arXiv:2601.00766v1 [math.CO] 2 Jan 2026

一般图的集合映射

Lior Gishboliner* Zhihan Jin† Benny Sudakov†

摘要

集合映射极值问题的研究历史悠久。1958年，Erdős 和 Hajnal 首次提出这一问题，他们研究了图和超图中团的情形。最近，Caro、Patkós、Tuza 和 Vizer 重新探讨了这一主题，并开启了对一般图集合映射问题的系统研究。本文证明了以下结果，回答了他们提出的一个问题。设 G 是一个有 m 条边且没有孤立顶点的图，并设 $f\colon E(K_N) \to E(K_N)$，使得对于所有 $e \in E(K_N)$，$f(e)$ 与 e 不相交。那么存在某个绝对常数 C，只要 $N \geq Cm$，就有 K_N 中 G 的一个副本 G^*，使得对于所有 $e \in E(G^*)$，$f(e)$ 与 $V(G^*)$ 不相交。对于团，界 $N = O(m)$ 是紧的；对于所有 G，该界在对数因子范围内是紧的。

1 引言

集合映射的组合问题由 Erdős 和 Hajnal 于 1958年提出 [10], ，他们提出了以下问题。对于固定整数 k、ℓ 以及一个趋于无穷大的整数 N，考虑所有满足性质 $f(X) \cap X = \emptyset$ 对每个 $X \in \binom{[N]}{k}$ 都成立的函数 $f\colon \binom{[N]}{k} \to \binom{[N]}{\ell}$。令 $p(f)$ 表示满足对每个 $X \in \binom{P}{k}$ 都有 $f(X) \cap P = \emptyset$ 的集合 $P \subseteq [N]$ 的最大大小。令 $p_{k,\ell}(N)$ 表示所有这类函数f对应的 $p(f)$ 的最小值。Erdős 和 Hajnal [10] 证明了 $\Omega\left(N^{\frac{1}{k+1}}\right) \leq p_{k,\ell}(N) \leq O\left((N\log N)^{\frac{1}{k}}\right)$，其中上界是通过考虑一个随机函数 f 得到的。Spencer [12], 运用如今已成为教科书范例的概率方法，将下界提高到 $p_{k,\ell}(N) \geq \Omega\left(N^{\frac{1}{k}}\right)$，与上界相比仅差一个对数项。后来，Conlon、Fox 和 Sudakov [9] 在 $\ell \geq (k-1)!$ 的情况下消除了对数项，证明对于这样的 ℓ，有 $p_{k,\ell}(N) = \Theta\left(N^{\frac{1}{k}}\right)$。（该结果的 $k = 2$ 情形此前已由 Füredi [11]证明。）多年来，还有其他一些研究探讨了类似类型的问题，参见 [1, 2, 4, 5, 8]。

最近，Caro、Patkós、Tuza 和 Vizer [6, 7] 重新研究了这一主题，并开始研究一般图的集合映射问题。在 [6], 中，他们引入了以下参数。对于一个图 G，令 $w(G)$ 表示满足如下条件的最小 N：对于每个函数 $f\colon E(K_N) \to E(K_N)$，且对每个 $e \in E(K_N)$ 都满足 $f(e) \cap e = \emptyset$，存在 K_N 中的一个 G 的副本 G^*，使得对每个 $e \in E(G^*)$ 都有 $f(e) \cap V(G^*) = \emptyset$。在本文及下文中，我们用 K_N 表示以 N 个顶点为顶点集的完全图，并假设 G 没有孤立顶点。注意，对于 $G = K_n$，我们要求存在一个大小为 n的集合 P，使得对每个 $e \in \binom{P}{2}$都有 $f(e) \cap P = \emptyset$。因此，这种情形恢复了上文引入的参数 $p_{2,2}(N)$。也就是说，估计 $w(K_n)$ 的问题等价于估计 $p_{2,2}(N)$ 的问题，而 Spencer 和 Conlon-Fox-Sudakov 的上述结果表明，$w(K_n) = \Theta(n^2)$。通过取一个随机映射 f，Caro、Patkós、Tuza 和 Vizer [6] 证明了：对于任意具有 m 条边的图 G，都有 $w(G) \geq \Omega(\sqrt{m}\log m)$。他们进一步提出了关于获得 $w(G)$ 的紧上界的问题。为回答这一问题，我们使用概率论论证，证明了对所有图 G都成立的本质上紧的界 $w(G) \leq O(e(G))$。

定理 1.1。存在一个绝对常数 $C > 0$，使得对于每个具有 m 条边且没有孤立顶点的图 G，都有 $w(G) \leq Cm$。

*多伦多大学数学系，加拿大。研究部分由 NSERC 发现基金“极值与概率组合学中的问题”资助。电子邮箱：lior.gishboliner@utoronto.ca。

†瑞士苏黎世联邦理工学院数学系。研究部分由 SNSF 基金 200021-228014 资助。电子邮箱：zhihan.jin@math.ethz.ch, benjamin.sudakov@math.ethz.ch。

根据上述 [6], 定理 1.1 的下界，该下界在相差 $O(\log m)$倍的范围内是紧的。此外，当 G 是一个团时，以及当 $|E(G)|=O(|V(G)|)$ 时，该下界也是紧的（因为显然 $w(G)\geq|V(G)|$）。

定理 1.1 的证明见下一节。第 3 节将介绍关于参数 $w(G)$ 及相关参数的一些补充观察和开放问题。

2 定理 1.1 的证明

本节证明以下定理，它立即推出 定理 1.1。我们用嵌入 表示单射。

定理 *2.1.* 存在一个绝对常数 $C>0$，使得以下结论成立。设 m,ℓ 为整数，且设 $N\geq C\ell m$。设 G 为一个有 m 条边且没有孤立顶点的图，并设 $f\colon \binom{[N]}{2}\to\binom{[N]}{\ell}$ 为一个函数，使得对于每个 $e\in\binom{[N]}{2}$，都有 $f(e)\cap e=\emptyset$。那么存在一个嵌入 $\varphi\colon V(G)\to[N]$，使得对于每条边 $vu\in E(G)$，都有 $f\big(\varphi(v)\varphi(u)\big)\cap\varphi(V(G))=\emptyset$。

