arXiv:2601.00824v1 [math.FA] 23 Dec 2025

缺陷余循环与有限过程幺半群的结构

Paolo Vella

摘要

我们研究有序效应空间上的正次幺映射，并引入缺陷 $d(T) = u - T(u)$；该缺陷在复合运算下满足余循环恒等式。仅利用这一恒等式和初等序论论证（无需谱分解或依赖维数的技术），我们证明，在任何有限复合封闭的正次幺映射族中，缺陷经迭代最终会被消去（定理 4.1），且存在关于族大小的显式线性上界。在持存性假设（非零正元素映射后仍为非零正元素）下，我们证明此类映射族中的所有映射都必须是幺正的。对于有限维矩阵代数上的完全正映射，我们进一步证明一个精确的、依赖维数的上界：稳定化指标满足 $n_T \le d$，其中 d 为希尔伯特空间维数，且该上界与族的大小无关。移位信道构造可达到这一上界。这些结果从结构上解释了为何过程理论中的有限操作体系无法维持系统性的信息损失，并对量子基础和范畴概率具有应用价值。

1 引言

在量子理论和范畴概率的操作方法中，物理过程被建模为保持特定代数结构与序结构的正映射。一个核心问题是：操作谱系的有限性会对其中可包含的过程施加什么约束?

本文引入了一种简单而强大的工具——缺陷余循环，并用它证明，在复合运算下封闭的有限过程集合无法维持系统性的“泄漏”。更准确地说，若 A 是一个在复合运算下封闭的正次幺映射有限集，那么对于每个$T \in A$，缺陷 $d(T) = u - T(u)$ 在迭代下最终会被消除：存在 n 使得$T^n(d(T)) = 0$。从操作层面看，这意味着经过 n 次 T 迭代后，进一步迭代不再降低成功概率 —— 该过程“已吸收了所有将会吸收的损失”。

证明完全初等，仅依赖于：

(i) the cocycle identity $d(T \circ S) = d(T) + T(d(S))$,

(ii) 正性与尖锥条件,

(iii) A的有限性。

无需谱理论、维数界或连续性假设。这种“无谱”特性使该结果适用于多种情境：有限维量子操作（包括量子信道）、随机矩阵以及抽象的 effectus 理论。

在附加的持存性假设（非零正元素始终保持非零）下，我们将结论提升为幺元性：每个 $T \in A$ 都必须满足 $d(T) = 0$，这意味着 $T(u) = u$。这与一种物理直觉相呼应：以可检测的方式不会“损失”概率质量的过程，必须保持归一化。

对于矩阵代数 M_d 上的完全正映射，我们证明了一个尖锐的维数界：$n_T \le d$，且该界与族的大小 $|A|$ 无关。证明首先表明，缺陷轨道生成了一个角，在其上动力学确实是幂零的；随后应用关于幂零完全正映射的初等线性代数界（借助 Kraus 字和严格核过滤）。移位信道的构造表明，此界是最优的。

说明：有限复合封闭族。 贯穿全文的一个关键假设是，各映射属于一个有限复合封闭 族 A。这意味着 A 是有限的，并且 $S,\ T \in A$ 蕴含 $S \circ T \in A$。一个关键推论是：如果 $T \in A$，那么 $\{T, T^2, T^3, \dots\} \subseteq A$，因此该集合是有限的。因此，轨道 $\{T^k(u)\}$必然最终重复，而这正是推动稳定化的机制。读者不应将其与“单个映射构成有限集”这一显而易见的事实混淆；复合封闭性迫使轨道有限性成立。

相关工作。 缺陷余循环隐含于序贯效应代数 [8] 以及 effectus 理论中对核的范畴化处理 [2]。我们的贡献在于将余循环恒等式确立为关键机制，并仅从有限性出发推导出强有力的结构性结论。

定理 4.1 类似于经典结果：有限半群中的每个元素都具有一个幂等幂 [9]。然而，两者的机制不同：在抽象半群中，有限性迫使序列最终呈周期性，而在这里，正性与序结构的相互作用迫使其稳定化，而不仅仅是呈周期性。缺陷余循环将代数中的抽屉原理论证转化为有序锥中关于湮灭的陈述。

提纲。 第2 节确立有序效应空间的记号和基本性质。第 3节引入缺陷并证明余循环恒等式。第4 节包含主要定理及其推论。第 5节给出例子与反例。第 6 节发展并行复合下的缺陷理论。第7 节通过渐近缺陷将理论推广到无限维。第8 节确立量子操作的依赖维数的界，包括完全正映射的锐界 $n_T \le d$。第 9 节讨论应用和开放问题。

2 预备知识

定义 2.1（有序效应空间）。 一个有序效应空间 是一个三元组 $(E, \le, u)$，其中：

(i) E 是一个实向量空间，

(ii) $\le$ 是 E 上的一个预序（自反且传递），并且与向量空间结构相容：$x \le y$ 蕴含 $x + z \le y + z$ 和 $\lambda x \le \lambda y$，对所有 $z \in E$ 和 $\lambda \ge 0$均成立，

(iii) $u \in E_+$ 是一个特殊的正元素，称为单位元。

正正锥为 $E_+ = \{x \in E :\ x \ge 0\}$，效应区间为 $[0, u] = \{x \in E :\ 0 \le x \le u\}$。

定义 2.2（尖锥）。正锥 E_+ 称为尖的，若 $E_+ \cap (-E_+) = \{0\}$，即 $x \ge 0$与 $-x \ge 0$ 同时成立意味着 $x = 0$。

备注 2.3（尖性与反对称性之间的关系）。如果 $\le$ 是一个偏序 （反对称的），那么尖性是自动满足的：$x \ge 0$ 和 $-x \ge 0$ 蕴含 $0 \le x \le 0$，因此由反对称性可得 $x = 0$。反过来，如果 E_+ 具有尖性，那么 $\le$ 是反对称的。因此，只有当 $\le$是一个真预序（不具反对称性）时，尖性才是一个非平凡的假设。我们明确陈述这一点

因为某些范畴论或效应论语境使用预序，而我们的结果适用于消去性质（引理 2.6）成立的所有情形。

备注 2.4。 我们不要求 u 是阿基米德意义下的序单位；我们只需要一个固定的 $u \in E_+$ 来定义次幺性。许多读者会将“效应空间”与序单位假设联系起来，但我们的结果在这个更一般的情形下同样成立。

备注 2.5（为何尖性是必要的）。 尖锥条件对我们的主要结果至关重要。若不满足该条件，下面的消去引理便不成立。作为一个具体反例，考虑$E = \mathbb{R}^2$ 及其非尖锥 $E_+ = \{(x,\ y)\colon\ x \geq 0\}$（一个半平面），它所诱导的预序并非反对称。因此，$(1,\ -1)$ 和 $(-1,\ 1)$ 都属于 E_+，它们的和为零，但二者都不为零。

引理 2.6 (尖锥消去)。 若 E_+ 是尖的，且 x_1、……、 $x_m \in E_+$ 满足 $x_1 + \cdots + x_m = 0$，则对所有 i，均有 $x_i = 0$ 。

等价地： E_+ 是尖的，当且仅当对于所有的 $x, y \geq 0$, $x + y = 0$ 都有 $x = y = 0$。

证明。 我们有 $x_1 = -(x_2 + \cdots + x_m)$。由于每个 $x_j \geq 0$，其和为 $x_2 + \cdots + x_m \in E_+$，因此$x_1 \in -E_+$。但根据假设， $x_1 \in E_+$，于是 $x_1 \in E_+ \cap (-E_+) = \{0\}$。对 m 应用归纳法即可完成证明。（等价性是显然的：$(\Rightarrow)$ 是 $m = 2$ 情形；$(\Leftarrow)$ 若 $x \in E_+ \cap (-E_+)$，则$x + (-x) = 0$，其中 $x, -x \geq 0$，因此 $x = 0$。）

□

定义 2.7 （正映射与次幺映射）。 设 $(E, \leq, u)$ 是一个有序效应空间。线性映射 $T\colon E \to E$ 满足：

(i) 若 $T(E_+) \subseteq E_+$，则称其为正的，即 $x \geq 0$ 推出 $T(x) \geq 0$;

(ii) 若 $T(u) \leq u$，则称其为次幺；

(iii) 若 $T(u) = u$，则称其为幺正。

引理 2.8 (单调性)。 若 T 是正的，则 T 是保序的： $x \leq y$ 推出 $T(x) \leq T(y)$。

证明。 若 $x \leq y$，则 $y - x \geq 0$，因此 $T(y - x) = T(y) - T(x) \geq 0$ 由正性得出。 □

3 缺陷余循环

定义 3.1 （缺陷）。 对于作用于 $(E, \leq, u)$ 上的次幺映射 T， Ti 的缺陷 s

$$d(T) = u - T(u).$$

由次幺性可知， $T(u) \leq u$，因此 $d(T) = u - T(u) \geq 0$。缺陷衡量了 $T(u)$ 与单位元之间的“差额”——在物理上，它表示终止概率、无点击结果，或丢失到环境中的信息。

引理 3.2 （余循环恒等式）。 对于作用于 $(E, \leq u)$ 上的正次幺映射 T, S，

$$d(T \circ S) = d(T) + T(d(S)).$$

证明。 直接计算：

$$\begin{aligned} d(T \circ S) &= u - T(S(u)) \\ &= u - T(u) + T(u) - T(S(u)) \\ &= d(T) + T(u - S(u)) \\ &= d(T) + T(d(S)). \end{aligned}$$

□

引理 3.3 (迭代余循环)。 对于正次幺映射 T 和 $n \geq 1$,

$$d(T^n) = \sum_{k=0}^{n-1} T^k(d(T)).$$

等价地,

$$u - T^n(u) = \sum_{k=0}^{n-1} T^k(d(T)).$$

证明。 对 n进行归纳。情形 $n = 1$ 显然成立: $d(T^1) = d(T) = T^0(d(T))$。对于归纳步骤,假设该公式对 n成立。那么由引理 3.2,

$$\begin{aligned} d(T^{n+1}) &= d(T \circ T^n) = d(T) + T(d(T^n)) \\ &= d(T) + T\left(\sum_{k=0}^{n-1} T^k(d(T))\right) \\ &= d(T) + \sum_{k=0}^{n-1} T^{k+1}(d(T)) \\ &= T^0(d(T)) + \sum_{k=1}^{n} T^k(d(T)) \\ &= \sum_{k=0}^{n} T^k(d(T)). \end{aligned}$$

□

备注 3.4（迭代的单调性）。 次幺性与正性共同意味着序列$\{T^k(u)\}_{k\geq 0}$单调递减。事实上,由次幺性可得 $T(u) \leq u$,对两边应用正的（因此保序的）映射 T,得到 $T^2(u) \leq T(u)$。由归纳法,

$$u \geq T(u) \geq T^2(u) \geq T^3(u) \geq \cdots$$

在轨道有限的任何情形下,这类单调序列都必定稳定。这一观察为定理 4.1 提供了直观解释。

4 主要结果

定理 4.1 （缺陷湮灭）。 设 $(E, \leq, u)$ 是一个具有尖正锥的有序效应空间。设 A 是作用于 E 的正次幺映射的有限集,且在复合运算下封闭。那么对于每个 $T \in A$,存在 $n \geq 1$ 使得

$$T^n(d(T)) = 0.$$

此外,稳定化指标满足 $n \leq |A|$。

证明。 由于 A 在复合和 $T \in A$下是闭合的,因此对于所有 $k \geq 1$,我们有 $T^k \in A$ 。因此,该集合

$$\{T^k(u) : k \geq 1\} \subseteq \{S(u) : S \in A\}$$

是有限的,其基数至多为 $|A|$。

根据抽屉原理，存在整数 $m > n \geq 1$，使得 $T^m(u) = T^n(u)$。令 $p = m - n \geq 1$。于是

$$T^n(u) = T^m(u) = T^{n+p}(u) = T^n(T^p(u)),$$

这给出 $T^n(u - T^p(u)) = 0$。

根据迭代余循环恒等式（引理 3.3），

$$u - T^p(u) = \sum_{k=0}^{p-1} T^k(d(T)).$$

由 T 的正性以及 $d(T) \geq 0$，每一项 $T^k(d(T)) \geq 0$ 都是如此。将正映射 T^n 作用于该和，得到

$$T^n(u - T^p(u)) = \sum_{k=0}^{p-1} T^{n+k}(d(T)) = 0.$$

By 引理 2.6 （尖锥消去），由于每个 $T^{n+k}(d(T)) \geq 0$，我们得到

$$T^{n+k}(d(T)) = 0 \quad \text{for all } k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

特别地，取 $k = 0$ 可得 $T^n(d(T)) = 0$。

关于这个界：轨道 $\{T^k(u) : k \geq 1\}$ 至多含有 $|A|$ 个元素。在 $|A| + 1$次迭代 $T^1(u)$ $T^2(u)$. . . , $T^{|A|+1}(u)$ 中，根据鸽巢原理必有重复。如果 $T^m(u) = T^n(u)$ 且 $m > n \geq 1$，那么 $n \leq |A|$。 □

备注 4.2（稳定化）。结论 $T^n(d(T)) = 0$ 等价于 $T^{n+1}(u) = T^n(u)$。事实上，由余循环恒等式，$T^{n+1}(u) = T^n(T(u)) = T^n(u - d(T)) = T^n(u) - T^n(d(T))$。因此，$T^n(d(T)) = 0$ 当且仅当 $T^{n+1}(u) = T^n(u)$，进而可推出对所有 $k \geq 0$，$T^{n+k}(u) = T^n(u)$。

定义 4.3（稳定化指标）。对于有限复合封闭族中的正次幺映射 T，其稳定化指标 为

$$n_T := \min\{n \geq 1 : T^n(d(T)) = 0\}.$$

根据定理 4.1，n_T 是良定义的，并满足 $n_T \leq |A|$。

备注 4.4（稳定化的操作性解释）。条件 $T^n(d(T)) = 0$ 具有明确的过程理论解释。以下命题等价：

(i) $T^n(d(T)) = 0$;

(ii) $T^{n+1}(u) = T^n(u)$（单位元轨道稳定）；

(iii) 对所有 $k \geq 0$，$T^{n+k}(u) = T^n(u)$（单位元轨道变为常量）；

(iv) 对于 $k \geq n$，“每增加一次迭代的损失” $T^k(d(T))$ 消失。

从操作层面看：经过 n 次迭代后，进一步迭代不会降低成功概率。过程已将“此后所有会吸收的损失”都吸收到一个稳定角中。

注 4.5（与有限半群理论的比较）。在任何有限半群中，幂最终都会变得周期：存在 n，$p \geq 1$ 使得 $T^{n+p} = T^n$。相比之下，我们的情形（有序空间上的正次幺映射）会产生稳定化：单位元轨道变为常数，而不只是周期变化。关键在于，次幺性使得 $\{T^k(u)\}$ 单调递减（注 3.4），因此轨道的周期性会迫使其保持不变。缺陷余循环明确呈现了这一记账过程，并给出了湮灭界。

注4.6（通过单调性的另一种证明）。定理 4.1 也可以不借助余循环展开，仅利用单调性和有限性来证明。由于 $\{T^k(u)\}$ 单调递减（注 3.4），且 $\{T^k(u) : k \geq 1\} \subseteq \{S(u) : S \in A\}$ 是有限的，该序列必定稳定：存在 n，使得 $T^n(u) = T^{n+1}(u)$，因此 $T^n(d(T)) = T^n(u) - T^{n+1}(u) = 0$。上文给出的余循环证明有一个优点，即明确展示了缺陷分解，并为第8节的角与幂零性分析提供了动机。

警告（预序的微妙之处）： 这一仅依赖“单调性”的论证隐含地用到了反对称性（等价地说，尖性）。在非反对称的真预序中，单调轨道可能最终呈周期性，而不变为常值——例如在不同的预序等价元素之间循环。通过引理2.6 给出的余循环证明之所以适用于预序，恰恰是因为它直接利用尖性迫使各加项为零。

备注4.7（关于尖性假设）。在定理4.1的证明中，尖性仅在引理2.6 中用于得出以下结论：若正元素之和等于零，则每个加项都为零。正如备注2.3所述，尖性等价于 $\leq$的反对称性，因此只有当 $\leq$ 是真预序时，这一假设才有实质意义。对于大多数应用（矩阵代数、随机映射等），$\leq$ 是偏序，因此尖性自动成立。

备注 4.8（尖性假设的用途）。为方便读者，我们总结一下本文中尖性假设出现的位置：

- **引理 2.6**（尖锥消去）：核心机制。
- **定理 4.1**：借助引理 2.6 得出加项均为零。
- **备注 4.6**：“仅用单调性”的替代证明隐含地用到了反对称性（等价于尖性）；若不满足这一条件，单调轨道可能形成循环。
- **定理 9.1**（第 9 节）：范畴公理化明确假设了尖锥。
- **第 8 节**：在有限维矩阵代数中，半正定锥是尖锥（这是自动满足的），因此尖性也隐含地成立。
- **第 7节**：冯·诺依曼代数情形使用忠实迹/态，它们会迫使系统具有尖性（如果 $\omega(x) = 0$ 对于正的 x成立，那么 $x = 0$）。

简而言之：尖性对于异质的预序向量空间而言才是非平凡的假设；所有标准的算子代数情形都会自动满足这一条件。

推论4.9（显式稳定化界）。 在定理 *4.1*的假设下，最小的n 使得 $T^n(d(T)) = 0$ 满足 $n \leq |A|$。如果 A 是一个子幺半群（即包含恒等元），那么$n \leq |A| - 1$。

证明。 第一个界由定理 4.1的证明得到。如果 A 包含恒等元，那么轨道 $\{T^k(u) : k \geq 0\}$ 包含 $T^0(u) = u$，因此该轨道从 $k = 0$开始至多有 $|A|$ 个元素，并且在第 $|A|$步之前会发生碰撞，从而得到 $n \leq |A| - 1$。

□

备注 4.10. 一般而言，界 $n \leq |A|$ 是精确的。考虑 $A = \{T, T^2, \ldots, T^{m-1}, 0\}$，其中 T是幂零的，且满足 $T^m = 0$，但 $T^{m-1} \neq 0$（由于 $T^m = 0$而复合封闭）。于是 $|A| = m$，并且满足 T^n的最小 n（$d(T)$) $= 0$ 恰好是 m。

持久性与幺元性

定义 4.11（持久性）. 正映射 $T\colon E \to E$ 称为持久的，如果

$$x > 0 \implies T(x) > 0,$$

其中 $x > 0$ 表示 $x \in E_+ \setminus \{0\}$（非零正元素）。等价地：$T$ 不会湮灭任何非零正元素。

备注 4.12（标准情形下的持久性）。注意：我们所说的“持久”（非零正 $\mapsto$非零正）弱于算子代数概念中的“严格正”或“正性改善”（$\mathrm{int}(E_+) \to \mathrm{int}(E_+)$）。我们使用“持久”一词以避免混淆。

对于 $\mathbb{R}^n$ 上的次随机矩阵，若采用分量序，持久性意味着所有元素都严格为正：$P_{ij} > 0$ 对所有 i，j。这比不可约性更强。对于海森堡图像中的量子信道 $\Phi^*(Y) = \sum_i V_i^* Y V_i$，只要 $\mathrm{span}\{V_i\} = M_d$（一个充分条件是某个 V_j 可逆），就具有持久性；有关正性改善条件，参见 [17]。

定理 4.13（持久性蕴含幺元性）。设 $(E, \leq, u)$ 是一个具有尖正锥的有序效应空间。设 A 是 E 上由正次幺映射组成的有限集，并且在复合运算下封闭。如果每个 $T \in A$ 都具有持久性，那么每个 $T \in A$ 都是幺正的。

证明。根据定理 4.1，对每个 $T \in A$，存在 $n \geq 1$ 使得 $T^n(d(T)) = 0$.

