arXiv:2601.00763v1 [math.GR] 2 Jan 2026

各向同性奇正交群的正规结构

Leonid Danilevich 圣彼得堡
大学，俄罗斯圣彼得堡
Universitetskaya 堤岸 7/9 号，
邮编 199034

摘要

设 (M, q) 是交换环上的奇秩二次射影模，其中二次型 q 是半正则的，全局 Witt 指数至少为 2，且满足 $\mathrm{rk}(M) \geqslant 7$。我们证明标准交换子公式，并在不假设 2 可逆的情况下，对 $\mathrm{O}(M, q)$ 的 EO-正规子群进行分类。

1 引言

交换环 K 上一般线性群 $\mathrm{GL}(n, K)$ 的正规结构在 $n \geqslant 3$ 的情形下由 Wilson–Golubchik 定理 [1, 2] 描述。也就是说，如果 $H \leqslant \mathrm{GL}(n, K)$ 被初等子群 $\mathrm{E}(n, K)$ 规范化，那么存在唯一的理想 $I \trianglelefteqslant K$，使得 $\mathrm{E}(n, K, I) \leqslant H \leqslant \mathrm{C}(n, K, I)$；其中左侧是相对初等子群，右侧是全同余子群。

随后，L. Vaserstein 在假设结构常数可逆的条件下，将类似结果推广到了任意切瓦莱群 [3]；之后，E. Abe 在一般情形下，对所有秩为$\geqslant 3$的根系得到了相应结果 [4] 。对于其余的根系 B_2 和 G_2，，D. Costa 和 G. Keller 在分裂情形下给出了完整的答案 [5, 6]。

在秩为 1 的情形下，一般无法得到这样的分类，因为 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ 的正规子群分类实质上包含了所有由阶为 2 和 3 的两个元素生成的有限群的分类。尽管如此，在附加的算术条件下，Costa 和 Keller 找到了答案 [7]。

如果结构常数可逆，那么正规结构中的层由环的理想参数化，与一般线性群的情形相同。如果根系是多重边的且不是 B_2，，那么它们由 Abe 意义下的“可容许对”参数化；而对于 B_2 （以及 Costa 和 Keller 的文章语境中的 A_1 ），则会出现所谓的基数。

V. Petrov 和 A. Stavrova 在 [8] 开始研究任意交换环上各向同性约化群概形的点群。在这篇文章中，他们给出了初等子群的定义，并证明了它的正规性。后来，Stavrova 和 A. Stepanov [9] 在结构常数可逆的假设下确定了正规结构。

最后，对于酉群这一类群，其正规结构也已为人所知，其中包括经典各向同性约化群。关于这一方向最一般的结果由 A. Bak 和 R. Preusser 在 [10] 针对秩为 $\geqslant 3$ 的奇数阶酉群获得，且不要求 2 可逆。

本文研究各向同性约化群中剩余情形里最简单的一类。具体而言，本文获得了正交群 O(M, q) 的正规结构，其中 M 是带有半正则二次型 q的奇秩投射模，q 的全局 Witt 指数至少为 2，且 M 的秩至少为 7（秩为 5 的情形已由 Costa 和 Keller 的文章涵盖）。正如预期，各层由 Abe 意义下的可容许对参数化。

标准分类的证明基于 Preusser [11]工作的一个变体。除主要结果（定理 7.1）外，我们还将得到

- 初等子群 EO(M, q) 在 O(M, q) 中的正规性，其中 q 是任意一个 Witt 指数为 2 且具有非平凡各向异性核的二次型（定理 4.1）；

- 半正则二次型情形下，相对初等子群的标准交换子公式及其完美性的类似结论（命题 5.2 和 6.1）；

- 对正规结构中涉及的传递子进行显式计算（命题 6.2）。

2 基本定义

对于群元素 x, $y \in G$，其左范数交换子记为$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$，而 x 被 y 从左侧共轭记为 ${}^{y}x = yxy^{-1}$。

所有环均假定为含幺交换环。环 K 的可逆元群记为 $K^{\times}$。

设 M 是任意 K-模。其 K-线性泛函构成的对偶模记为 $M^{\vee}$。

处处假设 M 配备了一个固定的二次型——一个映射 $q\colon M \to K$，它是二次齐次的（$\forall u \in M, x \in K\colon\ q(ux) = q(u)x^2$），且其极化 $b_q\colon\ M \times M \to K$, $u, v \mapsto q(u + v) - q(u) - q(v)$ 是双线性的。称这对 (M, q) 为二次模。

对于元素 $u \in M$，定义 K-线性泛函 $u^* \in M^{\vee}$，$u^* = b_q(u,)$。相应地，$M^* = \{u^* \mid u \in M\} \leqslant M^{\vee}$。

处处假设 (M, q) 的 Witt 指数至少为 2，即 M 可以表示为 $M = e_{-2}K \oplus e_{-1}K \oplus M_0 \oplus e_1K \oplus e_2K$，且 $q(x_{-2}, x_{-1}, u_0, x_1, x_2) = q_0(u_0) + x_{-1}x_1 + x_{-2}x_2$，其中 q_0 是定义在 M_0 上的二次型。假设这一将 M 分解为直和的分解是固定的，且不会改变。

对于任意 K-线性自同态 $\varphi\colon\ M \to M$，其矩阵记为 $[\varphi]$: $[\varphi]_{ij} = \pi_i \varphi \iota_j$ for i, $j \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$。这里 $\iota_0\colon\ M_0 \to M$, $\pi_0\colon\ M \to M_0$分别是典范嵌入和投影；对于 $\iota_i\colon\ K \to M$ 和 $\pi_i : M \to K$，同样如此。行和列按 $(-2, -1, 0, 1, 2)$ 的顺序编号。零元素省略，无关元素记为 $*$。

正交群 O(M, q) 是群 GL(M) 的 K-线性自同构所构成的子群，其中的自同构保持二次型不变。

若 M 是投射模，则可定义 $\mathrm{SO}(M,q) = \mathrm{O}(M,q) \cap \mathrm{SL}(M)$。等价地，$\mathrm{SO}(M,q)$ 由 $\mathrm{O}(M,q)$ 中满足以下条件的自同构 $\varphi \in$ 构成：在任意极大理想 $\mathfrak{m} \trianglelefteqslant K$ 处局部化后，对应的自由模 $M_{\mathfrak{m}}$ 的自同构 $\varphi_{\mathfrak{m}}$ 的行列式为一。

在这种情况下，分解成立：

$$\mathrm{O}(M,q) = \mathrm{SO}(M,q) \times \mu_2(K)\,\mathrm{id},$$

其中 $\mu_2(K) = \{\omega \in K \mid \omega^2 = 1\}$。

2.1 半正则二次型

假设 M_0 是奇秩为 $n \geqslant 1$ 的投射模。记作 $n = 2\nu+1$。

令 ξ_i, ξ_{ij} 为形式变量，其中 $\xi_{ij} = \xi_{ji}$。构造矩阵 Ξ，其 size $n \times n$，根据公式 $\Xi_{ij} = \begin{cases} \xi_i, & i = j \\ \xi_{ij}, & i \neq j \end{cases}$，将它们填入其中。

众所周知，[12, IV.3.1.2], $\det(\Xi) \in \mathbb{Z}[\xi_i, \xi_{ij}]$ 可被 2 整除；定义 $P_n = \frac{1}{2}\det(\Xi) \in \mathbb{Z}[\xi_i, \xi_{ij}]$。若理想 $(P_n(q_0(u_i)\ b_{q_0}(u_i,\ u_j))\ |u_1,\ \ldots\ldots,\ u_n \in M_0) = (1) \trianglelefteqslant K$，则称形式 q_0 为半正则。

我们需要以下命题，以了解局部环 [12, IV.3.1.7]上具有半正则形式的二次模的结构：

命题 2.1. 设 K 为局部环。对于每个秩为 $2\nu+1$的自由半正则二次K-模(M_0, q_0)，存在一个正交分解

$$(M_0, q_0) = \coprod_{i=1}^{\nu} (M_i', q_i') \boxplus (M_0', q_0'),$$

其中，对于 $1 \leqslant i \leqslant \nu$，$(M_i', q_i')$是一个秩为2且二次型非退化的自由二次模，而$(M_0', q_0')$是一个秩为1且具有半正则二次型的自由二次模。模 M_i'有一组基 $\{f_{-i}, f_i\}$，使得$b_{q_i'}(f_{-i}, f_i) = 1$；而 M_0'有一组基 $\{f_0\}$，使得 $q_0'(f_0) \in K^\times$。

下面两个引理也很容易看出：

引理 2.1. 若(M_0, q_0) 是一个奇秩为 n、带有半正则二次型的投射模，则理想$(q_0(u) \mid u \in M_0) = (1) \trianglelefteqslant K$。

证明. 半判别式$\frac{1}{2}\det(\Xi)$ 是关于 $q_0(u)$ 的一个整数系数多项式，其中 $u \in M_0$。 □

引理 2.2. 若(M_0, q_0) 是一个奇秩为 $n \geqslant 3$、带有半正-则二次型的投射模，则理想$(b_{q_0}(u, v) \mid u, v \in M_0) = (1) \trianglelefteqslant K$。

证明. 只需证明半判别式$\frac{1}{2}\det(\Xi) \in (2\xi_i, \xi_{ij}) \trianglelefteqslant \mathbb{Z}[\xi_i, \xi_{ij}]$。

将半判别式 $\frac{1}{2}\det(\Xi)$ 写成 ξ_i, ξ_{ij} 中单项式的线性组合。除 $\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n$ lie 之外的所有单项式都属于由 ξ_{ij} 生成的理想，而后者的系数为 2^n，并且由于 $n \geqslant 3$，$\frac{1}{2}(2^n \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n)$ 仍属于理想 $(2\xi_1)$。 □

2.2 初等子群

引理 2.3。 以下 M *lie* 的自同态属于 正交群(M, q):

- $T_{ij}(y) = 1 + e_{ij}y - e_{-j,-i}y$，其中 $y \in K$, $i, j \in \{\pm 1, \pm 2\}$ 和 $i \neq \pm j$;

$$[T_{1,2}(y)] = \begin{pmatrix} 1 & -y & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & y \\ & & & & 1 \end{pmatrix};$$