情形 $\ell=2$ 是定理 1.1。此外，我们指出，与 [6], 取随机映射 f类似，很容易看出，$N=\Omega(\ell m/\log(\ell m))$ 是定理 2.1 结论成立所必需的。

本节余下部分将用于证明定理 2.1。令 n 为 G的顶点数。我们假设 m 足够大。对于较小的 m，只需增大绝对常数 C即可。在整个证明过程中，$o(1)$ 记号始终相对于 $m\to\infty$而言。此外，如有必要，我们可以通过添加边和顶点，假设 m 是一个完全平方数。这可以通过添加 $O(\sqrt{m})$条边和顶点来实现。然后，通过添加孤立顶点，我们可以假设 $n/\sqrt{m}$ 是 2 的幂。这至多需要将当前图的顶点数加倍。因此，在所得图（经过修改后）中，至多一半的顶点是孤立的。略微滥用记号，我们仍用 G 表示所得图，并分别用 n 和 m表示其顶点数和边数。因此，$n\leq 4m$（因为至少一半的顶点不是孤立的）。

设 $u_1,\dots,u_n$ 是 G 的顶点的一个排序，其度按非递增顺序排列，即 $d(u_1)\geq\cdots\geq d(u_n)$。我们将此排序记为 $\prec$；也就是说，对于每个 $1\leq i<j\leq n$，都有 $u_i\prec u_j$。记 $T:=\log_2(\frac{n}{\sqrt{m}})\in\mathbb{N}$。令 $U_0=\{u_i\colon 1\leq i\leq\sqrt{m}\}$，并且对于每个 $1\leq j\leq T$，令 $U_j=\{u_i\colon \sqrt{m}\cdot 2^{j-1}<i\leq\sqrt{m}\cdot 2^j\}$。注意，对于每个 $1\leq j\leq T$，都有 $|U_j|=2^{j-1}\sqrt{m}$，因此 $|U_0|+\cdots+|U_{j-1}|=|U_j|$。此外，$V(G)=U_0\cup U_1\cup\cdots\cup U_T$。

固定任意函数 $f\colon \binom{[N]}{2}\to\binom{[N]}{\ell}$，使得对于每个 $e\in\binom{[N]}{2}$，$f(e)\cap e=\emptyset$。令 $X\subseteq[N]$ 为满足以下条件的顶点集合：$x\in[N]$，并且 $x\in f(e)$ 对于 $e\in\binom{[N]}{2}$ 至多有 ℓN 种选择。通过对满足 $x\in f(e)$ 的序对 $(x,e)\in[N]\times\binom{[N]}{2}$ 进行双重计数，我们得到 $(N-|X|)\ell N\leq\binom{N}{2}\ell$。因此，$|X|>N/2=(C/2)\ell m$。从现在开始，我们的目标是找到一个嵌入 $\varphi\colon V(G)\to X$，使得对于每条边 $vu\in E(G)$，都有 $f\big(\varphi(v)\varphi(u)\big)\cap\varphi(V(G))=\emptyset$。

为此，我们将找到具有某些良好性质（稍后将详细说明）的不相交子集 X_0、……、$X_T\subseteq X$，并应用以下参数为 $t=T$ 的（确定性）嵌入算法。在本文中，对于集合序列 A_0、……、A_T，每当 $j\in\{0,\dots,T\}$ 时，我们记 $A_{\leq j}$为 $A_0\cup\cdots\cup A_j$。

算法 1 嵌入算法

输入： $t\in\{0,\dots,T\}$ 和不相交子集 X_0、……、$X_t\subseteq X$。**输出：** 嵌入 $\varphi\colon U_{\leq t}\to X_{\leq t}$，满足对所有 $0\leq j\leq t$，$\varphi(U_j)\subseteq X_j$；否则报告失败。

按顺序遍历 $j=0$、……、t，对每个 j，按照排序 $\prec$遍历 U_j 中的所有顶点。对于每个顶点$u\in U_j$，令 X_u 为满足以下条件的所有顶点 $x\in X_j$ 的集合：

(a) 对每个 $v\prec u$，$x\neq\varphi(v)$。(b) 对于每条边 $vw\in E(G)$，当 $v,w\in U_0\cup\cdots\cup U_{j-1}$时，$x\notin f\big(\varphi(v)\varphi(w)\big)$。(c) 对于 u 的每个邻居 v（在 G 中），当 $v\prec u$时，$f\big(\varphi(v)x\big)\cap X_{\leq j}=\emptyset$。

如果 X_u 为空，我们就停止并报告失败。否则，将 $\varphi(u)$ 设为按照 $X\subseteq V(K_N)=[N]$上的自然序，在 X_u 中最小的元素。

注意，如果上述算法成功，那么所得的嵌入 $\varphi: U_{\le t} \to X_{\le t}$ 满足：对于每条满足 $v,w \in U_{\le t}$ 的边 $vw \in E(G)$，没有 $x \in f(\varphi(u)\varphi(v))$ 属于 $\mathrm{Im}(\varphi)$。事实上，假设 $v \prec w$ 和 $w \in U_j$。有两种可能：要么是 $x \in X_0 \cup \cdots \cup X_j$，要么是 $x \in X_{j+1} \cup \cdots \cup X_t$。如果 $x \in X_0 \cup \cdots \cup X_j$，那么在嵌入 w 时，我们会在条目 (c) 中确保 $f(\varphi(v)\varphi(w))$ 中没有顶点属于 $X_{\le j}$。而如果 $x \in X_{j+1} \cup \cdots \cup X_t$，那么条目 (b) 禁止 x 成为任何顶点的像。因此，如果上述算法在应用于 $t = T$ 时成功，那么它会生成一个符合定理 2.1 要求的嵌入 φ。还要注意，算法 1 是确定性的，因此给定输入 $X_0, \ldots, X_t$，我们可以明确说出它的输出（即该输出是良定义的）。

为了使 算法 1 能够运行，我们首先找出不相交子集 X_0'、……、$X_T' \subseteq X$，它们满足以下性质（稍后我们将仔细选择 $X_j \subseteq X_j'$ 作为 $j \in \{0, \ldots, T\}$ 算法的输入）。

(1) $3.9|U_j| < |X_j'| < 4.1|U_j|$ for all $j \in \{0, \ldots, T\}$.