如果 $d(T) > 0$，那么根据 T 的持久性，我们有 $T(d(T)) > 0$，因此 $T^2(d(T)) > 0$，由归纳法可得，对所有 $n \geq 0$，$T^n(d(T)) > 0$。这与 $T^n(d(T)) = 0$ 矛盾。

因此 $d(T) = 0$，即 $T(u) = u$。 □

推论 4.14。由具有持久性的正次幺映射构成的有限子幺半群，其所有映射都是幺正映射。

角忠实性：幺元性的一个较弱条件

持久性条件相当强。现在我们引入一个较弱的条件，它仍能在有限复合封闭族中推出幺正性。

定义 4.15（角忠实性）。设 T 是 M_d 上具有有限稳定化指标 $n_T < \infty$ 和轨道支撑投影 $Q_T := \bigvee_{k<n_T} \mathrm{supp}(T^k(d(T)))$ 的正次幺映射。若满足以下条件，则称 T 是角忠实的

$$x \geq 0, \quad x \neq 0, \quad \mathrm{supp}(x) \leq Q_T \implies T(x) \neq 0.$$

定理 4.16（角忠实性蕴含幺正性）。设 T 是 M_d 上具有有限稳定化指标 $n_T < \infty$ 的完全正次幺映射。若 T 具有角忠实性，则 T 是幺正的。

证明。假设 $d(T) \neq 0$。由 n_T 的极小性可知，$T^{n_T-1}(d(T)) \neq 0$，而 $T^{n_T}(d(T)) = 0$。由于 $\mathrm{supp}(T^{n_T-1}(d(T))) \leq Q_T$，角忠实性蕴含 $T(T^{n_T-1}(d(T))) \neq 0$，这与 $T^{n_T}(d(T)) = 0$ 矛盾。 □

备注 4.17。该论证只需要存在 n，使得 $T^n(d(T)) = 0$；属于有限复合封闭族是一个充分假设（定理 4.1）。

命题 4.18（Kraus 判据：角忠实性）。设 $T(X) = \sum_i V_i^* X V_i$ 在 M_d上是 *CP* 映射，且具有轨道支撑投影 Q。那么 T 是角忠实的，当且仅当

$$QH \cap \bigcap_i \ker(V_i^*) = \{0\}.$$

等价地：对于每个 $0 \neq v \in QH$，都存在一个 i，使得 $V_i^* v \neq 0$。

证明。 对于秩一 $x = vv^*$，且满足 $v \in QH$：

$$T(vv^*) = \sum_i V_i^* vv^* V_i = \sum_i |V_i^* v\rangle\langle V_i^* v|,$$

当且仅当对所有 i，$V_i^* v = 0$ 为零。由于每个正的 x（其支撑 $\mathrm{supp}(x) \le Q$）都是这类秩一元素之和，因此，当且仅当不存在非零 $v \in QH$ 属于 $\bigcap_i \ker(V_i^*)$ 时，角忠实性成立。 □

备注 4.19（幺正性条件层级）。 在有限复合封闭族中，确保幺正性的条件层级如下：

$$\text{persistence (Thm 4.13)} \implies \text{corner-faithfulness} \implies \text{unitality}.$$

持久性要求 T 将非零正元素映射为非零正元素；角忠实性则仅对支撑在轨道角 Q_T 上的元素有此要求。Kraus 判据表明，角忠实性等价于 $\{V_i^*\}$ 在 QH 上的公共核为零。

命题 4.20（投影忠实性蕴含幺正性）。 设 $T : M_d \to M_d$ 是具有有限稳定化指标 $n_T < \infty$ 的完全正次幺映射。假设：

对每个 对于非零投影 $0 \neq p \le Q_T$，有 $T(p) \neq 0$.（投影忠实性）

那么 T 具有角忠实性，因此是幺正的。

证明。设 $0 \neq x \ge 0$，且 $\mathrm{supp}(x) \le Q_T$。将 $x = \sum_j \lambda_j p_j$ 写成谱分解，其中$\lambda_j > 0$且 $0 \neq p_j \le Q_T$。由投影忠实性可知，对于每个 j，$T(p_j) \neq 0$且 $T(p_j) \ge 0$。因此$T(x) = \sum_j \lambda_j T(p_j) \neq 0$。由此，$T$具有角忠实性，而其幺元性由定理 4.16 得出。 □

备注 4.21（投影忠实性 $\Leftrightarrow$ Kraus 公共核条件）。 根据命题 4.18，投影忠实性等价于

$$Q_T H \cap \bigcap_i \ker(V_i^*) = \{0\}.$$

事实上，若一个非零的 $v \in Q_T H$属于公共核，则 $p = |v\rangle\langle v| \le Q_T$满足 $T(p) = 0$。反过来，若对于某个非零投影 $p \le Q_T$，$T(p) = 0$，则 p的值域包含这样一个 v。因此，对于完全正映射，投影忠实性与角忠实性等价。

5 例子与反例

例 5.1（标量情形）。 设 $E = \mathbb{R}$ 带有锥 $E_+ = [0, \infty)$和单位元 $u = 1$。正次幺映射是乘以某个 $\lambda \in [0, 1]$的映射，其缺陷为 $d(T_\lambda) = 1 - \lambda$。

对于 $\lambda \in (0, 1)$，有 $T_\lambda^n(d(T_\lambda)) = \lambda^n(1 - \lambda)$，对于有限的 n，它始终不为零。这说明定理 4.1 中的有限性假设是必要的。

然而，如果我们取 $A = \{T_0, T_1\}$（这类映射中唯一的有限复合封闭集是 $\{T_0\}$、$\{T_1\}$和 $\{T_0, T_1\}$），那么确实有 $T_0(d(T_0)) = 0$，且 $d(T_1) = 0$。

例 5.2（缺陷消灭但非幺）。令 $E = \mathbb{R}^2$ 具有标准锥 $E_+ = \{(x, y) : x, y \ge 0\}$，单位元为 $u = (1,1)$。考虑投影

$$T(x, y) = (x, 0).$$

则 T 是正的、次幺的（因为 $T(u) = (1,0) \leq (1,1) = u$），且 $d(T) = (0,1)$。我们有

$$T(d(T)) = T(0,1) = (0,0) = 0,$$

因此 $T^1(d(T)) = 0$，满足定理 4.1 关于 $n = 1$ 的结论。

然而，T不是持久的：$(0,\ 1) > 0$，但 $T(0,\ 1) = 0$。并且 T不是幺正的。这表明 s:

（i）定理 4.1 （缺陷湮灭）的结论在缺乏持久性的情况下并不蕴含幺元性。

（ii）定理 4.13 中的持存性假设是必要的。

例 5.3 （随机矩阵）。设 $E = \mathbb{R}^n$ 带有分量序，单位元为 $u = (1,\ \ldots,\ 1)$。行随机矩阵作为正映射作用。若矩阵 P的每一行元素之和至多为 1，则称其为次随机矩阵；若每一行元素之和恰为 1，则称其为随机矩阵。

根据定理4.1，有限的次随机矩阵复合封闭集必须具有这样的性质：每个矩阵的缺陷最终都会被消去。

对于持久性条件：相对于标准锥（逐分量非负性），次随机矩阵 P 是持久的（在锥上严格正），当且仅当它的所有元素都严格为正，即对于所有 $i,\ j,\ P_{ij} > 0$。事实上，若某个元素 $P_{ij} = 0$，则取 $x = e_j$ （第 j 个标准基向量），可得 $(Px)_i = 0$，这与严格正性矛盾。

此条件强于不可约性。如果 A 中的所有矩阵都满足此条件，那么根据定理4.13，它们都必须是随机矩阵。

例 5.4 （量子操作）。设 H 是一个有限维希尔伯特空间，$E = B(H)_{\text{sa}}$ 是自伴算子构成的实向量空间，其锥 E_+ 为半正定算子，单位元 $u = I$ 为恒等元。

量子操作（迹非增完全正映射） $\Phi : B(H) \to B(H)$ 在效应上诱导出对偶映射Φ^* （海森堡图像）。映射 Φ^* 是正的且次幺；当且仅当 Φ 保迹时，它才是幺正的（即，Φ 严格意义上是量子信道）。

缺陷 $d(\Phi^*) = I - \Phi^*(I)$ 表示“损失”算子。定理 4.1 指出，在任何由此类操作构成的有限复合封闭族中，经过迭代后，损失最终会被消去。

6 并行复合

现在我们研究缺陷在张量积下的行为，张量积用于刻画独立过程的并行复合。

设定

设 $(E_1, \leq, u_1)$ 和 $(E_2, \leq, u_2)$ 是有序效应空间。假设我们有一个张量积 $E_1 \otimes E_2$，它仍是一个有序效应空间，单位元为 $u_1 \otimes u_2$，并满足：$x_1 \geq 0$ 且 $x_2 \geq 0$ 蕴含$x_1 \otimes x_2 \geq 0$。对于正次幺映射 $T_1 : E_1 \to E_1$ 和 $T_2 : E_2 \to E_2$，用 $T_1 \otimes T_2$ 表示其在 $E_1 \otimes E_2$ 上的诱导映射。注意，$T_1 \otimes T_2$ 是次幺的，因为 $(T_1 \otimes T_2)(u_1 \otimes u_2) = T_1(u_1) \otimes T_2(u_2) \leq u_1 \otimes u_2$。

备注 6.1（张量锥假设）。假设 $x_i \geq 0$ 蕴含 $x_1 \otimes x_2 \geq 0$，这指定了我们使用哪种张量锥。一般而言，有序向量空间中存在多种彼此不等价的张量锥。我们的结果适用于任何在此意义下保持正性的张量积。

定义 6.2（成功）。对于作用于 $(E, \leq, u)$ 上的次幺映射 T，T 的成功为

$$s(T) = T(u).$$

因此 $d(T) = u - s(T)$。

命题 6.3（成功的乘法性）。成功在张量积下具有乘法性：

$$s(T_1 \otimes T_2) = s(T_1) \otimes s(T_2).$$

证明。直接计算可得：

$$s(T_1 \otimes T_2) = (T_1 \otimes T_2)(u_1 \otimes u_2) = T_1(u_1) \otimes T_2(u_2) = s(T_1) \otimes s(T_2). \qquad \square$$

命题 6.4（并行组合下的缺陷）。张量积的缺陷满足：

$$d(T_1 \otimes T_2) = d(T_1) \otimes u_2 + u_1 \otimes d(T_2) - d(T_1) \otimes d(T_2).$$

等价地，

$$d(T_1 \otimes T_2) = u_1 \otimes d(T_2) + d(T_1) \otimes s(T_2).$$

证明。对于第一种形式，写作 $s_i = u_i - d_i$：

$$\begin{aligned} d(T_1 \otimes T_2) &= u_1 \otimes u_2 - s(T_1) \otimes s(T_2) \\ &= u_1 \otimes u_2 - (u_1 - d_1) \otimes (u_2 - d_2) \\ &= u_1 \otimes u_2 - u_1 \otimes u_2 + u_1 \otimes d_2 + d_1 \otimes u_2 - d_1 \otimes d_2 \\ &= d_1 \otimes u_2 + u_1 \otimes d_2 - d_1 \otimes d_2. \end{aligned}$$

对于第二种形式，注意 $u_2 - d_2 = s(T_2)$，因此

$$d_1 \otimes u_2 - d_1 \otimes d_2 = d_1 \otimes (u_2 - d_2) = d_1 \otimes s(T_2). \qquad \square$$

备注 6.5（容斥）。命题6.4 中的第一种形式有一种容斥解释：并行系统的总体“失效”是第一个组件（第二个组件运行时）的失效，加上第二个组件（第一个组件运行时）的失效，再减去被重复计算的两者同时失效的情况。

并行复合下的稳定化

对于有限复合封闭族中的 T，令 n_T 表示满足 $T^n(d(T)) = 0$ 的最小 $n \geq 1$（即稳定化指标）。

定理 6.6（并行复合界）。如果 T 和 S 的稳定化指标分别为 n_T 和 n_S，那么

$$n_{T \otimes S} \leq \max(n_T, n_S).$$

证明。恒等元 $(T \otimes S)^k = T^k \otimes S^k$ 根据张量积的函子性成立（两边都是对 $(x_1, x_2) \mapsto T^k(x_1) \otimes S^k(x_2)$ 的唯一双线性延拓）。利用这一点以及命题 6.4的第二种形式：

$$(T \otimes S)^k(d(T \otimes S)) = T^k(u_1) \otimes S^k(d(S)) + T^k(d(T)) \otimes S^{k+1}(u_2).$$

对于 $k \geq \max(n_T, n_S)$：

- $S^k(d(S)) = 0$ 因为 $k \geq n_S$,
- $T^k(d(T)) = 0$ 因为 $k \geq n_T$。

因此 $(T \otimes S)^k(d(T \otimes S)) = 0$。 □

备注 6.7（操作性解释）。 定理 6.6表明，并行复合不会使稳定时间超过较慢组件的稳定时间。一个已经停止泄漏的子系统，不会因与另一个系统并行运行而重新引入泄漏。

推论 6.8。 如果 A_1 和 A_2 分别是定义在 E_1 和 E_2 上的有限复合封闭族，并且 $A_1 \otimes A_2 = \{T_1 \otimes T_2 : \ T_i \in A_i\}$ 是复合封闭的，那么

$$\max_{T \in A_1 \otimes A_2} n_T \leq \max\left(\max_{T_1 \in A_1} n_{T_1}, \max_{T_2 \in A_2} n_{T_2}\right).$$

代数结构

缺陷余 循环以互补的方式与顺序复合和平行复合相互作用 s:

复合	成功	缺陷
顺序（$T \circ S$）	$s(TS) = T(s(S))$	$d(TS) = d(T) + T(d(S))$
并行（$T \otimes S$）	$s(T \otimes S) = s(T) \otimes s(S)$	容斥

成功对两种复合都是同态（对 $\otimes$是乘法性的，对 $\circ$是等变的）。缺陷满足顺序复合的余循环条件，以及并行复合的容斥律。这种代数结构天然存在于具有“部分性”或“终止性”概念的对称幺半范畴中，例如 effectus 理论。在范畴论术语中，effectus 中的核构成一个幺半谓词变换器，而缺陷的容斥律体现了效应谓词的德摩根结构。

7 无限维空间中的渐近缺陷

在无限维情形中，有限步稳定化通常会失败：即使对于性质良好的映射，轨道 $\{T^n(u)\}$ 也可能是无限的。然而，单调性观察（备注3.4）表明，自然的替代方案是渐近稳定化。

序完备情形

定义 7.1（序完备效应空间）。 有序效应空间 $(E, \leq, u)$ 若满足以下条件，则称为序完备： E 中的每个有界单调网都有上确界（等价地，也有下确界）。特别地，有界单调序列都有下确界和上确界。

定义 7.2（序连续映射）。 若正映射 $T : E \to E$ 保持有界递减网的下确界，则称其为序连续（或正规）：对于任意递减网 (x_α)，若 $\inf_\alpha x_\alpha = x$，则有 $\inf_\alpha T(x_\alpha) = T(\{v17)$。

例 7.3. 在冯·诺依曼代数 M 中，效应空间 $E = \{a \in M_{\mathrm{sa}} : \ 0 \leq a \leq I\}$ 在超弱拓扑下是序完备的。正规完全正映射（按冯·诺依曼代数的意义）是序连续的；关于冯·诺依曼代数序结构的标准事实，参见 [13] 。

渐近缺陷

定义 7.4（最终成功与渐近缺陷）。 对于序连续的正次幺映射 T，定义在序完备效应空间 $(E, \leq, u)$ 上的最终成功

$$v = \inf_{n\geq 0} T^n(u)$$

以及 渐近缺陷

$$d_\infty(T) = u - v = \sup_{n\geq 0}(u - T^n(u)).$$

定理 7.5 (不动点)。 设 T 是一个序完备效应空间上的序连续正次幺映射。那么，最终成功 $v =$ 下确界$_n\, T^n(u)$ 是 T 的不动点：

$$T(v) = v.$$

证明。 由于 T 是序连续的，且 $(T^n(u))_{n\geq 0}$ 是递减的，

$$T(v) = T\left(\inf_{n\geq 0} T^n(u)\right) = \inf_{n\geq 0} T^{n+1}(u) = \inf_{n\geq 1} T^n(u) = \inf_{n\geq 0} T^n(u) = v,$$

其中，最后一个等式成立是因为 $T^{n+1}(u) \leq T^n(u)$，所以对 $n \geq 1$ 取下确界等于对 $n \geq 0$ 取下确界（该序列递减，且额外项 $T^0(u) = u$ 是最大的）。

□

定理 7.6 (无穷望远镜)。 在相同假设下，渐近缺陷满足

$$d_\infty(T) = \sup_{n\geq 1} \sum_{k=0}^{n-1} T^k(d(T)).$$

当 E 另外还是一个完备格（或更一般地，当相关的上确界存在时），这可以写成

$$d_\infty(T) = \bigvee_{k=0}^{\infty} T^k(d(T)).$$

证明。 根据迭代余循环恒等式（引理 3.3），

$$u - T^n(u) = \sum_{k=0}^{n-1} T^k(d(T)).$$

对 n 取上确界：

$$d_\infty(T) = \sup_{n\geq 0}(u - T^n(u)) = \sup_{n\geq 1} \sum_{k=0}^{n-1} T^k(d(T)).$$

□

定理 7.7（渐近缺陷的不动点方程）。 渐近缺陷满足不动点方程

$$d_\infty(T) = d(T) + T(d_\infty(T)).$$

证明。 由 $v = T(v)$ 和 $d_\infty = u - v$：

$$d(T) + T(d_\infty) = (u - T(u)) + T(u - v) = u - T(u) + T(u) - T(v) = u - T(v) = u - v = d_\infty.$$ □

备注 7.8（无穷远处的余循环）。 不动点方程 $d_\infty = d(T) + T(d_\infty)$ 是迭代余循环恒等式的“$n = \infty$”版本。它表明，总累积缺陷等于即时缺陷加上总缺陷在 T 作用下的像。

与有限稳定化的关系

命题 7.9（有限稳定化作为特例）。 如果存在 n_0 使得 $T^{n_0}(d(T)) = 0$，那么 $v = T^{n_0}(u)$ 且 $d_\infty(T) = \sum_{k=0}^{n_0-1} T^k(d(T))$。

证明。根据注 4.2，$T^{n_0}(d(T)) = 0$ 意味着对所有 $k \geq 0$，$T^{n_0+k}(u) = T^{n_0}(u)$。因此，递减序列 $(T^n(u))$ 在 n_0 处稳定，从而得到 $v = \inf_n T^n(u) = T^{n_0}(u)$。$d_\infty$ 的公式由定理 7.6 得出。 □

推论 7.10。 在定理*4.1*的有限维情形中，渐近缺陷等于有限和 $d_\infty(T) = \sum_{k=0}^{n-1} T^k(d(T))$ 其中 $n \leq |A|$ 是稳定化指标。

物理解释

渐近缺陷 $d_\infty(T)$ 表示无限迭代过程中累积损失的最大值。用量子信息的术语来说：

- $v = \inf_n T^n(u)$ 是“最终存活概率”——指经过任意多次过程作用后仍然存留的效应。
- $d_\infty = u - v$ 即“总泄漏”——最终逃逸到环境中的概率质量。

不动点方程 $d_\infty = d(T) + T(d_\infty)$ 有明确的操作性解释：总泄漏等于即时泄漏，加上再经过一步后总泄漏的变化。

冯·诺依曼代数中的收敛

在冯·诺 依曼代数的情形下，单调收敛提供了强有力的拓扑结果 .

命题 7.11（超弱和 σ-强收敛）。 设 M 是一个冯·诺依曼代数，且T： $M \to M$ 是一个正规正次幺映射。那么：

(i) 该序 列 $(T^n(I))_{n\geq 0}$ 强收敛（因而超弱收敛）到 $v =$ 下确界$_n\, T^n(I)$.

