a,b,c\}$ 添加 3 个新顶点，每个新增顶点的关联超图是 $\{a,b,c\}$ 中任意一个单独的点对，但不允许同一个点对被使用 3 次。

显然，只要 $\mathcal{F}$ 是有限的， $\mathcal{F}(s,\ t)$ 就是一个有限族。

对于 $\delta>0$，令 $M(\delta)$ 为满足以下条件的最小整数：每个 $m\ge M(\delta)$ 都满足

$$m\ge\frac{2(k-1)}{\delta} \qquad \text{and} \qquad \binom{m}{k-1}e^{-\delta^2(m-k+1)/12}\le\frac{1}{2}.$$

为了构造我们的族，我们还需要使用 Mubayi 和 Zhao 在 [15] 中给出的以下引理 .

引理 *2.2*（[15, 引理 2.1]）。任取 $\delta>0$ 和 $\alpha>0$，其中 $\alpha+\delta<1$。若 $n\ge m\ge M(\delta)$，且 G 是定义在 $[n]$ 上的一个 k-图，并满足 $\delta_{k-1}(G)\ge(\alpha+\delta)n$，那么满足 $\delta_{k-1}(G[S])>\alpha m$ 的 m-集合 S 的数量至少为 $\frac{1}{2}\binom{n}{m}$。特别地， G 包含一个具有 m 个顶点的子图 H，并且满足 $\delta_{k-1}(H)>\alpha m$。

现在我们可以证明定理 1.1：每个有理数都是某个有限禁用族的余度密度。

定理 *1.1* 的证明。 取任意有理数 $\alpha\in[0,1)$。若 $\alpha=0$，则我们可以禁止一条超边，因此不妨设 $\alpha>0$。将 $\alpha=b/a$ 写作正整数 a 和 b，且最大公约数 (a,b) 为 $=1$。定义

$$\delta:=\frac{1}{4a^2} \text{ and } m:=\max\{4a^2(k-1),M(\delta)\}.$$

令 $\mathcal{H}$ 为所有满足 $\delta_{k-1}(H)\ge(\alpha-\delta)m$ 的、具有 m 个顶点的 k-图 H 所构成的集合。我们断言， $\mathcal{H}$ 的 $(a,b+1)$-扩展，即 $\mathcal{H}(a,b+1)$，其余度图兰密度为 α，也就是说， $\gamma(\mathcal{H}(a,b+1))$ 为 $=b/a=\alpha$。

断言 2.3。 $\gamma(\mathcal{H}(a,b+1))\ge\frac{b}{a}$。

命题的证明。给定一个整数 n，令 $G_{a,\ b,\ n}$ 为定义在顶点集 $[n]$ 上的 k-图，其定义如下：

• 将 $[n]$ 尽可能均匀地划分为 a 个部分 $V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_a$，也就是说，

$$\big|\,|V_i|-|V_j|\,\big|\le 1\quad \text{for all } i,j\in[a].$$

• 对于每个 $i\in[a]$，只要 $k-1$ 个顶点来自 V_i，另一个顶点来自 V_j，就添加所有由这些顶点组成的超边

$$j\in\{\,i+1,i+2,\ldots,i+b\,\}\pmod a.$$

• 添加所有与至少三个部分 V_1、V_2、……、V_a相交的超边。

• 添加所有位于部分 V_1、V_2、……、V_a 中的某两个部分内，并且与这两个部分各自至少有两个顶点相交的超边。

容易看出，任意一个$(k-1)$-集合 S 的邻域至少由 b 个完整的部分组成，再去掉集合 S。由于每个部分的大小至少为 $n/a-1$，因此有

$$\delta_{k-1}(G_{a,b,n})\ge\frac{b}{a}\,n-b-|S|.$$

要证明 $\gamma(\mathcal{H}(a,b+1))\ge\frac{b}{a}$，只需证明$G_{a,b,n}$是 $\mathcal{H}(a,b+1)$-自由的。反设$G_{a,b,n}$ 包含来自 $\mathcal{H}(a,b+1)$的某个 k-图。根据 $\mathcal{H}(a,b+1)$的定义，存在一个 k-图 $F\in\mathcal{H}$，使得$G_{a,b,n}$ 在 $F(a,b+1)$中包含某个k-图。

