量子逻辑中数值事件的正交偏序集

Dietmar Dorninger 和 Helmut L¨anger

arXiv:2601.00772v1 [quant-ph] 2 Jan 2026

摘要

设 S 为某物理系统的状态集， $p(s)$ 表示系统处于状态 $s \in S$ 时某事件发生的概率。这样的函数 $p\colon S \to [0,1]$ 称为数值事件，或者更准确地说，是一个 S-概率。若数值事件集 P 包含常函数 0 和 1，且对每个 $p \in P$ 都满足 $1-p$，那么按照实函数的序关系，该集合便构成一个偏序集，可作为量子逻辑的一般框架。我们称这样的偏序集 P 为事件一般集合（GSE）。经过深入研究的 S-概率代数（包括希尔伯特逻辑）、具体逻辑和布尔代数，都可以在此框架中表示。本文研究 GSE 的各种类别，尤其是其中构成正交偏序集的类别，以及它们之间的相互关系和与已知逻辑的联系。此外，我们利用态刻画作为偏序集的 GSE，并讨论 GSE 成为格的情形。

美国数学学会主题分类： 06C15,06E99,03G12, 81P10
关键词： 量子逻辑、数值事件、 S-概率、态、正交偏序集、正交模性

1 引言

物理学中的一个关键问题是，所研究的是经典物理系统还是量子力学系统。除此之外，两者的差异还可以通过其底层的量子逻辑来描述：在经典物理学中，量子逻辑是布尔代数；而在量子物理学中，它则是这一概念以特殊偏序集形式呈现的推广。本文将聚焦于数值事件正交偏序集。数值事件定义如下：

令 S 为某物理系统的状态集， $p(s)$表示系统处于状态 $s \in S$时某个事件（与某个可观测量有关）发生的概率。函数 $p\colon S \to [0,1]$ 称为数值事件、多维概率，或更准确地说，称为 S-概率（参见 [1]和 [2]）。 S-概率是可以排序的实函数。因此，我们始终假设所得偏序集包含常函数 0 和 1，并分别用整数 0 和 1 的相同符号表示它们。我们将以这种方式规定的第一类偏序集定义如下：

[1]谨此感谢奥地利科学基金（FWF）项目 10.55776/PIN5424624 对第二作者研究的资助。

定义 1.1. ([1]和 [2]) 令 P 为一个由 S-概率组成的集合，其中包含常函数0 和1 ，并按实函数的偏序 $\leq$ 排序； $+$ 和 $-$ 分别表示实函数的和与差。如果 P 满足以下公理，则称其为代数 S-概率，或数值事件代数：

(1) $0 \in P$;(2) $p' := 1 - p \in P$ 对所有 $p \in P$; (3) 如果 $p, q \in P$ 正交，即 $p \leq q'$，记作 $p \perp q$，则 $p + q \in P$; (4) 如果 $p, q, r \in P$ 且 $p \perp q \perp r \perp p$，则 $p + q + r \in P$。

显然，由于 $0 \perp p \perp q \perp 0$，公理 (3) 是公理 (4) 的特例，但稍后区分公理 (3) 和公理 (4) 将很重要。如果 $p \perp q$ 对 p， $q \in P$ 成立，那么 $p + q$ 就是 p 和 q 的上确界 $p \vee q$，这是公理 (4) 的推论（见 [9]）。如果两个 S-概率 p， q 的下确界存在，我们将用 $p \wedge q$ 表示它。

定义 S-概率代数的动机来自经典事件域。对于经典事件域，三个事件 A， B， C 两两正交意味着 $A \subseteq B' \cap C' = (B \cup C)'$；对于 S-概率，这可以转译为 $p \leq 1 - (q + r)$。

正如 M.J. M˛aczy´nski 和 T. Traczyk [9] 已经指出的，数值事件代数是一个具有全态集的正交模偏序集；任何具有全态集的正交模偏序集都可以同构于一个数值事件代数。特别地，所有布尔逻辑和希尔伯特逻辑都是 S-概率代数。（关于如何将希尔伯特逻辑表示为 S-概率代数，参见例如 [8]。）