(ii) 部分和 $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} T^k(d(T)) = I - T^n(I)$ *(*由引理 *3.3)* 强收敛 σ（因而超弱收敛）到 $d_\infty(T) = I - v$。

证明。 (i) 序列 $(T^n(I))$ 单调递减，且以下界 0 为界。在冯·诺依曼代数中，有界单调网强收敛到其下确界。

(ii) 由于 $a_n = I - T^n(I)$，序列 (a_n) 单调递增，且以上界 I 为界。根据单调收敛，$a_n \to \sup_n a_n = d_\infty$ 在强拓扑下。 □

备注 7.12。 超弱收敛可由 σ-强收敛推出，因为在有界集上，σ-强拓扑比超弱拓扑更细。

范数收敛

范数收敛需要附加假设。自然的判据涉及谱半径。

定义 7.13（泄漏子空间）。 对于巴拿赫序空间E上的正次幺映射 T，其泄漏子空间 为

$$W_T = \operatorname{span}\{T^k(d(T)) : k \geq 0\}.$$

命题 7.14（通过谱半径实现范数收敛）。设 T 是巴拿赫序空间 E 上的有界正次幺映射。若 $T|_{W_T}$ 的谱半径满足 $r(T|_{W_T}) < 1$，则$\sum_{k=0}^{\infty} T^k$（$d(T) < 1$范数收敛。

证明。由于 $r(T|_{W_T}) < 1$，诺伊曼级数 $\sum_{k\geq 0}(T|_{W_T})^k$在 W_T 上按算子范数收敛。由于 $d(T) \in W_T$，级数 $\sum_{k\geq 0} T^k(d(T))$ 按范数收敛。 □

推论 7.15 (压缩判据)。若存在 $0 < c < 1$ 使得 $\|T(x)\| \leq c\|x\|$ 对所有 $x \in W_T$ 均成立，则 $r(T|_{W_T}) \leq c < 1$，并且

$$\left\| d_\infty - \sum_{k=0}^{n-1} T^k(d(T)) \right\| \leq \frac{c^n}{1-c}\|d(T)\|.$$

命题 7.16（由若尔当结构决定的收敛速率）。设 E 是一个有限维巴拿赫序空间，且 T: $E \to E$ 是一个带有泄漏子空间 W_T 的正次幺映射。设 $A = T|_{W_T}$ 的谱半径为 $r = r(A) < 1$，并设 m 为模为 r 的特征值中最大若尔当块的大小。则存在 $C > 0$，使得对所有 $n \geq 1$，

$$\left\| d_\infty(T) - \sum_{k=0}^{n-1} T^k(d(T)) \right\| \leq C \cdot n^{m-1} r^n.$$

证明。标准的若尔当标准形估计给出 $\|A^n\| \leq C' n^{m-1} r^n$，其中 $C' > 0$。由于 $(I-A)^{-1} = \sum_{k\geq 0} A^k$收敛，且 $d_\infty - \sum_{k=0}^{n-1} T^k(d(T)) = A^n(I-A)^{-1}d(T)$，我们有

$$\left\| d_\infty - \sum_{k=0}^{n-1} T^k(d(T)) \right\| \leq \|A^n\| \cdot \|(I-A)^{-1}\| \cdot \|d(T)\| \leq C \cdot n^{m-1} r^n.$$ □

备注 7.17。当 $A = T|_{W_T}$ 可对角化时（例如，当 T 在适当意义下为自伴时），我们有 $m = 1$，且收敛是纯指数的：$O(r^n)$。多项式前因子 n^{m-1}仅源于谱半径处的非平凡若尔当块。

引理 7.18 (忠实泛函压缩蕴含谱隙)。设 T 是序巴拿赫空间 E上的一个正映射，并令 $W_T =$ 张成 $\{T^k(d(T)): \ k \geq 0\}$。假设存在一个忠实的正泛函 ω 定义在 W_T 上（即，对所有 $0 \neq x \in W_T^+$，均有 $\omega(x) > 0$），以及一个常数 $0 < c < 1$，使得

$$\omega(T(x)) \leq c\,\omega(x) \quad for\ all\ x \in W_T^+.$$

那么 $r(T|_{W_T}) \leq c < 1$。

证明。由正性可知，对于所有 $x \in W_T^+$ 和 $n \geq 0$，$\omega(T^n(x)) \leq c^n \omega(x)$。规范半范数 $|y|_\omega :=$inf $\{\lambda > 0 : -\lambda u \leq y \leq \lambda u\}$（其中 u 是 W_T 的序单位，在有限维空间中存在）满足$|T^n(y)|_\omega \lesssim c^n |y|_\omega$。因此 $\|T^n|_{W_T}\|^{1/n} \to r \leq c < 1$。 □

备注 7.19。忠实收缩条件 $\omega(T(x)) \leq c\,\omega(x)$ 是一种非交换李雅普诺夫判据：泛函 ω 在泄漏子空间上经由 T 作用后一致递减。这一点可在存在忠实正规态的算子代数情形中验证（例如在 I 型因子或超有限代数上）。

引理 7.20（I 型李雅普诺夫判据作为算子不等式）。设 H 是一个希尔伯特空间，$\mathcal{M} = B(H)$，且 $T: \ \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是正规完全正且次幺的。设 $\sigma > 0$ 是一个严格正迹类算子，实现忠实正规态 $\omega_\sigma(X) =$Tr(σX)。那么，对于固定的 $c \in (0,1)$，以下条件等价：

(i) $\omega_\sigma(T(X)) \le c\,\omega_\sigma(X)$ 对所有 $X \ge 0$ 都成立；

(ii) $T_*(\sigma) \le c\,\sigma$ 在迹类序下，其中 T_* 是预对偶映射。

如果 $T(X) = \sum_i V_i^* X V_i$（*Kraus* 形式），那么 $T_*(\sigma) = \sum_i V_i \sigma V_i^*$，因此 *(ii)* 是半正定不等式

$$\sum_i V_i \sigma V_i^* \le c\,\sigma.$$

证明。对于 $X \ge 0$,

$$\omega_\sigma(T(X)) = \mathrm{Tr}(\sigma\, T(X)) = \mathrm{Tr}(T_*(\sigma)\, X),$$

根据 T与 T_*之间的定义对偶性。因此，对于所有 $X \ge 0$， $\omega_\sigma(T(X)) \le c\,\omega_\sigma(X)$ 等价于

$$\mathrm{Tr}((c\sigma - T_*(\sigma))X) \ge 0 \quad \forall\, X \ge 0,$$

这成立当且仅当 $c\sigma - T_*(\sigma) \ge 0$，即 $T_*(\sigma) \le c\sigma$。 T_* 的 Kraus 表达式可由同一对偶性计算得出。 □

备注 7.21（半定规划可判定性）。 寻找一个可行的 $\sigma > 0$，满足 $\sum_i V_i \sigma V_i^* \le c\,\sigma$，其中存在某个 $c < 1$，属于一个半定规划。若存在这样的 σ，且该不等式在 W_T 的支撑上成立，则引理 7.18给出 $r(T|_{W_T}) \le c < 1$，而命题 7.14推出 $\sum_k T^k(d(T))$ 的范数收敛。

有限时间稳定化

最值得关注的问题是，序列 $(T^n(I))$ 何时会在有限时间内真正稳定，而不只是收敛。

命题 7.22 （下降链条件）。 若效应区间 $[0, u]$ 满足下降链条件（不存在无限严格递减链），则对于任意正次幺映射 T，存在 n 使得 $T^n(u) = T^{n+1}(u)$，因此 $T^n(d(T)) = 0$。

证明。 序列 $u \ge T(u) \ge T^2(u) \ge \cdots$ 在 $[0, u]$ 中构成一个递减链。根据下降链条件，该序列必定稳定。 □

命题 7.23 (δ-分辨率界)。 设 ω 是冯·诺依曼代数M上的忠实正规态，且 T 是正次幺映射。假设存在 $\delta > 0$，使得对于所有 $k \ge 0$,

$$\omega(T^k(d(T))) \in \{0\} \cup [\delta, \infty).$$

则稳定化指标满足 $n_T \le \lfloor 1/\delta \rfloor$。

证明。根据迭代余循环恒等式（引理 3.3）， $\omega(I - T^n(I)) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega(T^k(d(T))) \le 1$。若$\omega(T^k(d(T))) \ne 0$，则 $\omega(T^k(d(T))) \ge \delta$。令 $m := \lfloor 1/\delta \rfloor$。对于 $n = m+1$，我们有 $\sum_{k=0}^{m} \omega(T^k(d(T))) \le 1$，因此这些 $m+1$ 项不可能全部非零（每个非零项都是 $\ge \delta$，且 $(m+1)\delta > 1$）。于是存在 $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$，使得 $\omega(T^k(d(T))) = 0$。由忠实性， $T^k(d(T)) = 0$，因此 $n_T \le k \le m$。 □

备注 7.24。 δ-分辨率条件是离散模型中“有限分辨率”的无限维类比。它量化了最小可区分泄漏，并给出了明确的稳定化界。

以下内容推广了 δ-分辨率，并涵盖原子情形或有限指标情形中出现的“量子化泄漏”。

命题 7.25 (零点处有间隙的离散李雅普诺夫谱)。 设 $\mathcal{M}$ 是一个冯·诺依曼代数，$T:\ \mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 是正规完全正次幺映射，且 ω 是一个忠实正规态。假设存在一个集合 $D\subset[0,1]$ 和一个常数 $\delta>0$，使得：

(i) $D\cap(0,\ \delta)=\emptyset$；并且

(ii) *for all* $k\geq 0$, $\omega(T^k(d(T)))\in D$.

那么稳定化指标满足 $n_T\leq\lfloor 1/\delta\rfloor$。

证明。 由迭代余循环恒等式（引理 3.3），

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega(T^k(d(T)))=\omega(I-T^n(I))\leq 1.$$

若 $\omega(T^k(d(T)))\neq 0$，则由 (i)–(ii) 可得 $\omega(T^k(d(T)))\in D\cap[\delta,1]$，因此 $\omega(T^k(d(T)))\geq\delta$。令$m:=\lfloor 1/\delta\rfloor$，并取 $n=m+1$。那么

$$\sum_{k=0}^{m}\omega(T^k(d(T)))\leq 1,$$

因此这些 $m+1$ 项不可能全都非零（每个非零项均为 $\geq\delta$ 且 $(m+1)\delta>1$）。所以存在 $k\in\{0,1,\dots,m\}$，使得 $\omega(T^k(d(T)))=0$。由忠实性，$T^k(d(T))=0$，因此对所有 $\ell\geq 0$，$T^{k+\ell}(d(T))=0$。故 $n_T\leq k\leq m$。 □

备注 7.26。 这严格推广了 δ-分辨率：取 $D=\{0\}\cup[\delta,1]$ 即可。但它也涵盖了这样的情形：$\omega(T^k(d(T)))$ 的取值落在某个离散子群中（例如，在有限指数子因子中取某个量子的有理数倍）。请注意，假设 (i) 等价于要求 D 在零点处有间隙——这一点至关重要，因为 D 中从上方收敛到 0 的序列会使该论证失效。

下面的稳健性引理表明，近似量子化（取值距某个格 ε 以内）足以实现有限稳定化。这弥合了精确离散性与 AF 逼近所产生的近似离散性之间的差距。

引理 7.27 (近似量子化蕴含 δ-分辨率)。 设 ω 是冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$ 上的忠实正规态，且 $T:\ \mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 为正规正次幺映射，其缺陷为$d=d(T)\geq 0$。固定一个离散集 $D\subset[0,1]$，使得 $D\cap(0,\delta)=\emptyset$ 对某个 $\delta>0$ 成立。假设存在 $\varepsilon\in(0,\delta/2)$，使得对所有 $k\geq 0$,

$$\operatorname{dist}(\omega(T^k(d)),D)\leq\varepsilon.$$

那么，要么 $\omega(T^k(d))=0$，要么 $\omega(T^k(d))\geq\delta-\varepsilon$ 对所有 k。特别地，$n_T<\infty$ (根据命题 7.23，取 $\delta'=\delta-\varepsilon$)。

证明。固定 k。若 $\omega(T^k(d))>0$，那么由于它位于 D 的 ε 范围内，且 D 在 $(0,\delta)$ 中没有点，D 的最近点必定落在 $[\delta,1]$中，因此 $\omega(T^k(d))\geq\delta-\varepsilon$。若 $\omega(T^k(d))<\varepsilon$，那么 D 中距离不超过 ε 的唯一相容点是 0，因此 $\omega(T^k(d))=0$。现在由命题 7.23 可得 δ-分辨率的结论。 □

备注 7.28（方法论意义）。 引理 7.27 是 AF 逼近论证中的“稳健性桥梁”：不需要精确的格值，只需与它们一致接近。结合望远镜式 + 抵消机制，便可从近似量子化得到有限稳定化。

下面这个纯标量引理明确说明了稳健性机制：近似格点成员关系加上严格压缩，会迫使数值在有限时间内到达 0。

引理 7.29（近似格 + 严格压缩迫使命中 0）。 设 $(x_k)_{k\ge 0} \subset [0,\infty)$满足：

(i) $x_{k+1} \le c\, x_k$ 对于某个 $c \in (0,1)$；

(ii) $\operatorname{dist}(x_k, D) \le \varepsilon$ 对所有 k均成立，其中 $D \subset [0,\infty)$ 在 0处有间隙：存在 $\delta > 0$，使得 $D \cap (0,\delta) = \emptyset$；

(iii) $\varepsilon < \delta/2$。

那么对于所有充分大的 k， $x_k = 0$ 均成立。明确地说，任何满足 $c^k x_0 < \delta/2$ 的 k 都会迫使 $x_k = 0$。

证明。 取满足 $x_k < \delta/2$的 k。若 $x_k > 0$，则 D 中的每个点与 x_k的距离都不超过 $\varepsilon < \delta/2$ 时，必为 0（因为 D 在 δ以下没有正的点）。因此 $\operatorname{dist}(x_k, D) = x_k$，这与 $x_k > \varepsilon$矛盾。所以 $x_k = 0$。 □

备注 7.30（应用于超有限 II_1）。 取 $x_k = \omega(T^k(d(T)))$ 作为忠实泛函 ω。压缩 $x_{k+1} \le c\, x_k$ 可由迹／Kraus 不等式（备注 7.34）推出。引理 7.29接着指出：整个问题归结为对标量值施加“近乎离散”的约束。在超有限 II_1 因子中，这个引理准确说明了除 AF 逼近之外还需要什么额外要素——需要一种针对 $\tau(T^k(d(T)))$ 的“近似量子化”原理。下文的备注7.47 提醒我们，单凭 AF 逼近并不能提供这一点。

备注 7.31（读者指南：模流水线）。 本节其余结果可组合成一个三阶段流程，用于证明冯·诺依曼代数中的有限稳定化：

1. 压缩：证明严格迹收缩 $\tau(T(x)) \le c\,\tau(x)$，其中 $c < 1$（可通过 Kraus 数据检验：$\sum_i V_i V_i^* \le c\, I$，参见备注 7.34）；2. 离散化：证明李雅普诺夫值 $\tau(T^k(d(T)))$ 属于（或一致地接近）一个在零点处有间隙的离散集 D；3. 稳定化：应用命题 7.23、7.25 或引理 7.27，得出 $n_T < \infty$。

后续结果（命题 7.33–7.51）为特定情形下的步骤 (2) 提供了可检验的条件。

命题 7.32（有限型 I 轨道角给出维数界）。 设 $\mathcal{M}$ 是一个冯·诺依曼代数，且 $T:\ \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是正规完全正且次幺的。假设稳定化指标为 $n_T < \infty$，并令

$$Q := \bigvee_{k\ge 0} \operatorname{supp}(T^k(d(T)))$$

为轨道支撑投影。若 Q 有限且 $Q\mathcal{M}Q \cong M_s$，则 $n_T \le s$。

证明。 令 $\alpha:\ Q\mathcal{M}Q \to Q\mathcal{M}Q$ 为压缩 $\alpha(x) = QT(x)Q$，它是完全正且次幺的。令 $n := n_T$，并对 $k \ge 0$ 设 $D_k := T^k(d(T))$。根据 n_T 的定义，我们有 $D_n = 0$ 和 $D_{n-1} \ne 0$。此外，对所有 k，$\operatorname{supp}(D_k) \le Q$，因此当 $0 \le k \le n$ 时，$\alpha^k(d(T)) = QD_kQ = D_k$。

定义角中的累积缺陷：

$$S := \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k(d(T)) = \sum_{k=0}^{n-1} D_k \in Q\mathcal{M}Q.$$

由于 $\mathrm{supp}(A+B) = \mathrm{supp}(A) \vee \mathrm{supp}(B)$ 对于 $A,\ B \geq 0$ (这是一个标准事实；参见引理 8.6)，我们得到 $\mathrm{supp}(S) = \bigvee_{k=0}^{n-1} \mathrm{supp}(D_k) = Q$，因此 S 在有限维代数$Q\mathcal{M}Q \cong M_s$中严格正。因此存在 $\lambda > 0$ 使得 $S \geq \lambda Q$。

现在，$\alpha^n(d(T)) = 0$ 意味着 $\alpha^n(S) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{n+k}(d(T)) = 0$。由正性，$0 = \alpha^n(S) \geq \lambda\, \alpha^n(Q) \geq 0$，因此 $\alpha^n(Q) = 0$。对于任意 $0 \leq X \leq \|X\| Q$ 属于 $Q\mathcal{M}Q$，正性给出 $0 \leq \alpha^n(X) \leq \|X\|\, \alpha^n(Q) = 0$，故 $\alpha^n = 0$ 在 $Q\mathcal{M}Q$上成立。

因此 α 是作用在 M_s上的幂零完全正映射。由引理 8.4可知，其幂零指数至多为 s，因此$\alpha^s = 0$。特别地，$0 = \alpha^s(d(T)) = T^s(d(T))$，由 n_T的极小性可得 $n_T \leq s$。 □

冯·诺依曼稳定化判据

以下结果针对特定的冯·诺依曼代数情形，给出了可检验的有限稳定化充分条件，并指出两个关键要素：严格迹收缩，以及李雅普诺夫值的离散性机制。

记号。 在本节中，$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ 表示非负整数，因此$\delta\mathbb{N} = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$ 包含 0。

命题 7.33 (迹收缩 + 离散李雅普诺夫尺度)。 设 $(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个带有忠实正规半有限迹 τ的冯·诺依曼代数。设 $T\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是正规完全正且次幺的，并令 $d := d(T) = I - T(I) \geq 0$。假设：

(C) **(严格迹收缩)** 存在 $c \in (0,1)$ 使得

$$\tau(T(x)) \leq c\, \tau(x) \quad \textit{for all } x \in \mathcal{M}_+ \textit{ with } \tau(x) < \infty;$$

(D) **（离散李雅普诺夫尺度）** 存在 $\delta > 0$ 使得

$$\tau(T^k(d)) \in \delta\mathbb{N} \quad \textit{for all } k \geq 0.$$

那么，对所有足够大的 $T^N(d) = 0$都有；特别地，$n_T < \infty$。此外，若 $\tau(d) < \infty$，则可以取

$$N = 1 + \left\lceil \frac{\log(\tau(d)/\delta)}{\log(1/c)} \right\rceil.$$

证明。 由 (C)，对所有 $k \geq 0$，$\tau(T^k(d)) \leq c^k \tau(d)$。选取 N使得 $c^N \tau(d) < \delta$。于是，由 (D) 有 $\tau(T^N(d)) \in \delta\mathbb{N}$，并且 $0 \leq \tau(T^N(d)) < \delta$，因此 $\tau(T^N(d)) = 0$。τ的忠实性意味着 $T^N(d) = 0$，进而对所有 $m \geq 0$，$T^{N+m}(d) = 0$。 □

备注 7.34（根据 Kraus 数据检验压缩）。 在任何带迹的设置中，若 Kraus 表示为 $T(x) = \sum_i V_i^* x V_i$（当指标集为无限集时，求和按强算子拓扑收敛；这对于冯·诺依曼代数上的正规完全正映射而言是标准情形），由迹性可得

$$\tau(T(x)) = \sum_i \tau(V_i^* x V_i) = \sum_i \tau(V_i V_i^* x) = \tau\left(\left(\sum_i V_i V_i^*\right) x\right).$$

因此，(C) 的一个充分条件是算子不等式 $\sum_i V_i V_i^* \leq c\, I$ 对某个 $c < 1$成立。

推论 7.35 (原子中心量子化与离散系数)。 假设命题 *7.33*的设置，其中 $Q\mathcal{M}Q \cong \bigoplus_{j \in J} B(H_j)$ **(原子中心)** 和典范迹 $\tau(\bigoplus_j x_j) = \sum_j \tau(z_j)\mathrm{Tr}^{H_j}(x_j)$具有极小中心投影 z_j。假设：

(Z)（中心缺陷与不变性） $d(T) \in Z(Q\mathcal{M}Q)$ 以及 $T(Z(Q\mathcal{M}Q)) \subseteq Z(Q\mathcal{M}Q)$；

（*W*）（可公度有限权重）存在 $\delta_0 > 0$，使得每个 $\tau(z_j) \in \delta_0\mathbb{N}$（因此特别地 $\tau(z_j) < \infty$）；

（*K*）（离散系数条件）存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $k \geq 0$，若 $T^k(d(T)) = \sum_j a_{k,j} z_j$ 属于极小中心投影 z_j，则 $a_{k,j} \in \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, 1\}$；

(F)（有限初始迹） $\tau(d(T)) < \infty$（如果在一个 τ-有限角中工作则自动成立）；（*C*）（严格迹收缩）$\sum_i V_i V_i^* \leq c\,I$ 在 $Q\mathcal{M}Q$ 上，对于某个 $c \in (0, 1)$。

那么 $\tau(T^k(d(T)))$ 属于 $\mathbb{R}_+$ 的一个离散子集（具体而言，是 $\frac{\delta_0}{N}\mathbb{N}$的一个子集），因此 $n_T < \infty$ 由命题7.33得出。

证明。由 (C) 和 (F)，$\tau(T^k(d(T))) \leq c^k \tau(d(T)) < \infty$对所有 $k \geq 0$成立。将引理 7.37 应用于 $x = T^k(d(T))$：假设 (W) 和 (K) 给出 $\tau(z_j) \in \delta_0\mathbb{N}$和 $a_{k,j} \in \{0, \frac{1}{N}, \ldots, 1\}$，因此集合 $\{j : a_{k,j} > 0\}$对每个 k都是有限的。因此，$\tau(T^k(d(T))) = \sum_j a_{k,j}\tau(z_j)$ 确实是 $\frac{\delta_0}{N}\mathbb{N}$中元素的有限和，故属于 $\frac{\delta_0}{N}\mathbb{N}$。此集合是离散的，且在 0 处的间隙为 $\frac{\delta_0}{N}$，因此命题 7.33 适用。 □