采用定义 2.1 中引入的记号，设 $\mathcal{A},\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{P}$ 相对于 F 定义，并令 $r:=|\mathcal{T}|$。那么存在某个 $P=(P_1,\ldots,P_r)\in\mathcal{P}$，使得 $G_{a,b,n}$ 包含 $F(P)$ 作为子图。特别地，$G_{a,b,n}$ 包含 F 作为子图。

根据 $\mathcal{H}$ 的定义，我们有 $\delta_{k-1}(F)\ge(\alpha-\delta)m$。令 $x_i=|V_i\cap V(F)|$，其中 $i\in[a]$。为方便起见，我们对指标进行模 a 的运算，也就是说，对于任意满足 $j\equiv i(\mathrm{mod}\ a)$ 的 $i,j\in\mathbb{Z}$，都有 $x_i=x_j$ 和 $V_i=V_j$。

首先，我们来证明

$$\sum_{j=0}^{b-1}x_{i+j}\ge(\alpha-2\delta)m,\quad \text{for all } i\in\mathbb{Z}. \tag{1}$$

反设存在某个 $i\in\mathbb{Z}$，使得

$$\sum_{j=0}^{b-1}x_{i+j}<(\alpha-2\delta)m.$$

令 t 为 $[a]$ 中满足 $x_{i-t}\ge k-1$ 的最小整数。如果存在这样的 t，那么在 $V(F)\cap V_{i-t}$ 中存在一个由顶点组成的 $(k-1)$-集合 S。由 $\delta_{k-1}(F)\ge(\alpha-\delta)m$ 以及 $N_F(S)\subseteq N_{G_{a,b,n}}(S)\subseteq\bigcup_{j=1}^{b}V_{i-t+j}$ 可知

$$(\alpha-\delta)m\le d(S)\le\sum_{j=1}^{b}x_{i-t+j}\le\sum_{j=1}^{t-1}x_{i-j}+\sum_{j=0}^{b-1}x_{i+j}<(k-1)a+(\alpha-2\delta)m\le(\alpha-\delta)m,$$

矛盾。若不存在这样的 t，则

$$m=|V(F)|=\sum_{j=1}^{a}x_{i-j}<(k-1)a,$$

再次得到矛盾。这证明了 (1)。

接下来，我们将证明对于每个 $i \in [a]$，都有 $x_i \geq k-1$。根据贝祖定理，存在两个正整数 $y, z \in [a]$，使得 $by = az + 1$。于是，对于每个 $i \in [a]$，由 (1) 可得

$$y(\alpha - 2\delta)m \leq \sum_{j=0}^{by-1} x_{i+j} = x_i + \sum_{j=1}^{az} x_{i+j} = x_i + z \cdot \sum_{j=1}^{a} x_j = x_i + zm.$$

这意味着

$$x_i \geq y(\alpha - 2\delta)m - zm = \left(\frac{1}{a} - 2\delta y\right) m \geq \frac{1}{2a} m > k - 1.$$

回想一下，$G_{a,b,n}$ 包含某个 $(P_1, \ldots, P_r)$ 作为子图，其中 $(P_1, \ldots, P_r) \in \mathcal{P}$。由于 F 与每个部分 V_i 至少有 $k-1$ 个顶点相交，因此存在 a 个互不相同的顶点集 $S_1, S_2, \ldots, S_a$，每个集合的大小为 $k-1$，使得对于每个 $i \in [a]$，都有 $S_i \subseteq V_i \cap V(F)$。令 $j \in [r]$ 为满足 $T_j = \{S_1, S_2, \ldots, S_a\}$ 的（唯一）指标。令 v_j 为 $F(P_1, \ldots, P_r)$ 中与 P_j 的每个元素都形成超边的顶点。由于 $V_1, \ldots, V_a$ 中至多有 b 个部分包含一个与 v_j 形成超边的 $(k-1)$-集合，因此这与 $|P_j| = b + 1$ 矛盾。■

断言 2.4. $\gamma(\mathcal{H}(a, b+1)) \leq \alpha$.