若在定义 1.1 中省略公理 (4)，则所得偏序集称为 GFE（广义事件域）（参见 [4]– [7]）。文献 [4]证明，若某个 GFE P 的元素 p 和 q 满足 $p \leq q$，则 $q - p \in P$。若对于一个 GFE P $p \perp q$， $p + q = p \vee q$ 对 p， $q \in P$ 都成立，则 P 是一个 S- 概率代数（参见 [6]）。此外，若某个 GFE 的 S-概率的取值只能为 0 或 1，那么它本身就是一个 S-概率代数。在这种情况下， S-概率代数是一个具体逻辑，也就是一种可以用集合表示的逻辑（参见 [10]）。

我们还要指出，在 S-概率代数中，任何既不等于 0 或 1，也不是 $\leq 1/2$ 或 $\geq 1/2$ 的元素，都称为变异的（参见 [3]）。若一个 S-概率是变异的，或等于 0 或 1，则称其为真（参见 [6] 和 [7]）。

若在定义1.1中同时省略公理 (3) 和 (4)，则将所得偏序集称为一般（数值）事件，简称 GSE。

S-概率代数的一个重要性质是它们是正交偏序集，这意味着除 $p'' = p$ （$'$ 是一个对合）之外，对于 p， $p \leq q \Rightarrow q' \leq p'$， $q \in P$（$'$ 是反单调的），还有 $p \vee p' = 1$ 以及对所有 p 成立的 $p \wedge p' = 0$ （$'$ 是一个补）（例如参见 [11]）。

若 $'$ 是有界偏序集 $(P, \leq, 0, 1)$ 上的补，则称 GSE P of S-概率为补的。显然，每个 GSE 都是带有反单调对合的有界偏序集。以下性质至关重要：

命题 1.2. 设 P 是一个 GSE。那么 P 是补的，因此它是正交偏序集，当且仅当 p 的每个元素都是真。

证明。设 $p, q \in P$。首先假设 P 是补的。进一步，假设 $p \neq 0, 1$。则 $p \leq 1/2$ 将推出 $p \leq 1/2 \leq p'$，进而推出 $p = p \wedge p' = 0$，矛盾。对偶地，$p \geq 1/2$ 将推出 $p' \leq 1/2 \leq p$，进而推出 $p = p \vee p' = 1$，矛盾。这证明了 p 为真。反过来，假设 P 的每个元素都为真。则 $p, p' \leq q$ 蕴含 $q \geq 1/2$，进而蕴含 $q = 1$，从而说明 $p \vee p' = 1$。对偶地，$q \leq p, p'$ 蕴含 $q \leq 1/2$，进而蕴含 $q = 0$，从而说明 $p \wedge p' = 0$。因此 P 是补的。□

由于每个 S-概率代数都是 GFE，且每个 GFE 都是 GSE，这意味着每个 S-概率代数都是由真 S-概率构成的 GFE，也就是说，是一个补的 GFE；而这些是由真 S-概率构成的 GSE，即补的 GSE。

本文将刻画补的 GSE，其方式类似于数值事件代数：后者在同构意义下恰好是那些拥有全态集的正交模偏序集。我们将研究若干类 GSE，它们具有数值事件代数的显著特征，并各自构成量子逻辑。特别是，我们将讨论由可正交合成的 S-概率构成的偏序集，以及作为格的 GSE。

2 将一般数值事件集刻画为偏序集

定义 2.1. 设 $\mathbf{P} = (P, \leq, ', 0, 1)$ 是一个带有反单调对合的有界偏序集，且 $m\colon P \to [0, 1]$。那么 m 称为 $\mathbf{P}$ 上的态，如果它满足以下条件：

(i) $m(0) = 0$ 和 $m(1) = 1$，

(ii) p、$q \in P$ 和 $p \leq q$ 一起推出 $m(p) \leq m(q)$，

(iii) $m(p') = 1 - m(p)$ 对所有 $p \in P$。

设 M 是 $\mathbf{P}$ 上的一个状态集。那么 M 称为

(iv) 满若 p、$q \in P$ 和 $m(p) \leq m(q)$ 对所有 $m \in M$ 一起推出 $p \leq q$，

(v) 真若 $p \in P$、m_1、$m_2 \in M$、$m_1(p) \neq 0$ 和 $m_2(p) \neq 1$ 一起推出存在 m_3、$m_4 \in M$ 使得 $m_3(p) < 1/2 < m_4(p)$。