备注 7.36（为何离散系数必不可少）。仅有中心的原子性并不能使迹值离散化：具有任意实系数 $a_j \in [0, 1]$ 的中心元 $\sum_j a_j z_j$ 可以取连续范围内的任意迹值。离散系数条件 (K) 至关重要，且在动力学具有代数结构的情形下成立（例如，中心上的经典次马尔可夫链具有有理转移概率）。

引理 7.37（有限迹迫使有限原子支撑）。设 $\mathcal{M} = \bigoplus_{j \in J} B(H_j)$ 具有原子中心（极小中心投影 z_j），且设 τ 是忠实正规半有限迹，满足 $\tau(z_j) \in \delta_0\mathbb{N}$，其中 $\delta_0 > 0$（因此每个 $\tau(z_j) < \infty$）。设 $x = \sum_j a_j z_j \in Z(\mathcal{M})$ 满足 $a_j \in \{0, \frac{1}{N}, \ldots, 1\}$。若$\tau(x) < \infty$，则 $\{j : a_j > 0\}$ 是有限的。事实上，

$$\#\{j : a_j > 0\} \leq \frac{N}{\delta_0}\,\tau(x).$$

证明。若 $a_j > 0$，则 $a_j \geq \frac{1}{N}$且 $\tau(z_j) \geq \delta_0$，因此 $a_j\tau(z_j) \geq \delta_0/N$。于是 $\tau(x) = \sum_j a_j\tau(z_j) \geq (\delta_0/N) \cdot \#\{j : a_j > 0\}$，故该集合必为有限集。 □

备注 7.38。引理 7.37 现已在推论7.35 中被明确引用，以证明“有限和”这一步。假设 (F) 确保迹有限性通过压缩 (C) 沿轨道传播。

以下命题给出了关于诱导中心动力学的离散系数假设 (K) 的一个具体充分条件。

命题 7.39（有界分母中心动力学蕴含离散系数）。设 $Q\mathcal{M}Q \cong \bigoplus_{j \in J} B(H_j)$ 具有带极小中心投影的原子中心 $(z_j)_{j \in J}$。假设 $T(Z(Q\mathcal{M}Q)) \subseteq Z(Q\mathcal{M}Q)$ 且 $d(T) \in Z(Q\mathcal{M}Q)$。通过 $z_j \leftrightarrow e_j$，将 $Z(Q\mathcal{M}Q) \cong \ell^\infty(J)$ 识别为 。

设诱导映射 $P := T|_{Z(Q\mathcal{M}Q)}$ 满足：

（*P1*） P 是次马尔可夫的：$P(1) \leq 1$ 且 P 是正的；

(P2) 存在 $N \in \mathbb{N}$，使得 $P(e_j) = \sum_i p_{ij} e_i$，且对于所有 i、j，j 只有有限多个 i 满足 $p_{ij} \neq 0$；

(P3) 初始缺陷具有有界分母：$d(T) = \sum_j a_j z_j$，其中 $a_j \in \{0, \frac{1}{N}, \dots, 1\}$。

那么，对于任意 $k \geq 0$，我们有 $T^k(d(T)) = \sum_j a_{k,j} z_j$ 其中 $a_{k,j} \in \{0, \frac{1}{N}, \dots, 1\}$，即推论 *7.35* 中的离散系数条件 *(K)* 成立。

证明。 在将 $Z(QMQ)$ 识别为 $\cong \ell^\infty(J)$ 后，映射 P 是一个具有矩阵系数 (p_{ij}) 的正线性算子。根据 (P2)–(P3)， $d(T)$ 的系数向量属于格 $\frac{1}{N}\mathbb{Z}^{(J)}$，而应用 P 会保持有界分母，因为每个坐标都是这类系数的有限个 $\frac{1}{N}$-线性组合。对 k 进行归纳。 □

备注 7.40。 这是最清晰的“原子中心 $\Rightarrow$ 离散性”论述：它实际上是一个定义在原子上的有界分母经典次马尔可夫链。(P2) 假设恰好就是“具有有界分母的有理转移概率”，这在有限指标情形和组合动力系统中自然出现。

下面的命题表明，对权的完全可公度性要求可以放宽为可达支撑上的一致下界——这正是零点间隙机制所需的条件。

命题 7.41 （由有界分母得到零点处的间隙 + 一致权重下界）。 设$QMQ \cong \bigoplus_{j\in J} B(H_j)$ 具有原子中心，且其极小中心投影为 $(z_j)_{j\in J}$；设 τ 是一个忠实正规半有限迹，并且对所有 j 都有 $\tau(z_j) > 0$ （不假设可公度性）。假设：

(1) $d(T) \in Z(QMQ)$ 且 $T(Z(QMQ)) \subseteq Z(QMQ)$；

(2) （有界分母）对某个 $N \in \mathbb{N}$，每次迭代都满足 $T^k(d(T) = \sum_j a_{k,j} z_j$ 且$a_{k,j} \in \{0, \frac{1}{N}, \dots, 1\}$;

(3)（可达支撑上的权一致下界）存在 $\delta_0 > 0$，使得只要$a_{k,j} > 0$对某个 k成立，我们就有 $\tau(z_j) \geq \delta_0$（因此特别有 $\tau(z_j) < \infty$）。

那么，李雅普诺夫值在***0*** 处存在一致间隙0：

$$\tau(T^k(d(T))) \in \{0\} \cup [\delta_0/N, \infty).$$

特别地，命题 *7.25* 适用于 $\delta = \delta_0/N$。

证明。 若 $\tau(T^k(d(T))) > 0$，则至少有一项满足 $a_{k,j} \geq 1/N$并且（根据假设 (3)） $\tau(z_j) \geq \delta_0$，因此 $\tau(T^k(d(T))) = \sum_j a_{k,j}\tau(z_j) \geq (1/N) \cdot \delta_0$。 □

备注 7.42. 命题 7.41 严格弱于要求权重属于同一个格。对于 (3)，一个实用的充分条件是：轨道始终处于有限个原子构成的有限集内 （有限状态中心动力学）。于是 $\delta_0 = \min\{\tau(z_j) : j \text{ 可达}\}$。

命题 7.43 (不变有限维代数 + 离散李雅普诺夫谱)。 设$(\mathcal{M}, \tau)$是一个带有归一化迹的有限因子，且 $T : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是正规完全正次幺映射。假设存在一个有限维 $*$- 子代数 $A \subset \mathcal{M}$，满足：

(I) $T(A) \subseteq A$和 $d(T) \in A$;

(D_0) 集合 $\{\tau(T^k(d(T))) : k \geq 0\}$ 包含于一个在0处有间隙的集合 $D \subset [0, 1]$ 中：存在$\delta > 0$ 使得 $D \cap (0, \delta) = \emptyset$。

那么$n_T < \infty$ 由命题*7.25*。

证明。假设 (I) 确保缺陷轨道位于 A，而 (D_0) 提供了零点处有间隙的离散李雅普诺夫谱。应用命题 7.25。 □

备注 7.44（离散性的充分条件）。若 A 是阿贝尔代数，具有极小投影 z_1、……、z_m，并且存在 $N \in \mathbb{N}$，使得 $T^k(d(T))$ 中的所有系数 $a_{k,j} = \sum_j a_{k,j} z_j$ 都属于 $\{0, \frac{1}{N}, \dots, 1\}$，则条件 ($D_0$) 成立。此时 $\tau(T^k(d(T))) \in \frac{1}{N}\mathbb{Z} \cap [0,1]$，且其在 0 处的间隙大小为 $\frac{1}{N}$。

注意："$d(T)$ 属于极小中心投影的 $\mathbb{Q}$-张成空间"这一条件本身并不能保证 0 处存在间隙，因为 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密。还需要有界分母或明确的离散约束。

备注 7.45（有限指数结构）。对于有限指数包含映射 $N \subset M$，相对交换子 $N' \cap M$ 是有限维的。当量子信道 T 保持该标准不变代数时，假设 (I) 是合理的。当 $Z(N' \cap M)$ 上诱导的经典次马尔可夫算子具有有界分母的有理转移系数时，间隙条件 (D_0) 成立——此时沿轨道的迹值属于固定格 $\frac{1}{N}\mathbb{Z} \cap [0,1]$，该格在 0 处的间隙为 $\frac{1}{N}$。

推论 7.46（超有限有限阶段捕获）。设 (R, τ) 是带有其唯一迹的超有限 II_1 因子，且设 $A_n \subset R$ 是一个递增的矩阵子代数序列，其并集在 $\|\cdot\|_2$ 中稠密。设 $T: R \to R$ 为正规完全正次幺映射。假设对于某个 N：

(I) $T(A_N) \subseteq A_N$ *and* $d(T) \in A_N$*;*

(D_0*)* 集合 $\{\tau(T^k(d(T))): k \geq 0\}$ 包含在集合 $D \subset [0,1]$ 中，且在 0 处有间隙：存在 $\delta > 0$ 使得 $D \cap (0, \delta) = \emptyset$。

然后 $n_T < \infty$（应用 *7.43* 内部的 A_N）。

备注 7.47（逼近与有限时间湮灭的对比）. 超有限 II_1 因子的 AF 逼近给出渐近估计（$\tau(T^k(d(T)))$ 的指数衰减），但除非轨道实际上存在于某个矩阵阶段（或其李雅普诺夫值位于固定的有理格中），否则不会在有限时间到达 0。II_1 因子上的弥散迹无法在缺乏额外代数结构的情况下提供离散性。

然而，引理 7.27 提供了一座实用的"稳健性桥梁"：只需与一个格近似接近即可。

推论 7.48（超有限：近似格值迹）。设 (R, τ) 为超有限 II_1 因子，且 $T: R \to R$ 为正规完全正次幺映射。假设存在 $\delta > 0$ 和 $\varepsilon \in (0, \delta/2)$，使得对所有 $k \geq 0$，

$$\operatorname{dist}(\tau(T^k(d(T))), \delta\mathbb{N}) \leq \varepsilon.$$

那么 $n_T < \infty$。

证明。应用引理 7.27 于 $D = \delta\mathbb{N} \cap [0,1]$。 □

备注 7.49。该推论特意采用"标量"形式：它避免假定 AF 逼近会自动给出该假设。但它提供了一个正确且可用的中间目标：证明 ε-迹值与某个格一致地接近，随后即可得到稳定化。当动力学"几乎保持"某个有限阶段时，这是实际可行的路径。

下面的命题定量地连接了"存在 AF 逼近"与"有限时间到达 0"：它不要求有限维子代数具有精确不变性，只要求在迹度量下近似陷获。我们先记录一个标准的序不等式。

引理 7.50 (正映射支配绝对值)。 设 T 是一个C^*-代数之间的正线性映射。若 $y = y^*$，则 $|T(y)| \le T(|y|)$。

证明。 由于 $-|y| \le y \le |y|$，由正性可得 $-T(|y|) \le T(y) \le T(|y|)$，因此 $|T(y)| \le T(|y|)$。 □

命题 7.51 (近似有限阶段陷获蕴含有限稳定化)。 设$(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个带有忠实正规迹的有限 *von Neumann* 代数，并设 $T : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是正规正次幺映射，其缺陷为 $d := I - T(I) \ge 0$。假设：

(1)（严格迹收缩）存在 $c \in (0, 1)$ 使得对于所有 $x \in \mathcal{M}_+$，都有 $\tau(T(x)) \le c\,\tau(x)$；

(2)（近似陷获）存在一个有限维幺正 $*$-子代数 $A \subset \mathcal{M}$ 以及一个保持 τ的条件期望 $E : \mathcal{M} \to A$，使得：

(i) (defect almost in A) $\tau(|d - E(d)|) \le \varepsilon_0$;

(ii) (T almost preserves A) for all $a \in A_+$, $\tau(|T(a) - E(T(a))|) \le \varepsilon\,\tau(a)$;

(3)（A 内的离散谱）令 $\alpha := E \circ T|_A : A \to A$，序列 $\tau(\alpha^k(E(d)))$ 属于离散集 $D \subset [0, 1]$，且在0处有间隙：对于某个 $\delta > 0$，$D \cap (0, \delta) = \emptyset$。

那么，对每个 $k \ge 0$，

$$\operatorname{dist}(\tau(T^k(d)), D) \le \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon}{(1-c)^2}.$$

特别地，若 $\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon}{(1-c)^2} < \delta/2$，则由引理 7.27 可得 $n_T < \infty$。

证明。 令 $x_k := T^k(d) \in \mathcal{M}_+$，$a_0 := E(d) \in A_+$，以及 $a_{k+1} := \alpha(a_k) = E(T(a_k)) \in A_+$。由假设 (3)，$\tau(a_k) \in D$。由于 $0 \le d \le I$ 且 E 是幺正正的，我们有 $0 \le a_0 = E(d) \le I$，因此 $\tau(a_0) \le \tau(I) = 1$。

定义误差 $e_k := \tau(|x_k - a_k|)$。由引理 7.50，$|T(y)| \le T(|y|)$ 对自伴 y成立。因此，

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= \tau(|T(x_k) - E(T(a_k))|) \\ &\le \tau(|T(x_k - a_k)|) + \tau(|T(a_k) - E(T(a_k))|) \\ &\le \tau(T(|x_k - a_k|)) + \varepsilon\,\tau(a_k) \\ &\le c\,\tau(|x_k - a_k|) + \varepsilon\,\tau(a_k) = c\,e_k + \varepsilon\,\tau(a_k). \end{aligned}$$

此外 $\tau(a_{k+1}) = \tau(E(T(a_k))) = \tau(T(a_k)) \le c\,\tau(a_k)$，所以 $\tau(a_k) \le c^k \tau(a_0) \le c^k$。
因此 $e_{k+1} \le c\,e_k + \varepsilon\,c^k$。展开后得到 $e_k \le c^k e_0 + \varepsilon\,k\,c^{k-1}$。利用 $\sum_{m \ge 1} m\,c^{m-1} = \frac{1}{1-c()^2}$，我们得到 $e_k \le e_0 + \frac{\varepsilon}{(1-c)^2} \le \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon}{(1-c)^2}$。

最后，$|\tau(x_k) - \tau(a_k)| \le \tau(|x_k - a_k|) = e_k$，因此 $\operatorname{dist}(\tau(T^k(d)), D) \le \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon}{(1-c)^2}$。 □

注 7.52（对超有限 II_1 的意义）。在超有限 II_1 因子中，通常可以将条件 (3) 安排在某个矩阵阶段 $A \simeq M_m$（有界分母／有理数据）内，而条件 (2) 则是“T 在迹意义下几乎 A-不变”的定量版本。这个命题填补了“存在 AF 逼近”与“有限时间到达 0”之间缺失的桥梁。它补充了注 7.40 中的警示：仅有弥散迹并不能使取值离散化；你需要带有受控误差界的近似陷获。

轨道包含于原子部分的有向图判据

以下结果给出了一个精确的图论判据：当缺陷轨道位于交换原子子代数中时，何时能够实现稳定化，**且无需任何离散性或在 0 处存在间隙的0假设**。这回应了开放问题中“弱化不变性”这一方向。

定理 7.53 (轨道包含于原子部分的有向图判据**)**。设 $\mathcal{M}$ 是一个冯·诺依曼代数，其交换原子子代数 $C \subseteq \mathcal{M}$ 的极小投影为 $(z_j)_{j\in J}$，因此$C \cong \ell^\infty(J)$。设 $E_C : \mathcal{M} \to C$ 是一个正规条件期望（例如，在半有限情形下保迹）。

设 $T\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是正规正次幺映射，其缺陷为 $d := I - T(I) \geq 0$。只假设满足轨道落入原子子代数C假设：

$$T^k(d) \in C \quad \textit{for all } k \geq 0.$$

定义诱导映射 $P := E_C \circ T|_C\colon C \to C$。将 $P(z_j) = \sum_{i\in J} p_{ij} z_i$ 写作 $p_{ij} \geq 0$。在顶点集 J 上定义有向图 G，如下：

$$j \to i \quad \Longleftrightarrow \quad p_{ij} > 0.$$

于是：

(1) $T^k(d) = P^k(d)$ 对所有 $k \geq 0$ 均包含于 C 内；

(2) $\operatorname{supp}(P^n x) = \{i \in J : \ \exists$ 从某个 $j \in \operatorname{supp}(x)$ 到 $i\}$、长度为 n 的有向路径；

(3) $P^n(d) = 0$ 当且仅当不存在一条长度为 n、起点位于 $\operatorname{supp}(d)$ 的有向路径。

特别是，

$$n_T < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{the digraph } G \textit{ has finite height on the set reachable from } \operatorname{supp}(d),$$

其中，“有限高度”是指从可达顶点出发的路径长度存在统一上界。此外，

$$n_T \leq \sup\{\textit{length of a directed path starting in } \operatorname{supp}(d)\} + 1.$$

证明。**第 (1) 部分：** 由于根据假设 $T^k(d) \in C$，且 $E_C|_C = \mathrm{id}_C$，我们有

$$T^{k+1}(d) = E_C(T(T^k(d))) = (E_C \circ T)(T^k(d)) = P(T^k(d)).$$

由归纳法得到 $T^k(d) = P^k(d)$。

第 (2) 部分： 令 $x = \sum_j x_j z_j$ 满足 $x_j \geq 0$。那么

$$(Px)_i = \sum_j p_{ij} x_j.$$

由于所有项都是 ≥ 0，因此 $(Px)_i > 0$ 当且仅当存在 $j \in \operatorname{supp}(x)$，使得 $p_{ij} > 0$，也就是说，在 G 中存在一条边 $j \to i$。对 n 使用归纳法即可得到路径刻画。

第 (3) 部分： 根据 (2)，$P^n(d) = 0$ 当且仅当 $\operatorname{supp}(P^n(d)) = \emptyset$，当且仅当不存在可由一条长度为 n 的路径从 $\operatorname{supp}(d)$ 到达的 i。

等价性： 如果 G 在可达集上的高度为 h，那么不存在长度为 $h+1$ 的路径，因此$P^{h+1}(d) = 0$ 且 $n_T \leq h + 1 < \infty$。反过来，如果 $n_T < \infty$，那么 $P^{n_T}(d) = 0$，因此从 $\operatorname{supp}(d)$出发不存在长度为$\geq n_T$的路径，由此得到高度为 $\leq n_T - 1$。 □

备注 7.54（为何这比离散性判据更强）。 有向图判据**不要求迹间隙、有界分母或离散李雅普诺夫值方面的任何假设**。它利用了原子代数的关键结构性事实：不同原子之间不会发生抵消，因此精确的消失纯粹是组合性的——当且仅当不存在流向该系数的正概率路径时，系数 $(P^n d)_i$ 才为零。

这给出了一个不同于零点间隙方法的充分条件：

$$\text{有限高度（不存在任意长的路径）} \;\Rightarrow\; \text{有限稳定化。}$$

在诱导图有限或具有有界深度的情形下（例如，具有有限深度中心动力学的 I_∞ 型有限因子中，其标准不变量具有有限深度），有向图判据尤其有用。

推论 7.55（可达集有限蕴含稳定化）。 在定理 7.53的情形下，如果从 $\mathrm{supp}(d)$ 可达的顶点集合是有限的，那么 $n_T < \infty$。

证明。 有限有向图不存在无限路径，因此具有有限高度。 □

推论 7.56（无需 T-不变性的轨道落入原子子代数）。 设 $T:\ \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是正规正次幺的。假设存在一个交换原子子代数 $C \subseteq \mathcal{M}$ 及其上的正规条件期望 $E_C:\ \mathcal{M} \to C$，使得 $T^k(d(T)) \in C$ 对所有 $k \geq 0$均成立。那么：

(i) T的稳定化问题可归结为 $C \cong \ell^\infty(J)$上的诱导映射 $P = E_C \circ T|_C$；

(ii) 当且仅当从 $\mathrm{supp}(d(T))$ 出发的可达性有向图具有有限高度时，$n_T < \infty$；

(iii) 无需满足 C 的 T-不变性——只需满足轨道条件。

弥散交换陷阱：核高度判据

有向图判据（定理 7.53）可原样从原子型 $C \cong \ell^\infty(J)$ 推广到 **弥散型** 阿贝尔代数 $C \cong L^\infty(X,\ \mu$，只需将有向图替换为次马尔可夫核。

定理 7.57（弥散交换轨道捕获）。 设 $\mathcal{M}$ 为冯·诺依曼代数，$T:\ \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 为正规正次幺映射，且 $C \subseteq \mathcal{M}$ 为阿贝尔代数（可能是弥散的），并具有正规条件期望 $E_C:\ \mathcal{M} \to C$。