命题的证明。令 N 为族 $\mathcal{H}(a, b+1)$ 中每个 k-图的顶点数（根据定义，该族中所有 k-图的顶点数都相同）。对于任意 $\varepsilon > 0$，令 n_0 为满足以下条件的常数

$$\varepsilon n_0 = \max\{N, M(\varepsilon)\}.$$

设 G 是一个有 $n \geq n_0$ 个顶点且满足 $\delta_{k-1}(G) \geq (\alpha + \varepsilon)n$ 的 k-图。为了证明 $\gamma(\mathcal{H}(a, b+1)) \leq \alpha$，只需证明 G 包含一个来自 $\mathcal{H}(a, b+1)$ 的子图。根据引理 2.2，G 包含某个 F 作为子图，其中 $F \in \mathcal{H}$。采用定义 2.1 中引入的记号，令 $\mathcal{A}, \mathcal{T}$ 和 $\mathcal{P}$ 相对于 F 定义。对于 $\mathcal{T}$ 中的任意元素 $T = \{S_1, S_2, \ldots, S_a\}$，令 R_T 为 G 中满足以下条件的顶点集合 v：v 与 T 中至少 $b+1$ 个元素构成一条超边，也就是说，

$$R_T := \big\{v \in V(G) : |\{i \in [a] : \{v\} \cup S_i \in G\}| \geq b + 1\big\}.$$

我们首先证明，对于每个 $T \in \mathcal{T}$，都有 $|R_T| \geq N$。我们对满足以下条件的数对 (S, v) 的数量进行双重计数：$S \in T$ 且 $v \in V(G) \setminus R_T$，并且 $S \cup \{v\} \in E(G)$。由于 $V(G)$ 中的每个顶点与 T 中至多 b 个元素构成一条超边，因此这类数对的总数至多为 bn。另一方面，由假设

$$\delta_{k-1}(G) \geq \frac{b}{a} n + \varepsilon n$$

以及事实 $\varepsilon n \geq N$，我们得到这类数对的数量至少为

$$\left(\frac{b}{a} n + (N - |R_T|)\right) a.$$

因此，

$$\left(\frac{b}{a} n + (N - |R_T|)\right) a \leq bn,$$

这意味着 $|R_T| \geq N$。

令 $r := |\mathcal{T}|$，并写作

$$\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_r\}.$$

由于 $N = |V(F)| + |\mathcal{T}|$，我们可以贪心地选取互不相同的顶点 v_1、v_2、.....、v_r，使其属于 $V(G) \setminus V(F)$，并满足对每个 $i \in [r]$，都有 $v_i \in R_{T_i}$。这意味着，对每个 v_i，都存在一个子集 $P_i \subseteq T_i$，满足 $|P_i| = b + 1$，使得 v_i 与 P_i中的每个元素都构成一条超边。因此，G包含一个.....的副本

$$F(P_1, P_2, \ldots, P_r) \in F(a, b+1) \subseteq \mathcal{H}(a, b+1),$$

由此完成该断言的证明。 ■

结合断言 2.3 和断言 2.4，我们完成了定理 1.1 的证明。 □

3 余度图兰密度为 $\frac{r-1}{r}$ 的 k-图序列。 ——

我们称 k-图 F 是 r-可染色的，如果 $V(F)$ 可以划分为 r 个集合 A_1、A_2、.....、A_r，使得 F 的任何超边都不完全包含在某个部分 A_i 内。我们将使用 Keevash 和 Zhao [10] 的以下观察