定理 2.2. 在同构意义下，真 S-概率的一般集合恰好是具有反单调对合且其状态集满且为真的有界偏序集。

证明. 首先，设 P 是真 S-概率的一般集合。那么 $\mathbf{P} = (P, \leq, ', 0, 1)$ 是一个带有正交补的有界偏序集。对每个 $s \in S$，定义 $m_s\colon P \to [0, 1]$，使得对所有 $p \in P$，$m_s(p) := p(s)$，并令 $M := \{m_s \mid s \in S\}$。设 $t \in S$。那么

(i) $m_t(0) = 0(t) = 0$ 和 $m_t(1) = 1(t) = 1$，

(ii) p，$q \in P$ 和 $p \leq q$ 共同蕴含 $m_t(p) = p(t) \leq q(t) = m_t(q)$，

(iii) $m_t(p') = p'(t) = 1 - p(t) = 1 - m_t(p)$ for all $p \in P$.

这表明 M 是 P 上的状态集。若对所有 $s \in S$， p、$q \in P$ 和 $m_s(p) \leq m_s(q)$，则对所有 $s \in S$， $p(s) \leq q(s)$，即 $p \leq q$。这证明 M 是满的。若 $p \in P$、s_1、$s_2 \in S$、$m_{s_1}(p) \neq 0$ 且 $m_{s_2}(p) \neq 1$，则 $p(s_1) \neq 0$ 且 $p(s_2) \neq 1$，因而 $p \neq 0$，1。由于 p 是真，存在 s_3、$s_4 \in S$ 使得 $p(s_3) < 1/2 < p(s_4)$，即 $m_{s_3}(p) < 1/2 < m_{s_4}(p)$，这表明 M 是真。总而言之，我们证明了 P 是一个有界偏序集，带有一个反单调对合，并具有一个满且真的状态集。

反过来，设 $\mathrm{P} = (P, \leq, ', 0, 1)$ 是一个有界偏序集，带有反单调对合，且具有一个满且真的状态集 S。定义 $f\colon P \to [0,1]^S$，使得对所有 $p \in P$ 和所有 $s \in S$，$(f(p))(s) := s(p)$。由于 S 是 P 上的全态集，对于每个 p， $q \in P$ 等价于 $f(p) \leq f(q)$。这表明 f 是从 $(P, \leq)$ 到 $(f(P) \leq)$ 的同构，因而也是从 $(P, \leq, 0, 1)$ 到 $(f(P) \leq, 0, 1)$ 的同构。此外，我们有

$$(f(p'))(s) = s(p') = 1 - s(p) = 1 - (f(p))(s) = (f(p))'(s)$$

对所有 $p \in P$ 和所有 $s \in S$，因此对所有 $p \in P$， $f(p') = (f(p))'$。这保证 f 是从 P 到 $(f(P) \leq, ', 0, 1)$ 的同构。由于 P 是一个带有反单调对合的有界偏序集， $f(P)$ 是 S-概率的一般集合。假设 $p \in P \setminus \{0, 1\}$。那么存在 $s_1, s_2 \in S$，使得 $p(s_1) \neq 0$ 且 $p(s_2) \neq 1$，由此可推得 $s_1(p) = (f(p))(s_1) \neq 0$ 且 $s_2(p) = (f(p))(s_1) \neq 1$。由于 S 是 P 上的真状态集，存在 $s_3, s_4 \in S$，使得 $s_3(p) < 1/2 < s_4(p)$，即 $(f(p))(s_3) < 1/2 < (f(p))(s_4)$，这确保 $f(p)$ 是真的。因此， $f(P)$ 中的任意元素都是真。综上， $f(P)$ 是真 S-概率的一般集合。

□

3 正交可组合数值事件的偏序集

定义 3.1。 若一个近广义事件域（NGFE）是一个GSE P，并且具有如下<*style id='property'*>性质： $P \setminus \{0\}$ 中的每个非（P， $\leq$）的原子元素都是 $P \setminus \{0\}$中两个元素之和，则称其为近广义事件域。