仅假设轨道条件：

$$T^k(d(T)) \in C \quad \textit{for all } k \geq 0.$$

定义 $P:= E_C \circ T|_C:\ C \to C$。则 $T^k(d) = P^k(d)$ 属于 C。

将 $C \cong L^\infty(X, \mu)$视为同一对象。则存在一个次马尔可夫核 $K(x, \cdot)$，使得对所有有界可测的 $f \geq 0$,

$$(Pf)(x) = \int f(y)\, K(x, dy) \quad a.e.$$

令 $A:= \text{支撑}(d) \subseteq X$（本质支集）。定义 n 步可达集

$$R_n := \{x \in X : K^{(n)}(x, A) > 0\},$$

其中 $K^{(n)}$ 是 n 重卷积核。于是：

$$P^n(d) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(R_n) = 0.$$

等价地：$n_T < \infty$ 当且仅当从 A 出发，在由 K 诱导的可测关系中，路径长度存在统一上界（不存在从 A开始、长度任意大的正质量路径）。

证明。 定义 $K(x,B):=(P\mathbf{1}_B)(x)$。 P的正规性使得 $B\mapsto K(x,B)$ 几乎处处可数可加；次幺性给出 $K(x,X)\le 1$。恒等元 $T^k(d)=P^k(d)$ 与定理 7.53 中完全相同地得到。

对于可达性刻画，我们通过归纳法证明：$(P^n d)(x)>0$ 当且仅当$K^{(n)}(x,\operatorname{supp}(d))>0$。基本情形 $n=0$ 显然成立。对于归纳步骤，写作

$$(P^{n+1}d)(x)=\int (P^n d)(y)\,K(x,dy).$$

由于所有项都是 ≥ 0，$(P^{n+1}d)(x)>0$ 当且仅当存在 y 使得 $K(x,\{y\})>0$ 且 $(P^n d)(y)>0$。根据归纳假设，这等价于 $K^{(n+1)}(x,A)>0$。

因此 $P^n(d)=0$ 当且仅当 $\operatorname{supp}(P^n d)=\emptyset$ 当且仅当 $\mu(R_n)=0$。 □

备注 7.58（对超有限 II_1的意义）。 定理7.57 给出了弥散阿贝尔捕获对应于“有限高度有向图”的精确类比。这解决了开放方向 (i)：将结果从原子情形扩展到弥散交换轨道捕获。在超有限 II_1 因子中，如果缺陷轨道包含于弥散阿贝尔子代数 $C\cong L^\infty([0,1])$ 中，则稳定化由诱导的次马尔可夫核的可达性结构所决定。

推论 7.59 (核终止的秩函数证书)。 在定理 7.57的设定下，定义可测函数 $r\colon X\to\{0,1,\dots,h\}$ 满足 沿着 K 严格递减x，其中 $K(x,X)>0$，

$$K(x,\{y:r(y)<r(x)\})=K(x,X).$$

那么，对于任意一个支撑在 $r\le h$ 处的 $f\ge 0$，有 $P^{h+1}(f)=0$。特别地，若 $\operatorname{supp}(d)\subseteq\{r\le h\}$，则 $n_T\le h+1$。

证明。 若 $r(x)=k$且 $K(x,X)>0$，则 K 将所有质量映射到 $\{r<k\}$。根据归纳法， P^k 将任意支撑在 $\{r=k\}$ 上的函数映射为支撑在 $\{r=0\}$ 上的函数，而 P^{k+1} 会将其消去（因为从 $\{r=0\}$ 出发，所有质量都流向 $\{r<0\}=\emptyset$）。由此得到界 $n_T\le h+1$。 □

备注 7.60（统一原子与弥散情形）。 在原子情形 $C\cong\ell^\infty(J$中，秩函数 $r:J\to\{0,\dots,h\}$ 沿有向图严格递减 G，这恰好是一个“高度函数”，且不存在长度超过 h的路径。在弥散情形 $C\cong L^\infty(X,\mu$中，秩函数在可测核关系中发挥相同作用。推论7.59 为有限稳定化提供了 **内在可检验证书**：给出一个有限值可测函数，使其沿核动力学严格递减。

Cartan 极大阿贝尔子代数俘获：结构性假设

轨道位于 C 的假设是定理 7.53 和 7.57 中的关键约化步骤。以下给出能确保该假设成立的简明充分条件。

命题 7.61 （由 C-协变性导致的 Cartan 陷获）。 设 R 是一个 II_1 因子，$C\subset R$ 是一个极大阿贝尔子代数（*MASA*）。若 $T\colon R\to R$ 是正规完全正次幺映射，且满足

$$T\circ\mathrm{Ad}(u)=\mathrm{Ad}(u)\circ T\qquad \textit{for all } u\in\mathcal{U}(C),$$

那么：

(i) $T(C)\subseteq C$;

(ii) $T(I)\in C$，因此 $d(T)=I-T(I)\in C$;

(iii) $T^k(d(T)) \in C$ 对所有 $k \geq 0$ *(*轨道内-C*)*。

证明。对于 $c \in C$ 和 $u \in \mathcal{U}(C)$，由于 c 与 u 对易，我们有 $\mathrm{Ad}(u)(T(c)) = T(\mathrm{Ad}(u)(c)) = T(c)$。因此，$T(c)$ 与 C 中的所有酉元对易，进而与整个 C 对易。由于 C 是极大阿贝尔的，$C' = C$，所以 $T(c) \in C$。 □

备注 7.62（解释与 Kraus 版本）。 C-协变意味着 T 是退相干协变的：它与 C 中的酉元对易。

一个充分的 Kraus 条件：若 $V_r \in \mathcal{N}_R(C)$ 满足 $V_r^* V_r, V_r V_r^* \in C$，则 $T(C) \subseteq C$。

推论 7.63 (Cartan 陷获蕴含核判据)。 若 $T : R \to R$ 满足命题 *7.61* 关于 *Cartan* 极大阿贝尔自伴子代数 $C \cong L^\infty(X, \mu)$ 的假设，则：

(i) 稳定化问题归结为 K *on* (X, μ) 上的诱导核；

(ii) 当且仅当该核从 $\mathrm{supp}(d(T))$ 起具有有限高度；

(iii) 推论 *7.59* 通过秩函数给出了一个可检验的证书。

引理 7.64 （双模性 $\Rightarrow$ 捕获）。 设 $C \subset \mathcal{M}$ 为一个阿贝尔 *von Neumann* 子代数。若 $T : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是 C-双模的，即，

$$T(c_1 x c_2) = c_1 T(x) c_2 \quad \textit{for all } c_1, c_2 \in C,\ x \in \mathcal{M},$$

则 $T(C) \subseteq C$ 以及 $T(I) \in C$，因此 *orbit-in-*C 成立。

证明。对于 $c \in C$，取 $x = I$、$c_1 = c$、$c_2 = I$：$T(c) = T(c \cdot I \cdot I) = c \cdot T(I) \cdot I = cT(I)$。类似地 $T(c) = T(I)c$。因此 $T(c)$ 与 $T(I)$ 可交换。此外，对于任意 $c' \in C$、$T(cc') = cT(c') = cc'T(I) = T(c)c'$，因此 $T(c)$ 与 C 中的所有元素均可交换。若 C 是极大交换的，则 $T(c) \in C$。对于一般的 C，我们至少有 $T(C) \subseteq C' \cap \mathcal{M}$；若 C 是一个极大阿贝尔子代数，或已知 $T(C) \subseteq C$，则 orbit-in-C 成立。 □

备注 7.65。 根据 T 的构造方式（例如由条件期望、对应或双模映射构造），双模性有时比完全的 C- 协变性更容易验证。对于源自子因子理论的完全正映射，双模性通常源于 Kraus 算子的双模结构。

内在证书：投影滤过

有向图判据和核判据都编码了相同的“有限高度”内容：存在一个整数值秩，使其沿动力学严格递减。用算子语言来说，这就是一个有限投影滤过。

命题 7.66 (通过投影获得的有限高度证书)。 设 $T : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 为正规正的。假设存在投影

$$0 = p_0 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_N$$

使得

$$T(p_k) \leq p_{k-1} \quad (k = 1, \ldots, N).$$

那么，对于每个满足 $\mathrm{supp}(x) \leq p_N$ 的 $x \geq 0$，

$$T^N(x) = 0.$$

特别地，如果 $\mathrm{supp}(d(T)) \leq p_N$，那么 $n_T \leq N$。

证明。 如果 $0 \le x \le \|x\| p_N$，则根据正性

$$0 \le T(x) \le \|x\| T(p_N) \le \|x\| p_{N-1}.$$

迭代 N 次得到 $0 \le T^N(x) \le \|x\| p_0 = 0$。 □

备注 7.67（内在终止条件）。 命题 7.66 回应开放方向 (iii)：它给出了一个关于 **可内在检验的条件**，适用于 T，并能保证有限时间终止。在交换 $L^\infty(X)$ 模型中，投影 p_k 是整数值李雅普诺夫函数 $\{r \ge k\}$ 的秩层集示性函数 $r: X \to \{0, 1, \dots, N\}$。

因此，构建内在终止条件的一条具体路径是：**构造一列有限的次调和投影**，使其像沿着该链严格下降。这就是“没有长路径”的非交换对应物。

以下刻画将投影滤过的存在性归结为对 Kraus 算子的一项具体约束。我们先记录一个有用的引理。

引理 7.68（支撑 + 次幺 ⇒ 投影界）。 若 $0 \le a \le I$ 且 $(I-p)\,a\,(I-p) = 0$ 对于投影 p，则 $a \le p$。

证明。 条件 $(I-p)\,a(I-p) = 0$ 蕴含 $a(I-p) = 0$（因为 $a \ge 0$ 且 $(I-p)a(I-p) = 0$ 给出 $\|a^{1/2}(I-p)\|^2 = 0$），因此 $\mathrm{supp}(a) \le p$。对于任意向量 v，

$$\langle av, v\rangle = \langle apv, pv\rangle \le \|a\| \langle pv, pv\rangle \le \langle pv, v\rangle = \langle pv, v\rangle.$$

所以 $a \le p$。 □

命题 7.69 (滤过 ⇔ Kraus“层级降低”)。 设 $T(x) = \sum_{r=1}^{R} V_r^* x V_r$ 是冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$ 上的正规完全正次幺 映射。投影链 $0 = p_0 \le p_1 \le \cdots \le p_N$ 满足 $T(p_k) \le p_{k-1}$（$k = 1, \dots, N$）当且仅当 对于每个 k 和每个 *Kraus* 算子 V_r，

$$p_k V_r (I - p_{k-1}) = 0 \qquad (\textit{equivalently } (I-p_{k-1}) V_r^* p_k = 0).$$

证明。 ($\Rightarrow$)：若 $T(p_k) \le p_{k-1}$，则 $(I-p_{k-1})T(p_k)(I-p_{k-1}) = 0$。由于每一项 $V_r^* p_k V_r \ge 0$，我们有 $(I-p_{k-1})V_r^* p_k V_r (I-p_{k-1}) = 0$ 对每个 r 均成立。这等于 $\|p_k V_r (I-p_{k-1})\|^2$，因此 $p_k V_r (I-p_{k-1}) = 0$。

($\Leftarrow$)：假设对所有 r，$p_k V_r (I-p_{k-1}) = 0$。那么

$$(I-p_{k-1}) V_r^* p_k V_r (I-p_{k-1}) = \big(p_k V_r (I-p_{k-1})\big)^* \big(p_k V_r (I-p_{k-1})\big) = 0.$$

对 r 求和，得到 $(I-p_{k-1})T(p_k)(I-p_{k-1}) = 0$，即 $\mathrm{supp}(T(p_k)) \le p_{k-1}$。此外，$p_k \le I$ 和次幺性给出 $0 \le T(p_k) \le T(I) \le I$。令 $a = T(p_k)$，$p = p_{k-1}$：$T(p_k) \le p_{k-1}$，应用引理 7.68。

□

备注 7.70（滤过的结构来源）。 命题 7.69 告诉我们应寻找怎样的结构：一种有限的“秩”分级，使每个 Kraus 算子都会降低秩。

（A）巢/旗不变性（上三角 Kraus 算子）。如果存在一个有限旗 $0 = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_N = H$，使得对所有 r，k，$V_r(H_k) \subseteq H_{k-1}$，那么令 p_k 为投影到 H_k 上的投影，可得 $p_k V_r (I-p_{k-1}) = 0$，因此 $T(p_k) \le p_{k-1}$。这是“严格上三角”的算子代数版本。

（B）交换模型中的可测秩。在 Cartan/极大阿贝尔自伴代数图景 $C = L^\infty(X)$ 中，滤过是一个递减的可测集序列 X_k，满足 $p_k = \mathbf{1}_{X_k}$。条件 $T(p_k) \le p_{k-1}$ 在核动力学中变为“没有向上的边”：存在一个可测秩 $r: X \to \{0, \dots, N\}$，使得每次转移都会严格降低 r。

引理 7.71（秩函数 $\Rightarrow$ 投影滤过）。在定理 7.57 的设定下，若具有轨道内-C（例如，通过 C-协变性），且存在一个可测 $r\colon X \to \{0,1,\dots,N\}$ 沿诱导核严格递减 K（如推论 7.59中所示），则令 $p_k := \mathbf{1}_{\{r\geq k\}} \in C$，有 $P(p_k) \leq p_{k-1}$，因此 $T(p_k) \leq p_{k-1}$ 以及 $n_T \leq N$。

证明。严格递减意味着，对于几乎处处具有正的核质量的 x，$K(x,\ \{r < r(x)\}) = K(x,\ X)$。对于 $p_k = \mathbf{1}_{\{r\geq k\}}$，由于核将质量发送到秩严格更低的位置，我们有 $(Pp_k)(x) = K(x,\ \{r \geq k\}) \leq p_{k-1}(x)$。由于轨道内-$C$给出 $T^k(d) = P^k(d)$，滤过 $T(p_k) \leq p_{k-1}$ 随之成立。 □

鲁棒性：不可能性与必要条件

下面阐明哪些鲁棒性结果是可能的，以及确实需要哪些额外假设。

命题 7.72（不可能性：仅凭近似陷获无法强制有限时归零）。设 $c \in (0,\ 1)$并定义 $x_k := c^k$ 对于 $k \geq 0$。则：

(*i*) $x_k \to 0$ 当 $k \to \infty$时；

(*ii*) $x_k > 0$ 对于所有 k；

(iii) 对任意 $\varepsilon > 0$，序列 (x_k) 最终会与 0 相差不超过 ε。

因此，仅仅在范数意义或强逼近意义下逼近幂零模型，并不能保证在0 处有限时间内命中。

备注 7.73（鲁棒性所需条件）。命题7.72 解释了为何本文中的鲁棒性引理（引理 7.27、引理 7.29）要求某个可观测泛函在**0 处存在**间隙。若没有间隙机制，鲁棒性定理便不可能成立。

方向（ii）尚待解决的问题是：找出**结构性假设**（超有限 II_1结构、有限指数子因子、有界深度标准不变量等），使其能够为相关的李雅普诺夫值 $\tau(T^k(d(T)))$ 强制产生一个间隙（精确或近似）。

可处理情形：汇总陈述

以下结果汇总了三种主要可处理情形下的稳定化判据。我们首先记录两项有用的加强结果，它们允许只沿缺陷轨道检查压缩。

引理 7.74 (仅轨道迹收缩即足够**)。** 设 $(\mathcal{M},\tau)$ 是一个带有忠实正规半有限迹的冯·诺依曼代数，且 $T\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是正规正且次幺的，其缺陷为$d = I - T(I) \geq 0$。假设：

*(D) (*离散尺度*)* 存在 $\delta > 0$，使得 $\tau(T^k(d)) \in \delta\mathbb{N}$ 对所有 $k \geq 0$均成立；

*(C_{orb}) (*轨道压缩*)* 存在 $c \in (0,\ 1)$，使得 $\tau(T^{k+1}(d)) \leq c\,\tau(T^k(d))$ 对所有 $k \geq 0$均成立；

(F) $\tau(d) < \infty$.

那么 $T^N(d) = 0$ 对所有足够大的 N 均成立；特别地，$n_T < \infty$。此外，可以取 e

$$N = 1 + \left\lceil \frac{\log(\tau(d)/\delta)}{\log(1/c)} \right\rceil .$$

证明。由 (C_{orb}) 和归纳法可得，对于所有 k，$\tau(T^k(d)) \leq c^k\tau(d)$。选取 N，使得 $c^N\tau(d) < \delta$。于是$0 \leq \tau(T^N(d)) < \delta$，而 (D) 蕴含 $\tau(T^N(d)) = 0$。τ 的忠实性给出 $T^N(d) = 0$。 □

引理 7.75 (轨道角 Kraus 界蕴含轨道压缩)。 设 $(\mathcal{M},\tau)$ 带迹（有限或半有限），且 $T(x)=\sum_i V_i^* x V_i$ 是一个正规完全正映射，其 $T(I)\le I$，缺陷为 $d=I-T(I)$。令 $Q=\bigvee_{k\ge 0}\operatorname{supp}(T^k(d))$ 为轨道支撑投影。若存在 $c\in(0,\,1)$ 使得

$$\sum_i V_i V_i^* \le c\,Q$$

(as 一个算子不等式），那么对每个 $k\ge 0$，都有 $\tau(T^{k+1}(d))\le c\,\tau(T^k(d))$.

证明。 对任意 $x\in(Q\mathcal{M}Q)_+$，我们有 $Qx=x$，而迹性给出 $\tau(T(x))=\tau(\sum_i V_i V_i^* x)\le\tau(cQx)=c\,\tau(x)$。将此应用于 $x=T^k(d)\in(Q\mathcal{M}Q)_+$。 □

备注 7.76。 引理 7.75 在 Kraus 不等式 $\sum_i V_i V_i^*\le c\,I$ 在全局范围内不成立、但在轨道角 Q上成立时很有用。这是“泄漏型”量子信道中的典型情况，其中泄漏是局部的。

原子中心的 I 型。

定理 7.77 （有界分母迫使稳定化）。 设 $\mathcal{M}=\bigoplus_{j\in J}B(H_j)$ （原子中心），带有忠实正规半有限迹 $\tau(\bigoplus_j x_j)=\sum_{j\in J}w_j\mathrm{Tr}^{H_j}(x_j)$，$w_j>0$。设 $T\colon\mathcal{M}\to\mathcal{M}$为正规完全正次幺映射，缺陷为 $d=I-T(I)\ge 0$，且 $\tau(d)<\infty$。假设：

(Z) $d\in Z(\mathcal{M})$ 和 $T(Z(\mathcal{M}))\subseteq Z(\mathcal{M})$；

(W)（可公度权重）存在 $\delta_0>0$，使得对于所有 j，$w_j\in\delta_0\mathbb{N}$；

(P)（有界分母中心映射） $P:=T|_{Z(\mathcal{M})}$满足 $P(z_j)=\sum_i p_{ij}z_i$，其中 $p_{ij}\in\{0,\tfrac{1}{N},\dots,1\}$，且每列只有有限个非零$p_{ij}$；

(A0)（有界分母初始系数）记 $d=\sum_j a_j z_j$，则有 $a_j\in\{0,\tfrac{1}{N},\dots,1\}$;

(C_{orb})（轨道压缩）对于某个 $c\in(0,1)$ 以及所有 k，有 $\tau(T^{k+1}(d))\le c\,\tau(T^k(d))$。

于是 $n_T<\infty$。

证明。根据 (Z)，对于所有 k，$T^k(d)\in Z(\mathcal{M})$。在 $Z(\mathcal{M})\cong\ell^\infty(J)$ 下，$T^k(d)$ 的系数可通过对系数向量 (a_j) 迭代应用次马尔可夫矩阵 (p_{ij}) 得到。根据 (P) 和 (A0)，对于每个 k，$T^k(d)$ 的所有系数都属于 $\{0,\tfrac{1}{N},\dots,1\}$（有界分母在有限 $\tfrac{1}{N}$-线性组合下保持不变）。因此，根据 (W)，$\tau(T^k(d))=\sum_j a_k,\ {}_j\tau(z_j)$ 是一个具有 a_k、 $_j\in\{0,\tfrac{1}{N},\dots,1\}$且 $\tau(z_j)=w_j\in\delta_0\mathbb{N}$ 的有限和，所以对于所有 k，$\tau(T^k(d))\in(\delta_0/N)\mathbb{N}$。现在应用引理 7.74，取 $\delta=\delta_0/N$。 □

具有有限指数结构的有限因子。

命题 7.78 (有限指数双模通道)。 设 $(\mathcal{M},\tau)$ 是一个有限因子，且 $N\subset\mathcal{M}$是一个有限指数子因子，因此 $A:=N'\cap\mathcal{M}$ 是有限维的。设 $T\colon\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 是正规完全正次幺的，并假设：

(双模) T是 N-双模的： $T(n_1xn_2)=n_1T(x)n_2$对所有 n_1、$n_2\in N$、 $x\in\mathcal{M}$均成立；

(Inv) d（T）$\in A$（等价地， d（T）与 N 可交换）；

（*Disc*）标量集 $\{\tau(T^k(d(T))) : k \geq 0\}$ 属于离散子集 $D \subset [0,1]$，且在 $(0,1]$ 中没有聚点。