命题 3.1。若一个 k-图 F 不可 r着色，则 $\gamma(F) \geq \frac{r-1}{r}$。 ——

证明。设 $n \to \infty$，并令 H 为一个具有如下划分的 n 阶顶点 k-图

$$V(H) = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r,$$

其中 $|A_i| \in \{\lfloor n/r \rfloor, \lceil n/r \rceil\}$ 对每个 $i \in [r]$ 均成立，且边集 $E(H)$ 由所有与这些部分中至少两部分相交的 k-集合组成。显然，H 是 F-自由的，并满足 $\delta_{k-1}(H) \geq n - \lceil n/r \rceil$，这意味着 $\gamma(F) \geq \frac{r-1}{r}$。 —— □

接下来，按 $r = 1$，2，.....归纳地定义一个 k-图 F_r^k，如下所示。k-图 F_1^k仅有一条超边。令 $r \geq 2$。令 S为一个大小为 $r(k-2)+1$ 的顶点集。令 $m := \binom{r(k-2)+1}{k-1}$，并将 S 的所有 $(k-1)$-子集枚举为 X_1，X_2，.....，X_m。对于每个 $j \in [m]$，令 X_j为 F_{r-1}^k 的一个副本；这些副本彼此顶点不相交，且都与集合 S 不相交。设

$$V(F_r^k) := S \cup \bigcup_{j=1}^{m} V\left(\tilde{X}_j\right) \text{ and } E(F_r^k) := \left\{X_j \cup \{v\} : j \in [m],\ v \in V(\tilde{X}_j)\right\} \cup \bigcup_{j=1}^{m} E\left(\tilde{X}_j\right).$$

为了说明上述定义（并且由于 F_2^k 出现在定理 1.3 中），我们单独描述 k-图 F_2^k。我们从一个大小为 $2k-3$ 的顶点集 S 开始，并将其 $(k-1)$-子集枚举为 X_1、.....、X_m。我们向 $E(F_2^k)$ 添加 m 条新超边 $\tilde{X}_1$、..... 、$\tilde{X}_m$，这些超边两两不相交，且与 S 不相交。最后，对于每个 $i \in [m]$，我们向$E(F_2^k)$ 添加所有包含 X_i 和 $\tilde{X}_i$ 中一个顶点的 k-集合。

我们证明关于这些 k-图的以下结果。

定理 3.2。任取 $k \geq 3$。那么，对于每个 $r \geq 1$，k-图 F_r^k 都不是 r-可着色的，并且满足 $\gamma(F_r^k) = \frac{r-1}{r}$。 ——

证明。我们对 r 使用归纳法证明该定理。虽然 $r = 1$ 的情形显然成立，且归纳步骤能正确处理 $r = 2$ 的情形，但我们仍单独证明 $r = 2$（因为 F_2^k 在定理 1.3 中起着关键作用）。

命题 3.3。 k-图 F_2^k 不可 2-可着色，且 $\gamma(F_2^k) = 1/2$.

命题的证明。首先证明 F_2^k 不是 2-可着色的。反设 F_2^k是 2-可着色的，并设 $V（F_2^k）= A \cup B$是一个划分，使得 A 和 B 都不包含超边。回顾一下，$V（F_2^k）= S \cup \bigcup_{i\in[m]} V（\tilde{X}_i）$，其中 $|S| = 2k-3$。根据鸽巢原理，存在一个大小为 $k-1$ 的集合 $S' \subseteq S$，完全包含于 A 或 B中。不失一般性，假设 $S' \subseteq A$。设 $i \in [m]$ 满足 $S' = X_i$。考虑相应的集合 $\tilde{X}_i$。由于 $\tilde{X}_i$ 实际上是 F_2^k的一条超边，因此它至少有一个顶点 $v \in X_i$ 属于 A；否则，$X_i \subseteq B$，这与 B 中不含超边的假设矛盾。但这样一来，$X_i \cup \{v\}$ 就是包含于 A中的一条超边，矛盾。因此，F_2^k不是 2-可着色的。

根据命题 3.1，我们有 $\gamma(F_2^k) \geq 1/2$。下面证明上界 $\gamma(F_2^k) \leq 1/2$。令 $\varepsilon > 0$ 为任意小的常数，并假设 n 足够大。我们声称，任何最小余度为 $\delta_{k-1}(H) \geq (1/2+\varepsilon)n$ 的 k-图 H 都必须包含F_2^k作为子图。