- $T_i(u) = 1 + e_{0,i}u - e_{-i,0}u^* - e_{-i,i}q_0(u)$，其中 $u \in M_0$, $i \in \{\pm 1, \pm 2\}$;

$$[T_1(u)] = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & -u^* & -q_0(u) & \\ & & 1 & u & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix};$$

- $d_i(r) = 1 + e_{ii}(r-1) + e_{-i,-i}(r^{-1} - 1)$，其中 $r \in K^\times$, $i \in \{\pm 1, \pm 2\}$;

$$[d_1(r)] = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & r^{-1} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & r & \\ & & & & 1 \end{pmatrix};$$

- $d(\varphi_0) = 1 + e_{0,0}(\varphi_0 - 1)$，其中 $\varphi_0 \in O(M_0, q_0)$。

$$[d(\varphi_0)] = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \varphi_0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

初等子群 $\mathrm{EO}(M, q) = \langle T_{ij}(y),\ T_i(u) \mid y \in K, u \in M_0 \rangle$ 是 $\mathrm{O}(M, q)$ 的子群。其生成元 $T_{ij}(y)$ 和 $T_i(u)$ 称为初等换位。

由 $\mathrm{EO}(M, q)$ 归一化的 $\mathrm{O}(M, q)$ 的子群称为 EO-正规。

对角子群 $\mathrm{D}(M, q) = \langle d_i(r),\ d(\varphi_0) \mid r \in K^\times, \varphi_0 \in \mathrm{O}(M_0, q_0) \rangle$ 是 $\mathrm{O}(M, q)$ 的另一个子群。

设 L 是一个 K-代数。可以定义二次 L-模（M_L, q_L）：作为一个 L-模，它是 $M \otimes_K L$，而二次型 q_L 自然定义为:

$$q_L\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \otimes \ell_i\right) = \sum_{i=1}^{N} q(m_i)\ell_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} b_q(m_i, m_j)\ell_i\ell_j.$$

容易检查该定义是良定义的。

对于二次模 (M_L, q_L)，可以取正交群 $\mathrm{O}(M_L, q_L)$；这是一个从 K-代数范畴到群范畴的函子

: 对于任意 K-代数之间的箭头 $L \to L'$， $M_{L'} = M_L \otimes_L L'$，以及 $\varphi \in \mathsf{O}(M_L, q_L)$, $\varphi \otimes_L L' \in \mathsf{O}(M_{L'}, q_{L'})$ 都是良定义的。

设 $I \trianglelefteqslant K$ 是一个理想。于是可以将相对正交子群 $\mathsf{O}(M, q, I)$ 定义为 $\mathsf{O}(M, q) \to \mathsf{O}(M/MI, q_{K/I})$ 的核。另外，定义相对初等子群 $\mathsf{FO}(M, q, I) = \langle T_{ij}(y)\ T_i(u) \mid y \in I, u \in M_0 I \rangle$ 其中 $I \trianglelefteqslant K$是某个理想。这个子群几乎从来不是 $\mathsf{O}(M, q)$ 的正规子群。相对初等子群的正确的定义见引理 5.2 之后。显然，$\mathsf{FO}(M, q, I) \leqslant \mathsf{O}(M, q, I)$。

2.3 初等关系

引理 2.4。 对于 $y, z \in K$, $u, v \in M_0$, $r \in K^\times$, $\varphi_0 \in O(M_0, q_0)$， $i, j \in \{\pm 1, \pm 2\}$，其中 $i \neq \pm j$:

$$\begin{aligned}
T_{ij}(y) \cdot T_{ij}(z) &= T_{ij}(y+z), \\
T_i(u) \cdot T_i(v) &= T_i(u+v), \\
[T_i(u), T_j(v)] &= T_{-j,i}(b_{q_0}(u,v)), \\
[T_i(u), T_{ij}(y)] &= T_j(uy) \cdot T_{-j,i}(q_0(u)y), \\
[T_i(u), T_{ji}(y)] &= 1, \\
[T_{ij}(y), T_{i,-j}(z)] &= 1;
\end{aligned}$$

初等换位之间其他合理的交换公式可由以下恒等式推出 $T_{ij}(y) = T_{-j,-i}(-y)$;

$$\begin{aligned}
{}^{d(\varphi_0)}T_{ij}(y) &= T_{ij}(y), \\
{}^{d(\varphi_0)}T_i(u) &= T_i(\varphi_0 u), \\
{}^{d_i(r)}T_{ij}(y) &= T_{ij}(yr), \\
{}^{d_j(r)}T_{ij}(y) &= T_{ij}(yr^{-1}), \\
{}^{d_i(r)}T_i(u) &= T_i(ur^{-1}), \\
{}^{d_j(r)}T_i(u) &= T_i(u).
\end{aligned}$$

由于 $d_i(r) = d_{-i}(r^{-1})$，对角矩阵与初等换位之间的其他交换公式便可直接得出。

3 高斯分解

引理 3.1. 设 $(K, \mathfrak{m})$ 是一个局部环，且 $\varphi \in \mathrm{O}(M, q)$。

a. 则存在 $\exists \psi \in$ 初等正交群(M, q) 使得 $[\varphi \cdot \psi]_{-1,-1} \in K^\times$。

b. 假设 φ固定 e_{-2} 和 e_2。那么 ψ 可以选取为也固定e_{-2} 和 e_2。

证明。 由于 $\varphi \in$一般线性群(M)，$\mathrm{Im}(\varphi) = M$。特别地，$\mathrm{Im}(\pi_{-1} \circ \varphi) = K$，且理想 $([\varphi]_{-1,\,-2},\ [\varphi]_{-1,\,-1},\ [\varphi]_{-1,\,1},\ [\varphi]_{-1,\,2}) + [\varphi]_{-1,\,0}(M_0) \trianglelefteqslant K$ 是单位理想。

- 如果 $[\varphi]_{-1,-1} \in K^\times$，那么 $\psi :=$id 成立。

• 否则，如果 $\exists j \in \{\pm 2\}$: $[\varphi]_{-1,j} \in K^\times$，那么 $\psi := T_{-1,j}(1)$ 成立（这是情形 (a)，因为在情形 (b) 中可以保证 $[\varphi]_{-1,j} = 0$）。

• 否则，若存在 $\exists u \in M_0$ 使得$[\varphi]_{-1,0} \cdot u - [\varphi]_{-1,1} \cdot q(u)$ 可逆，则$\psi := T_{-1}(u)$ 可行。

• 否则我们得到，对任意 $u \in M_0$: $[\varphi]_{-1,0} \cdot u - [\varphi]_{-1,1} \cdot q(u) \in \mathfrak{m}$。然而，由这些项生成的理想是单位理想，因此 $\exists w \in M_0$: $[\varphi]_{-1,0} \cdot w, [\varphi]_{-1,1} \cdot q(w) \in K^\times$。代入 $u := w \cdot x$，得到恒等式$\forall x \in K$:

$$[\varphi]_{-1,0} \cdot w \cdot x - [\varphi]_{-1,1} \cdot q(w) \cdot x^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}.$$

这是一个关于 x的非零二次多项式，在 $K/\mathfrak{m}$上处处为零，因此 $K/\mathfrak{m}$ 是二元域。同时，$[\varphi]_{-1,1} \cdot q(w) \in K^\times$，所以 $q(w) \equiv 1$ (模 $\mathfrak{m}$)。我们来计算$T_1(w)^{T_{-1}(w)}$，矩阵中仅列出指标为 -1,0,1的行和列（其他元素均与单位矩阵中的对应元素相同）：

$$\left[{}^{T_{-1}(w)}T_1(w)\right] = \begin{pmatrix} 1 & & \\ w & 1 & \\ -q_0(w) & -w^* & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -w^* & -q(w) \\ & 1 & w \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ -w & 1 & \\ -q_0(w) & w^* & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1+q(w))^2 & -(1+q(w))w^* & -q(w) \\ w(q(w)^2+q(w)) & 1-q(w)ww^* & w(1-q(w)) \\ -q(w)^3 & (q(w)^2-q(w))w^* & (1-q(w))^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} & & 1 \\ & * & \\ 1 & & \end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{m}}.$$

因此 $\psi :=$ ${}^{w}T_1(w)^{T_{-1}()}$ 成立。 □

引理 3.2. 设 $\varphi \in \mathrm{O}(M,q)$ 将 e_{-2} 映到某个 $y \in K$下的 $e_{-2} + e_2 y$。那么 φ具有如下形式

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

证明。• 由于 φ 保持二次型，因此 $y = q(\varphi(e_{-2})) = q(e_{-2}) = 0$。

• 此外，$\varphi(e_{\pm 1})$ 与 $\varphi(e_{-2})$ 正交，因此$[\varphi]_{2,\pm 1} = 0$。

• 而且，$\forall u \in M_0$: $\varphi(u)$ 与 $\varphi(e_{-2})$ 正交，因此 $\forall u \in M_0 : [\varphi]_{2,0} \cdot u =$0。因此，$[\varphi]_{2,0} = 0 \in M^\vee$。

• 最后，$[\varphi]_{2,2} = b_q(\varphi(e_{-2})\ \varphi(e_2)) = b_q(e_{-2}, e_2) = 1$。 □

命题 3.1。设（K，$\mathfrak{m}$）为局部环。则O（M，q）=初等正交群（M，q）·D（M，q）。

证明。由交换公式，[初等正交群(M，q)，D(M，q)] ⩽初等正交群(M，q)。因此，只需通过在左侧和右侧分别乘以初等正交群(M，q)和D(M，q)中的元素，将 $\varphi \in$ O(M，q)化为单位元。

1. 根据位置 $(-2,-2)$ 而非 $(-1,-1)$ 的引理 3.1，我们可以假设：将 φ 右乘一个 EO(M,q) 中的元素后，有 $[\varphi]_{-2,-2} \in K^\times$。

2. 此外，我们可以假设：将 φ 右乘（比如说，方向无关紧要）$d_{-2}\left([\varphi]_{-2,-2}^{-1}\right)$ 后，有 $[\varphi]_{-2,-2}=1$:

$$[\varphi]=\begin{pmatrix}1&*&*&*&*\\*&*&*&*&*\\*&*&*&*&*\\*&*&*&*&*\\*&*&*&*&*\end{pmatrix}.$$