(2) 对于每个 $j \in \{0, \ldots, T-1\}$ 以及子集 $X_i \subseteq X_i'$ 的每种选择 $i \in \{0, \ldots, j\}$，令 $\varphi: U_{\le j} \to X_{\le j}$ 为 算法 1 以 X_0、……、X_j 为输入时的输出（若算法失败，则无此要求）。那么，集合 $L = \bigcup_{vu} f(\varphi(v)\varphi(u))$，其中 vu 遍历 G 中的所有边，且 v，$u \in U_{\le j}$，满足 $|L \cap X_{j+1}'| \le |X_{j+1}'|/9$。 [1]

(3) 对每个 $0 \le i \le j \le T$，令 $r_{i,j}$ 表示满足 $f(xy) \cap X_{\le j}' \neq \emptyset$ 的不同顶点对 $(x, y) \in X_i' \times X_j'$ 的数量。则 $r_{i,j} \le |U_i||U_j|^2/5m$。

我们简要说明这些性质及其与 算法 1 的关系。性质(2) 保证在该算法的 步骤 (b) 中，X_j 中仅有少数顶点会因与 vw 相连的边 v，$w \in U_{\le j-1}$ 而被舍弃。性质 (3) 则保证在该算法的 步骤 (c) 中，仅有少数顶点 x 会因 $f(\varphi(v)x)$ 属于某个此前已嵌入的 $X_{\le j}$ 而被舍弃。注意，v 在性质 $i = j$ 中(3) 是允许的。

现在，我们证明：给定满足 X_0'、……、X_T' 的集合，且它们满足 条件 (1) 至 (3)，所需的嵌入确实存在。

引理 2.2. 假设不相交子集 $X_0', \ldots, X_T' \subseteq X$ 满足条件 *(1)* 至 *(3)*。那么存在子集 $X_j \subseteq X_j'$，$0 \le j \le T$，使得将 $X_0, \ldots, X_T$ 作为输入应用算法 *1* 后，可得到一个嵌入 $\varphi: V(G) \to X$，满足对于每条边 $vu \in E(G)$，都有 $f(\varphi(v)\varphi(u)) \cap \varphi(V(G)) = \emptyset$。

证明。对于每个 $j \in \{0, \ldots, T\}$，记 $d_j := \max_{u \in U_j} d(u)$。排序 $\prec$ 和集合 $U_0, \ldots, U_T$ 的选取保证了 $d_0 \ge d_1 \ge \cdots \ge d_T$，并且对于每个 $j \in \{1, \ldots, T\}$ 和 $u \in U_{j-1}$，都有 $d(u) \ge d_j$。此外，回想一下，G 中孤立顶点的数量少于 $n/2$，并且 $|U_T| = |U_0| + \cdots + |U_{T-1}| = \frac{n}{2}$。因此，$d_T > 0$。我们有

$$2m = \sum_{u \in V(G)} d(u) \ge \sum_{j=1}^{T} d_j |U_{j-1}| \ge \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{T} d_j |U_j|. \tag{1}$$

最后一个不等式利用了 $|U_{j-1}| = \frac{1}{2}|U_j|$ 对于 $2 \le j \le T$ 成立，且 $|U_1| = |U_0|$。

对于 $0 \le i \le j \le T$ 和 $x \in X_i'$，令 $r_j(x)$ 表示满足 $f(xy) \cap X_{\le j}' \neq \emptyset$ 的 $y \in X_j' \setminus \{x\}$ 的数量。注意，$\sum_{x \in X_i'} r_j(x) = r_{i,j}$。对于满足 $(i, j) \neq (0, 0)$ 的 $0 \le i \le j \le T$，令 $B_{i,j}$ 为满足 $r_j(x) \ge |U_j|/d_j$ 的顶点 $x \in X_i'$ 的集合（这些是相对于 X_j' 而言，X_i' 中的“坏”顶点）。于是，根据性质（3），

$$|B_{i,j}| \le \frac{r_{i,j}}{|U_j|/d_j} \le \frac{|U_i||U_j|^2/5m}{|U_j|/d_j} = |U_i| \cdot \frac{|U_j| d_j}{5m}.$$

对于 $i = j = 0$，令 $B_{0,0}$ 为满足以下条件的顶点集合：$x \in X_0'$ 满足 $r_0(x) \ge 1$（这些是 X_0' 相对于 X_0' 而言的“坏”顶点）。利用性质 (3) 以及 $|U_0| = \sqrt{m}$，可得

$$|B_{0,0}| \le r_{0,0} \le \frac{|U_0|^3}{5m} = \frac{1}{5}|U_0|.$$

[1] 我们发现性质 (2) 是我们分析中最令人惊讶的方面。具体来说，用于为算法找到良好输入的集合 X_0'、……、X_T' 是根据该算法的输出定义的。

固定 $i \in \{1, \dots, T\}$ 并对所有 $j \geq i$ 求和，可得

$$\sum_{j=i}^{T} |B_{i,j}| \leq |U_i| \cdot \frac{\sum_{j=i}^{T} |U_j| d_j}{5m} \leq |U_i| \cdot \frac{4m}{5m} \leq |U_i|.$$

这里，我们使用了 公式 (1) 在第二个不等式中。同样，对于 $i = 0$，我们得到 t

$$\sum_{j=0}^{T} |B_{0,j}| = |B_{0,0}| + \sum_{j=1}^{T} |B_{0,j}| \leq \frac{1}{5}|U_0| + |U_0| \cdot \frac{\sum_{j=1}^{T} |U_j| d_j}{5m} \leq \frac{1}{5}|U_0| + |U_0| \cdot \frac{4m}{5m} \leq |U_i|.$$

