arXiv:2601.00803v1 [math.CT] 12 Dec 2025

隧道几何与增殖逻辑

源自静态世界形而上学的范畴等价

Dmytro
Sukhov 根特大学

12.12.2025

摘要

我们证明，隧道几何 与增殖逻辑之间存在严格范畴等价。这两种框架都源自一种静态世界形而上学，在其中，生成是原初的，而局部性则是涌现的。隧道几何提供了一种基于干涉、开集框架和 Lawvere 度量的无点内涵几何。增殖逻辑则提供了一种基于区分、代价、场景和焦点的生成语义学。一旦将二者表述为框架–超滤子–Lawvere 三元组（Ω X， d），这两种理论便完全相同。借助 Stone对偶性和度量富集，我们定义函子 F： **TGeom** $\to$**PLog** 和 G： **PLog** $\to$ **TGeom**，并证明F 和 G 构成范畴的严格等价。谱等价定理通过酉变换将隧道拉普拉斯算子与增殖拉普拉斯算子对应起来。导论部分从静态世界形而上学出发，阐释这两种框架的理论动机，并说明当运动被理解为结构干涉而非点的遍历时，芝诺悖论如何得到解决。

目录

1 引言： 静态世界与芝诺问题再探 **3**
1.1 没有悖论的芝诺.3 1.2 概述与主要结果.3

2 隧道框架空间 **3**
2.1 Lawvere 度量与框架.3 2.2 隧道框架空间.4 2.3 从隧道到框架.4 2.4 **TGeom** 中的态射.5

3 增殖F 框架空间 5
3.1 增殖基.5 3.2 场景与焦点.5 3.3 **PLog** 中的态射.6

4 范畴等价 6
4.1 函子构造.6 4.2 严格等价.7

5 谱对偶
75.1 细化关系.7 5.2 拉普拉斯算子.8 5.3 幺正等价.8**6 示例与模型 9 7 结论 9**7.1 后续研究方向.
9

1 引言：静态世界与芝诺问题再探

经典形而上学假定，世界由随时间变化的点构成。在《静态形而上学》 [1], 所构建的静态世界本体论中，基本实在是一个完整、无时间性且结构细节极其丰富的结构。其核心论点如下：

M1. 潜能的首要性： 绝对实在是一种未分化的潜能 .

M2. 世界作为静　态结构： 每个可能世界都是一种无时间性且完全实现的构型 .

M3. 主体性　流动时间： 时间流动是一种认知投射，而非本体论原初项。

M4. E　嵌入式认知： 意识在结构上融入了世界。

1.1 无悖论的芝诺

在这一本体论下，芝诺悖论消解了。箭并非“穿过”瞬间而“运动”；一分为二只是描述性的，而非程序性的；阿基里斯不需要无限步。运动对应的是结构干涉关系，而非点的遍历。隧道几何与增殖逻辑为这一形而上学提供了数学表达：生成由强度、干涉和生成性区分编码；局部性则源自超滤子。

1.2 概述与主要结果

本文在两个各自独立提出的框架之间建立了严格范畴等价：

- **隧道几何** （第 2 节），一种基于原始结构干涉的无点几何，这些原始结构被称为隧道；
- **增殖逻辑** （第 3 节），一种基于区分及其组合成本的生成语义学。

我们的主要结果如下：

1. 两种理论都可由框架—超滤子—劳韦尔三元组忠实表示（定义 2.3 和 3.5）；2. 范畴 **TGeom** 和 **PLog** 严格等价（定理 4.3）；3. 谱算子（拉普拉斯算子）酉等价（定理 5.5）。

2 隧道框架空间

2.1 Lawvere 度量与框架

定义 2.1 （Lawvere 度量）。 在此处考虑的对称情形下，集合 X 上的 *Lawvere* 度量 是一个函数 d : $X \times X \to [0, \infty]$ ，满足：

1. $d(p, p) = 0$, 2. $d(p, q) = d(q, p)$, 3. $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$,

对于所有 $p, q, r \in X$。

定义 2.2 （框架）。 框架 是满足无限分配律的完备格 Ω :