3. 此外，我们可以假设，将 φ 左乘来自初等正交群 $\mathrm{D}(M,\ q)\cdot\mathrm{D}(M,\ q)$ 的元素后，有 $[\varphi]_{i,\ -2}=0$ 对于 $i\in\{0,\pm1\}$:

$$[\varphi]=\begin{pmatrix}1&*&*&*&*\\&*&*&*&*\\&*&*&*&*\\&*&*&*&*\\*&*&*&*&*\end{pmatrix}.$$

为此，只需将 φ 替换为 $T_{-1,\ -2}(-[\varphi]_{-1,\ -2})\cdot T_{0,\ -2}(-[\varphi]_{0,\ -2})\cdot T_{1,\ -2}(-[\varphi]_{1,\ -2})\cdot\varphi$。

4. 现在由引理 3.2：$[\varphi]_{2,\ j}=\delta_{2,\ j}$ 对于 $j\in\{0,\pm1,\pm2\}$:

$$[\varphi]=\begin{pmatrix}1&*&*&*&*\\&*&*&*&*\\&*&*&*&*\\&*&*&*&*\\&&&&1\end{pmatrix}.$$

5. 与步骤 3 类似，但针对右列，我们还可以假设，将 φ 左乘来自初等正交群 $\mathrm{D}(M,\ q)\cdot\mathrm{D}(M,\ q)$ 的元素后，有 $[\varphi]_{i,\ 2}=0$ 对于 $i\in\{0,\pm1\}$:

$$[\varphi]=\begin{pmatrix}1&*&*&*&*\\&*&*&*&\\&*&*&*&\\&*&*&*&\\&&&&1\end{pmatrix}.$$

6. 现在，根据引理 3.2 的对称版本，$[\varphi]_{-2,j}=\delta_{-2,j}$ 对于 $j\in\{0,\pm1,\pm2\}$:

$$[\varphi]=\begin{pmatrix}1&&&&\\&*&*&*&\\&*&*&*&\\&*&*&*&\\&&&&1\end{pmatrix}$$

7. 与步骤 1.–6. 类似，但针对较小的方阵，我们可以假设非零值只出现在主对角线上:

$$[\varphi]=\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&*&&\\&&&1&\\&&&&1\end{pmatrix}$$

这意味着 $\varphi \in \mathrm{D}(M,q)$。 □

4 $\mathrm{EO}(M,q) \trianglelefteqslant \mathrm{O}(M,q)$ 的正规性

4.1 共轭的连续性

提案 4.1。 设 $S \subset K$ 为一个乘法系， $\varphi \in \mathrm{EO}(M_{S^{-1}K}, q_{S^{-1}K}) \cdot$ $\cdot \mathrm{D}(M_{S^{-1}K}, q_{S^{-1}K})$。还假设理想 $(q_0(w) \mid w \in M_0) \trianglelefteqslant K$ 是单位理想，并且模 M_0 是有限生成的。

那么 $\forall s \in S\colon \ \exists s' \in S\colon \mathrm{Im}(\mathrm{FO}(^{\varphi} \quad M\ q\ Ks' \quad \leqslant, ,)) \mathrm{Im}(\mathrm{FO}(M,q,Ks))$, 其中像取在 $\mathrm{EO}(M_{S^{-1}K}, q_{S^{-1}K})$ 内。

证明。 不失一般性， $\varphi = d_i(r)$， 或 $\varphi = d(\varphi_0)$， 或 $\varphi = T_i(u)$， 或$\varphi = T_{ij}(y)$。

- 设 $\varphi = d_i(r_1/t)$， 且 $\varphi^{-1} = d_i(r_2/t)$， 其中 r_1， $r_2 \in K$， $t \in S$。根据交换公式，显然 $s' = st$ 可行。$\sim$
- 设 $\varphi = d(\varphi_0)$。记 M_0 在 $S^{-1}M_0$中的像为 M_0 ，这是一个 $\sim \quad \sim \quad \sim K$-子模。取 $t \in S$ 使得 $\varphi_0(M_0 t) \leqslant M_0$ ——这样的元素存在，因为 M_0 是有限生成的。显然， $\varphi_0(M_0 st) = \varphi_0(M_0 t)$ $s \leqslant M_0 s$。根据交换公式，显然 $s' = st$ 可行。
- 设 $\varphi = T_{-j}(u/t)$， 其中 $u \in M_0, t \in S$。根据交换公式，显然（对于 $i \neq \pm j$）

$$^{\varphi}\mathrm{Im}(\langle T_{kl}(Kst^2), T_i(M_0 st), T_{-j}(M_0 st)\rangle) \leqslant \mathrm{Im}(\mathrm{FO}(M,q,Ks)).$$

还需指出， $T_j(v) = [T_i(v/st^2)\ T_{ij}(st^2)]T_{-j,\ i}(-q_0(v)/st^2)$， 因此 $s' = s^2t^3$ 成立。

- 设$\varphi = T_{i,\ -j}(y/t)$， 其中 $y \in K, t \in S$。由交换公式可知

$$^{\varphi}\mathrm{Im}(\langle T_{ij}(Ks), T_{i,-j}(Ks), T_{-i,-j}(Ks), T_k(M_0 st)\rangle) \leqslant \mathrm{Im}(\mathrm{FO}(M,q,Ks)).$$

注意， $T_{-j,\ i}(q_0(w)z) = T_j(-uz) \cdot [T_i(u)\ T_{ij}(z)]$。现在利用理想 $(q_0(w) \mid w \in M_0) = (1) \trianglelefteqslant K$ 这一事实，即 $\exists w_1, \ldots, w_N \in M_0, x_1, \ldots, x_N \in K\colon\ q_0(w_1) x_1 + \ldots + q_0(w_N)x_N = 1$。记

$$T_{-j,i}(z) = \prod_{k=1}^{N} T_{-j,i}(q_0(w_k)x_k z) = \prod_{k=1}^{N} T_j(-w_k x_k z/st)[T_i(w_k st), T_{ij}(x_k z/s^2t^2)].$$

显然， $s' = s^3t^2$ 成立。 □

4.2 局部化的单射性

引理 4.1。 设 R 是诺特环， M 是有限生成的 R-模，配有二次型 q， $S \subset R$ 是乘法系。断言 $\exists s \in S\colon$ 同态 正交群$(M,q,Rs) \to$正交群$(S^{-1}M, q_{S^{-1}R})$ 是单射。

证明。显然，正交群(M,q,Rs) =正交群(M,q)∩一般线性群(M,Rs)（且一般线性群(M,I) =核(一般线性群(M) →一般线性群(M/I))）。验证一般线性群(M,Rs) →一般线性群$(S^{-1}M)$对于 $s\gg 1$是单射。众所周知，核 $(M\to S^{-1}M)$ = $\bigcup(0_M\colon t)$，其中 $0_M\leqslant M$ 是零子模。$_{t\in S}$

由诺特性， $\exists s\in S$: 核$(M\to S^{-1}M)$ = $(0_M\colon s)$。验证$(0_M\colon s)\cap Ms=0_M$: 事实上，对于 $u\in(0_M\colon s)\cap Ms$: $\exists v\in M\colon u=vs$，所以$vs^2=0$，根据 s的定义，我们得到 $0=vs=u$。

现在令 $\varphi\in$核(一般线性群(M,Rs) →一般线性群$(S^{-1}M)$)。这意味着 $\forall u\in M\colon$ $\varphi(u)=u\in S^{-1}M$，同时 $\forall u\in M\colon \varphi(u)=u$(模 Ms)。根据上述内容， $\varphi(u)=u\in M$。 □

4.3 正规性的证明

定理 4.1. 设理想$(q_0(w)\mid w\in M_0)\trianglelefteqslant K$ 为单位理想，且 M_0是一个有限生成的 K-模。则初等正交群$(M,\ q)\trianglelefteqslant$正交群$(M,\ q)$。

证明。 设 $\varphi\in\mathrm{O}(M,q)$。固定 $y\in K,u\in M_0$。验证对所有 $i,j\in\{\pm1,\pm2\}$, $i\neq\pm j$，都有 $T_{ij}(y)^{\varphi}$， $T_i(\varphi\quad u\quad\in)$ 初等正交群(M,q)。

设 $M_0=\langle u_1,\ldots,u_m\rangle_{K^\circ}$ 设 $V=\{e_{-2},e_{-1},u_1,\ldots,u_m,e_1,e_2\}$。特别地， $M=\langle V\rangle_{K^\circ}$

不失一般性， K 是诺特的。也就是说，用以下 K 中的元素生成 $\mathbb{Z}$-代数$R\leqslant K$：

- 对每个 $v\in V\colon$ $\varphi(v)$ $\varphi^{-1}(v)$ $\in M$。将它们按生成系 V 分解，并将分解系数从 K 加入 R。
- 由于 $(q_0(w)\mid w\in M_0)$ =(1) $\trianglelefteqslant K$，存在 $w_1,\ldots,w_N\in M_0$,$x_1,\ldots,x_N\in K$，使得 $q_0(w_1)x_1+\ldots+q_0(w_N)x_N=1$。每个 w_i 都可用生成元 $u_1,\ldots,u_m$ 分解，系数取自 K；将这些系数加入 R。也将 $x_1,\ldots,x_N$ 加入 R。
- 将 u 在生成元$u_1,\ldots,u_m$中的分解系数加到 R 上，并且还要加上 y。
- 将数 $q_0(u_1)\ldots,q_0(u_m)$以及数$b_{q_0}(u_i,u_j)$加到 R上，其中$1\leqslant i<j\leqslant m$。

现在 R是诺特的，而 $M_R=\langle e_{-2},e_{-1},u_1,\ldots,u_m,e_1,e_2\rangle_R\leqslant M$是一个有限生成的 R-子模。限制 $q_R\colon M_R\times M_R\to R$仍然是一个二次型，实际上根据 R的构造，其取值落在 R 中。φ_R 在 M_R 上的限制仍然是模 M_R的一个自同构，并且由于 q_R 是 q的限制， φ 保持二次型，即 $\varphi_R\in\mathrm{O}(M_R,q_R)$。

一旦证明了$T_{ij}(y)^{\varphi_R}$， $T_i(\varphi_R\quad u\quad\in)$ 初等正交群(M_R,q_R)，关于 K的类似陈述便立即成立：例如，如果 $^{\varphi_R}T_i\ u\ =T_{k_1}(\ )\ (u_1)\cdot T_{i_1,j_1}(y_1)\cdot\ldots\cdot T_{k_n}(u_n)\cdot T_{i_n,j_n}(y_n)$，那么在 M中类似的分解也成立：等式两边都是 M的 K-线性自同态，其在生成元上的作用相同。从现在起，假设 $M=M_R,q=q_R$。