现在，对每个，令 $X_i = X'_i \setminus \bigcup_{j=i}^{T} B_{i\,j}$ $i \in \{0, \dots, T\}$ $|X_i| \geq$：。
$|X'_i| - |U_i|$ 1 $X_0 \ \dots \ X_T$ $\varphi \ \ U_{\leq T} \to X_{\leq T}$
根据上述讨论，我们知道。现在证明，以、为输入的算法会返回一个嵌入：（即算法不会以失败告终）。只需证明，对于每个 $j \in \{0, \dots, T\}$ 和每个 $u \in U_j$，都有 $X_u \neq \emptyset$，其中 X_u 在算法 1 中定义。我们对 j使用归纳法证明这一点。当 $j = 0$时，B_0、0 和 X_0 的定义意味着，对于每个 $x \in X_0$，都有 $r_0(x) = 0$。这意味着，对于所有不同的 x、$y \in X'_0$，都有 $f(xy) \cap X_0 = \emptyset$。因此，对于每个 $u \in U_0$，都有 $X_u = X_0 \setminus \{\varphi(v) : v \prec u\}$（因为项目 (b) 和 (c) 不会排除任何顶点）。根据性质 (1)，我们有 $|\{\varphi(v) : v \prec u\}| < |U_0|$ 和 $|X_0| \geq |X'_0| - |U_0| \geq |U_0|$。因此，$X_u$ 始终非空，并且算法不会在任何顶点 $u \in U_0$处失败。

当 $j \geq 1$ 时，假设该算法已成功嵌入 $U_{\leq j-1}$。令 $L = \bigcup_{vw} f(\varphi(v)\varphi(w))$，其中 vw 遍历所有满足 v，$w \in U_{\leq j-1}$ 的 $vw \in E(G)$。性质（2）保证了 $|L \cap X'_j| \leq |X'_j|/9$。因此，对于每个 $u \in U_j$，条件（b）最多排除 X_j 中的 $|L \cap X'_j| \leq |X'_j|/9$ 个顶点。接下来，我们界定条件（c）排除的顶点数。根据集合 X_i 和 B_i 的定义，j，任意 $v \prec u$ 都满足 $r_j(\varphi(v)) < |U_j|/d_j$。回顾一下，$r_j(\varphi(v))$ 是满足 $f(\varphi(v)x) \cap X_{\leq j} \neq \emptyset$ 的 $x \in X_j$ 数量的上界。因此，对于给定的 u 的任意邻居 v（在 G 中），若满足 $v \prec u$，则条件（c）因其具有 $f(\varphi(v)x) \cap X_{\leq j} \neq \emptyset$ 而排除的 $x \in X_j$ 选择不到 $|U_j|/d_j$ 个。考虑满足 $v \prec u$ 的 u 的所有邻居 v，条件（c）排除的顶点少于 $|U_j|/d_j \cdot d(u) \leq |U_j|$ 个（回顾一下，根据 d_j 的定义，$d(u) \leq d_j$）。最后，条件（a）排除的顶点少于 $|U_j|$ 个。因此可得

$$|X_u| \geq |X_j| - |U_j| - |L \cap X'_j| - |U_j| \geq |X'_j| - 3|U_j| - |X'_j|/9 > 0,$$

其中我们在第二个不等式中使用了 $|X_j| \geq |X'_j| - |U_j|$，并在最后一个不等式中使用了性质 (1)。这意味着该算法不会在顶点 u处失败，因此算法将成功返回一个嵌入φ： $U_{\leq T} \to X_{\leq T}$。

现在我们通过证明 φ 满足以下条件，完成引理 2.2 的证明：对于每个 $vu \in E(G)$，$f(\varphi(v)\varphi(u)) \cap \varphi(V(G)) = \emptyset$。事实上，设 $vu \in E(G)$ 满足 $v \prec u$，并任取 $w \in V(G) \setminus \{v, u\}$。假设 $u \in U_j$。若 $w \in U_{j+1} \cup \dots \cup U_T$，则在算法 1 中嵌入 w 时，条目 (b) 保证 $\varphi(w) \notin f(\varphi(v)\varphi(u))$。若 $w \in U_0 \cup \dots \cup U_j$，则在嵌入 u 时，条目 (c) 保证 $f(\varphi(v)\varphi(u)) \cap X_{\leq j} = \emptyset$，因此 $\varphi(w) \notin f(\varphi(v)\varphi(u))$，因为 $\varphi(w) \in X_{\leq j}$。引理得证。 □

接下来需要找出两两不相交的集合 X'_0、……、$X'_T \subseteq X$，使其满足性质 (1) - (3)。

引理 2.3。存在两两不相交的集合 X'_0、……、$X'_T \subseteq X$，使其满足性质 *(1) - (3)*。

证明。对于 $j \in \{0, \dots, T\}$，令

$$\alpha_j := 4|U_j|/|X|.$$

注意，$\alpha_0 + \dots + \alpha_T = \frac{4}{|X|}(|U_0| + \dots + |U_T|) = \frac{4n}{|X|} \leq \frac{1}{2}$作为 $|X| \geq N/2 = (C/2)\ell m$ 以及 $n \leq 4m$。我们按如下方式选取两两不相交的集合 X'_0、……、$X'_T \subseteq X$：对于每个 $x \in X$，随机选取一个 $i_x \in \{\star, 0, \dots, T\}$，使得 $\mathbb{P}[i_x = i] = \alpha_i$ 对于 $0 \leq i \leq T$成立，且 $\mathbb{P}[i_x = \star] = 1 - \sum_{i=0}^{T} \alpha_i$（独立于所有其他顶点）。若 $i_x \neq \star$，则将 x 放入 X'_i中，其中 $i = i_x$。集合 X'_0、……、X'_T显然两两不相交。只需证明以正概率，X'_0、……、X'_T满足性质 (1) - (3)。

性质 (1) 直接由 Chernoff 界推出。事实上，对于 $j \in \{0, \dots, T\}$，有 $|X'_j| \sim \mathrm{Bin}(|X|, \alpha_j)$，因此 $\mathbb{E}[|X'_j|] = 4|U_j|$。根据 Chernoff 界，$3.9|U_j| \leq |X'_j| \leq 4.1|U_j|$至少为 $1 - \exp(-\Omega(|U_j|)) \geq 1 - \exp(\Omega(\sqrt{m}))$ 的概率为 $|U_j| \geq |U_0| = \sqrt{m}$。对所有

$j \in \{0,\dots,T\}$，我们知道，（1）以至少为 $1 - T\exp(-\Omega(\sqrt{m})) = 1 - o$ 的概率成立。这里，我们使用了 $T = O(\log m)$。