引理 3.2。 设 P 是一个GFE。则 P 是一个NGFE。

证明。 设 $p \in P \setminus \{0\}$ 不是 P 的原子。则存在某个 $q \in P$ 使得 $0 < q < p$。现在有 $p = q +$ （$p - q$），其中 q， $p - q \in P \setminus \{0\}$。 □

定义 3.3。 设 P 是一个GSE 且 $p \in P$。若元素 p 在0 与 p之间不存在无限链，则称其具有有限长度。若GSE P 中的每个元素都具有此<*style id='property'*>性质，则称该GSE 具有有限长度。

引理 3.4。 设 P 是一个NGFE，且 $p \in P \setminus \{0\}$ 具有有限长度。则 p 是 P中有限多个原子的和。

证明。 如果 p 是 P的一个原子，问题便已解决。否则，存在 p_1， $p_2 \in P \setminus \{0\}$，使得 $p_1 + p_2 = p$。如果 p_1 和 p_2 是 P的原子，问题便已解决。如果 p_1 不是 P的原子，那么存在 p_3， $p_4 \in P \setminus \{0\}$，使得 $p_3 + p_4 = p_1$，并且我们有 $p = p_3 + p_4 + p_2$。如果 p_2 不是 P的原子，那么存在 p_5， $p_6 \in P \setminus \{0\}$，使得 $p_5 + p_6 = p_2$，并且我们有 $p = p_1 + p_5 + p_6$。由于p具有有限长度，这一过程必定会在有限步后终止。 □

定义 3.5。 对于一个GSE P，我们定义如下性质：

（P） p、 $q \in P$和 $p \leq q$共同推出 $q - p \in P$。

引理 3.6. 设 P 是一个GSE。则以下条件等价：

（i） P 是一个GFE,
（ii） P 具有性质（P）。

证明。设 p、 $q \in P$。
（i） $\Rightarrow$ （ii）：这已在
[4] 中证明。（ii） $\Rightarrow$
（i）：
假设 $p \perp q$，即 $p \leq 1 - q$。由于 P具有性质（P），我们得到（$1 - q$） $- p \in P$，因此 $p + q = 1 -$ （（$1 - q$） $- p$） $\in P$。 □

定理 3.7. 设 P 是一个有限长度的 NGFE 。那么以下条件等价：

(i) P 是一个 S-概率代数，(ii) P 的任意有限个两两正交原子的和都属于 P。

证明。
(i) $\Rightarrow$ (ii):
如引言中所述， P 中两个正交元素的和与它们的上确界相同。现在设 n 是一个整数 > 1，假设 P中 n 个两两正交元素的和在 P中与它们的上确界相同，并设 P中的 $a_1, \ldots, a_{n+1}$ 两两正交。由于对所有 $i = 1, \ldots, n$ 都有 $a_i \leq a'_{n+1}$，因此我们有 $a_1 + \ldots + a_n = a_1 \vee \cdots \vee a_n \leq a'_{n+1}$，从而 $a_1 + \ldots + a_{n+1} =$(($a_1 + \ldots + a_n$) $+ a_{n+1}$ =($a_1 \vee \cdots \vee a_n$) $\vee a_{n+1} \in P$。这表明 P对有限个正交元素的求和封闭。

(ii) $\Rightarrow$ (i):
令 $p, q, r \in P$，并假设 $p \perp q \perp r \perp p$。如果 p, q, r中有两个为 0，则 $p + q + r \in \{p, q, r\} \subseteq P$。因此，假设 p, q, r中至多有一个等于 0。设 $r = 0$。根据引理 3.4，存在正整数 k和 m，以及 P 的原子 $a_1, \ldots, a_{k+m}$，使得

$$p = a_1 + \ldots + a_k,$$
$$q = a_{k+1} + \ldots + a_{k+m}.$$

由于 $p+q \leq 1$， P 的原子 $a_1, \ldots, a_{k+m}$两两正交，因此 $p+q+r = p + q = a_1 + \ldots + a_{k+m} \in P$。情形 $p = 0$和 $q = 0$可以用类似的方法处理。现在假设 $p, q, r \neq 0$。同样，根据引理 3.4，存在正整数 k、 m和 n，以及 P 的原子 $a_1, \ldots, a_{k+m+n}$，使得

$$p = a_1 + \ldots + a_k,$$
$$q = a_{k+1} + \ldots + a_{k+m},$$
$$r = a_{k+m+1} + \ldots + a_{k+m+n}.$$