考虑理想 $I=\{z\in R\mid {}^{\varphi_R}T_{ij}(Rz),\ {}^{\varphi_R}T_i\ M_0z\ \leqslant(\ )$初等正交群$(M,\ q)\}$。

设 $\mathfrak{m}\trianglelefteqslant R$ 是极大理想。考虑 $S:=R\setminus\mathfrak{m}$。根据局部化单射性的引理 4.1， $\exists s\in S$: 正交群$(M,\ q,\ Rs)\hookrightarrow$正交群$(S^{-1}M,\ S^{-1}R)$。根据共轭的连续性的命题 4.1

$$\exists s'\in S\colon T_{ij}(Rs')^{\varphi_R},\quad T_i(M_0s')^{\varphi_R}\qquad\in\mathrm{Im}(\mathrm{FO}(M,\ q,\ Rs))\leqslant\mathrm{O}(S^{-1}M,\ q_{S^{-1}R})。$$

根据 $s,\ {}^{\varphi_R}T_{ij}(Rs'),\quad T_i(M_0s')^{\varphi_R}\quad\in \mathrm{FO}(M,\ q,\ Rs) \leqslant \mathrm{EO}(M,\ q)$ 的选取。因此，$s' \in I$，即 $\forall \mathfrak{m} \trianglelefteqslant R\colon\ I \nsubseteq \mathfrak{m}$。换言之，$I = (1)$。 □

5 相对化

本节中，我们定义关于可容许对的相对子群，并利用环和模的倍增，将初等子群的正规性定理推广到相对子群。这种方法的思想可追溯至 Stein [13]。

5.1 沿可容许对的环与模的加倍

设 $I \trianglelefteqslant K$ 是一个理想，$N_0 \leqslant M_0$ 是一个子模。假设这一对 $(N_0,\ I)$ 是可容许的，即满足以下条件

$$\begin{cases} M_0 I \leqslant N_0 \\ b_{q_0}(M_0, N_0) + q_0(N_0) \subset I \end{cases} \tag{B}$$

可以将环 K 沿理想 I 加倍，也可以将模 M_0 沿子模 N_0 加倍，定义为相应图表的拉回：

$$\begin{array}{ccc} K \times_I K & \xrightarrow{\pi_1} & K \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_2} & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ K & \xrightarrow{\pi} & K/I \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} M_0 \times_{N_0} M_0 & \xrightarrow{\pi_1} & M_0 \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_2} & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ M_0 & \xrightarrow{\pi} & M_0/N_0 \end{array}$$

容易看出

$$\begin{aligned} K \times_I K &= \{(x_1, x_2) \in K \times K \mid x_1 \equiv x_2 \pmod{I}\}, \\ M_0 \times_{N_0} M_0 &= \{(u_1, u_2) \in M_0 \times M_0 \mid u_1 \equiv u_2 \pmod{N_0}\}. \end{aligned}$$

定义对角嵌入 $\Delta\colon K \to K \times_I K$ 和 $\Delta\colon M_0 \to M_0 \times_{N_0} M_0$。

由于 $M_0 I \leqslant N_0$，集合 $M_0 \times_{N_0} M_0$ 具有一个 $K \times_I K$-模结构，其作用按分量进行。

由于 $b_{q_0}(M_0,\ N_0) + q_0(N_0) \subset I$，二次型 q_0 可通过公式 $q_0(m_1,\ m_2) = (q_0(m_1) q_0(m_2))$ 在 $M_0 \times_{N_0} M_0$ 上良好定义。

记 $N := e_{-2}I \oplus e_{-1}I \oplus N_0 \oplus e_1 I \oplus e_2 I$。显然，存在一个同构

$$M \times_N M \cong e_{-2}(K \times_I K) \oplus e_{-1}(K \times_I K) \oplus (M_0 \times_{N_0} M_0) \oplus e_1(K \times_I K) \oplus e_2(K \times_I K)。$$

将 $M \times_N M$ 上的二次型 q 仍记作同一个字母（$q(m_1,\ m_2) = (q(m_1)\ q(m_2))$）。

5.2 N_0 的不变性

从现在起，假设 $(M_0,\ q_0)$ 是一个奇秩为 n、带有半正则二次型的投射模。

例如，$(M_0,\ q_0)$ 可能是分裂的：$M_0 = f_{-\nu}K\oplus\ldots\oplus f_{-1}K\oplus f_0K\oplus f_1K\oplus\ldots\oplus f_\nu K$，其中 $n = 2\nu+1$，且 $q_0(x_{-\nu},\ \ldots\ldots,\ x_{-1},\ x_0,\ x_1,\ \ldots\ldots,\ x_\nu) = x_0^2 + x_{-1}x_1 + \ldots + x_{-\nu}x_\nu$。

在 [4, 1.2], Abe 提议使用可容许对的概念——环 K 中满足以下包含关系的一对理想 (J, I)

$$\begin{cases} I \subset J \\ 2J + J^{[2]} \subset I \end{cases}, \tag{A}$$

其中 $J^{[2]} = \langle \{x^2 \mid x \in J\} \rangle$。

在分裂情形下，可容许对（A）与（B）之间存在一一对应：对于一对理想 (J, I)，将其对应到子模 $N_0 := f_{-\nu}I \oplus \ldots f_{-1}I \oplus f_0J \oplus f_1I \oplus \ldots \oplus f_\nu I$ 以及同一个理想 I。事实证明，非分裂情形并无根本差异，以下命题即说明这一点。

命题 5.1。设 (M_0, q_0) 是一个奇秩 $n = 2\nu + 1$ 的投射模，且带有半正则二次型。

设 $(N_0,\ I)$ 是形如 (B) 的可容许对。令 $J := M_0^\vee N_0$。则 $(J,\ I)$ 是 ***Abe*** 容许对（形如 (A)），并且这种在 (A) 与 (B) 两类对之间的对应是一一对应。

证明。构造逆映射：对于一对 (A) $(J,\ I)$，将其对应到由子模 $N_0 := \{u \in M_0J \mid b_{q_0}(u,\ M_0) \subset I\}$ 和理想 I 组成的对。

所构造的映射以及关于 $(M_0,\ q_0)$ 的条件在局部化下保持不变。条件 (A) 和 (B) 是局部的。因此，为了检验这些映射定义良好且互为逆映射，我们可以假设环 K 是局部环。

根据命题 2.1，存在一个分解 $(M_0,\ q_0) = \boxplus_{i=1}^{\nu}(M_i', q_i') \boxplus (M_0',\ q_0')$，其中 $M_0' = \langle f_0 \rangle$。

固定一个类型为 (A) 或类型为 (B) 的可容许对，并据此构造另一个。在这两种情况下，都容易验证 $N_0 = M_0I + f_0J$，这保证了所构造的对是可容许的。这个等式还表明，这些映射确实互为逆映射。 □

推论 5.1. 在这些假设下，正交群 $(M_0, q_0)N_0 \subset N_0$。

证明。设 $\varphi \in$ 正交群 (M_0, q_0)。对 $(\varphi(N_0)\ I)$ 而言，该对也是可容许的（B），并且与对 (N_0, I) 对应于同一个对 (A) (J, I)。因此，$\varphi(N_0) = N_0$。 □

推论 5.2. 正交群 $(M, q)N \leqslant N$（其中，和之前一样，$M = e_{-2}K \oplus e_{-1}K \oplus M_0 \oplus e_1K \oplus e_2K$，$(N_0, I)$ 是一个可容许对，并且 $N = e_{-2}I \oplus e_{-1}I \oplus N_0 \oplus e_1I \oplus e_2I$）。

证明。该条件是局部环上的，因此我们可以假设 K 是一个局部环。

令 $\varphi \in \mathrm{O}(M, q)$。在局部环上，$\varphi$ 有高斯分解，因此只需验证 $(\mathrm{EO}(M, q) \cdot D(M, q))N \leqslant N$。这由条件 (B) 和推论 5.1 得出。 □

5.3 将 $\mathrm{O}(M \times_N M,\ q)$ 分解为半直积

令 $\varphi \in \mathrm{O}(M, q)$。根据推论 5.2，若 $(u_1, u_2) \in M \times_N M$，则 $(\varphi(u_1)\ \varphi(u_2)) \in M \times_N M$ 也成立。换言之，同态 $\Delta^{\mathrm{O}} : \mathrm{O}(M, q) \to \mathrm{O}(M \times_N M, q)$，$\varphi \mapsto (\varphi\pi_1, \varphi\pi_2)$ 是良定义的。

这个同态具有一个回缩 π_1^{O}：$\mathrm{O}(M \times_N M,\ q) \to \mathrm{O}(M,\ q)$，$\varphi \mapsto \pi_1\varphi\Delta$。将其绘制为图表：

$$\mathrm{O}(M,q) \xrightarrow{\Delta^{\mathrm{O}}} \mathrm{O}(M \times_N M, q) \xrightarrow{\pi_1^{\mathrm{O}}} \mathrm{O}(M,q), \qquad \mathrm{id}: \mathrm{O}(M,q) \to \mathrm{O}(M,q)$$

引理 5.1。对于所有 $y \in K$、$y' \in K \times_I K$ 和 $u \in M_0$、$u' \in M_0 \times_{N_0} M_0$：

$$\begin{aligned}
\Delta^{\mathrm{O}}(T_{ij}(y)) &= T_{ij}(\Delta(y)) \\
\Delta^{\mathrm{O}}(T_i(u)) &= T_i(\Delta(u)) \\
\pi_1^{\mathrm{O}}(T_{ij}(y')) &= T_{ij}(\pi_1(y')) \\
\pi_1^{\mathrm{O}}(T_i(u')) &= T_i(\pi_1(u'))
\end{aligned}$$

推论 5.3。Δ^{O} 和 π_1^{O} 的序列限制到初等正交群：

$$\mathrm{EO}(M,q) \xrightarrow{\Delta^{\mathrm{EO}}} \mathrm{EO}(M \times_N M, q) \xrightarrow{\pi_1^{\mathrm{EO}}} \mathrm{EO}(M,q), \qquad \mathrm{id}: \mathrm{EO}(M,q) \to \mathrm{EO}(M,q)$$