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i)$$

对所有 $a \in \Omega$ 及其族 $\{b_i\}_{i \in I} \subseteq \Omega$ 均成立。

框架为无点拓扑中的开集提供代数结构。框架 Ω 上的超滤子集合 Ult(Ω) 继承了一种自然拓扑（Stone 拓扑），其开集与框架元素相对应。

2.2 隧道框架空间

定义 2.3 （隧道框架空间）。 隧道框架空间 是一个三元组 (Ω_X, X, d_X)，其中：

1. Ω_X 是一个框架；
2. $X = \text{Ult}(\Omega_X)$ 配备 Stone 拓扑；
3. d_X 是定义在 X 上的 Lawvere 度量，使得对于任意 $p \in X$ 和 $\varepsilon > 0$，度量球

$$B_\varepsilon(p) := \{q \in X \mid d_X(p, q) < \varepsilon\}$$

都是 Stone 拓扑中的开集；反过来，每个基本 Stone 开集都包含其每个点周围的一个度量球。

备注 2.4。 第三个条件确保度量拓扑与 Stone 拓扑重合。对于通过原始结构的干涉构造的隧道几何，这由[2]中的定理 4.2保证。

2.3 从隧道到框架

令 $\mathcal{I}$ 为一组称为隧道的原始结构。每个隧道 $T \in \mathcal{I}$ 都配备一个强度$\Lambda(T) \in [0, \infty]$ 以及一个干涉运算 $\bowtie$: $\mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightharpoonup \mathcal{I}$，当存在公共子结构时定义。

命题 2.5 （框架生成）。 令 $\mathcal{I}$ 为一组带有干涉运算 $\bowtie$ 和强度 Λ： $\mathcal{I} \to [0, \infty]$的隧道。对于每个 $T \in \mathcal{I}$ 和 $\varepsilon > 0$，定义结构邻域

$$\mathcal{U}_\varepsilon(T) = \{T' \in \mathcal{I} \mid \Lambda(T \bowtie T') < \varepsilon\}.$$

该集合

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{U}_\varepsilon(T) \mid T \in \mathcal{I}, \varepsilon > 0\}$$

在任意并和有限交下生成一个框架Ω_X 。

证明。 $\mathcal{B}$ 中元素的任意并都可作为上确界良好定义。有限交对应于取最小强度以及隧道的幺半群复合，从而得到可由 $\mathcal{B}$ 表示的元素。无限分配律源于交在集合论意义上对并满足分配律，并结合干涉在幺半群运算下的稳定性。

□

注 2.6. 对于 $T \in \mathcal{I}$，记 $\iota(T)$ 为由 T 生成的基本开集，即 $\iota(T) = \bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{U}_\varepsilon(T)$。对于超滤子 $p \in X$，我们使用简写 $T \in p$ 表示 $\iota(T) \in p$。

点作为 Ω_X 上的超滤子出现。Lawvere 度量由干涉强度的下确界诱导：

$$d_X(p,q) = \inf\bigl\{\varepsilon > 0 \;\bigm|\; \exists T, T' \in \mathcal{I} :\; T \in p,\; T' \in q,\; \Lambda(T \bowtie T') < \varepsilon\bigr\}.$$

2.4 TGeom 中的态射

定义 2.7（**TGeom**中的态射）。 TGeom 中的态射 $f\colon (\Omega_X, X, d_X) \to (\Omega_Y, Y, d_Y)$ 是一个框架同态 $f^\sharp : \Omega_Y \to \Omega_X$，使得诱导的超滤子映射

$$f_*(p) = \{V \in \Omega_Y \mid f^\sharp(V) \in p\}$$

满足非扩张条件：

$$d_Y(f_*(p), f_*(q)) \le d_X(p,q)$$

对所有 $p, q \in X$。

这定义了隧道帧空间的范畴 $\mathbf{TGeom}$。

3 增殖帧空间

3.1 增殖基

定义 3.1（增殖基）。 一个增殖基 是由以下部分组成的三元组（D、 C、 $\cdot$）：

1. 区分的集合 D；
2. 一个代价函数 C： $D \to [0, \infty]$;
3. 一个部分复合运算 $\cdot$： $D \times D \rightharpoonup D$，在有定义的情况下满足结合律。

区分代表基本区分行为。复合 $d \cdot e$ （若有定义）代表通过 e细化 d 所得到的区分。代价衡量区分的强度或复杂性。

3.2 场景与焦点

定义 3.2（场景）。 给定一个增殖基（$D, C, \cdot$），对每个 $d \in D$和 $\varepsilon > 0$定义邻域

$$N_\varepsilon(d) = \{e \in D \mid C(d \cdot e) < \varepsilon\}.$$

场景框架 Σ_Y是包含所有 $N_\varepsilon(d)$（其中 $d \in D$ 且 $\varepsilon > 0$）的最小框架。

定义 3.3（焦点）。 焦点 集合定义为

$$\Phi_Y = \mathrm{Ult}(\Sigma_Y),$$

赋予 Stone 拓扑的 Σ_Y上超滤子的集合。

备注3.4。福 r $d \in D$ 和 $\phi \in \Phi_Y$，我们将 $d \in \phi$ 作为 $N_\varepsilon(d) \in \phi$ 的简写，其中存在某个 $\varepsilon > 0$.