由于 $p+q$， $q+r$， $r+p \leq 1$原子 a_1，.....， a_{k+m+n}两两正交，表明 $p + q + r = a_1 + \ldots + a_{k+m+n} \in P$。 □

尽管“具体逻辑”这一概念主要用于可由集合表示的正交模偏序集，但我们也将这一概念用于可由某个集合的子集表示的 NGFE。

定义 3.8。 设 P 是一个有限长度的NGFE ，且对于 $p \in P \setminus \{0\}$ ， A_p 是 P 的一组原子，根据引理 *3.4*，它们的和为 p 。那么我们为 P 定义如下性质：

(U) 对于每个 p， $q \in P \setminus \{0\}$等价于 $A_p \subseteq A_q$，其中 A_p、 A_q任意。

命题 3.9。 设 P 是一个具有性质 (U)的有限长度NGFE 。那么每个$p \in P \setminus \{0\}$ 都是 P 的原子的唯一和，并且 P 是一个具体逻辑。

证明。 假设 p 既是 A_p 中元素的和，也是原子集合 A_p中元素的和。那么，由于 $p \leq p$ ，我们有 $A_p \subseteq A_p$ 和 $A_p \subseteq A_p$ ，这意味着 A_p 是唯一的。因此，对每个 $p \in P \setminus \{0\}$ 都有 $A_p \subseteq A_1$ ，这表明每个 p 都可以表示为 A_1 的一个子集，符合具体逻辑的定义。 □

4 数值事件的格

对于 GFE P，我们定义以下性质，该性质最初是针对 S-概率代数提出的（参见 [3] 和 [4]）。

(T) 对所有 p， $q \in P$，存在唯一的 $r \in P$满足 $r \geq p$， q 且 $(r-p) \wedge (r-q) = 0$。

定理 4.1. *GFE* P 具有性质 （T）当且仅当它是一个格。

请注意，在 [4] 中，这一结论已针对 S-概率代数得到了证明。下面证明的第一部分沿用这一思路。

定理 *4.1* 的证明。 设 P为一个 GFE，且 p， $q \in P$。首先假设 P具有性质（T）。令 r 表示根据性质（T）存在的 P 中的唯一元素。于是$r \geq p$， q。假设 $s \in P$且 $s \geq p$， q。由于 p， $q \perp s'$，我们有 $p + s'$， $q + s' \in P$。根据性质（T），存在某个 $t \in P$ 满足

$$t \geq p + s', q + s' \text{ and } (t - (p + s')) \wedge (t - (q + s')) = 0.$$

现在 $t - s' \geq p, q$ 并且 $((t - s') - p) \wedge ((t - s') - q) = 0$ ，这表明 $t - s' = r$ ，从而 $s = r + t' \geq r$。因此我们得到 $r = p \vee q$。根据 [4], P是一个格。反过来，假设P是一个格。于是 $p, q \leq p \vee q$。令 $u \in P$，并假设 $u \leq (p \vee q) - p, (p \vee q) - q$。那么 $p, q \leq (p \vee q) - u$ ，从而 $p \vee q \leq (p \vee q) - u$ ，因此 $u = 0$。这表明 $((p \vee q) - p) \wedge ((p \vee q) - q) = 0$。现在假设 $v \in P$ 满足 $p, q \leq v$ 以及 $(v-p) \wedge (v-q) = 0$。那么 $p \vee q \leq v$。假设 $p \vee q < v$。那么 $0 < v - (p \vee q) \leq v - p, v - q$，这与 $(v - p) \wedge (v - q) = 0$矛盾。这表明 $v = p \vee q$，因此 $p \vee q$ 是 P中满足 $r \geq p, q$ 以及 $(r - p) \wedge (r - q) = 0$的唯一元素 r。这证明了性质（T）。 □

推论 4.2。 令 P 为一个由正元素组成、具有有限长度并满足性质 （P）、（U）和（T）的 NGFE 。则 P 是一个数值事件代数，并且是一个具体逻辑，即一个可以由集合表示的正交模格。若 P 是有限的，则 P 是一个布尔代数。