于是 $n_T < \infty$。

证明。(Bim) 蕴含 $T(A) \subseteq A$：对于 $a \in A$ 和 $n \in N$，我们有 $nT(a) = T(na) = T(an) = T(a)n$。因此，根据 (Inv)，轨道 $\{T^k(d(T))\}$ 包含于有限维代数 A 中。现在应用命题 7.25。 □

备注 7.79。为在具体的有限指数模型中验证 (Disc)，对 $Z(A)$ 应用有界分母中心动力学假设；它是一个有限原子代数。这样便将问题归结为 $Z(A)$ 的原子上的诱导的经典次马尔可夫链的算术问题。

超有限 $\mathbf{II}_1$。

推论 7.80 (一个误差较小的优良矩阵阶段即可迫使稳定化)。设 (R,τ) 为带有唯一迹的超有限 II_1 因子。设 $A \cong M_m(\mathbb{C}) \subset R$ 是一个矩阵子代数，且 τ 保迹条件期望 $E : R \to A$。设 $T : R \to R$ 为正规完全正次幺映射，其缺陷为$d = I - T(I)$。假设：

(*1*) （严格压缩） $\tau(T(x)) \leq c\,\tau(x)$ 对所有 $x \in R_+$ 成立，且某个 $c \in (0、1)$成立；

(*2*) （近似陷获） $\tau(|d - E(d)|) \leq \varepsilon_0$ 且 $\tau(|T(a) - E(T(a))|) \leq \varepsilon\,\tau(a)$ 对所有 $a \in A_+$成立；

(*3*) （具有间隙的有限维量化）令 $\alpha := E \circ T|_A$，数值 $\tau(\alpha^k(E(d)))$ 属于离散集 $D \subset [0,1]$，其中 $D \cap (0、\ \delta) = \emptyset$。

若 $\varepsilon_0 + \varepsilon/(1-c)^2 < \delta/2$，则 $n_T < \infty$。

证明。这正是命题 7.51：近似有限阶段陷获使迹值一致接近 D，随后由引理7.27和 δ-分辨率得到稳定化。 □

备注 7.81（关于超有限 II_1）。推论7.80 将稳定化问题重新表述为：找到一个矩阵阶段 A，使其具有有间隙的离散集 D，并证明陷获误差足够小。这是一个可量化的“几乎不变性”目标，将 AF 逼近与有限时间稳定化联系起来。

走向弱化不变性：在没有 T-不变性的情况下轨道落入原子子代数

下面的结果表明，对原子子代数的完全 T-不变性，可以由较弱的条件替代：缺陷轨道 落在该子代数中，并且具有受控系数。

命题 7.82 （在没有 T-不变性的情况下轨道落入原子子代数）。设（$\mathcal{M},\tau$）是一个带有忠实正规半有限迹的冯·诺依曼代数。设 $C \subset \mathcal{M}$ 是一个交换原子冯·诺依曼子代数，其极小投影为（z_j）$_{j\in J}$ 和 τ（z_j）$= w_j > 0$。设 $T : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是正规正次幺映射，其缺陷为 $d = I - T(I)$。假设：

(1)（C中的轨道） $T^k(d) \in C$ 对所有 $k \geq 0$均成立；

(2)（有界分母系数）存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $k \geq 0$，记 $T^k(d) = \sum_j a_{k,j} z_j$，则有 $a_{k,j} \in \{0, \frac{1}{N}, \ldots, 1\}$；

(3)（可公度权重）存在 $\delta_0 > 0$，使得对于所有 j都有 $w_j \in \delta_0\mathbb{N}$；

(4)（轨道压缩）存在 $c\in(0、1)$，使得对于所有 $k\geq 0$都有 $\tau(T^{k+1}(d))\leq c\,\tau(T^{k}(d))$；

(5) $\tau(d)<\infty$。

那么 $n_T<\infty$。

证明。由 (1) 和 (2)，$\tau(T^k(d))=\sum_j a_{k,j}w_j$其中 $a_{k,j}\in\{0,\frac{1}{N},\dots,1\}$。由 (3)，$w_j\in\delta_0\mathbb{N}$，因此$\tau(T^k(d))\in(\delta_0/N)\mathbb{N}$对所有 k成立。现在应用引理 7.74，取 $\delta=\delta_0/N$。 □

备注 7.83（与有向图判据的关系）。命题 7.82 并不需要 $T(C)$ ——只需轨道 $\{T^k(d)\}$ 保持在 C 系数受控的范围内。

关于一种**消除所有离散性假设**的替代方法，参见定理 7.53：若轨道位于交换原子子代数 C中，则稳定化等价于诱导的可达性有向图具有有限高度。这给出了一个精确的图论判据，无需有界分母假设或零点间隙假设。

以下命题给出了一个可检验的条件：它能确保在 C 上的“对角化”动力学所产生的系数具有有界分母，而无需要求 $T(C)\subseteq C$。

命题 7.84（由对角动力学得到有界分母 $E_C\circ T$）。设 $(\mathcal{M},\tau)$是一个带有忠实正规半有限迹的冯·诺依曼代数，并设 $C\subset\mathcal{M}$ 是一个交换原子冯·诺依曼子代数，其极小投影为 $(z_j)_{j\in J}$。假设存在正规忠实条件期望 $E_C:\mathcal{M}\to C$（例如，在可用时为 τ-保持）。设 $T:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$是正规正次幺映射，缺陷为 $d=I-T(I)$。假设：

(1)（C 中的轨道）$T^k(d)\in C$，对所有 $k\geq 0$ 均成立；

(2)（有界分母对角映射）存在 $N\in\mathbb{N}$，使得对每个 j，令 $P(z_j):=(E_C\circ T)(z_j)=\sum_i p_{ij}z_i$，则有 $p_{ij}\in\{0,\frac{1}{N},\dots,1\}$，且每一列 $(p_{ij})_i$ 都具有有限支撑；

(3)（初始有界分母）写作 $d=\sum_j a_j z_j$，我们有 $a_j\in\{0,\frac{1}{N},\dots,1\}$。

那么对于所有 $k\geq 0$，写作 $T^k(d)=\sum_j a_{k,j}z_j$，我们有 $a_{k,j}\in\{0,\frac{1}{N},\dots,1\}$。

证明。定义 $P:=E_C\circ T|_C:C\to C$，这是一个正规正次幺映射。由 (1)，对于每个 k，我们有$T^{k+1}(d)=T(T^k(d))\in C$，因此 $E_C(T(T^k(d)))=T(T^k(d))$，从而 $T^{k+1}(d)=P(T^k(d))$。于是，对所有 k，$T^k(d)=P^k(d)$。

通过经由 $z_j\leftrightarrow e_j$ 的识别 $C\cong\ell^\infty(J)$，假设 (2) 表明，P 由一个次马尔可夫矩阵给出，其元素属于 $\frac{1}{N}\mathbb{Z}$（每列有限支撑），因此它在有限支撑组合下保持格 $(\frac{1}{N}\mathbb{Z})^{(J)}$。由于根据 (3)，$d$的系数属于 $\{0,\frac{1}{N},\dots,1\}$，归纳可得 $P^k(d)=T^k(d)$ 也满足同样的性质。 □

备注 7.85。命题 7.84 结合命题 7.82 给出了一个完全明确的流程：验证轨道内$C+$压缩 $+$可公度权重（命题 7.82），验证$P=E_C\circ T$（命题 7.84）的有界分母，进而得出 $n_T<\infty$。这样就无需 $T(C)\subseteq C$。

以下引理给出了对角动力学中系数 p_{ij} 的显式公式，从而将有界分母的验证归结为迹矩阵整性问题。

引理 7.86 (原子期望系数公式)。设 $(\mathcal{M},\tau)$ 为半有限，且 $C\subset\mathcal{M}$ 为交换原子，并具有极小投影 $(z_i)_{i\in J}$和 $\tau(z_i)=w_i\in(0,\infty)$. 假设存在一个保持$\tau$的正规忠实条件期望 $E_C:\mathcal{M}\to C$。那么对于任意 $x\in\mathcal{M}\cap L^1(\mathcal{M},\tau)$,

$$E_C(x)=\sum_{i\in J}\frac{\tau(z_i x)}{\tau(z_i)}\,z_i$$

(若 $x \geq 0$ and $\tau(x) < \infty$，则该和在原子上逐点有限)。特别地，对于对角化动力学 $P := E_C \circ T$,

$$P(z_j) = \sum_i p_{ij}\, z_i \quad with \quad p_{ij} = \frac{\tau(z_i\, T(z_j))}{\tau(z_i)}.$$

证明。 对于每个原子 z_i，我们有 $Cz_i = \mathbb{C}z_i$，因此对于某个标量 $\lambda_i(x)$， $E_C(x)z_i = \lambda_i(x)z_i$ 。由于 E_C 是 τ- 保持的， $\tau(z_i x) = \tau(z_i E_C(x)) = \tau(\lambda_i(x) z_i) = \lambda_i(x)\tau(z_i)$，故 $\lambda_i(x) = \tau(z_i x)/\tau(z_i)$。 □

备注 7.87（迹矩阵整性判据）。 根据引理 7.86，要验证命题7.84的假设（2），只需检查:

$$\frac{\tau(z_i\, T(z_j))}{\tau(z_i)} \in \left\{0, \frac{1}{N}, \ldots, 1\right\} \quad \text{and each column has finite support.}$$

这将“无不变性条件下的有界分母”问题转化为一个**迹矩阵整性问题**。在 I 型$_\infty$原子情形下， $\tau(z_i T(z_j))$ 通常会计数 Kraus 算子在原子之间转移质量所产生的重数（或加权重数），因此，$p_{ij} = m_{ij}/N$ 可以由关于 Kraus 算子的结构性假设所强制。在有限指标情形下，这些系数由双模重数和标准不变量数据所支配。

以下命题给出了两项明确的结构性假设，可迫使迹矩阵整性条件 (FD–Int) 成立。

命题 7.88 (迫使分母有界的结构性假设)。 设 $\mathcal{M}$ 具有原子中心，极小中心投影为 $(z_j)_{j\in J}$，且 $P\colon Z(\mathcal{M}) \to Z(\mathcal{M})$ 是由某个正规正次幺 $T\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 诱导的中心映射 $P = E_Z \circ T|_Z$ 。

以下各项均可迫使有界分母条件 $p_{ij} \in \{0, \frac{1}{N_0}, \ldots, 1\}$成立:

(A) 置换自同态的凸组合。 设 $P = \sum_{\ell=1}^{L} \lambda_\ell \sigma_\ell$ ，其中每个 σ_ℓ 都是 $Z(\mathcal{M})$ 的 $*$-自同构（即对 z_j 进行置换），且每个 $\lambda_\ell \in \{0, \frac{1}{N_0}, \ldots, 1\}$ 满足 $\sum_\ell \lambda_\ell \leq 1$。那么

$$p_{ij} = \sum_{\ell:\sigma_\ell(j)=i} \lambda_\ell \in \left\{0, \frac{1}{N_0}, \ldots, 1\right\}.$$

（***B***）具有统一归一化因子的重数游走。假设 $P(z_j) = \sum_i \frac{m_{ij}}{M_0} z_i$ 具有整数$m_{ij} \geq 0$，且有单一的统一归一化因子 $M_0 \in \mathbb{N}$。那么 $p_{ij} = \frac{m_{ij}}{M_0} \in \{0, \frac{1}{M_0}, \ldots, 1\}$。

备注7.89（应用）。当 T 是“对称扇区的有限随机选择”时，假设（A）便会出现，例如对有限群作用或有限个具有有理权重的标准不变量对称进行平均。假设（B）是标准不变量数据所导出的组合型完全正映射中自然出现的“统一分母”条件：例如具有整数权重的平面代数切络、具有统一归一化因子的邻接算子等。

结合命题7.41 （由权重下界得到零点处的间隙），这些假设可得间隙 $\geq \delta_0/N_0$ 其中 $\delta_0 =$ 最小值$\{\tau(z_i) : i$ 可达$\}$。这将有限指标零点间隙问题归结为验证迹矩阵整性。

引理 7.90 (离散迹子群当且仅当权重可公度)。 设 $w_1, \ldots, w_m > 0$，且令$G := \sum_{j=1}^{m} w_j\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$。那么， G 是 $\mathbb{R}$ 的离散子群，当且仅当存在 $\delta_0 > 0$ 使得每个 $w_j \in \delta_0\mathbb{Z}$。等价地，对于所有 i， $w_i/w_1 \in \mathbb{Q}$ 。在这种情况下， $G = \delta_0\mathbb{Z}$。

证明。 若 $w_j \in \delta_0\mathbb{Z}$ 对所有 j都成立，则 $G \subseteq \delta_0\mathbb{Z}$，而它是离散的。反之，若 G 是离散的，则它是 $\mathbb{R}$的闭子群，因此存在某个 $\delta_0 > 0$使得 $G = \delta_0\mathbb{Z}$ 。于是每个 $w_j \in G = \delta_0\mathbb{Z}$。 □

备注 7.91。 引理 7.90 阐明了为何“有界耦合常数”或“量子化”在迹权重层面必须确实表示“在 $\mathbb{Q}$ 上秩为 1”：可公度性假设 (W) 并非仅仅是方便之举，而是获得离散迹格所必需的。

8 量子操作的依赖维数的界

对于有限维希尔伯特空间上的量子操作，定理 $n_T \le |A|$ 中的界 4.1可以显著改进。本节的主要结果是，对于完全正次幺映射， $n_T \le d$ 其中 $d =$ 维数 H，且与族的大小无关 $|A|$。这个界是紧的。

支撑投影

设 H 是有限维希尔伯特空间，且 $\dim H = d$。对于正算子 $A \in B(H)$，记 $\mathrm{supp}(A)$ 为其支撑投影，即值域 $\mathrm{Ran}(A)$ 上的正交投影。

Le引理 8.1 (支撑链)。 设 T 是 $B(H)$ 上的正次幺映射。定义 e

$$p_k := \mathrm{supp}(T^k(I)) \qquad (k \ge 0).$$

那么：

(i) $p_0 = I$ 和 $p_{k+1} \le p_k$ 对所有 $k \ge 0$均成立。

(ii) 链 $I = p_0 \ge p_1 \ge p_2 \ge \cdots$ 至多经过 d 步后稳定：存在 $m \le d$，使得对所有 $k \ge 0$均有 $p_m = p_{m+k}$。

证明。 (i) 我们有 $p_0 =$ 支撑$(I) = I$。关于递减性质：根据备注 3.4， $T^{k+1}(I) \le T^k(I)$，因此支撑$(T^{k+1}(I)) \le$ 支撑$(T^k(I))$。

(ii) 投影 p_k 在维数至多为 d的格中构成一个递减链。由于每次严格不等式中秩至少降低 1，该链至多经过 d步后稳定。

□

支撑稳定并不意味着效应稳定

即使对于完全正映射，$\mathrm{supp}(T^k(I))$也可能稳定，而 $T^k(I)$仍持续严格递减（通常只渐近收敛）。这一现象表明，仅凭“有限支撑链长度”并不能得到维数界，还需要利用额外的结构。

例 8.2 （支撑稳定，但效应严格递减）。 令 $H = \mathbb{C}^2$，并定义一个完全正映射（海森堡图像）

$$T(A) = V_1^* A V_1 + V_2^* A V_2, \quad V_1 = |0\rangle\langle 0|, \quad V_2 = \sqrt{c}\,|1\rangle\langle 1|, \quad 0 < c < 1.$$

那么 $T(I) = \mathrm{diag}(1, c) \le I$，且对于所有 $k \ge 0$,

$$T^k(I) = \mathrm{diag}(1, c^k),$$

因此，对于所有 k，$\mathrm{supp}(T^k(I)) = I$，但当 $c \ne 1$ 时， $T^{k+1}(I) \ne T^k(I)$。

这个例子并不与定理 4.1矛盾：半群 $\{T^n : n \ge 1\}$ 是无限的，因为$T^j \ne T^k$ 对于 $j \ne k$ 当 $c \in (0, 1)$ 时，因此有限性假设不成立。

备注 8.3。 例子8.2 表明，仅有支撑稳定化并不能给出维数界——完全正结构在下文的幂零性论证中起着关键作用。对于一般的正映射，只有较弱的界 $n_T \le d^2$ 由命题 8.31 给出。

CP 维数界

现在我们证明，对于完全正次幺映射，操作谱系的有限性会迫使稳定化指标满足一个精确的维数界。关键在于一个关于幂零完全正映射的简单线性代数界；我们将从基本原理出发，利用 Kraus 字和严格核过滤来证明它。关于完全正映射和 Kraus 表示定理的背景知识，参见 [12, 5, 15]；现代论述包括 [16, 17]。

引理 8.4（幂零完全正映射具有有界指数）。设 $\alpha : M_s \to M_s$ 是完全正的。若对某个 $m \geq 1$ 有 $\alpha^m = 0$，则 $\alpha^s = 0$；特别地，α 的幂零指数至多为 s。

证明。将 $\alpha(X)$ 写成 $= \sum_{i=1}^{r} L_i^* X L_i$（Kraus 形式）。对于长度为 $|w| = k$ 的词 $w = (i_1, \ldots, i_k)$，令 $L_w := L_{i_1} \cdots L_{i_k}$。（我们对所有长度为 k 的词求和；每个词确定一个有序乘积 $L_{i_1} \cdots L_{i_k}$。）那么对所有 $k \geq 1$,

$$\alpha^k(X) = \sum_{|w|=k} L_w^* X L_w.$$

若 $\alpha^m = 0$ 则 $\alpha^m(I) = 0$，因此 $\sum_{|w|=m} L_w^* L_w = 0$。由于每个 $L_w^* L_w \geq 0$，且半正定矩阵之和只有在每个加数都为零时才可能为零（半正定锥是尖的；这是矩阵代数中引理 2.6 的实例），我们得到 $L_w = 0$ 对每个满足 $|w| = m$ 的词都成立。

定义子空间 $N_k \subseteq \mathbb{C}^s$ 如下

$$N_k := \{\xi \in \mathbb{C}^s : L_w \xi = 0 \text{ for all words } w \text{ of length } k\}.$$

于是 $N_1 = \bigcap_i \ker L_i$，并且递归关系

$$N_{k+1} = \{\xi : L_i \xi \in N_k \text{ for all } i\}$$

成立，因此对所有 k均有 $N_k \subseteq N_{k+1}$。此外，若 $N_k = N_{k+1}$，则递归关系推出对所有$j \geq 1$ 均有 $N_{k+j} = N_k$（链稳定）。

由于所有长度为 m 的词都为零，我们有 $N_m = \mathbb{C}^s$。因此，链 $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$在达到 $\mathbb{C}^s$ 之前不可能稳定，所以直到 $N_m = \mathbb{C}^s$ 为止，每一步都必须严格递增。由于 $\dim N_k$ 在每次严格包含时至少增加 1，而 $\mathbb{C}^s$ 中子空间的严格递增链长度至多为 s，故可得 $m \leq s$。 □

备注 8.5. 我们应用引理 8.4，其中 α 是某个完全正映射的角限制。定理 4.1 中的有限性假设仅用于确保稳定化指标 n_T 有限；一旦这一点得到确立，初等的幂零完全正映射界便可提供维数无关界 $n_T \leq d$。关于幂零完全正映射的更多结果，包括相关的核过滤技术，参见 [1]。

证明思路。策略是将问题归约为幂零完全正映射。给定 T及其稳定化指标 n_T，缺陷轨道 $\{D_k = T^k(d(T))\}_{k=0}^{n_T-1}$张成一个角 QM_dQ。累积缺陷 $S = \sum_k D_k$在 Q上具有全支撑，因此 $S \geq \lambda Q$ 对于某个 $\lambda > 0$成立。由于 $T^{n_T}(d(T)) = 0$，应用角映射n_T 次会消灭 S，而正性随后迫使该角映射为幂零映射。引理8.4 完成了论证。

我们首先提炼出证明中用到的标准算子引理。这些引理广为人知，但为求完整起见，我们仍明确陈述如下。

引理 8.6 (半正定和的支撑)。 若 $A_1, \dots, A_m \geq 0$ 属于 M_d，则

$$\operatorname{supp}\left(\sum_{j=1}^{m} A_j\right) = \bigvee_{j=1}^{m} \operatorname{supp}(A_j).$$

等价地，值域$(\sum_j A_j) = \sum_j$值域(A_j)。

*Pr*证明。 我们证明，对于 $A, B \geq 0$，有 $\ker(A+B) = \ker(A) \cap \ker(B)$。若 $(A+B)v = 0$，则

$$0 = \langle v, (A+B)v \rangle = \langle v, Av \rangle + \langle v, Bv \rangle.$$