对于性质 (2)，固定 $j \in \{0,\dots,T-1\}$ 并以 $X'_0,\dots,X'_j$ 的选取为条件。我们还假设 $3.9|U_i| \le |X'_i| \le 4.1|U_i|$ 对所有 $0 \le i \le j$ 都成立，根据上述结果，其概率为 $1 - o(1)$。令 $X' := X \setminus X'_{\le j}$。在以 $X'_0,\dots,X'_j$ 为条件时，集合 X'_{j+1} 服从 X' 的随机子集分布，其中每个 $x \in X'$ 以概率 $\frac{\alpha_{j+1}}{1-\sum_{i\le j}\alpha_i} \le 2\alpha_{j+1}$ 被选中。任取 $X_i \subseteq X'_i$，其中 $0 \le i \le j$。对于 $X_0,\dots,X_j$，其选取方式的数量为

$$2^{\sum_{i=0}^{j}|X'_i|} \le 2^{4.1\sum_{i=0}^{j}|U_i|} = 2^{4.1|U_{j+1}|}.$$

现在，固定了 $X_0,\dots,X_j$ 后，令 $\varphi\colon U_{\le j} \to X_{\le j}$ 为算法 1 在输入 $X_0,\dots,X_j$ 时的输出。我们可以假设该算法成功生成了这样的 φ，否则就无需对 $X_0,\dots,X_j$ 作任何要求。记 $L := \bigcup_{vu} f(\varphi(v)\varphi(u))$，其中 $vu \in E(G)$ 且 $v,u \in U_{\le j}$。注意，L 由 $X_0,\dots,X_j$ 通过算法 1 唯一确定，且 $|L| \le m\ell$。因此，$|L \cap X'_{j+1}|$ 随机支配一个试验次数为 $m\ell$、成功概率为 $2\alpha_{j+1}$ 的二项分布。这意味着

$$\mathbb{P}\left[\left|L \cap X'_{j+1}\right| > \frac{\alpha_{j+1}|X|}{10}\right] \le \binom{m\ell}{\alpha_{j+1}|X|/10}(2\alpha_{j+1})^{\alpha_{j+1}|X|/10} \le \left(\frac{20em\ell}{|X|}\right)^{\alpha_{j+1}|X|/10}$$
$$\le \left(\frac{40em\ell}{N}\right)^{\alpha_{j+1}|X|/10} \le \left(\frac{40em\ell}{C\ell m}\right)^{(2/5)|U_{j+1}|} \le 2^{-5|U_{j+1}|}.$$

这里我们用到了 $|X| \ge N/2 \ge (C/2)\ell m$ 其中 $C > 0$ 是一个足够大的常数。对 $X_0,\dots,X_j$ 的所有取值应用并合界，可知对于所有此类取值，$|L \cap X'_{j+1}| \le \alpha_{j+1}|X|/10$ 成立的概率至少为 $1 - 2^{4.1|U_{j+1}|}\cdot 2^{-5|U_{j+1}|} = 1 - 2^{-\Omega(\sqrt{m})}$。此外，我们已知以概率 $1-o(1)$ 有 $|X'_{j+1}| \ge 3.9|U_{j+1}| = (39/40)\alpha_{j+1}|X|$ 成立，因此 $|L \cap X'_{j+1}| \le \alpha_{j+1}|X|/10$ 蕴含 $|L \cap X'_{j+1}| \le |X'_{j+1}|/9$。对所有 $j \in \{0,\dots,T-1\}$ 应用并合界，可知以概率 $1-o(1)$，性质 (1) 和 (2) 均成立。

接下来只需证明（3）以至少 $1/4$ 的概率成立。固定 $0 \le i \le j \le T$。对于每一对不同的 $x,y \in X$，以及每个 $z \in f(x,y) \cap X$，令 $I_{x,y,z}$ 为事件 $x \in X'_i, y \in X'_j, z \in X'_{\le j}$ 的指示变量。显然，$r_{i,j} \le r^\star_{i,j} := \sum_{x\ne y, z\in f(x,y)\cap X} I_{x,y,z}$（因为同一对 $x \ne y$ 可能会因多个 z 而被重复计数）。为方便起见，令 $\alpha_{\le j} := \sum_{k=0}^{j}\alpha_k = 2\alpha_j$，其中用到了 $|U_j| = \sum_{k=0}^{j-1}|U_k|$。记 $M := |X| \ge N/2 \ge (C/2)\ell m$（其中 C 是一个足够大的常数），我们有

$$\mathbb{E}[r^\star_{i,j}] \le M(M-1)\ell\cdot\alpha_i\alpha_j\alpha_{\le j} \le 2M^2\ell\alpha_i\alpha_j^2 = \frac{128\ell|U_i||U_j|^2}{M} < \frac{|U_i||U_j|^2}{m}. \tag{2}$$

接下来，我们对 $r^\star_{i,j}$ 的方差进行界定。只需考虑两个事件 $I_{x,y,z}$ 和 $I_{x',y',z'}$ 的协方差，其中 $x \ne y,z \in f(xy) \cap X$，且 $x' \ne y', z' \in f(x'y') \cap X$。我们根据交集 $|\{x,y,z\} \cap \{x',y',z'\}|$ 的大小对这些情况分类。

- 如果 $\{x,y,z\} \cap \{x',y',z'\} = \emptyset$，那么 $I_{x,y,z}$ 和 $I_{x',y',z'}$ 相互独立，因此它们的协方差为 0。
- 如果 $|\{x,y,z\} \cap \{x',y',z'\}| = 1$，那么 $I_{x,y,z} = I_{x',y',z'} = 1$ 的概率至多为 $\alpha_i\alpha_j^2\alpha_{\le j}^2 = 4\alpha_i\alpha_j^4$，这是因为 $\alpha_i \le \alpha_j \le \alpha_{\le j}$。我们来计算满足 $|\{x,y,z\} \cap \{x',y',z'\}| = 1$ 的三元组 (x,y,z)、(x',y',z') 的个数。$\{x,y,z\}$ 的选法至多有 $|X|^2\ell = M^2\ell$ 种。固定 x,y,z 后，我们知道顶点 x',y',z' 中有一个属于 $\{x,y,z\}$。如果 $x' \in \{x,y,z\}$，那么 x' 有 3 种选法，y' 至多有 $M = |X|$ 种选法，z' 至多有 ℓ 种选法。$y' \in \{x,y,z\}$ 时也同样如此。如果 $z' \in \{x,y,z\}$，那么 z' 有 3 种选法，接着根据集合 X 的定义（且由于 $z' \in X$），$x'y'$ 至多有 $2\ell N$ 种选法。总计，满足 $|\{x,y,z\} \cap \{x',y',z'\}| = 1$ 的三元组 (x,y,z)、(x',y',z') 的选法至多有 $M^2\ell\cdot(6M\ell + 6\ell N) \le M^2\ell\cdot 18M\ell = 18M^3\ell^2$ 种。
- 若 $|\{x,y,z\} \cap \{x,y,z\}| = 2$，则 $I_{x,y,z} = I_{x',y',z'} = 1$ 的概率至多为 $\alpha_i\alpha_j\alpha_{\le j}^2 = 4\alpha_i\alpha_j^3$。此外，这类配对的数量至多为 $13M^3\ell$。事实上，(x,y,z) 至多有 $M^2\ell$ 种选择。固定 x,y,z 后，顶点 x',y',z' 中必有两个位于 $\{x,y,z\}$ 中。若这两个顶点是 x',z'，则 x',z' 至多有 6 种选择，接着 y' 至多有 M 种选择。对配对 y',z' 也同样适用。若 $x',y' \in \{x,y,z\}$，则 x',y' 有 6 种选择，而 z' 至多有 ℓ 种选择。因此总共至多有 $M^2\ell\cdot(12M + 6\ell) \le 13M^3\ell$ 种选择，证毕。