证明。 根据性质（P）， P 是一个 GFE （引理 3.6）；由于性质（T）， P是一个格（定理 4.1）；又因为 P 的元素都是真元素， P 是一个正交补格（命题 1.2）。根据 [4] ，一个作为正交补格的 GFE 是一个 S-概率代数，当且仅当性质（T）对所有 p、q 成立，其中 $p \perp q$ 在此处得到保证，甚至对所有的 p、$q \in P$对都成立。因此， P 是一个 S-概率代数；由于性质（U），它是一个具体逻辑（命题 4.3）。我们指出，一个 S-概率代数是一个正交模偏序集（参见 [9]）；当 P 是有限的时， P 甚至是一个布尔代数，因为根据命题 3.9，每个 $p \in P \setminus \{0\}$ 表示为原子之和的方式都是唯一的；并且如 [3] 所示，对于有限的 S-概率代数，这意味着该 S-概率代数是一个布尔代数。□

命题 4.3。 设 P 是一个正交补格 *GSE*。则 P 是一个S-概率代数，因而是一个正交模格，当且仅当对所有 p， $q \in P$， $p \leq q$蕴含 $q - p = q \wedge p'$。

证明。 假设 $q - p = q \wedge p'$ 对于 $p \leq q$成立。则 $q - p \in P$，因为 $q \wedge p' \in P$，因此根据引理 3.6， P 是一个 GFE。此外，在该 GFE 中， $p \perp r$ 对于 p， $r \in P$ 蕴含 $r' - p = r' \wedge p'$，由此我们得到 $r + p = (r' - p)' = (r' \wedge p')' = r \vee p$。正如引言中已经提到的，具有如下性质的 GFE： $p \perp r$ 蕴含 $p+r = p \vee r$，是一个 S-概率代数，因而是一个正交模格。反之，任何作为格的 S-概率代数都是一个正交补格 GSE，并具有如下性质： $p \leq q$ 蕴含 $q - p = q \wedge p'$ （参见 [3]）。 □

接下来我们讨论 GFE 的原子；对于有限结构，尤其可以更方便地将其用于算法用途。

引理 4.4。 设 P 是一个正交模格 *GFE*，且 $\{a_1, \ldots, a_n\}$ 是 P 的一组两两正交原子。如果从 $m = 2$ 逐步到 $m = n$ （这将确保所考虑的原子和在 P 中存在），（$a_1 + \ldots + a_m$） $\wedge$ （$a_1 + \ldots + a_{m-1}$）$' = a_m$，那么 $a_1 + \ldots + a_m = a_1 \vee \cdots \vee a_m$。

证明。 我们对 n 使用归纳法。对于 $n = 2$， $a_1 + a_2 \in P$，因为 P 是一个 GFE，且由 $a_1 \leq a_1 + a_2$、 P 的正交模性以及（$a_1 + a_2$） $\wedge\, a_1' = a_2$，我们可推出 $a_1 + a_2 = a_1 \vee$ （（$a_1 + a_2$） $\wedge\, a_1'$） $= a_1 \vee a_2$。假设 $b := a_1 + \ldots + a_{n-1} = a_1 \vee \cdots \vee a_{n-1}$，则 $b + a_n \in P$，因为 $a_1 \vee \cdots \vee a_{n-1} \leq a_n'$；并且如同处理 $n = 2$ 时那样，我们得到 $a_1 + \ldots + a_n = b + a_n = b \vee$ （（$b + a_n$） $\wedge\, b'$） $= b \vee a_n = a_1 \vee \cdots \vee a_n$。 □

对于一个正交模格 GFE 中的两两正交原子集合 $\{a_1, \ldots, a_n\}$，我们定义如下性质：

(SJ) $(a_1 + \ldots + a_m) \wedge (a_1 + \ldots + a_{m-1})' = a_m$ for $m = 2, \ldots, n$,

根据引理 4.4，这确保了 $a_1 + \ldots + a_m = a_1 \vee \cdots \vee a_m$ 对于 $m = 2$、**.....**、 n。
如果一个 GFE P 是正交模格，并且其中任意一组两两正交的元素 P 都具有性质（SJ），我们就称它具有性质（SJ）。