将 $V(H)$ 的任意一个 $(2k-3)$-子集与 S 对应。其 $(k-1)$-子集标记为 X_1，X_2，……，X_m，其中 $m := \binom{2k-3}{k-1}$。我们依次找出合适的集合 $\tilde{X}_1$，……，$\tilde{X}_m \subseteq V(H)$。假设 $i \geq 1$，且我们已经定义了 X_1，……，X_{i-1}。令

$$A := N(X_i) \setminus \left(S \cup \bigcup_{j=1}^{k-1} \tilde{X}_j\right).$$

根据 H 的余度条件，我们有

$$|A| \geq d(X_i) - |S| - (i-1)k \geq \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)n - (2k-3) - (i-1)k \geq k-1.$$

任取 A 的一个 $(k-1)$-子集 Y。由于

$$d(Y) \geq \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)n > |V(H)| - |A|,$$

˜ 必然存在一个顶点 $y \in N(Y) \cap A$。对于 X_i，我们取 $Y \cup \{y\} \in E(H)$。经过 m 步后，集合 S、$\tilde{X}_1$、……、$\tilde{X}_m$ 在 H 中构成 F_2^k 的一个副本，从而完成命题的证明。■

在关于 $r \geq 3$ 的归纳步骤中，我们必须证明 F_r^k 不是 r-可着色的，并且 $\gamma(F_r^k) = {}^{r-1}_{r}$。证明与命题 3.3 的证明非常相似。首先，我们证明 F_r^k 不是 r-可着色的。反设 F_r^k 是 r-可着色的。那么，$V(F_r^k)$ 可以划分为 r 个部分 A_1、A_2、……、A_r，其中每个部分都不包含任何超边。回忆

$$V(F_r^k) := S \cup \bigcup_{j=1}^{m} V\left(\tilde{X}_j\right) \text{ and } |S| = (k-2)r+1.$$

根据鸽巢原理，存在一个大小为 $k-1$ 的集合 $S' \subseteq S$，完全包含在某个部分 A_i 中。不失一般性，假设 $S' \subseteq A_r$。令 $S' = X_j$。考虑 F_{r-1}^k 的相应副本，即 $\tilde{X}_j$。由于 $\tilde{X}_j$ 中的每个顶点与 X_j 一起构成一条超边，因此必有

$$\tilde{X}_j \cap A_r = \varnothing,$$

这与 $\tilde{X}_j$ 不是（$r-1$）-可着色这一事实矛盾。因此，F_r^k 不能 r-着色。

接下来，我们证明 $\gamma(F_r^k) = \frac{r-1}{r}$。根据观察，只需证明 $\gamma(F_r^k) \le \frac{r-1}{r}$。给定任意（任意小的）常数 $\varepsilon > 0$，令 n 足够大。我们证明，任何最小余度为 $\delta_{k-1}(H) \ge (\frac{r-1}{r} + \varepsilon)n$ 的 k-图 H 都必须包含 F_r^k 作为子图。

任取一个大小为 $r(k-2)$ 的顶点集 $S \subseteq V(H)$，并将其 $(k-1)$-子集标记为 X_1、X_2、……、X_m。我们的目标是迭代地对每个 X_i，在 $N(X_i)$ 中找到 F_{r-1}^k 的一个副本，记为 $\tilde{X}_i$，并额外要求 X_1、……、X_m 和 S 两两不相交。假设对某个 $i \in [m]$，我们已经得到了 X_1、……、X_{i-1}。现在我们需要找到 X_i。定义

$$H_i := H\Big[N(X_i) \setminus \Big(S \cup \bigcup_{j\in[i-1]} \tilde{X}_j\Big)\Big].$$

于是我们有

$$|V(H_i)| \ge \left(\frac{r-1}{r} + \varepsilon\right)n - (r(k-2)+1) - (i-1)\,|V(F_{r-1}^k)| \ge \left(\frac{r-1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right)n,$$