- 若 $|\{x,y,z\}\cap\{x,y,z\}|=3$，则 $I_{x,\ y,\ z}=I_{x',\ y',\ z'}=1$ 的概率至多为 $\alpha_i\alpha_j\alpha_{\le j}=2\alpha_i\alpha_j^2$。此外，$(x,\ y,\ z)$，$(x',\ y',\ z')$ 至多有 $5M^2\ell$ 种这样的选择。（即，$x',\ y',\ z'$ 是 $x,\ y,\ z$ 的任意排列，但不包括其本身 $x,\ y,\ z$。）

这些观察与（2）以及 $M\alpha_j=4|U_j|\ge 1$这一事实共同意味着

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[r^\star_{i,j}]&\le \mathbb{E}[r^\star_{i,j}]+\sum_{(x,y,z)\neq(x',y',z')}\mathrm{Cov}(I_{x,y,z},I_{x',y',z'})\\&\le 2M^2\ell\alpha_i\alpha_j^2+18M^3\ell^2\cdot 4\alpha_i\alpha_j^4+13M^3\ell\cdot 4\alpha_i\alpha_j^3+5M^2\ell\cdot 2\alpha_i\alpha_j^2\\&=72M^3\ell^2\alpha_i\alpha_j^4+52M^3\ell\alpha_i\alpha_j^3+12M^2\ell\alpha_i\alpha_j^2\\&<100M^3\ell^2\alpha_i\alpha_j^4+100M^3\ell\alpha_i\alpha_j^3.\end{aligned}$$

现在代入 $\alpha_i=4|U_i|/M$，$\alpha_j=4|U_j|/M$，并利用 $|U_j|\le|U_T|=n/2\le 2m$ 以及 $M\ge(C/2)\ell m$（其中 $C>0$ 足够大）。我们得到：

$$\mathrm{Var}[r^\star_{i,j}]\le 100M^3\ell^2\frac{4^5|U_i||U_j|^4}{M^5}+100M^3\ell\frac{4^4|U_i||U_j|^3}{M^4}\le\frac{100\cdot 4^6\cdot|U_i||U_j|^4}{C^2m^2}+\frac{100\cdot 2^9\cdot|U_i||U_j|^3}{Cm}<\frac{|U_i||U_j|^3}{m}.$$

由切比雪夫不等式可知

$$\mathbb{P}\left[r^\star_{i,j}\ge\frac{5|U_i||U_j|^2}{m}\right]\le\mathbb{P}\left[\left|r^\star_{i,j}-\mathbb{E}[r^\star_{i,j}]\right|\ge\frac{4|U_i||U_j|^2}{m}\right]\le\frac{\mathrm{Var}[r^\star_{i,j}]}{16|U_i|^2|U_j|^4/m^2}<\frac{m}{16|U_i||U_j|}.$$

由并合界可知，存在 $0\le i\le j\le T$ 且满足 $r^\star_{i,\ j}\ge\frac{5|U_i||U_j|^2}{m}$ 的概率至多为

$$\sum_{0\le i\le j\le T}\frac{m}{16|U_i||U_j|}\le\frac{1}{16}\left(\sum_{i=0}^{T}\frac{\sqrt{m}}{|U_i|}\right)^2\le\frac{1}{16}\left(1+\sum_{i\ge 0}2^{-i}\right)^2=\frac{9}{16}.$$

回顾 $r_{i,\ j}\le r^\star_{i,\ j}$。因此，性质 (3) 以至少 $7/16>1/4$ 的概率成立，这就完成了引理 2.3 的证明，从而也完成了定理 2.1的证明。 □

3 总结性评述与开放问题

结合定理 1.1 和 [6], 给出的下界可知，对于每个具有 m 条边且没有孤立顶点的图 G，都有 $\Omega(\ ^{m}{}_{\text{对数}}\ m)\le w(G)\le O(m)$。是否存在下界恰好就是答案的图 G？我们尤其想知道 $G=K_{n,\ n}$是否属于这种情况。

问题 3.1. 确定 $w(K_{n,n})$。

$w(G)$ 的定义可自然推广到 k-均匀超图（简称 k-图）。记 $K_N^{(k)}$ 为具有 N个顶点的完全 k-图。对于一个 k-图 G，令 $w(G)$ 为满足以下条件的最小值 N：对于每个满足 $f(e)\cap e=\emptyset$ 对每个 $e\in E(K_N^{(k)})$ 都成立的映射f：$E(K_N^{(k)})\to E(K_N^{(k)})$，在 $K_N^{(k)}$ 中都存在 G 的一个副本 G^*，使得 $f(e)\cap V(G^*)=\emptyset$ 对每个 $e\in E(G^*)$ 都成立。很自然地，我们猜想界 $w(G)=O(e(G))$ 对超图仍然成立（即推广定理 1.1），但我们的方法并不容易推广。