定义 $\mathrm{O}(M,\ q)$ 中的相对正交子群

$$\mathrm{O}(M, q, N_0, I) \coloneqq \{\varphi \in \mathrm{O}(M,q) \mid \forall u \in M : \varphi(u) \equiv u \pmod{N}\}$$

在 $N_0 = M_0 I$ 的情形下，这个子群当然与 $\mathrm{O}(M,\ q,\ I)$ 重合。

引理 5.2。嵌入 $\iota_2 :$ 正交群$(M, q, N_0, I) \to$ 核(π_1^{O})，$\varphi \mapsto (\pi_1, \varphi\pi_2)$ 是一个同构。

证明。存在一个逆同态 ι_2^{-1}: 核$(\pi_1^{\mathrm{O}}) \to$ 正交群(M, q, N_0, I)，$\psi \mapsto \pi_2\psi\Delta$。 □

定义正交群(M, q)中的相对初等子群

$$\mathrm{EO}(M, q, N_0, I) \coloneqq \langle T_{ij}(y), T_i(u) \mid y \in I, u \in N_0 \rangle^{\mathrm{EO}(M,q)}.$$

在 $N_0 = M_0 I$的情形下，这个子群当然与 $\mathrm{FO}(M, q, I)^{\mathrm{EO}(M,q)}$重合。

引理 5.3。初等正交群(M, q, N_0, I) 在 ι_2 下的像是 π_1^{EO} 的核。

证明。显然，ι_2(初等正交群(M, q, N_0, I)) $\leqslant$ 核(π_1^{EO})。验证满射性。

将 $\mathrm{EO}(M \times_N M, q)$ 的元素表示为有序对，并将其嵌入 $\mathrm{EO}(M, q) \times \mathrm{EO}(M, q)$。设 $(\mathrm{id}\ t) \in \mathrm{Ker}(\pi_1^{\mathrm{EO}})$。由于它属于 EO，因此可分解为乘积 $(\mathrm{id}\ t) = (s_1, t_1) \cdot \ldots \cdot (s_N, t_N)$，其中 $s_i, t_i \in \mathrm{EO}(M, q)$ 是具有相同根类型的初等换位，并且 $\forall m \in M$：$s_i(m) = t_i(m) \pmod{N}$。因此显然，$t_i s_i^{-1} \in \mathrm{EO}(M, q, N_0, I)$ 是某个初等换位，使得 $\forall m \in M$：$t_i s_i^{-1}(m) \equiv m \pmod{N}$，即一个层为 (N_0, I) 的酉变换。记作

$$(\mathrm{id}, t) = (\mathrm{id}, t_1 s_1^{-1})(\mathrm{id}, s_1 t_2 s_2^{-1} s_1^{-1}) \cdot \ldots \cdot (\mathrm{id}, s_1 \cdot \ldots \cdot s_{N-1} t_N s_N^{-1} \cdot \ldots \cdot s_1^{-1}),$$

这表明：确实，$t \in$ 初等正交群$(M,\ q,\ N_0,\ I)$。 □

5.4 标准交换子公式

引理 5.4。 假设 N_0 是有限生成的 K-模。

那么 $M_0\times_{N_0}M_0$ 是有限生成的 $K\times_I K$-模，而理想 $(q_0(w)\ |w\in M_0\times_{N_0}M_0)=(1)\trianglelefteqslant K\times_I K$。

证明。 存在一个 K-模同构 $M_0\times_{N_0}M_0\cong M_0\oplus N_0$，因此在上述假设下，$M_0\times_{N_0}M_0$ 是有限生成的 K-模，从而当然也是有限生成的 $K\times_I K$-模。

根据引理 2.1，存在 $w_1,\dots,w_N\in M_0$ 和 $x_1,\dots,x_N\in K$，使得 $\sum_{i=1}^N q_0(w_i)x_i=1$。在对角嵌入下，$\sum_{i=1}^N q_0(w_i,w_i)\cdot(x_i,x_i)=1\in K\times_I K$。 □

引理 5.5。 设 $U\subset N_0$ 和 $Y\subset I$ 是有限集。那么存在有限生成的 $\widetilde{N_0}\leqslant N_0$ 和 $\widetilde{I}\subset I$，使得 $U\subset\widetilde{N_0}$ 和 $Y\subset\widetilde{I}$仍然成立，并且 $(\widetilde{N_0},\widetilde{I})$ 仍是可容许对。

证明。 通过扩充 Y，我们可以假设 $\forall u,\ u_1,\ u_2\in U\colon\ q_0(u)\in Y$且$b_{q_0}(u_1,\ u_2)\in Y$。由于 $(N_0,\ I)$ 是可容许对，$Y\subset\widetilde{I}$仍成立。置 $\widetilde{I}:=\langle Y\rangle_K\trianglelefteqslant K$和 $\widetilde{N_0}:=\langle U\rangle_K+M_0\widetilde{I}\leqslant M_0$。容易验证$(\widetilde{N_0},\widetilde{I})$，此时 $(N_0,\ I)$ 是由有限生成子模和理想构成的可容许对（B）。 □

可容许对 (B) $(N_0,\ I)$，其中 N_0 是有限生成子模，I 是有限生成理想，称为有限生成。

推论 5.4。 设 $\varphi\in$初等正交群(M,q,N_0,I)。那么存在一个有限生成的可容许对$(\widetilde{N_0},\widetilde{I})$，使得 $\varphi\in$初等正交群(M,q,N_0,I)。

证明。写作

$$\varphi={}^{\psi_1}T_{ij}(y_1)\cdot{}^{\psi_1'}T_i(u_1)\cdot\ldots\cdot{}^{\psi_N}T_{ij}(y_N)\cdot{}^{\psi_N'}T_i(u_N)$$

其中 $y_i\in I$，$u_i\in N_0$，$\psi_i,\ \psi_i'\in$初等正交群$(M,\ q)$。将引理 5.5 应用于 $U=\{u_1,\dots,u_N\}$和 $Y:=\{y_1,\dots,y_N\}$。 □

推论 5.5。 设 $\varphi\in$正交群(M,q,N_0,I)。那么存在一个有限生成的可容许对$(\widetilde{N_0},\widetilde{I})$，使得 $\varphi\in$正交群(M,q,N_0,I)。

证明。设 $M_0=\langle u_1,\dots,u_m\rangle_K$。设 $V=\{e_{-2},e_{-1},u_1,\dots,u_m,e_1,e_2\}$。特别地，$M=\langle V\rangle_K$。

设 $w\in V$。它有一个分解 $w=e_{-2}\pi_{-2}(w)+e_{-1}\pi_{-1}(w)+\pi_0(w)+e_1\pi_1(w)+e_2\pi_2(w)$，其中 $\pi_i(w)\in I$对 $i\in\{\pm1,\pm2\}$ 成立，且 $\pi_0(w)\in N_0$。将引理 5.5 应用于 $U:=\{\pi_0(w)\mid w\in V\}$和 $Y=\{\pi_i(w)\mid i\in\{\pm1,\pm2\},w\in V\}$。

□

命题 5.2。 设 M_0 是带有半正则二次型的奇秩投射模。对于一个可容许对 (B) (N_0,I):

- $\mathrm{EO}(M,q,N_0,I)\trianglelefteqslant\mathrm{O}(M,q)$;
- $[\mathrm{EO}(M,q),\mathrm{O}(M,q,N_0,I)]\leqslant\mathrm{EO}(M,q,N_0,I)$.

证明。 我们将在元素上验证。根据引理 5.4 和 5.5，我们可以将对 (N_0, I) 归约为有限生成的情形。根据引理 5.4，定理 4.1 适用，因此

$$\mathrm{EO}(M \times_N M, q) \trianglelefteqslant \mathrm{O}(M \times_N M, q) \qquad (\circ)$$

- 设 $t \in \mathrm{EO}(M, q, N_0, I)$，$\varphi \in \mathrm{O}(M, q)$。用元素$\Delta\mathrm{O}(\varphi)$对 $\iota_2(t)$ 进行共轭，得到 $\iota_2(\mathrm{O}(M, q, N_0, I))$ 中的一个元素，因为其第一分量是恒等元。根据正规性（$\circ$），$\iota_2(t)^{\Delta}\mathrm{O}(\varphi)$ 也属于 $\mathrm{EO}(M \times_N M, q)$。由引理 5.3，$\iota_2(t)^{\Delta}\mathrm{O}(\varphi)$ 属于 $\iota_2(\mathrm{EO}(M, q, N_0, I))$。由于 $\mathrm{O}(M, q, N_0, I) \xrightarrow{\iota_2} \mathrm{O}(M \times_N M, q)$ 是单射的，$\iota_2(t)^{\Delta}\mathrm{O}(\varphi) = (\mathrm{id}\ \varphi t)$ 蕴含 $\varphi t \in \mathrm{EO}(M, q, N_0, I)$。
- 设 $s \in \mathrm{EO}(M, q)$ 和 $t \in \mathrm{O}(M, q, N_0, I)$。在 $\mathrm{O}(M \times_N M, q)$ 中：

$$(s, s)(\mathrm{id}, t)(s^{-1}, s^{-1})(\mathrm{id}, t^{-1}) = (\mathrm{id}, [s, t]).$$

显然，这属于 $\iota_2(\text{正交群}(M, q, N_0, I)) = \text{核}(\pi_1^{\mathrm{O}})$，并且根据正规性（$\circ$），它也属于 $\text{初等正交群}(M \times_N M, q)$，因此得到 $[s, t] \in \text{初等正交群}(M, q, N_0, I)$。□

6 初步计算

本节中，我们假设 M_0 是一个奇秩为 n、带有半正则二次型的投射模，(N_0, I) 是一个可容许对，并且 $N = e_{-2}I \oplus e_{-1}I \oplus N_0 \oplus e_1 I \oplus e_2 I$。

6.1 初等正交群是完美群及其相对类比

命题 6.1。设 M_0 是一个奇秩为 $n \geqslant 3$、带有半正则二次型的投射模，并且 (N_0, I) 是一个可容许对。则 $\text{初等正交群}(M, q)$ 是完美群。此外，$[\text{初等正交群}(M, q), \text{初等正交群}(M, q, N_0, I)] = \text{初等正交群}(M, q, N_0, I)$。

证明。 显然可由交换关系得出。我们立即证明相应的结果。记 $H := [\text{初等正交群}(M, q), \text{初等正交群}(M, q, N_0, I)]$。