其中，最后一个不等式成立是因为 n 充分大。因此，

$$\delta_{k-1}(H_i) \ge \delta_{k-1}(H) - \big(n - |V(H_i)|\big) \ge \left(\frac{r-2}{r-1} + \varepsilon'\right)|V(H_i)|,$$

其中 $\varepsilon' > 0$ 是某个常数（仅依赖于 ε 和 r）。根据归纳假设，$\gamma(F_{r-1}^k) = \frac{r-2}{r-1}$。因此，$H_i$ 包含 F_{r-1}^k 的一个副本，记为 $\tilde{X}_i$。处理完所有 $i \in [m]$ 后，集合 S、$\tilde{X}_1$、……、$\tilde{X}_m$ 在 H 中构成 F_r^k 的一个副本。定理得证。

□

4 定理 1.3 的证明

本节证明定理 1.3。首先，我们给出 Mubayi 和 Zhao [15] 提出的两个命题，它们将在证明中用到。

令 $K^k(t, t)$ 表示顶点集为 $V = A \cup B$ 的 k-图，其中 $A \cap B = \varnothing$ 且 $|A| = |B| = t$，边集定义为 $\{S \in \binom{V}{k} : |S \cap A| = 1 \text{ 或 } |S \cap B| = 1\}$。

命题 4.1（[15, 命题 4.2]）。对于 $k \ge 3$，存在一个正整数 $\ell = \ell(k)$，使得 $\gamma(K^k(\ell, \ell)) \ge 1/2$。

命题 4.2（[15, 命题 4.3]）。令 $k \ge 3$，$\ell \ge k-1$ 和

$$\rho := \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\binom{\ell}{k-1}} + \frac{1}{\binom{\ell}{k-1}2^{1/\ell}}\right) < \frac{1}{2}.$$

对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在 N，使得每个具有 $n > N$ 且满足 $\delta_{k-1}(H) \ge (\rho + \varepsilon)n$、含有 n 个顶点的二染色 k-图 H，都包含 $K^k(\ell, \ell)$ 的一个副本。

现在我们准备好证明定理 1.3。

*定理 1.3 的证明。*给定一个整数 $k \ge 3$，令 $\ell = \ell(k)$ 为命题 4.1 返回的正整数。定义 $F_1 := K^k(\ell, \ell)$ 和 $F_2 := F_2^k$，其中 F_2^k 是第 3 节中定义的 k-图。

我们来证明 F_1 和 F_2 满足定理 1.3。根据命题 4.1 和定理 3.2，我们知道 $\gamma(F_1) \geq 1/2$ 且 $\gamma(F_2) = \frac{1}{2}$。因此，只需证明 $\gamma(\{F_1, F_2\}) < 1/2$。

给定 k 和 ℓ，令 $\rho = \rho(k, \ell) < 1/2$ 为命题 4.2 返回的常数。令

$$\varepsilon := \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} - \rho\right) > 0,$$

并取 n 足够大。只需证明，任意具有最小余度 $\delta_{k-1}(H) \geq (1/2 - \varepsilon)n$ 的 n 阶 k 图 H 都必须包含 F_1 或 F_2 作为子图，因为这将得到所需的 $\gamma(\{F_1, F_2\}) \leq 1/2 - \varepsilon < 1/2$。

假设 H 不含 F_2。我们证明，对于大小为 $2k-3$ 的任意顶点子集 S，必然存在一个 $(k-1)$-子集 $X \subseteq S$，使得可以找到一个集合 $A \subseteq N(X)$，其中 $|A| \geq (1/2 - 2\varepsilon)n$ 不包含 H 的任何超边。反设不存在这样的 X。我们将 S 的 $(k-1)$- 子集枚举为 X_1、…、X_m、$m := \binom{2k-3}{k-1}$，并按照命题 3.3 中上界证明的类似归纳过程，为 $i = 1$、2、…、m 找到超边 X_i。事实上，这里的论证稍微简单一些，因为在步骤 i，我们可以直接在集合 $N(X_i) \setminus (S \cup \bigcup_{j \in [i-1]} X_j)$ 中任取一条超边。后一个集合至少有 $\delta_{k-1}(H) - (2k-3) - (i-1)k \geq (1/2 - 2\varepsilon)n$ 个顶点，因此根据我们的假设，它至少包含一条超边。最终得到 F_2 的一个副本，矛盾。