猜想 3.2。 对于每个无孤立顶点、含有 m 条边的 k-图 G，都有 $w(G)=O(m)$。

我们可以证明，当 G 近乎正则时，该猜想成立；这里的意思是，其最大度 Δ和平均度 d 满足 $\Delta=O(d)$。这可由以下较为标准的局部引理论证得到。

定理 3.3 （洛瓦兹局部引理，见 [3]第 5 章）。设 $B_1,\dots,B_m$ 是概率空间中的事件。假设存在 p,d，使得 $ep(d+1)\le 1$, $\mathbb{P}[B_i]\le p$ 对每个 $i\in[m]$ 都成立，并且每个 B_i 都与至多 d 个其他事件 B_j 不独立。那么存在一个结果，使得 $B_1,\dots,B_m$ 均不发生。

命题 3.4。设 G 是一个有 n 个顶点、最大度为 Δ 的 k-图。那么 $w(G) \le 10k^2 n\Delta$。

证明。假设 $V(G) = [n]$。令 $N = 10k^2 n\Delta$。给定一个函数 $f\colon E(K_N^{(k)}) \to E(K_N^{(k)})$，使得对于每个 $e \in E(K_N^{(k)})$，都有 $f(e) \cap e = \emptyset$。均匀随机抽取顶点 x_1、……、$x_n \in [N]$。我们定义两类坏事件：

- 对于 $1 \le i < j \le n$，令 $A_{i,j}$ 表示事件 $x_i = x_j$。
- 对于一条边 $e \in E(G)$ 和 $i \in [n] \setminus e$，令 $B_{e,i}$ 表示事件 $x_i \in f(\{x_j\colon j \in e\})$。

我们有 $\mathbb{P}[A_{i,j}] = \frac{1}{N}$ 和 $\mathbb{P}[B_{e,i}] = \frac{k}{N}$。现在来考察依赖关系。每个事件 $A_{i,j}$ 仅依赖于变量 x_i, x_j，而每个事件 $B_{e,i}$ 仅依赖于变量 x_i 和 $(x_j\colon j \in e)$。若两个事件所涉及的变量集合不相交，则它们相互独立。任取一个大小为 $|X| \le k+1$ 的顶点集合 $X \subseteq [n]$。在 X 中含有变量的事件 $A_{i,j}$ 至多有 $|X|n \le (k+1)n$ 个。现在来界定在 X 中含有变量的事件 $B_{e,i}$ 的数量。当 $i \in X$ 时，选项至多有 $|X| \cdot e(G) \le (k+1)\binom{\Delta n}{k} \le 2\Delta n$ 个。当 e 在 X 中含有一个顶点时，选项至多有 $|X| \cdot \Delta \cdot n \le (k+1)\Delta n$ 个。综上可知，每个坏事件（$A_{i,j}$ 或 $B_{e,i}$）至多依赖于 $(k+3)\Delta n \le 3k\Delta n$ 个其他坏事件。根据定理 3.3，取 $p = \frac{k}{N}$ 和 $d = 3k\Delta n$ 应用该定理，可知存在一个没有坏事件发生的结果。若此情况发生，则 x_1、……、x_n 构成 G 的一个副本（其中 x_i 扮演 i 的角色），且对于副本中的每条边 e，都有 $f(e) \cap \{x_1, \dots, x_n\} = \emptyset$。 □

Caro [5] 以及后来 Conlon、Fox 和 Sudakov [9] 研究了原始集合映射问题（定义见第 1 节）的一种变体：不再要求对每个 $X \in \binom{P}{k}$，$f(X)$ 与 P 不相交，而只要求 $f(X)$ 不包含于 P。此外，还可以将假设“对每个 X，$f(X) \cap X = \emptyset$”替换为对 $|f(X) \cap X|$ 的上界。在一般（2-均匀）图的背景下，有两个这类自然参数，现定义如下。与 [6], 中针对 $a \in \{0,1\}$ 的做法相同，令 $F_{N,a}$ 表示函数 $f\colon E(K_N) \to E(K_N)$ 的集合，其中对每个 $e \in E(K_N)$，都有 $|f(e) \cap e| \le a$。对于图 G，令 $g_a(G)$ 为满足以下条件的最小 N：对每个函数 $f \in F_{N,a}$，在 K_N 中存在 G 的一个副本 G^*，使得对每个 $e \in E(G^*)$，都有 $f(e) \notin E(G^*)$。这样的 G 副本称为 f-自由的。显然，$g_1(G) \ge g_0(G) \ge |V(G)|$。标准的一阶矩论证给出了 $g_a(G)$ 的以下下界：

命题 3.5。设 G 是一个有 n 个顶点和 m 条边的图。那么 $g_1(G) \ge g_0(G) \ge \Omega\left(\sqrt{n}^m \log n + n\right)$ 且 $g_1(G) \ge \Omega\left(n^{\frac{1}{\log n}\sum_{u \in V(G)} d(u)^2} + n\right) \ge \Omega\left(n^{2^{m^2/\log n}} + n\right)$。

证明。我们不妨假设 $m \ge 3n$。否则，由于 $g_0(G)$ $g_1(G) \ge n$，两个界显然都成立。为证明这些界，我们将对某些随机映射 $f \in F_{N,a}$ 进行抽样。

首先考虑 $g_0(G)$。通过对每个 $e \in E(K_N)$，均匀且独立地选取一条满足 $|e \cap e'| = 0$ 的随机边 e'，并令 $f(e) = e'$，来抽样 f。固定 K_N 中 G 的任意一个副本 G^*。对于每条边 $e \in E(G^*)$，G^* 中至少有 $m - 2n$ 条边与 e 不相交，因此 $f(e) \in E(G^*)$ 的概率至少为 $(m-2n)/\binom{N-2}{2} = \Theta(m/N^2)$。由于对所有 $e \in E(G^*)$，$f(e)$ 相互独立，G^* 是 f-自由的概率至多为 $\left(1 - (m-2n)/\binom{N-2}{2}\right)^m = e^{-\Theta(m^2/N^2)}$。于是，若 $N = o\left(\sqrt{n}^m \log n\right)$，对 G 的所有副本 G^* 应用并合界可知，存在一个 f-自由的 G 副本的概率至多为 $N^n e^{-\Theta(m^2/N^2)} = o(1)$。这里，我们还用到了 $\log N = O(\log n)$。这意味着 $g_0(G) = \Omega\left(\sqrt{n}^m \log n\right)$。此外，$g_0(G) \ge n$，因此 $g_0(G) \ge \Omega\left(\sqrt{n}^m \log n + n\right)$。