焦点上的 Lawvere 度量定义为

$$\rho_Y(\phi,\psi)=\inf\big\{\varepsilon>0 \;\big|\; \exists d,e\in D:\ d\in\phi,\ e\in\psi,\ d\cdot e \text{ defined},\ C(d\cdot e)<\varepsilon\big\}.$$

定义 3.5（增殖框架空间）。 增殖框架空间 是一个三元组（Σ_Y， Φ_Y， ρ_Y），其中 Σ_Y 是场景框架， $\Phi_Y=\mathrm{Ult}(\Sigma_Y)$，且 ρ_Y 是诱导的 Lawvere 度量，其拓扑与 Stone 拓扑一致。

3.3 PLog 中的态射

定义 3.6（**PLog** 中的态射）。 PLog 中的态射 g：$(\Sigma_Y,\ \Phi_Y,\ \rho_Y)\to(\Sigma_Z,\ \Phi_Z,\ \rho_Z)$ 是一个框架同态 $g^\sharp:\Sigma_Z\to\Sigma_Y$，使得诱导映射 $g_*:\Phi_Y\to\Phi_Z$ 满足

$$\rho_Z(g_*(\phi),g_*(\psi))\le\rho_Y(\phi,\psi)$$

对所有 $\phi,\ \psi\in\Phi_Y$ 均成立。

这定义了增殖框架空间的范畴 **PLog** 。

4 范畴等价

我们现在 确立主要结果：**TGeom** 和 **PLog** 作为范畴是严格等价的 s.

4.1 函子的构造

命题 4。 **1**（函子 F）。 存在一个函子 F： **TGeom** $\to$ **PLog** 定义如下 *s:*

- 对象上： F（Ω_X, X, d_X） $=$（Σ_Y, Φ_Y, ρ_Y） 其中

$$\Sigma_Y:=\Omega_X,\quad \Phi_Y:=X,\quad \rho_Y:=d_X,$$

  并且，增殖基通过设定 $D:=\mathcal{I}$（隧道集）、 $C:=\Lambda$（隧道强度），以及由隧道上的幺半结构诱导的复合来构造。

- 在态射上： F（$f^\sharp$）：$=f^\sharp$（相同的框架同态）。

证明。 框架结构、超滤子空间和度量可直接对应。由于非扩张性在两个范畴中的表述相同，因此得以保持。函子性则由态射上的恒等作用推出。

□

命题 4.2（函子 G）。 存在一个函子 G： **PLog** $\to$**TGeom** ，定义如下：

- 在对象上： G（Σ_Y、 Φ_Y、 ρ_Y） $=$（Ω_X、 X、 d_X），其中

$$\Omega_X:=\Sigma_Y,\quad X:=\Phi_Y,\quad d_X:=\rho_Y,$$

  隧道对应于区分，强度对应于代价。

- 关于态射： $G(g^\sharp)$：$=g^\sharp$（相同的框架同态）。

证明。 与命题 4.1 对称。 □

4.2 严格等价

定理 4.3（范畴等价）。 函子 $F : \mathbf{TGeom} \to \mathbf{PLog}$ 和 $G : \mathbf{PLog} \to \mathbf{TGeom}$ 构成范畴的严格等价:

$$G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathbf{TGeom}}, \qquad F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathbf{PLog}}.$$

证明。 我们分三步验证这一等价。**步骤 1：对象**。 对于任意 $(\Omega_X, X, d_X) \in \mathbf{TGeom}$，我们有

$$\begin{aligned}(G \circ F)(\Omega_X, X, d_X) &= G(F(\Omega_X, X, d_X)) \\ &= G(\Omega_X, X, d_X) \quad \text{(by definition of } F) \\ &= (\Omega_X, X, d_X) \quad \text{(by definition of } G).\end{aligned}$$

类似地，对于任意 $(\Sigma_Y, \Phi_Y, \rho_Y) \in \mathbf{PLog}$,

$$(F \circ G)(\Sigma_Y, \Phi_Y, \rho_Y) = (\Sigma_Y, \Phi_Y, \rho_Y).$$

步骤 2：态射。 框架同态 $f^\sharp : \Omega_Y \to \Omega_X$ 若满足由隧道度量诱导的超滤子映射的非扩张性，那么由于度量和拓扑已被识别，它仍是满足增殖度量下相同条件的框架同态。因此， F 和 G 在态射集上均表现为恒等映射。**步骤 3：函子性**。 由于两个函子在态射上的作用均为恒等映射，它们显然保持复合与恒等态射。两个三角恒等式 $G \circ F = \mathrm{Id}$ 和 $F \circ G = \mathrm{Id}$ 均严格成立，而不只是相差一个自然同构。 □