设 $y \in I$。由于对 (N_0, I) 是可容许的，$M_0 I \leqslant N_0$。对于 $i \neq \pm j$：$[T_i(u)\ T_j(vy)] = T_{-j,\,i}(b_{q_0}(u, v)y)$，并且由引理 2.2 可知，$(b_{q_0}(u, v) \mid u, v \in M_0) = (1) \trianglelefteqslant K$，因此有 $T_{-j,\,i}(y) \in H$。

此外，$\forall u \in M_0$：$T_j(u) = [T_i(u)\ T_{ij}(1)] \cdot T_{-j,\,i}(-q_0(u)y) \in H$。 □

6.2 计算输运子

我们计算 $\mathrm{Trans}^{\mathrm{O}(M,q)}(\text{初等正交群}(M, q), \text{正交群}(M, q, N_0, I)) = \{\varphi \in \text{正交群}(M, q) \mid [\varphi, \text{初等正交群}(M, q)] \leqslant \text{正交群}(M, q, N_0, I)\}$。显然，$\text{正交群}(M, q, N_0, I) \leqslant \mathrm{Trans}^{\mathrm{O}(M,q)}(\text{初等正交群}(M, q), \text{正交群}(M, q, N_0, I))$。

引理 6.1. K-模 M/N 具有 K/I-模的结构，且形式 q 在 M/N上诱导出一个形式，并且 $q_{M/N}$ 的 *Witt* 指数仍至少为 2。

此外，$\rho_N : \mathrm{O}(M, q)/\mathrm{O}(M, q, N_0, I) \to \mathrm{O}(M/N, q_{M/N})$ 是一个嵌入。

证明。 由于对 (N_0, I) 是可容许的，M/N 是一个 K/I-模，而 $q : M \to K$ 可经由 N分解，得到 $q_{M/N} : M/N \to K/I$。直和项 $K^{\oplus 4}$ 分解为直和项 $(K/I)^{\oplus 4}$，其上的形式是分裂的。

由于 (N_0, I) 是可容许的，根据推论 5.2，每个 $\varphi \in \text{正交群}(M, q)$ 都经由该商分解，从而得到 $\rho_N(\varphi) \in \text{正交群}(M/N, q_{M/N})$。最后，根据后者的定义，$\text{核}(\rho_N) = \text{正交群}(M, q, N_0, I)$。

□

将传递子除以正交群(M,q,N_0,I)，即应用 ρ_N: 正交群(M,q) →正交群$(M/N,q_{M/N})$，得到

$$\text{Trans}^{\mathrm{O}(M,q)}(\text{初等正交群}(M,q),\text{正交群}(M,q,N_0,I)) = \rho_N^{-1}(\{\varphi\in\text{正交群}(M/N,q_{M/N}) \mid [\varphi,\text{初等正交群}(M/N,q_{M/N})]=1\})$$

引理 6.2. 假设不存在射影性条件 M_0 或对 q_0的半正则性条件。即便如此，$\{\varphi\in$正交群$(M,q) \mid [\varphi,$初等正交群$(M,q)]=1\}=$正交群的中心$(M,q))=\mu_2(K)$ ·恒等映射。

证明。 </style>这些包含关系 $\geqslant$ 显然，我们证明

$$\{\varphi\in \mathrm{O}(M,q)\mid[\varphi,\mathrm{EO}(M,q)]=1\}\leqslant\mu_2(K)\cdot\mathrm{id}\,.$$

令 $[\varphi,$初等正交群$(M,q)]=1$。由于 $[\varphi,T_{ij}(1)]=1$，且 $[\varphi,$恒等映射$]=1$，在 End(M) 中我们有等式

$$\varphi(e_{ij}-e_{-j,-i})=(e_{ij}-e_{-j,-i})\varphi.$$

例如，对于 $i=1,j=2$，等式变为

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & -[\varphi]_{-2,-2} & & & [\varphi]_{-2,1}\\ \hline
 & -[\varphi]_{-1,-2} & & & [\varphi]_{-1,1}\\ \hline
 & -[\varphi]_{0,-2} & & & [\varphi]_{0,1}\\ \hline
 & -[\varphi]_{1,\ -2} & & & [\varphi]_{1,\ 1}\\ \hline
 & -[\varphi]_{2,\ -2} & & & [\varphi]_{2,\ 1}
\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
-[\varphi]_{-1,\ -2} & -[\varphi]_{-1,\ -1} & -[\varphi]_{-1,0} & -[\varphi]_{-1,1} & -[\varphi]_{-1,2}\\ \hline
 & & & & \\ \hline
 & & & & \\ \hline
[\varphi]_{2,-2} & [\varphi]_{2,-1} & [\varphi]_{2,0} & [\varphi]_{2\ 1} & [\varphi]_{2\ 2}\\ \hline
 & & & &
\end{array}\right).$$

由此可得等式

$$\begin{aligned}
[\varphi]_{-j,-j}&=[\varphi]_{-i,-i},\\
-[\varphi]_{-j,+i}&=[\varphi]_{-i,+j},\\
-[\varphi]_{+i,-j}&=[\varphi]_{+j,-i},\\
[\varphi]_{+i,+i}&=[\varphi]_{+j,+j},\\
\text{and all other }[\varphi]_{-i,*}&=[\varphi]_{j,*}=[\varphi]_{*,-j}=[\varphi]_{*,i}=0.
\end{aligned}$$

代入各种对 i、j，可得 $[\varphi]$ 具有如下形式

$$\underset{i=1,j=2}{\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
r_1 & * & * & y_1 & *\\ \hline
 & r_1 & & & -y_1\\ \hline
 & * & * & & *\\ \hline
y_2 & * & * & r_2 & *\\ \hline
 & -y_2 & & & r_2
\end{array}\right)};\ \underset{i=-1,j=-2}{\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
r_3 & & & y_3 & \\ \hline
* & r_3 & * & * & -y_3\\ \hline
* & & * & * & \\ \hline
y_4 & & & r_4 & \\ \hline
* & -y_4 & * & * & r_4
\end{array}\right)};\ \underset{i=1,j=-2}{\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
r_5 & y_5 & & & \\ \hline
y_6 & r_6 & & & \\ \hline
* & * & * & & \\ \hline
* & * & * & r_5 & -y_5\\ \hline
* & * & * & -y_6 & r_6
\end{array}\right)};\ \underset{i=-1,j=2}{\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
r_7 & y_7 & * & * & *\\ \hline
y_8 & r_8 & * & * & *\\ \hline
 & & * & * & *\\ \hline
 & & & r_7 & -y_7\\ \hline
 & & & -y_8 & r_8
\end{array}\right)}.$$

因此，

$$[\varphi]=\begin{pmatrix}r & & & & \\ & r & & & \\ & & \varphi_0 & & \\ & & & r & \\ & & & & r\end{pmatrix}.$$

由于 φ 保持二次型不变，因此 $r^2=1$。

由于标量位于 O(M,q) 的中心，因此 $r^{-1}\varphi$ 也与 EO(M,q) 交换。最后，$T_i(u)^{\,d}{}_{(r^{-1}\varphi_0)}=T_i(r^{-1}\varphi_0(u))$，因此 $r^{-1}\varphi_0=\mathrm{id}$，所以 $\varphi=r\mathrm{id}$。 □

命题 6.2. 设 M_0 是一个具有半正则二次型的奇秩投射模，且 (N_0, I) 是一个可容许对。那么

$$\begin{aligned}\rho_N^{-1}(\mu_2(K/I)\cdot\mathrm{id}) &= \mathrm{Trans}_{\mathrm{O}(M,q)}(\mathrm{EO}(M,q), \mathrm{O}(M,q,N_0,I)),\\ &= \mathrm{Trans}_{\mathrm{O}(M,q)}(\mathrm{O}(M,q), \mathrm{O}(M,q,N_0,I)),\\ &= \mathrm{Trans}_{\mathrm{O}(M,q)}(\mathrm{EO}(M,q), \mathrm{EO}(M,q,N_0,I)).\end{aligned}$$

若 $N_0 = M_0 I$，那么我们可以进一步说明：

$$\rho_N^{-1}(\mu_2(K/I)\cdot\mathrm{id}) = \mu_2(K)\times \mathrm{SO}(M,q,N_0,I).$$

证明。将引理 6.2 应用于商模 M/N 和商环 K/I，即可得到第一个传递子的等式。第二个传递子是第一个传递子的子群，而第一个传递子的显式表示表明二者相等。

现在验证第一个和第三个传递子相等。设 $T_N :=$Trans$^{\mathrm{O}(M,q)}$(初等正交群(M,q), 正交群 (M,q,N_0,I))。由命题 5.2 和 6.1 以及 Hall-Witt 恒等式，结论立即成立：

$$[T_N,[\mathrm{EO}(M,q),\mathrm{EO}(M,q)]] \leqslant [[T_N,\mathrm{EO}(M,q)],\mathrm{EO}(M,q)] \leqslant \mathrm{EO}(M,q,N_0,I)$$

若 $N_0 = M_0 I$，则 $N = MI$，且商模 M/MI 是一个投射 K/I 模。在此情形下，ρ_N 限制为一个同态 SO(M,q) $\to$SO$(M/MI, q_{K/I})$。因此，若 $\varphi\psi \in \rho_N^{-1}($ $\mu_2(K/I)\,\mathrm{id}_{M/N})$，其中 $\varphi \in \mu_2(K)\,\mathrm{id}_M$ 且 $\psi \in$SO(M,q)，则 $\psi \in$核(ρ_N)。 □

此外还有传递子 Trans$^{\mathrm{O}(M,q)}$(O$(M,\ q)$, EO$(M,\ q,\ N_0,\ I)$)，但其显式表示尚不清楚。不过我们不需要它。

7 标准分类的证明

在本节中，我们假设 M_0 是一个奇秩为 $n \geqslant 3$ 的投射模，带有半正则二次型，$(N_0,\ I)$ 是一个可容许对，并且 $N = e_{-2}I \oplus e_{-1}I \oplus N_0 \oplus e_1 I \oplus e_2 I$。

7.1 构造可容许对

引理 7.1。设 $H \leqslant \mathrm{O}(M,q)$ 是一个 初等正交群-正规子群。对于 $i \in \{\pm 1, \pm 2\}$，定义 $N_0^{(i)} := \{u \in M_0 \mid T_i(u) \in H\}$；对于 i、$j \in \{\pm 1, \pm 2\}$、$i \neq \pm j$，定义 $I^{(ij)} := \{y \in K \mid T_{ij}(y) \in H\}$。