定理4.5。 设 P 是由真元素构成、具有有限长度的GFE，且为或模格。当且仅当 P 具有性质(SJ)时， P 是一个 S-概率代数。

证明。 首先假设 P是一个 S-概率代数，令 $b_1, \ldots, b_n$为 P 中的两两正交元素，并假设 $2 \leq m \leq n$。众所周知且易于证明，$b_1 + b_2 = b_1 \vee b_2$；再对 n作归纳可得 $b_1 + \ldots + b_n = b_1 \vee \cdots \vee b_n$。现在我们有

$$\begin{aligned}&(b_1 \vee \cdots \vee b_{m-1}) + ((b_1 \vee \cdots \vee b_m) \wedge (b_1 \vee \cdots \vee b_{m-1})') = \\ &= (b_1 \vee \cdots \vee b_{m-1}) \vee ((b_1 \vee \cdots \vee b_m) \wedge (b_1 \vee \cdots \vee b_{m-1})') = b_1 \vee \cdots \vee b_m = \\ &= (b_1 \vee \cdots \vee b_{m-1}) + a_m\end{aligned}$$

这证明了性质（SJ）。反过来，假设 P 具有性质（SJ）。参见引理 3.4， P 的每个元素都是 P中若干原子的和。这些原子两两正交，因为其中任意两个原子的和都是 ≤ 1。如果 $p \perp q$ 对 p， $q \in P$ 可表示为原子之和

$$\begin{aligned}p &= a_1 + \ldots + a_m, \\ q &= a_{m+1} + \ldots + a_{m+t},\end{aligned}$$

则 $p + q = a_1 + \ldots + a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{m+t}$，其中所有 a_i两两不同（因为不可能出现某个公共原子 a 对应的 $2a \leq 1$ ）且两两正交。因此$p + q = p \vee q$，由此可推知 P 是一个 S-概率代数，正如引言中所述。 □

参考文献

[1] E.G. Beltrametti 和 M.J. M␣aczy´nski，关于经典概率与非经典概率的刻画。《数学物理杂志》32 (1991), 1280–1286。[2] E.G. Beltrametti 和 M.J. M␣aczy´nski：关于概率的刻画：贝尔不等式的一种推广。《数学物理杂志》34(1993), 4919–4929。[3] G. Dorfer、D. Dorninger 和 H. L¨anger，关于数值事件空间的结构。Kybernetica46 (2010), 971–981。[4] D. Dorninger，关于广义事件域的结构。Contr. General Algebra20(2012), 29-34。[5] D. Dorninger 和 H. L¨anger，关于由量子力学测量产生的有界偏序集。《国际理论物理杂志》55(2016), 4453–4461。[6] D. Dorninger 和 H. L¨anger，产生数值事件结构的量子测量。《应用数学与物理杂志》6 (2018), 982–996。[7] D. Dorninger 和 H. L¨anger，关于数值事件的布尔偏序集。Adv. Computational Intelligence1 (2021), Article:4 (7 pp.)。[8] D. Dorninger、H. L¨anger 和 M.J. M␣aczy´nski，数值事件的布尔性质与类贝尔不等式。《数学物理报告》85 (2020), 147–162。[9] M.J. M␣aczy´nski 和 T. Traczyk，对具有全态集的正交模偏序集的一种刻画。Bull. Acad. Polon. Sci. S´er. Sci. Math. Astronom. Phys.21 (1973), 3–8。

[10] P. P t´ak，具体量子逻辑。《国际理论物理杂志》**39** (2000), 827–837 .

[11] J. Tkadlec，《部分可加测度与正交偏序集的集合表示》。纯粹与应用代数杂志**86** (1993)，79–94。

作者地址：

Dietmar Dorninger 维也纳工业大学 数学与地理信息学院 离散数学与几何研究所 维德纳大街 8-10号 1040 维也纳 奥地利

Helmut L¨anger 维也纳工业大学 数学与地理信息学院 离散数学与几何研究所 维德纳大街 8-10号 1040 维也纳 奥地利，以及帕拉茨基大学奥洛穆茨 理学院 代数与几何系 17. listopadu 12 771 46 奥洛穆茨 捷克共和国
helmut.laenger@tuwien.ac.at