推论 4.4。 隧道几何和增殖逻辑是同一数学结构的两种表述。在一个框架中证明的每个定理，在另一个框架中都有相应的定理。

5 谱对偶

现在我们证明，这种等价性延伸到了谱层面，从而将隧道拉普拉斯算子与增殖拉普拉斯算子对应起来。

5.1 细化关系

定义 5.1（细化关系）。 对于区分 d， $e \in D$，若以下条件之一成立，则记作 $e \preceq d$：

1. 存在 $x \in D$，使得 $d = e \cdot x$ 有定义，且 $C(e) \leq C(d)$;
2. 存在 $x \in D$，使得 $d = x \cdot e$ 有定义，且 $C(e) \leq C(d)$。

我们称 e 是 d 的直接细化（记作 $e \prec d$），当且仅当 $e \preceq d$，且不存在 $f \in D$ 使得 $e \preceq f \preceq d$ 和 $f \neq e$， d。

引理 5.2。 在恒等 $D \cong \mathcal{I}$ 下，细化关系 $\preceq$ 对应于隧道上的子结构关系，该关系由隧道范畴中的态射给出。

证明概要。 在 $D \cong \mathcal{I}$ 下，部分复合 $\cdot$ 对应于隧道上的幺半结构 $\otimes$。隧道范畴中的一个态射 $U \to T$ 表示 U 是 T的子结构，这对应于 $U \preceq T$，因为 U可以复合以生成 T。代价条件 $C(U) \leq C(T)$ 可由强度函子 Λ 相对于结构包含的单调性推出。 □

5.2 拉普拉斯算子

定义 5.3（隧道拉普拉斯算子）。令 $\mathcal{H}_T = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{|T\rangle \mid T \in \mathcal{I}\}$ 为以隧道为指标的标准正交基所张成的希尔伯特空间。隧道拉普拉斯算子 定义如下：

$$\widehat{\Delta}_T|T\rangle = \sum_{U \to T} (\Lambda(T)\Lambda(U))|U\rangle,$$

其中求和遍历所有直接子结构 $U \to T$。

定义 5.4（增殖拉普拉斯算子）。令 $\mathcal{H}_P = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{|d\rangle \mid d \in D\}$ 为以区分为索引的标准正交基所张成的希尔伯特空间。增殖拉普拉斯算子 定义为：

$$\widehat{\Delta}_P|d\rangle = \sum_{e \prec d} (C(d) - C(e))|e\rangle,$$

其中求和遍历所有直接细化 $e \prec d$。

5.3 幺正等价

定理 5.5（谱等价）。令 $\mathcal{H}_T$ 和 $\mathcal{H}_P$ 为上述定义的希尔伯特空间。在由等价函子 F 和 G 给出的识别 $D \cong \mathcal{I}$ 下，定义线性映射 $U: \mathcal{H}_T \to \mathcal{H}_P$为：

$$U|T\rangle = |F(T)\rangle.$$

那么 U 可扩展为满足以下条件的酉算子

$$U\widehat{\Delta}_T U^* = \widehat{\Delta}_P.$$

证明。**步骤 1：** U 是酉的。</style}映射 U 由一组标准正交基之间的双射定义，因此可扩展为酉算子。

步骤 2：矩阵元相同。 根据引理 5.2，直接细化 $e \prec d$ 与直接子结构 $U \to T$一一对应。此外，在此对应关系下，$C(d) = \Lambda(T)$，且 $C(e) = \Lambda(U)$。因此，

$$\begin{aligned}\langle d'|\widehat{\Delta}_P|d\rangle &= \sum_{e \prec d} (C(d) - C(e))\delta_{d',e} \\ &= \sum_{U \to T} (\Lambda(T) - \Lambda(U))\delta_{T',U} \\ &= \langle T'|\widehat{\Delta}_T|T\rangle,\end{aligned}$$

其中 $T' = G(d')$，$T = G(d)$。**步骤 3：共轭公式。** 由于相应基下的矩阵元相同，因此我们有

$$\langle\phi|U\widehat{\Delta}_T U^*|\psi\rangle = \langle U^*\phi|\widehat{\Delta}_T|U^*\psi\rangle = \langle\phi|\widehat{\Delta}_P|\psi\rangle$$