于是，$N_0 := N_0^{(i)}$ 不依赖于 i 的选择，$I := I^{(ij)}$ 不依赖于 i 和 j 的选择，并且 (N_0, I) 是一个可容许对。

证明。显然，$N_0^{(i)} \subset M_0$ 和 $I^{(ij)} \subset K$ 是加法子群。

$_N$由引理 2.2，存在 $u_k, v_k \in M_0, x_k \in K$，使得 $\sum b_{q_0}(u_k, v_k)x_k = _{k=1}1$。令 $y \in I^{(ij)}$ 和 $z \in K$。于是

$$\prod_{k=1}^{N}[T_i(u_k + v_k x_k z), T_{ij}(y)] \cdot [T_i(-u_k), T_{ij}(y)] \cdot [T_i(-v_k x_k z), T_{ij}(y)] =$$
$$= \prod_{k=1}^{N} T_{-j,i}(b_{q_0}(u_k, v_k x_k z)y) = T_{-j,i}(zy) \in H.$$

计算表明，$K \cdot I^{(ij)} \subset I^{(-j,i)} = I^{(-i,j)}$，以及另外三个类似的等式，推出 $I^{(ij)}$ 是 K 中一个与指标选择无关的理想。

注意，$P_{ij} := T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)$ 是一个单项式矩阵。例如，对于 $i = 1,\ j = 2$:

$$[P_{12}] = \begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

设 $u \in N_0^{(i)}$、$v \in M_0$、$y \in I$、$z \in K$。

- $P_{ij}^{-1}T_i(u)P_{ij} = T_j(u) \in H$，所以 $N_{(i)\,0}$ 与指标的选择无关。
- $[T_i(u)\ T_{ij}(1)] = T_j(u)T_{-j,\ i}(q_0(u)) \in H$，所以 $q_0(N_0) \subset I$。
- $[T_i(u)\ T_{ij}(z)] = T_j(uz)T_{-j,\ i}(q_0(u)z) \in H$，所以 N_0 是一个子模。
- $[T_i(u)\ T_j(v)] = T_{-j,\ i}(b_{q_0}(u,\ v)) \in H$，因此 $b_{q_0}(N_0,\ M_0) \subset I$。
- $[T_i(v)\ T_{ij}(y)] = T_j(vy)T_{-j,\ i}(q_0(v)y) \in H$，因此 $M_0 I \leqslant N_0$。 □

7.2 提取换位

引理 7.2. 设 G 是一个群，$x, y, z \in G$。则 $^x[y, x^{-1}z] = [x, y] \cdot [y, z]$。

引理 7.3. 设 G 是一个群，$x, y, z \in G$。则 $[xy, z] = {}^x[y, z] \cdot [x, z]$。特别地，若 $[y, z] = 1$，则 $[xy, z] = [x, z]$。

引理 7.4. 设 $\varphi \in$ 正交群(M, q) 具有如下形式的矩阵 $[\varphi] = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ * & 1 & & & \\ * & & 1 & & \\ * & & & 1 & \\ * & * & * & * & 1 \end{pmatrix}$。

Then $\varphi = T_{-1,-2}([\varphi]_{-1,-2})T_{-2}([\varphi]_{0,-2})T_{1,-2}([\varphi]_{1,2})$.

证明。令 $\psi := T_{-1,\ -2}([\varphi]_{-1,\ -2})T_{-2}([\varphi]_{0,\ -2})T_{1,\ -2}([\varphi]_{1,\ 2})$。

Then $[\psi^{-1}\varphi] = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ * & * & * & * & 1 \end{pmatrix}$, and by Lemma 3.2, we get $\psi^{-1}\varphi = \mathrm{id}$. □

从现在起，假设 $H \leqslant \mathrm{O}(M,\ q)$ 是一个 EO-正规子群，并且 $\mathrm{EO}(M,\ q,\ N_0,\ I) \leqslant H$。

下面引理的证明仿照了 [11, 5.22.i]中的计算。不幸的是，在非分裂情形下，这些计算变得稍长了一些。

引理 7.5. 设 $\varphi \in H$ 满足 $[\varphi]_{1,\ 2} \notin I$。则 H 包含一个初等平移 $T_{ij}(z')$，其中 $z' \notin I$。

证明。设 $u \in M_0$ 为某个待定的向量。令

$$\tau \coloneqq T_2(u[\varphi]_{1,\ 2})T_1(-u[\varphi]_{2,\ 2})T_{-1,\ 2}(-u^*[\varphi]_{0,\ 2} + [\varphi]_{1,\ 2}[\varphi]_{2,\ 2}q_0(u))$$

$$[\tau] = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & & -[\varphi]_{1,2}u^* & u^*[\varphi]_{0,2} + [\varphi]_{1,2}[\varphi]_{2,2}q_0(u) & -[\varphi]^2_{1,\ 2}q_0(u) \\ \hline & 1 & [\varphi]_{2,2}u^* & -[\varphi]^2_{2,2}q_0(u) & -u^*[\varphi]_{0,2} + [\varphi]_{1,2}[\varphi]_{2,2}q_0(u) \\ \hline & & 1 & -u[\varphi]_{2,\ 2} & u[\varphi]_{1,\ 2} \\ \hline & & & 1 & \\ \hline & & & & 1 \end{array}\right)$$

直接计算可得 $[\tau\varphi]_{*,\ 2} = [\varphi]_{*,\ 2}$。令 $\xi \coloneqq \varphi^{-1}\tau\varphi$，显然 $[\xi]_{*,\ 2} = e_2$。根据引理 3.2，将 e_2 替换为 e_{-2}，可得 $[\xi] = \begin{pmatrix} & & & & \\ * & * & * & * & \\ * & * & * & * & \\ * & * & * & * & \\ * & * & * & * & 1 \end{pmatrix}$。根据同一引理 3.2，矩阵 ξ^{-1} 也具有这种形式。

现在令

$$\zeta \coloneqq {}^{\tau}[T_{2,1}(1), [\tau^{-1}, \varphi^{-1}]] = {}^{\tau}[T_{2,1}(1), \tau^{-1}\xi] \underset{7.2}{=} [\tau, T_{2,1}(1)] \cdot [T_{2,1}(1), \xi]$$

记 $z \coloneqq [\varphi]_{1,\ 2}$，并计算第一个交换子因子：

$$[\tau, T_{2,1}(1)] \underset{7.3}{=} [T_2(uz), T_{2,1}(1)] = T_1(uz)T_{-1,2}(q_0(u)z^2).$$

为了计算第二个交换子因子，注意到

$$\left[{}^{T_{2,1}(1)}\xi\right] = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & & & & \\ \hline * & [\xi]_{-1,-1} & [\xi]_{-1,0} & [\xi]_{-1,1} & \\ * & [\xi]_{0,-1} & [\xi]_{0,0} & [\xi]_{0,1} & \\ * & [\xi]_{1,-1} & [\xi]_{1,0} & [\xi]_{1,1} & \\ \hline * & * & * & * & 1 \end{array}\right),$$

因此，交换子 $[T_{2,1}(1)\ \xi]$ 具有形式 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ * & 1 & & \\ * & & 1 & \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix}$；根据引理 7.4，$[T_{2,1}(1)\ \xi]$ $=$ $T_{-1,\ -2}(*)T_{-2}(*)T_{1,\ -2}(*)$。令 $v \in M_0$ 为另一个向量，也将在稍后选取。对易

$$\begin{aligned} \eta \coloneqq [\zeta, T_{-2}(v)] &\underset{7.3}{=} [T_1(uz)T_{-1,2}(q_0(u)z^2), T_{-2}(v)] \underset{7.3}{=} \\ &= {}^{T_1(uz)}[T_{-1,2}(q_0(u)z^2), T_{-2}(v)] \cdot [T_1(uz), T_{-2}(v)] = \\ &= T_{2,1}(-q_0(u)q_0(v)z^2)T_1(vq_0(u)z^2) \cdot T_{2,1}(b_{q_0}(u, v)z). \end{aligned}$$

- 若 $z^2 \in I$，则只需选择 $u,\ v \in M_0$，使得 $b_{q_0}(u,\ v)z \notin I$（根据引理 2.2，这是可能的）。于是 $\eta \equiv T_{2,\ 1}(b_{q_0}(u,\ v)z)$（模 EO$(M,\ q,\ N_0,\ I)$）。
- 若 $z^2 \notin I$，则我们需要选择 $u,\ v,\ w \in M_0$ 使得 $b_{q_0}(w,\ v)q_0(u)z^2 \notin I$（根据引理 2.1 和 2.2，这是可能的）。接下来

$$[T_{-2}(w), \eta] = T_{-1,-2}(b_{q_0}(w, v)q_0(u)z^2) \qquad \square$$

引理 7.6. 设 $\varphi \in H$，且对于某些互不相同的 $i,\ j \in \{\pm 1, \pm 2\}$：$[\varphi]_{ij} \notin I$。那么 H 包含一个形如 $T_{i'j'}(z)$ 的初等平移，其中 $z \notin I$。

证明. 若 $i \neq -j$，则除指标变换外，这就是引理 7.5。

若 $i = -j$，则我们可以选取 $k \in \{\pm 1, \pm 2\}$，使得 $k \neq \pm i$。然后，位于位置 $(k, -i)$ 的 $T_{k\ i\ 1}\ \varphi_{\cdot\ ()}$ 具有 $[\varphi]_{i,\ -i} + [\varphi]_{k,\ -i}$。显然，$\left[[\varphi]_{i\ ,\ -i} + [\varphi]_{k,\ -i} \notin I_{,} \right.$，根据具体情形，对 $T_{k\ i\ 1}\ \varphi_{\cdot\ ()}$ 或 φ 应用引理 7.5。 □

根据上下文，上划线表示环元素K 在商环 K/I 中的像、模元素 M_0 在商模M_0/N_0中的像，或 O(M_0，q_0) 中元素在（不一定是满射的）同态 O(M_0，q_0) $\to$ O(M_0/N_0，$(q_0)^{M_0/N_0}$) 下的像