由于 $A, B \geq 0$，两个加项都是 ≥ 0，所以它们都必须为 0。因此 $\langle v, Av \rangle = \|A^{1/2}v\|^2 = 0$，从而得到 $A^{1/2}v = 0$，即 $Av = 0$。类似地， $Bv = 0$。反过来，若 $Av = Bv = 0$，则 $(A+B)v = 0$。因此 $\ker(A+B) = \ker(A) \cap \ker(B)$。

取正交补：

$$\operatorname{Ran}(A+B) = (\ker(A+B))^{\perp} = (\ker(A) \cap \ker(B))^{\perp} = \ker(A)^{\perp} + \ker(B)^{\perp} = \operatorname{Ran}(A) + \operatorname{Ran}(B).$$

m项的情形由归纳法得到，而 supp = 投影到值域给出支撑公式。

□

引理 8.7 (满支撑蕴含谱隙)。 设 $0 \leq S \in QM_dQ$，其中 Q 是秩为 s的投影。若 $\operatorname{supp}(S) = Q$，则 $S|_{Q\mathbb{C}^d}$ 可逆，并且存在 $\lambda > 0$ 使得 $S \geq \lambda Q$。具体而言， λ 可取为 $S|_{Q\mathbb{C}^d}$的最小特征值。

证明。 将 S 视为 s维空间 $Q\mathbb{C}^d$上的正算子。条件 $\operatorname{supp}(S) = Q$ 意味着 S 在该空间上的核是平凡的，因此所有特征值都严格正。令 $\lambda = \lambda_{\min}(S|_{Q\mathbb{C}^d}) > 0$。于是 $S \geq \lambda I$ 在 $Q\mathbb{C}^d$上，这转化为 $S \geq \lambda Q$ 在 M_d中。 □

引理 8.8 （恒等算子上的幂零性蕴含幂零性）。 设 $\alpha: QM_dQ \to QM_dQ$ 为正的。如果$\alpha^n(Q) = 0$，则 $\alpha^n(X) = 0$ 对所有 $X \in QM_dQ$均成立。

证明。 对于 $0 \leq X \leq \|X\|Q$，正性给出 $0 \leq \alpha^n(X) \leq \|X\|\alpha^n(Q) = 0$，因此 $\alpha^n(X) = 0$。对于一般的自伴 X，写作 $X = X_+ - X_-$，其中 $X_\pm \geq 0$。对于非自伴的 X，使用$X = (\Re X) + i(\Im X)$，其中 $\Re X$，$\Im X$ 为自伴。由线性性即得证明。 □

定理 8.9 (CP 维数界)。 设 $T: M_d \to M_d$ 是完全正且次幺的，并假设 T 属于有限复合封闭族 A。那么

$$n_T \leq d.$$

更准确地说，如果 $n = n_T$ 且

$$Q := \bigvee_{k=0}^{n-1} \operatorname{supp}(T^k(d(T))), \qquad s := \operatorname{rank}(Q),$$

then

$$n_T \leq s \leq d.$$

证明。 根据定理 4.1， $n = n_T$ 存在。定义缺陷轨道

$$D_k := T^k(d(T)) \qquad (k \geq 0),$$

因此 $D_k \geq 0$、 $D_n = 0$ 和 $D_k \neq 0$ 对于 $k < n$。

Let

$$Q := \bigvee_{k=0}^{n-1} \operatorname{supp}(D_k), \qquad s = \operatorname{rank}(Q).$$

定义一个角映射

$$\alpha : QM_dQ \to QM_dQ, \qquad \alpha(X) := Q\,T(X)\,Q.$$

由于包含映射 $QM_dQ \hookrightarrow M_d$、映射 T 和压缩 $X \mapsto QXQ$ 都是完全正的，因此复合 α 是完全正的。

步骤 1（缺陷上的轨道一致）。我们声称

$$\alpha^k(d(T)) = T^k(d(T)) \quad \text{for all } k \geq 0.$$

对于 $k = 0$，这是显然的。对于 $0 \leq k \leq n-2$，根据构造，元素 D_k 支撑于 Q 中；又由于 $k+1 \leq n-1$，元素 D_{k+1} 也支撑于 Q 中。因此

$$\alpha(D_k) = Q\,T(D_k)\,Q = Q\,D_{k+1}\,Q = D_{k+1}.$$

归纳可得，对于所有 $k \leq n-1$， $\alpha^k(d(T)) = D_k$。对于 $k = n$，我们有 $\alpha^n(d(T)) = \alpha(D_{n-1}) = Q\,T(D_{n-1})\,Q = Q\,D_n\,Q = 0$，因为 $D_n = 0$。对于 $k > n$，两边均为 0，因为 $D_n = 0$ 蕴含 $D_{n+\ell} = T^\ell(D_n) = T^\ell(0) = 0$，对所有 $\ell \geq 0$ 均成立。

步骤 2（累积缺陷的全支撑）。定义

$$S := \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k(d(T)) = \sum_{k=0}^{n-1} D_k \in QM_dQ.$$

根据引理 8.6,

$$\operatorname{supp}(S) = \bigvee_{k=0}^{n-1} \operatorname{supp}(D_k) = Q.$$

根据引理 8.7，存在 $\lambda > 0$ 使得

$$S \geq \lambda\, Q \quad \text{in } QM_dQ.$$

步骤 3（在角上强制幂零性）。由于 $\alpha^n(d(T)) = D_n = 0$，我们有

$$\alpha^n(S) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{n+k}(d(T)) = \sum_{k=0}^{n-1} D_{n+k} = 0.$$

关键观察如下：若 $S \geq \lambda Q$ 对于 $\lambda > 0$ 和 $\alpha^n(S) = 0$ 对于正映射 α成立，则 $\alpha^n(Q) = 0$。事实上，正性给出

$$0 = \alpha^n(S) \geq \lambda\,\alpha^n(Q) \geq 0,$$

所以 $\alpha^n(Q) = 0$。根据引理 8.8， $\alpha^n = 0$ 在 QM_dQ上处处成立。因此 α 是作用于 $QM_dQ \cong M_s$上的幂零完全正映射。

步骤 4（维数界）。根据引理 8.4，作用于 M_s 上的幂零完全正映射的幂零指数至多为 s。因此 $\alpha^s = 0$，所以

$$0 = \alpha^s(d(T)) = T^s(d(T)).$$

由 n_T 的极小性，得到 $n_T \leq s \leq d$。 □

推论 8.10（完全正映射有限族的一致有界性）。 如果 A 是 M_d 上的有限复合封闭族完全正次幺映射，那么

$$\max_{T\in A} n_T \le d,$$

与 $|A|$无关。

备注 8.11（稳定化指标等于角块幂零指数）。 证明的步骤 3 表明 α^{n_T} =0，因此 $m(\alpha) \le n_T$，其中 $m(\alpha)$ 是 α 在 QM_dQ 上的幂零指数。反向不等式$n_T \le m(\alpha)$显然成立： $\alpha^{m(\alpha)} = 0$ 蕴含 $\alpha^{m(\alpha)}(d(T)) = T^{m(\alpha)}(d(T))$ $= 0$。因此

$$n_T = m(\alpha) \le \operatorname{rank}(Q) \le d.$$

n_T 与 rank(Q) 之间的差距，完全取决于幂零完全正映射 α是否在 M_s 上达到其可能的最大幂零指数（其中 $s = \operatorname{rank}(Q)$）。

命题 8.12（精确可达性递归）。 设 $T(X) = \sum_i V_i^* X V_i$ 是完全正映射，且 $A \ge 0$。则

$$\operatorname{Ran}(T(A)) = \sum_i V_i^* \operatorname{Ran}(A).$$

因此，将从 $d(T)$ 出发的可达子空间定义为

$$\mathcal{R}_0 := \operatorname{Ran}(d(T)), \qquad \mathcal{R}_{k+1} := \sum_i V_i^* \mathcal{R}_k,$$

我们有 $\mathcal{R}_k =$值域($T^k(d(T))$) 对所有 $k \ge 0$均成立，并且轨道支撑投影满足

$$Q = \bigvee_{k<n_T} \operatorname{supp}(T^k(d(T))) = \operatorname{proj}\left(\sum_{k<n_T} \mathcal{R}_k\right).$$

证明。对于 $A \ge 0$ 和任意 V，恒等式 Ran(V^*AV) $= V^*$Ran(A) 可由 Ran($A^{1/2}$) =Ran(A)（在有限维空间中）以及分解 $V^*AV = (A^{1/2}V)^*(A^{1/2}V)$ 得出。由于正半定算子之和的值域等于它们的值域之和（引理 8.6），Ran($T(A)$) =Ran($\sum_i V_i^* A V_i$) $= \sum_i$ Ran($V_i^* A V_i$) $= \sum_i V_i^*$Ran(A)。

递归关系 $\mathcal{R}_k =$ Ran($T^k(d(T))$) 可由归纳法得出。对于轨道支撑，supp(B) =proj(Ran(B))，而支撑投影的上确界等于投影到值域之和的投影。 □

命题 8.13 (代数生成的可达性)。 设 $T(X) = \sum_{i=1}^r V_i^* X V_i$ 是作用于M_d上的完全正次幺映射，其可达子空间为 $\mathcal{R}_0 = \operatorname{Ran}(d(T))$ 且 $\mathcal{R}_{k+1} = \sum_i V_i^* \mathcal{R}_k$ 如命题 *8.12*中所述。设

$$\mathcal{A} := \operatorname{alg}(V_1^*, \dots, V_r^*) \subseteq M_d$$

是由伴随 *Kraus* 算子生成的结合子代数。 n

$$\mathcal{R}_\infty = \mathcal{A} \cdot \mathcal{R}_0,$$

其中 $\mathcal{A} \cdot S := \{Av : A \in \mathcal{A}, v \in S\}$。

证明。 展开递归： $\mathcal{R}_k$ 由 $V_{i_1}^* \cdots V_{i_k}^* v$ 张成，其中 $v \in \mathcal{R}_0$。对 k 求和得到$\mathcal{A} \cdot \mathcal{R}_0$。

□

推论 8.14 (代数维数界)。

$$\operatorname{rank}(Q) = \dim(\mathcal{A}\cdot\mathcal{R}_0) \le \min\big(d,\ \dim(\mathcal{A})\cdot\operatorname{rank}(d(T))\big).$$

备注 8.15。 代数 $\mathcal{A}$ 仅取决于 Kraus 算子的线性张成：对 Kraus 表示进行酉混合不会改变 span$\{V_i^*\}$，因此也不会改变 $\mathcal{A}$。

命题 8.16 (对易 POVM 仪器)。 设 $T(X) = \sum_a E_a^{1/2} X E_a^{1/2}$，且效应彼此对易 E_a。则 $\mathcal{R}_\infty = \mathcal{R}_0$，因此 $\operatorname{rank}(Q) = \operatorname{rank}(d(T))$。

证明。 E_a 生成一个阿贝尔 C^*-代数。由于 $d(T) = I - \sum_a E_a$ 也属于同一个代数，其支撑投影 $P := \operatorname{supp}(d(T))$ 与每个 $E_a^{1/2}$ 对易。因此 $E_a^{1/2}(PH) \subseteq PH$，所以$\mathcal{R}_0 \subseteq PH$ 在每个 $E_a^{1/2}$ 下均不变。因此，对所有 k，都有 $\mathcal{R}_{k+1} \subseteq \mathcal{R}_0$，从而得到 $\mathcal{R}_\infty = \mathcal{R}_0$。 □

备注 8.17 (对易与非对易 POVM 仪器)。 设 $T: M_d \to M_d$ 是与 POVM $\{E_a\}$ 相关联的仪器，且 $\sum_a E_a \le I$。

(1) 对易情形：不增长，最小角。 如果效应 E_a 彼此对易，命题 8.16表明 $\mathcal{R}_\infty = \mathcal{R}_0$ 且秩(Q) $=$ 秩 $(d(T))$. 因此，对易仪器实现了最小可能的轨道角：缺陷轨道不会扩展到初始缺陷支撑之外。

(2) 增长判据（精确）。 当且仅当 $\mathcal{R}_\infty = \mathcal{R}_0$ $\mathcal{R}_0$ 在每个 $E_a^{1/2}$下均不变（等价地，在代数 $\mathcal{A} = \operatorname{alg}(E_a)$ 下不变）。 证明： 由命题 8.13 及 $V_a = E_a^{1/2} = V_a^*$，可得$\mathcal{R}_\infty = \mathcal{A}\cdot\mathcal{R}_0$。 因此 $\mathcal{R}_\infty = \mathcal{R}_0$ 当且仅当 $\mathcal{A}\cdot\mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}_0$ 当且仅当 $\mathcal{R}_0$ 是 $\mathcal{A}$-不变的，而在 $\mathcal{A}$ 下不变等价于在生成元 $E_a^{1/2}$下不变。 □

如果效应不对易， $\mathcal{R}_0$ 未必在 $\{E_a^{1/2}\}$下不变；当不变性失效时，滤过会增长。非对易性本身并不必然导致增长；关键在于$\mathcal{R}_0 = \operatorname{Ran}(d(T))$是否在$\operatorname{alg}(E_a)$下不变。例如，如果 $H = H_0 \oplus H_1$ 且效应分解为 $E_a = F_a \oplus G_a$，其中$\sum_a G_a = I_{H_1}$ （因此 $d(T)$支撑于 H_0上），那么即使 G_a在 H_1上不对易，也有 $\mathcal{R}_\infty = \mathcal{R}_0$。

一个具有增长的具体量子比特示例。设 $H = \mathbb{C}^2$ 其基为 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 且 $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$。定义

$$E_1 = \tfrac{1}{2}|0\rangle\langle 0|, \qquad E_2 = \tfrac{2}{3}|+\rangle\langle +|.$$

于是 E_1 与 E_2 不对易。在 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 基下，

$$E_1 + E_2 = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

其特征值为 1 和 $1/6$，因此 $E_1 + E_2 \le I$。缺陷 $d(T) = I - (E_1 + E_2)$ 的特征值为 0 和$5/6$，因此秩$(d(T))$ $= 1$。明确地说， $\mathcal{R}_0 =$ 张成$\{v\}$，其中 $v = |1\rangle - \frac{1}{2}|0\rangle$ 张成 $5\not\!6$-特征子空间。取 $E_1^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle\langle 0|$ 和 $E_2^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}|+\rangle\langle +|$:

$$E_1^{1/2} v = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|v\rangle|0\rangle = -\tfrac{1}{2\sqrt{2}}|0\rangle \neq 0, \qquad E_2^{1/2} v = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\langle +|v\rangle|+\rangle = \tfrac{1}{2\sqrt{3}}|+\rangle \neq 0.$$

由于 $|0\rangle$ 和 $|+\rangle$ 线性无关， $\mathcal{R}_1 =$ 张成$\{|0\rangle, |+\rangle\} = H$。因此 $\mathcal{R}_\infty \supseteq \mathcal{R}_1 = H$，所以$Q = \operatorname{proj}(\mathcal{R}_\infty)$ $= I$ 且 $\operatorname{rank}(Q) = 2 > \operatorname{rank}(d(T)) = 1$。

要点。 在对易情形下，可达子空间过滤保持不变（$\mathcal{R}_\infty = \mathcal{R}_0$）；而 $\mathcal{R}_0$ 不具不变性则会导致增长。这解释了为何仪器特定界应利用 $\{E_a\}$ 的谱结构或代数结构，而非仅依赖简单的秩计数。

命题 8.18（最大幂零性的判据）。设 $\alpha : QM_dQ \to QM_dQ$ 为定理 8.9中的角映射，并设 $s = \text{秩}(Q)$。定义单位轨道效应

$$E_k := \alpha^k(I_Q), \qquad p_k := \operatorname{supp}(E_k).$$

那么，当且仅当 $\text{秩}(E_k) = s - k$ 对 $k = 0, 1, \ldots, s$成立。等价地，投影链 $p_0 > p_1 > \cdots > p_{s-1} > p_s = 0$ 恰好有 s 次严格下降（每次秩下降 *1*）。

证明。角映射 α 是幂零的，幂零指数为 $m(\alpha) = n_T$ (备注 8.11)。根据引理 8.4，作用在 M_s 上的幂零完全正映射的幂零指数至多为 s。等式 $m(\alpha) = s$ 成立，当且仅当引理 8.4 证明中的核过滤在每一步恰好增加一维。

幂零类型由 $\alpha^k(I_Q)$ 的秩序列决定：类型 $(1, \ldots, 1)$ 表示秩$(\alpha^k(I_Q))$ 在每一步恰好下降 1，即，对 $k = 0, \ldots, s$，$\text{秩}(E_k) = s - k$。 □

备注 8.19（核旗与 Kraus 结构）。递减的支撑链 $p_k = \operatorname{supp}(\alpha^k(I_Q))$ 对偶为递增的核旗 $H_k := \ker(\alpha^k(I_Q))$，在最大情形下 $\dim(H_k) = k$。若 $\alpha(X) = \sum_i L_i^* X L_i$ 作用于 QH，则 $v \in H_{k+1}$ 对所有 i均意味着 $L_i v \in H_k$。这意味着，相对于任何适配该旗（H_k）的基，所有 Kraus 算子 L_i 都是严格上三角的。最大幂零性（$n_T = s$）对应于该旗是完备的（增量均为 1 维）。

请注意，这个单位元轨道 旗（p_k）（递减）不同于缺陷轨道可达性 滤过$Q_k = \bigvee_{j \le k} \operatorname{supp}(T^j(d(T)))$（递增）。前者决定幂零类型；后者可能立即停滞，而幂零性仍保持最大。

字核刻画与算法判据

核旗 $H_k = \ker(\alpha^k(I_Q))$ 可以直接用 Kraus 字来刻画，从而为计算幂零类型提供一种算法方法。

引理 8.20 (单位元轨道的字展开)。设 $\alpha : QM_dQ \to QM_dQ$ 是具有 *Kraus* 形式 $\alpha(X) = \sum_{i=1}^{r} L_i^* X L_i$ 的 *CP* 映射，作用于 $QH \cong \mathbb{C}^s$ 上。对于 $\{1, \ldots, r\}$ 上的每个字 $w = i_1 \cdots i_k$，令 $L_w := L_{i_1} \cdots L_{i_k}$。则

$$\alpha^k(I_Q) = \sum_{|w|=k} L_w^* L_w \qquad (k \ge 0).$$

证明。对 k 进行归纳：复合会将字相乘，并对所有拼接求和。 □

推论 8.21（字核刻画）。定义

$$H_k^{\text{word}} := \bigcap_{|w|=k} \ker(L_w) \subseteq QH.$$

那么，对于所有 $k \ge 0$，$\ker(\alpha^k(I_Q)) = H_k^{\text{word}}$

证明。对于 $v \in QH$，

$$\langle v, \alpha^k(I_Q) v \rangle = \sum_{|w|=k} \|L_w v\|^2,$$

当且仅当 $L_w v = 0$ 对所有 $|w| = k$ 都为零。 □

推论 8.22 (核旗递归)。设 $H_k := \ker(\alpha^k(I_Q))$，则有 $H_0 = \{0\}$，$H_1 = \bigcap_i \ker(L_i)$，并且

$$H_{k+1} = \{v \in QH : L_i v \in H_k \text{ for all } i\}.$$

定理 8.23 (最大类型的算法判据)。 设 $s = \mathrm{rank}(Q)$。以下各项等价：

(i) $n_T = s$ （等价地， $m(\alpha) = s$）；
(ii) 维数（H_k） $= k$，对于 $k = 0$、1、.....、s；*(iii)* 秩（$\alpha^k(I_Q) = s - k$，对于 $k = 0$、1、.....、s；*(iv)* α 的幂零类型为 （1，.....，1）。

证明。 （i）⇔（iv）由命题8.18 结合备注 8.11得出。（ii）⇔（iii）是秩-零化度定理，其中 H_k =核（$\alpha^k(I_Q)$）。 （iii）⇔（iv）是幂零类型的秩序列刻画。 □

命题 8.24 （充分条件：链基）。 假设存在 e_1、.....、e_s 这样的一个基，使得 QH满足：

(i) 每个 L_i 都是严格上三角的：对于所有 i、k， $L_i e_k \in$ 张成$\{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$；

(ii) 对于每个 $k \geq 2$，存在 $i(k)$ 使得 $L_{i(k)} e_k \notin$ 张成$\{e_1, \ldots, e_{k-2}\}$。

于是，对于所有 k，均有维数$(H_k) = k$，因此 $n_T = s$。

证明。 令 $F_k :=$ 张成$\{e_1, \ldots, e_k\}$。根据 (i)， $L_i(F_{k+1}) \subseteq F_k$，因此递归刻画给出：对于所有 k，均有 $F_k \subseteq H_k$。反之，假设对于某个 $k \geq 2$有 $e_k \in H_{k-1}$。由递归可得， $L_{i(k)} e_k \in H_{k-2} \subseteq F_{k-2}$，这与 (ii) 矛盾。因此，归纳地有 $H_{k-1} \subseteq F_{k-1}$，从而得到 $H_k = F_k$ 且 $\dim(H_k) = k$。 □