对所有 ϕ，$\psi \in \mathcal{H}_P$均成立，从而证明了该算子方程。 □

推论 5.6。 隧道拉普拉斯算子和增殖拉普拉斯算子具有相同的谱、相同的特征向量（在识别 U 下），以及相同的函数演算。特别是，针对其中一个算子证明的谱定理、热核渐近和半经典展开，同样适用于另一个算子。

6 示例与模型

示例 6.1（图模型）。 设 $G = (V,\ E)$ 是一个加权图。将边 $e \in E$定义为隧道，其强度为 $\Lambda(e) = w(e)$（边权重）。当 e_1 和 e_2 共享一个顶点时，定义它们之间的干涉，其强度等于共同关联边的权重之和。涌现点 X对应于顶点 V（更准确地说，对应于某些一致的边邻域族）。Lawvere 度量还原出最短路径距离。隧道拉普拉斯算子与图拉普拉斯算子一致。在增殖式解释中，区分是边，代价是权重，而复合是路径拼接。

示例 6.2（区间域模型）。 令 $\mathcal{I}$ 为闭区间 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ 的集合。强度为区间长度： $\Lambda([a, b]) = b - a$。干涉 $[a, b] \bowtie [c, d]$ 定义为：若交集非空则为 $[a, b] \cap [c, d]$，其强度等于交集的长度。涌现点对应于实数（或嵌套区间的极大一致族）。Lawvere 度量恢复欧几里得距离。在增殖逻辑中，区分是区间，代价是长度，而复合是交集或串联（取决于具体解释）。

示例 6.3（Locale 模型）。 令 Ω 为一个空间框架（locale）。正则元 $a \in \Omega$ 充当隧道。强度 $\Lambda(a) = -\log \mu(a)$，其中 μ 是 locale 上的测度。干涉 $a \bowtie b = a \wedge b$（框架中的交）。涌现空间 $X = \mathrm{pt}(\Omega)$ 恢复 locale 的点空间。该构造为经典 locale 理论提供了度量细化。

7 结论

我们已确立隧道几何与增殖逻辑之间的严格范畴等价。这两种框架表达的是同一种数学结构：配备了相容原始结构（隧道或区分）的框架–超滤子–Lawvere 三元组。这种等价阐明了静态世界的本体论，展示了无点几何与生成语义如何构成同一形式体系的对偶方面，并通过结构干涉消解了芝诺悖论。谱等价（定理 5.5）表明，两种理论的动力学内容——由各自的拉普拉斯算子编码——完全相同，这意味着物理或计算解读在隧道／增殖对偶性下应保持不变。

7.1 后续研究方向

有若干扩展方向值得研究：

1. **物理解读：** 这种等价是否延伸到时空模型，将隧道视为测地结构，将区分视为因果关系？谱理论能否为量子引力或涌现时空提供一个框架？ 2. **量子结构：** 谱等价能否阐明几何方法与逻辑方法在量子基础方面的联系？希尔伯特空间结构和幺正等价表明存在自然的量子解释。 3. **计算语义学：** 增殖式框架空间能否为构造型类型论提供自然的指称语义？区分的生成结构与证明构造相呼应。 4. **高阶范畴：** 这种等价能否提升到 2-范畴或 ∞-范畴的情形，其中框架同态之间的态射带有额外结构？

5. **测度与积分：** Lawvere 度量结构能否支持自然的积分理论？强度/成本函数表明存在可测结构。

致谢

作者感谢同事和匿名审稿人对本作早期版本提出的宝贵意见。

参考文献

[1] Dmytro Sukhov, 《静态形而上学：永恒世界的本体论》，Zenodo（2025），。[2] Dmytro Sukhov, 《隧道几何中的邻域框架与内部逻辑》，准备中的手稿（2025）。[3] Dmytro Sukhov, 《隧道几何中的谱理论》，准备中的手稿（2025）。[4] Dmytro Sukhov, 《增殖逻辑基础》，准备中的手稿（2025）。[5] P. T. Johnstone, 《*Stone* 空间》，《剑桥高等数学研究丛书》，剑桥大学出版社（1982）。[6] S. Vickers, 《通过逻辑研究拓扑学》，《剑桥理论计算机科学丛书》，剑桥大学出版社（1989）。[7] F. W. Lawvere，度量空间、广义逻辑与闭范畴，《米兰数学与物理研讨会报告》**43**（1973），135–166。[8] S. Abramsky 和 A. Jung，域理论，载于《计算机科学逻辑手册》，第3卷，牛津大学出版社（1994），1–168。