对于 $g_1(G)$，我们采用类似的方法，但现在选择 $f(e)$ 作为满足 $|e \cap e'| = 1$ 的随机边 e'。对于每个顶点 $u \in V(G)$，记 $d(u)$ 为其在 G 中的度。固定一个 G 在 K_N 中的副本 G^*。对于任意边 $e \in G^*$，即对应于 G 中的一条边 uv，有 $d(u) + d(v)$ 条边 $e' \in E) \setminus \{e\}$ 与 e 相接。因此，G^* 为 f-free 的概率至多为

$$\prod_{uv \in E(G)} \left(1 - \frac{d(u)+d(v)-2}{2N-4}\right) \le \exp\left(-\sum_{uv \in E(G)} \frac{d(u)+d(v)-2}{2N-4}\right) \le \exp\left(-\frac{1}{2N-4}\sum_{u \in V(G)} d(u)^2 + \frac{2m}{2N-4}\right).$$

注意到，根据詹森不等式以及我们的假设 $m \ge 3n$，我们有

$$\sum_{u \in V(G)} d(u)^2 \ge n \cdot \left(\frac{2m}{n}\right)^2 = \frac{4m^2}{n} \ge 12m.$$

因此，上述概率至多为 $\exp\left(-\frac{1}{4N-8}\sum_{u\in V(G)} d(u)^2\right)$。于是，如果 $N = o\left(n^{\frac{1}{\log n}\sum_{u\in V(G)} d(u)^2}\right)$，则存在一个 f-自由的 G 副本的概率至多为

$$N^n \cdot \exp\left(-\frac{1}{4N-8}\sum_{u\in V(G)} d(u)^2\right) = N^n \cdot e^{-\omega(n\log n)} = o(1).$$

这表明 $g_1(G) = \Omega\left(n^{\frac{1}{\text{对数 } n}\sum_{u\in V(G)} d(u)^2}\right)$。此外，$g_1(G) \geq n$ 因此

$$g_1(G) = \Omega\left(\frac{1}{n\log n}\sum_{u\in V(G)} d(u)^2 + n\right).$$

最后，回顾一下，由于 $\sum_{u\in V(G)} d(u)^2 \geq 4m^2/n$，我们有 $g_1(G) = \Omega\left(n^{\frac{m^2}{n^2}\text{对数 } n} + n\right)$。

□

至于上界 ，以下关于 $g_1(G)$（因而关于 $g_0(G)$）的界由定理 2.推出。 1.

Theo理 3.6。设 G 是一个具有 m 条边且没有孤立顶点的图。则 $g_1(G) = O(m$).

证明。取足够大的 C，令 $f\colon E(K_N) \to E(K_N)$，其中对每个 $e \in E(K_N)$ 都有 $|f(e) \cap e| \leq 1$。定义函数 $f'\colon E(K_N) \to [N]$，令对每个 $e \in E(K_N)$，$f'(e)$ 为 $f(e)$ 中的一个顶点 $\setminus e$。根据定理 2.1，存在一个 G^* 的副本，使得对每个 $e \in E(G^*)$，$f'(e) \cap V(G^*) = \emptyset$。这保证了 $f(e) \notin E(G^*)$。因此，$g_1(G) \leq N$。

□

Conlon、Fox 和 Sudakov [9, 定理 2.2(i)] 证明，定理 3.6 中的界对$G = K_n$是紧的。此外，根据命题 3.5，对于 $G = K_{k,n-k}$，该界在对数因子范围内也是紧的，因为 $m = k(n-k)$ 和 $\sum_{u\in V(G)} d(u)^2 \geq k(n-k)^2 = \Omega(nm)$（这里假设 $k \leq \frac{n}{2}$）。

确定命题 3.5 中的下界在忽略对数因子的意义下是否紧致，将是一个有趣的问题。具体而言，我们提出以下猜想：

猜想 3.7。设 G 是一个有 n 个顶点、m 条边且没有孤立顶点的图。那么 $g_0(G) = O\left(\frac{m}{\sqrt{n}} + n\right)$。

猜想 3.7 中的界对 $G = K_n$是紧的；见 [9, 定理 2.2(ii)]。此外，类似于命题 3.4的证明，利用（非对称）局部引理，可以证明 $g_0(G) = O(\sqrt{\Delta m} + n)$，这意味着当 3.7 满足 $\Delta = O(m/n)$时，猜想成立；也就是说，最大度至多为平均度的某个常数倍。

参考资料

[1] N. Alon 和 Y. Caro. 关于完全图边集变换的极值问题。《组合学欧洲杂志》，7(2):93–104，1986年。1[2] N. Alon、Y. Caro 和 Z. Tuza. 算术级数的子 Ramsey 数。《图与组合》，5(1):307–314，1989年。1[3] N. Alon 和 J. H. Spencer. 概率方法。John Wiley & Sons，2016年。3.3[4] M. Axenovich 和 R. Martin. 算术级数的子 Ramsey 数。《图与组合》，22:297–309，2006年。1[5] Y. Caro. 关于完全超图边集变换的极值问题。《图论杂志》，11(1):25–37，1987年。1, 3[6] Y. Caro、B. Patkós、Z. Tuza 和 M. Vizer. 图的边映射：Ramsey型参数。arXiv预印本 arXiv:2402.01004，2024年。1, 1, 2, 3, 3[7] Y. Caro、B. Patkós、Z. Tuza 和 M. Vizer. 图的边映射：Turán型参数。《组合学欧洲杂志》，127:104140，2025年。1

[8] Y. Caro 和 J. Schönheim. 关于避免自由三角形且固定边的边映射。组合学，第 159–164 页。1[9] D. Conlon、J. Fox 和 B. Sudakov. 一些极值结果的简短证明 II。组合论杂志 *B* 辑，121:173–196，2016年。1，3，3，3[10] P. Erdős 和 A. Hajnal. 关于集合映射的结构。匈牙利科学院数学学报，9:111–131，1958年。1[11] Z. Füred. 施泰纳系统和平面集中的极大独立子集。*SIAM* 离散数学杂志，4(2):196–199，1991年。1[12] J. Spencer. 关于 k-图的 Turán 定理。离散数学，2:183–186，1972年。1