引理 7.7。 设对每个 $\varphi \in H$，对所有互异的 i、$j \in \{\pm 1, \pm 2\}$： $[\varphi]_{ij} \in I$。那么 φ 在 $\mathrm{O}(M/N, q_{M/N})$ 中的像，记为 $\overline{\varphi}$，具有如下形式

$$[\overline{\varphi}] = \begin{pmatrix} \overline{r} & & & & \\ & \overline{r} & & & \\ \overline{v}_{-2} & \overline{v}_{-1} & \overline{\varphi}_0 & \overline{v}_1 & \overline{v}_2 \\ & & & \overline{r} & \\ & & & & \overline{r} \end{pmatrix},$$

其中 $\overline{r} \in \mu_2(K/I)$、 $\overline{v}_j \in M_0/N_0$，且 $\overline{v}_j^* = 0$ 与 $(q_0)^{M/N}(\overline{v}_j) = 0$。

证明。 只需假设 $I = 0$ 和 $N_0 = 0$，因为我们可以将 H 同态映射到 O(M/N, $q_{M/N}$)，且其仍然是 EO-正规。

根据假设， $\varphi \in$ O(M, q) 具有如下形式

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} r_{-2} & & \theta_{-2} & & \\ & r_{-1} & \theta_{-1} & & \\ v_{-2} & v_{-1} & \varphi_0 & v_1 & v_2 \\ & & \theta_1 & r_1 & \\ & & \theta_2 & & r_2 \end{pmatrix},$$

其中 $r_i \in K$、 $v_j \in M_0$、 $\theta_i \in M_0^\vee$。

设 $w \in M_0$ 是任意向量，并令 $i, j \in \{\pm 1, \pm 2\}$ 满足 $i \neq \pm j$。

- 注意到 $\left[T_{i\ w}\ \varphi_{()} \right]_{-i,\ j} = -w^* v_j$。但根据假设，这等于 0，因此所有 $v_j^* = 0 \in M_0^\vee$。
- 注意到 $\left[T_{ij\ 1}\ \varphi_{()} \right]_{ij} = r_j - r_i$，因此 $r_i = r_j$。将 $-i$ 代入 i，可得所有 r_i 彼此相等，且都等于某个 $r \in K$。由于 φ保持二次型不变， $0 = q(\varphi(e_i)) = q_0(v_i)$，因此 $r^2 = 1$。
- 通常， $\varphi(w) = e_{-2}\theta_{-2}(w) + e_{-1}\theta_{-1}(w) + \varphi_0(w) + e_1\theta_1(w) + e_2\theta_2(w)$。但是 $\varphi(w)$与所有 $\varphi(e_i)$正交，因此 $0 = r_i\theta_{-i}(w) + \varphi_0(v_i)^*(\varphi_0(w)) = r_i\theta_{-i}(w)$，因此 $\theta_{-i} = 0$。

□

引理 7.8。 **</style}设对每个，任意两个不同的 ,均满足：。若存在 和 使得，** $j \notin N_0$，则也存在一个形如 $T_i(v) \in H$的酉变换，其中 $v \notin N_0$。

证明。根据引理 7.7，所有 $[\varphi]_{0,i}$ 都满足 $b_{q_0}([\varphi]_{0,i}, M_0) \in I$ 且 $q_0([\varphi]_{0,i}) \in I$。因此，对于某些 v_j, r, φ_0，我们可以写出正交群$(M/N, q_{M/N})$中的等式：

$$\overline{\varphi} = \underbrace{T_{-2}(\overline{v}_{-2}\overline{r})T_{-1}(\overline{v}_{-1}\overline{r})T_1(\overline{v}_1\overline{r})T_2(\overline{v}_2\overline{r})}_{\tau} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \overline{r} & & & \\ & \overline{r} & & \\ & & \overline{\varphi}_0 & \\ & & & \overline{r} \\ & & & & \overline{r} \end{pmatrix}}_{d}.$$

由此表示可清楚看出

$$[\overline{\varphi}, T_{ji}(1)] \underset{7.3}{=} [\tau, T_{ji}(1)] = T_i(\overline{v}_j\overline{r})T_{-j}(\overline{v}_{-i}\overline{r}) \in \mathrm{O}(M/N, q_{M/N}).$$

将此等式提升到 $\mathrm{O}(M, q)$ 中，得到

$$[\varphi, T_{ji}(1)] \equiv T_i(v_j r)T_{-j}(v_{-i}r) \pmod{\mathrm{O}(M, q, N_0, I)},$$

并将其与 $T_{i,-j}(r)$ 对易：

$$[[\varphi, T_{ji}(1)], T_{i,-j}(r)] \equiv T_{-j}(v_j r^2) \equiv T_{-j}(v_j);$$

这里的等式模 $[\mathrm{O}(M, q, N_0, I), \mathrm{EO}(M, q)] = \mathrm{EO}(M, q, N_0, I)$ 成立。由于 $\mathrm{EO}(M, q, N_0, I) \leqslant H$，我们有 $T_{-j}(v_j) \in H$。 □

引理 7.9。设对每个 $\varphi \in H$，以及所有互不相同的 $i, j \in \{\pm 1, \pm 2\}$，都有：$[\varphi]_{ij} \in I$以及$[\varphi]_{0,j} \in N_0$。则有 $\varphi \in \mathrm{Trans}^{\mathrm{O}(M,q)}(\mathrm{EO}(M, q), \mathrm{O}(M, q, N_0, I))$。

证明。将 H同态映射到 $\mathrm{O}(M/N, q_{M/N})$。在此过程中，它仍将保持 EO-正规；根据 6.2，我们需要确保 H 由标量变换组成。

令 $\varphi \in H$ 和 $w \in M_0$ 为任意元素。由引理 7.7 和 7.8，$\varphi = \begin{pmatrix} r & & & \\ & r & & \\ & & \varphi_0 & \\ & & & r \\ & & & & r \end{pmatrix}$。

计算 $\left[T_j\ w\ \varphi()\right]_{0,\ j} = wr - \varphi_0(w)$；根据假设，这等于$0 \in M_0/N_0$。换言之，$\varphi_0 = r\mathrm{id}$ 属于 $\mathrm{End}(M_0/N_0)$。 □

定理 7.1. 设 $(M_0,\ q_0)$ 是一个奇秩 $n \geqslant 3$ 投射模，并带有一个半正则二次型。设 $H \leqslant \mathrm{O}(M,\ q)$ 是一个子群。

那么，H 是 EO-正规，当且仅当存在一个可容许对 (B) $(N_0,\ I)$，使得

$$\mathrm{EO}(M, q, N_0, I) \leqslant H \leqslant \mathrm{Trans}_{\mathrm{O}(M,q)}(\mathrm{EO}(M, q), \mathrm{O}(M, q, N_0, I)).$$

此外，若 H 是 EO-正规，则这样的对 $(N_0,\ I)$ 是唯一的。

证明. 记 $T_N := \mathrm{Trans}^{\mathrm{O}(M,q)}(\mathrm{EO}(M,\ q),\ \mathrm{O}(M,\ q,\ N_0,\ I))$.

任意一个包含于 $\mathrm{EO}(M,\ q,\ N_0,\ I)$ 与 T_N 之间的 $H \leqslant \mathrm{O}(M,\ q)$ 都是 EO-正规，因为根据命题 6.2 $[H, \mathrm{EO}(M,\ q)] \leqslant \mathrm{EO}(M,\ q,\ N_0,\ I) \leqslant H$。

设 $N_0 := \{u \in M_0 \mid \exists i \in \{\pm 1, \pm 2\} \colon T_i(u) \in H\}$ 且 $I := \{y \in K \mid \exists i, j \in \{\pm 1, \pm 2\} \colon T_{ij}(y) \in H\}$。根据引理 7.1，$(N_0,\ I)$ 是一个可容许对，且 $\mathrm{EO}(M,\ q,\ N_0,\ I) \leqslant H$。照例，记 $N := e_{-2}I \oplus e_{-1}I \oplus N_0 \oplus e_1 I \oplus e_2 I$。

现在我们证明 $H \leqslant T_N$。根据引理 7.6，$\forall \varphi \in H$，对所有互异的$i,\ j \in \{\pm 1, \pm 2\}$：$[\varphi]_{ij} \in I$。因此引理 7.8 适用，且$[\varphi]_{0,\ j} \in N_0$。于是引理 7.9 适用，且 $\varphi \in T_N$。

唯一性由以下理由得出：如果 $\mathrm{EO}(M,\ q,\ N_0,\ I) \leqslant H \leqslant T_N$，那么所有层为 $(N_0,\ I)$ 的初等换位都包含在 H 中，而传递子 6.2 的显式形式表明，参数为 $u \notin N_0$ 或 $y \notin I$ 的初等换位不包含在 H 中。 □

致谢

我要感谢 Egor Voronetsky 在整个研究工作中给予我的学术指导和帮助。

参考文献

[1] J. S. Wilson，一般线性群的正规与次正规结构，剑桥哲学学会数学学报 71 (1972)，163–177。[2] I. Golubchik，结合环上的全线性群，数学科学进展，28:3(171) (1973)，179–180。[3] L. N. Vaserstein，交换环上切瓦莱群的正规子群，东北数学杂志 38 (1986)，219–230。[4] E. Abe，交换环上切瓦莱群的正规子群，当代数学 83 (1989)，1–17[5] D. L. Costa，G. E. Keller，Radix redux：辛群的正规子群，纯粹与应用数学杂志 427:1 (1991)，51–105。[6] D. L. Costa，G. E. Keller，关于 $G_2(A)$ 的正规子群，美国数学会汇刊 351:12 (1999)，5051–5088。[7] D. L. Costa，G. E. Keller，SL(2, A) 的 E(2, A) 截面，数学年刊 (2) 134:1 (1991)，159–188。[8] V. Petrov，A. Stavrova，各向同性约化群的初等子群，代数与分析，20:4 (2008)，160–188。[9] V. Petrov，A. Stavrova，各向同性约化群的初等子群，圣彼得堡数学杂志 20:4 (2009)，625–644。[10] A. Bak，R. Preusser，奇数维酉群的 E-正规结构，纯粹与应用代数杂志，222:9 (2018)，2823–2880。[11] R. Preusser，$O_{2n+1}(R)$ 和 $U_{2n+1}(R, \Delta)$ 的夹心分类再探，群论杂志，21:4 (2018)，539–571。[12] M.A. Knus。《环上的二次型与厄米型》。数学科学基础丛书。施普林格·柏林·海德堡，2012。[13] Michael R. Stein。环上的相对化函子与代数K理论。代数学杂志，19(1):140–152，1971年9月。