固定一个大小为 $2k-3$ 的任意顶点子集 $S \subseteq H$。设 $X \subseteq S$ 和 $A \subseteq N(X)$ 是满足上述性质的两个集合。那么 A 是一个独立集，且 $|A| \geq (1/2 - 2\varepsilon)n$。现在取任意一个 $(2k-3)$-集合 $S' \subseteq A$。那么存在一个 $(k-1)$-集合 $X' \subseteq S'$，使得存在一个大小至少为 $(1/2 - 2\varepsilon)\ n$ 的顶点集 $B \subseteq N(X')$，其中不含 H 的任何超边。由于 A 是独立的，我们有 $B \cap A \subseteq N(X') \cap A = \varnothing$。令 $H' = H[A \cup B]$ 为 $A \cup B$ 上的诱导 k-图。那么 $|V(H')| \geq |A| + |B| \geq (1 - 4\varepsilon)\ n$，因此

$$\delta_{k-1}(H') \geq \delta_{k-1}(H) - 4\varepsilon n \geq \left(\frac{1}{2} - 5\varepsilon\right) n \geq (\rho + \varepsilon)n \geq (\rho + \varepsilon) \cdot |V(H')|.$$

由于 A 和 B 都是独立的，H' 是 2-可着色的。根据命题 4.2，H' 包含 F_1 的一个副本。定理的证明至此完成。 □

参考文献

[1] R. Baber和J. Talbot。超图会跳跃。组合学、概率与计算 20 (2):161–171，2011。[2] J. Balogh。三元系统的图兰密度不是主的。组合理论杂志*A*辑 100 (1):176–180，2002。[3] D. Conlon和B. Schülke。超图累积。国际数学研究通知 2 289，5，2025：论文编号rnae。[4] P. Erdős和M. Simonovits。图论中的极限定理。匈牙利数学科学研究 1 57，1966 51：–。[5] P. Erdős和A. H. Stone。线性图的结构。美国数学会通报 52 1091，1946 1087：–。[6] V. Falgas-Ravry、O. Pikhurko、E. Vaughan 和 J. Volec。K_4^- 的余度阈值。伦敦数学会杂志（*2*） 107 (5):1660–1691，2023。[7] P. Frankl和V. Rödl。超图不会跳跃。组合数学 4 (2-3):149–159，1984。[8] P. Frankl、Y. Peng、V. Rödl和J. Talbot。关于Erdős跳跃常数猜想的注记。组合理论杂志*B*辑 97 (2):204–216，2007。[9] P. Keevash。超图图兰问题。载于《2011年组合学综述》，第83–139页。2011年。[10] P. Keevash和Y. Zhao。射影几何的余度问题。组合理论杂志*B*辑 97 (6):919–928，2007。

[11] J. Ma。*3*-均匀紧圈的余度图兰密度 C_{11}。arXiv:2409.02765。[12] D. Mubayi。法诺平面的余度密度。组合理论杂志*B*辑 95(2):333–337，2005。[13] D. Mubayi和O. Pikhurko。极值超图理论中的非主族构造。离散数学。308 (19):4430–4434，2008。[14] D. Mubayi和V. Rödl。关于三元系统的图兰数。组合理论杂志*A*辑 100 (1):136–152，2002。[15] D. Mubayi和Y. Zhao。超图的余度密度。组合理论杂志*A*辑 114 (6):1118–1132，2007。[16] S. Piga、N. Sanhueza-Matamala和M. Schacht。3-均匀紧圈的余度图兰密度。组合理论杂志*B*辑 176:1–6，2026。[17] O. Pikhurko。关于可能的图兰密度。以色列数学杂志 201 (1):415–454，2014。[18] A. Sidorenko。关于图兰数，我们知道什么以及不知道什么。图与组合 11 (2):179–199，1995。