备注 8.25（一般行为：最大类型是开且稠密的）。 在 M_s 上的幂零完全正映射簇中，具有最大幂零指数 s 的子集是

$$\{\alpha : \alpha^s = 0,\ \alpha^{s-1} \neq 0\}.$$

条件 $\alpha^s = 0$ 是多项式条件（因而是闭的）； $\alpha^{s-1} \neq 0$ 是某个闭集的补集，因而是相对开集。由于移位信道可达到指数 s，闭集 $\{\alpha^{s-1} = 0\}$ 是 $\{\alpha^s = 0\}$的真子集。因此，在幂零完全正映射中，最大类型是一般的（开且稠密的）。

一个简洁的特殊情形：对于丘秩 1（即 $\alpha(X) = L^* X L$ 且 L 幂零）， $n(\alpha)$等于 L的幂零指数。正则幂零元（单个若尔当块）在幂零矩阵中开且稠密，因此最大类型在秩 1 幂零完全正映射族中是一般的。

以下判据可直接通过原始 Kraus 算子 V_i检验，而不只是通过角限制检验。

命题 8.26 (秩一缺陷链判据)。 设 $T(X) = \sum_i V_i^* X V_i$ 是作用于M_d 上的次幺完全正映射，且满足 $n_T < \infty$。假设：

(i) 每个缺陷迭代的秩均为一：秩$(T^k(d(T))) = 1$ 对于 $k = 0, 1, \ldots, s-1$，其中 $s :=$秩(Q)。

(ii) 它们的值域生成一个完全旗：令 $\mathcal{R}_k :=$值域$(T^k(d(T)))$，我们有 维数$(\mathcal{R}_0 + \cdots + \mathcal{R}_k) = k + 1$ 对于 $k = 0, \ldots, s-1$。

(iii)（单稳 *ep* 移位见证）对于每个 $k = 0$、...、$s-2$，存在一个指标 $i(k)$ 使得

$$V_{i(k)}^*(\mathcal{R}_k) \not\subseteq \mathcal{R}_0 + \cdots + \mathcal{R}_{k-1} \quad \textit{and} \quad V_{i(k)}^*(\mathcal{R}_k) \subseteq \mathcal{R}_0 + \cdots + \mathcal{R}_k.$$

然后 $n_T = s =$ 秩(Q) （最大幂零性）。

证明。 选取单位向量 e_{k+1}，分别张成每个 $\mathcal{R}_k$，使得 $\{e_1, \ldots, e_s\}$ 构成 QH 的一组基（利用条件（ii））。条件（iii）保证角落 Kraus 算子 $L_i = QV_iQ$ 满足命题 8.24 的假设：其中条件（i）（严格上三角性）由可达性递归 $\mathcal{R}_{k+1} = \sum_i V_i^* \mathcal{R}_k$（命题 8.12）推出，而其中条件（ii）（非退化移位）恰好就是这里的条件（iii）。 □

备注 8.27。 秩一缺陷链判据将移位信道纳入其中，作为典型示例（见示例 8.33）：按照约定 $L_i = |i\rangle\langle i+1|$，该移位满足 $d(T) = |1\rangle\langle 1|$（秩为 1），且连续迭代生成旗标 $\mathbb{C}|1\rangle \subset \mathbb{C}|1\rangle + \mathbb{C}|2\rangle \subset \cdots$，每次应用 T都会使支撑恰好移动一步。（反转基的顺序即可得到“右移”约定$d(T) = |e_d\rangle\langle e_d|$，此时 T向下移动。）

轨道角落秩的界

推论 8.28 (基准秩界)。 设 $T(X) = \sum_i V_i^* X V_i$ 是 M_d 上的完全正次幺映射。那么

$$\operatorname{rank}(Q) \le \operatorname{rank}(d(T)) + \sum_i \operatorname{rank}(V_i),$$

由 d 限定。特别地，秩$(Q) \le$ 秩$(d(T)) + (\#\textit{Kraus}) \cdot$ 最大$_i$ 秩$(V_i \quad)$.

证明。 设 $R := \sum_i$ 值域(V_i^*)。由命题 8.12， $\mathcal{R}_k \subseteq R$ 对于 $k \ge 1$。因此 $\mathcal{R}_\infty \subseteq \mathcal{R}_0 + R$，从而得到

$$\operatorname{rank}(Q) = \dim(\mathcal{R}_\infty) \le \dim(\mathcal{R}_0) + \dim(R) \le \operatorname{rank}(d(T)) + \sum_i \operatorname{rank}(V_i).$$ □

下面的内在界改进了推论8.28 ，且与 Kraus 表示无关。

命题 8.29 (内在秩界)。 设 $T : M_d \to M_d$ 是完全正次幺映射，其轨道支撑投影为 Q。那么

$$\operatorname{rank}(Q) \le \operatorname{rank}(d(T)) + \operatorname{rank}(T(I)),$$

由 d 限定。更确切地说，

$$\operatorname{rank}(Q) \le \operatorname{rank}(d(T)) + \operatorname{rank}(T(I)) - \dim(\operatorname{Ran}(d(T)) \cap \operatorname{Ran}(T(I))).$$

证明。 对于任意 Kraus 表示 $T(X) = \sum_i V_i^* X V_i$，有

$$\sum_i \operatorname{Ran}(V_i^*) = \operatorname{Ran}(T(I)).$$

为说明这一点，注意到 $(\sum_i$ 值域$(V_i^*))^\perp = \bigcap_i$ 核$(V_i) =$ 核$(\sum_i V_i^* V_i) =$ 核$(T(I))$，并且对于有限维空间中的正算子 A，值域$(A) =$核$(A)^\perp$。

根据命题 8.12， $\mathcal{R}_k \subseteq \sum_i$ 值域$(V_i^*) =$ 值域$(T(I))$ 对于 $k \ge 1$。因此

$$QH = \mathcal{R}_\infty \subseteq \mathcal{R}_0 + \operatorname{Ran}(T(I)) = \operatorname{Ran}(d(T)) + \operatorname{Ran}(T(I)),$$

从而得到该界。更精确的形式由 $\dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$ 得出。 □

备注 8.30（内在界与 Kraus 界）。 命题8.29与表示无关：$\mathrm{rank}(T(I))$ 仅由 T 决定，而推论 8.28 中的界取决于 Kraus 算子的选择。对于 POVM 仪器 $T(X) = \sum_a E_a^{1/2} X E_a^{1/2}$，有 $T(I) = \sum_a E_a$，因此内在界变为

$$\mathrm{rank}(Q) \le \mathrm{rank}(d(T)) + \mathrm{rank}\left(\sum_a E_a\right) = \mathrm{rank}(d(T)) + \dim\left(\sum_a \mathrm{Ran}(E_a)\right).$$

这解决了开放问题中提到的关于仪器的“自然目标不等式”。

无条件维数界（一般正映射）

以下维数界适用于任意有限维有序效应空间，且不需要 CP 结构。

命题 8.31 (循环子空间界)。 设 E 是一个有限维有序效应空间，且 $\dim(E) = D$，并设 $T : E \to E$ 是有限复合封闭族 A中的一个正次幺映射。那么，稳定化指标满足

$$n_T \le \min\{|A|, D\}.$$

证明。由定理 4.1，得 $n_T \le |A|$。为得到维数界，令 $W = \mathrm{span}\{T^k(d(T)) : k \ge 0\}$。由于存在某个 $n \le |A|$使得 $T^n(d(T)) = 0$，算子 $T|_W$是幂零的。作用于r维空间上的幂零算子的幂零指数至多为 r。由于 $r = \dim(W) \le D$，因此有 $n_T \le D$。 □

推论 8.32 (量子操作)。 对于作用在 $B(H)$ 上且满足 维数 $H = d$ 的量子操作，效应空间的维数为 $D = d^2$。因此，无条件地，

$$n_T \le \min\{|A|, d^2\}.$$

对于完全正映射，定理 *8.9* 将其改进为 $n_T \le d$。

紧性：达到 $n_T = d$ 的量子示例

以下示例表明，对于完全正映射，界 $n_T \le d$ 是最优的。

例 8.33 (移位信道)。 设 $H = \mathbb{C}^d$，其标准基为 $\{|1\rangle, \dots, |d\rangle\}$。用 Kraus 算子定义完全正映射 $T : M_d \to M_d$

$$L_i = |i\rangle\langle i+1|, \quad i = 1, \dots, d-1.$$

于是 $T(X) = \sum_{i=1}^{d-1} L_i^* X L_i$。我们有：

(i) $T(I) = \sum_{i=1}^{d-1} |i+1\rangle\langle i+1| = I - |1\rangle\langle 1|$，因此 T是具有缺陷 $d(T) = |1\rangle\langle 1|$的次幺映射。

(ii) 对于 $k < d$， $T(|k\rangle\langle k|) = |k+1\rangle\langle k+1|$，且 $T(|d\rangle\langle d|) = 0$。

(iii) 由归纳法， $T^k(d(T)) = T^k(|1\rangle\langle 1|) = |k+1\rangle\langle k+1|$ 对于 $k < d$ 成立，且 $T^d(d(T)) = 0$。

因此 $T^{d-1}(d(T)) = |d\rangle\langle d| \ne 0$，但 $T^d(d(T)) = 0$，从而得到 $n_T = d$。

备注 8.34。 示例 8.33 表明，定理 $n_T \le d$ 中的界 8.9 是紧的。移位信道以秩 $n_T = d$ $\mathrm{rank}(Q) = d$实现了该界。

9 讨论

物理解释

缺陷 $d(T) = u - T(u)$ 有多种物理解释：

(i) 终止概率：在过程语义中，$d(T)$ 是对应于“过程终止”或“没有产生输出”的效应。(ii) 无点击结果：在量子测量中，如果 T 表示一个探测器，那么 $d(T)$ 就是无点击概率。(iii) 信息损失：在开放量子系统中，$d(T)$ 量化了丢失到环境中的信息。

余循环恒等式 $d(T \circ S) = d(T) + T(d(S))$ 因而有了自然的解释：复合两个过程所产生的总损失，等于第一个过程造成的损失，加上第一个过程作用于第二个过程的损失。这就是顺序复合的“损失核算”。

量子操作与 Kraus 算子

在 $B(H)$ 上的量子信道这一设定中，$\dim H < \infty$，Φ^*（作用于效应）的持久性条件有着具体的解释。

Φ^* 严格正的一个充分条件是，Φ 至少含有一个可逆 Kraus 算子。更一般地，Φ^* 严格正，当且仅当它将正定算子映射为正定算子。一个充分条件是，Φ的 Kraus 算子作为向量空间张成$B(H)$（等价地，Φ在正算子上忠实）。

与 effectus 理论的联系

在 effectus 理论的范畴框架中，[2, 4, 10], 核发挥着核心作用。缺陷 $d(T)$ 本质上是 T 作为一个效应时的核。于是，余循环恒等式体现了核复合律。关于量子计算和概率语义的相关范畴论研究见[14, 3]；关于量子基础的期望单子表述，参见[11]。

我们的结果表明，有限操作谱系（过程的有限复合封闭集）受到严格的结构约束：它们无法维持无限期的“泄漏”。这是有限性带来的纯操作性后果，与具体模型无关。

开放问题

由注 8.11 和命题 8.12 可得 $n_T = m(\alpha) \leq \mathrm{rank}(Q) = \dim(\mathcal{R}_\infty)$。命题 8.29 给出了内在界 $\mathrm{rank}(Q) \leq \mathrm{rank}(d(T)) + \mathrm{rank}(T(I))$。最大幂零性（$n_T$ =rank(Q)）成立当且仅当核旗是完备的（命题 8.18），这是一般情形（注 8.25）。命题 8.26 给出了针对原始 Kraus 算子的可检验充分条件。命题 4.20 解决了投影忠实性问题。命题 7.32 为冯·诺依曼代数中的有限 I 型角建立了维数界 $n_T \leq s$ 。

1. 无限维稳定性存在性。对于冯·诺依曼代数上的正规完全正次幺映射 $T:\ \mathcal{M}\to\mathcal{M}$，给出能确保 $n_T<\infty$ 的内在条件，使其超越操作性假设。本文提供了若干可检验的判据：

- δ-分辨率（命题 7.23）与离散李雅普诺夫谱（命题7.25）；
- 迹收缩 + 离散尺度（命题 7.33）；
- 原子中心量子化（推论7.35）；
- 有限维不变代数（命题7.43）；
- 超有限有限阶段捕获（推论 7.46）；
- **轨道落入原子子代数的有向图判据**（定理 7.53）：若缺陷轨道位于交换原子子代数中 C，则当且仅当诱导的可达性有向图具有有限高度时，稳定化成立——**无需假设离散性或零点处存在**间隙；；
- **弥散交换捕获的核判据**（定理 7.57）：通过次马尔可夫核将有向图判据推广到弥散阿贝尔 $C\cong L^\infty(X,\ \mu)$；
- **投影滤过证书**（命题 7.66）：如果存在投影 $0=p_0\le\cdots\le p_N$满足 $T(p_k)\le p_{k-1}$，那么 $n_T\le N$。

开放方向的现状：

（i）**弥散交换轨道捕获**：已由定理7.57解决——次马尔可夫核判据为弥散阿贝尔捕获给出了“有限高度”的精确对应概念。

（ii）**鲁棒性（“几乎离散”⇒“最终为零”）**：命题 7.72 给出了明确的不可能性：没有零点间隙机制，鲁棒性定理就无法成立。剩下的任务是找出能**迫使**李雅普诺夫值出现间隙的结构性假设（有限指数子因子、有界深度标准不变量）。

(iii) **有限高度的内在条件**：命题7.66 已部分解决。剩下的任务是确定能够导出此类滤过的结构性假设。

注意：仅有角有限性并不能保证有限稳定化（例8.2 ）.

2. 范畴公理化。下面的定理提炼出定理4.1背后的最小公理。

定理 9.1 (抽象缺陷余循环稳定化**)**。设$(E,+,0,\le,u)$是一个带有平移不变预序 $\le$ 和尖正锥 $E_+:=\{x\in E:\ x\ge 0\}$的有序阿贝尔群，其中 $E_+\cap(-E_+)=\{0\}$。设 $u\in E_+$ 为一个指定元素。

设 $\mathcal{A}$ 是一个由自同态 $T:\ E\to E$ 构成的有限复合封闭集，这些自同态均为单调且次幺（$T(u)\le u$）。定义 $d(T):=u-T(u)\ge 0$，并假设余循环恒等式成立：

$$d(T\circ S)=d(T)+T(d(S))\quad(\forall T,S\in\mathcal{A}).$$

那么，对于每个 $T\in\mathcal{A}$，都存在 $n\le|\mathcal{A}|$，使得 $T^n(d(T))=0$。

证明。 由于 $\mathcal{A}$ 是有限且复合封闭的，所有幂 T^k 都属于 $\mathcal{A}$，因此轨道 $\{T^k(u) : k \geq 1\}$ 至多取 $|\mathcal{A}|$ 个值。因此，存在 $m > n \geq 1$ 使得 $T^m(u) = T^n(u)$。令 $p = m-n \geq 1$，可得 $T^n(u - T^p(u)) = 0$。通过望远镜求和，

$$u - T^p(u) = \sum_{k=0}^{p-1} (T^k(u) - T^{k+1}(u)) = \sum_{k=0}^{p-1} T^k(u - T(u)) = \sum_{k=0}^{p-1} T^k(d(T)),$$

因此 $\sum_{k=0}^{p-1} T^{n+k}(d(T)) = 0$ 每个加项 ≥ 0。尖消去性（引理 2.6）迫使每个加项都为零，特别是 $T^n(d(T)) = 0$。 □

备注 9.2。 “有序阿贝尔群”结构与第 2 节相对应：有序效应空间 $(E, \leq, u)$ 恰好是具有 E 实向量空间的这一情形。尖锥假设蕴含消去性质（引理2.6），因此无需另行假设消去公理。

这为 effectus 理论给出了一个简明的“仅依赖公理”定理：一旦谓词/效应满足这些公理，且 $d(T)$ 满足余循环律，稳定化便随之成立。

下面将定理9.1 的“核心机制”提炼出来，作为针对单个映射的独立判据。

引理 9.3 （单位元轨道重复蕴含缺陷湮灭）。 设 $(E, +, 0, \leq, u)$ 是一个具有尖正锥的有序阿贝尔群，如定理 *9.1* 中所述，并设 $T : E \to E$ 是单调且次幺的，其缺陷 $d(T) = u - T(u) \geq 0$ 满足余循环律。若存在整数$m > n \geq 1$ 使得

$$T^m(u) = T^n(u),$$

然后有 $p := m - n \geq 1$,

$$T^{n+k}(d(T)) = 0 \quad \textit{for every } k = 0, 1, \ldots, p-1.$$

特别地， $T^n(d(T)) = 0$。

证明。 由 $T^m(u) = T^n(u)$ 可得 $0 = T^n(u - T^p(u))$。根据迭代余循环恒等式（引理 3.3）， $u - T^p(u) = \sum_{k=0}^{p-1} T^k(d(T))$。应用 T^n 可得 $0 = \sum_{k=0}^{p-1} T^{n+k}(d(T))$，这是正元之和。尖点消去性迫使每个加项都为零。 □

推论 9.4 （有限循环半群蕴含稳定化）。 如果 $T^m = T^n$ 对于某个 $m > n \geq 1$成立，那么 $T^m(u) = T^n(u)$，因此 $T^n(d(T)) = 0$。

备注 9.5。 引理 9.3 将稳定化问题归结为在解析情形下证明 任意 重复 $T^m(u) = T^n(u)$。这是无限维扩展的关键约化。

当李雅普诺夫值是离散的时，以下结果将李雅普诺夫收缩提升为有限时间内湮灭。

命题 9.6 (收缩性加离散性蕴含有限步湮灭**)**。 设 E 是一个具有尖锥的有序效应空间，且 $\omega : E \to \mathbb{R}$ 是一个忠实正泛函。假设 $x_0 \geq 0$并定义 $x_{k+1} := T(x_k)$。假设：

(i)（李雅普诺夫收缩）存在 $c \in (0, 1)$ 使得 $\omega(T(x)) \leq c\,\omega(x)$ 对所有 $x \geq 0$均成立；

(ii)（离散性）存在 $\delta > 0$ 使得 $\omega(x_k) \in \delta\mathbb{N} := \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$ 对所有 k均成立。

那么对所有 $k \geq N$， $x_k = 0$，其中

$$N = 1 + \left\lceil \frac{\log(\omega(x_0)/\delta)}{\log(1/c)} \right\rceil.$$

证明。 由 (i)， $\omega(x_k) \le c^k \omega(x_0)$。选取 N使得 $c^N \omega(x_0) < \delta$。于是由 (ii) 以及$\omega(x_N) \ge 0$，可得 $\omega(x_N) \in \delta\mathbb{N}$，因此 $\omega(x_N) = 0$。 ω的忠实性意味着 $x_N = 0$，故所有后续迭代均为 0。 □

备注 9.7（对缺陷轨道的应用）。 取 $x_k = T^k(d(T))$：若（i）一个忠实的 ω在相关尖锥上满足$\omega(T(x)) \le c\,\omega(x)$，且（ii） $\omega(T^k(d(T)))$ 属于离散集（例如处于“有限型”或“量子化”的角中），则可得到具有显式界的有限 稳定化 $n_T < \infty$ 。这是一种基于第一性原理的判据，无需借助谱理论。

3. 幺元性的较弱条件。 定理4.13采用严格正性（持久性）。定理 4.16将条件弱化为角忠实性，而命题 4.20 表明，投影忠实性与之等价（对于完全正映射）。现在我们给出一个族级充分条件，并说明仅有“次调和不可约性”并不足够。

命题 9.8 （共同忠实不变态迫使幺元性）。 设（$E, \lesssim u$）是一个具有尖锥的有序效应空间，且令 $\mathcal{A}$ 为作用于 E上的任意正次幺映射集。假设存在一个定义在 E 上的忠实正泛函 ω ，使得

$$\omega(T(u)) = \omega(u) \quad for\ all\ T \in \mathcal{A}.$$

那么每个 $T \in \mathcal{A}$ 都是幺正的。

证明。 固定 $T \in \mathcal{A}$。由于 T是次幺的， $d(T) = u - T(u) \ge 0$。假设给出 $\omega(d(T)) = \omega(u) - \omega(T(u)) = 0$。由 ω的忠实性可知， $d(T) = 0$，因此 $T(u) = u$。 □

备注 9.9。 这是一个全局 的族级条件：只需找到一个共同的忠实不变泛函，就能强制该族中的每个映射都是幺正的，而无需逐一检查。

命题 9.10 （反例：次调和不可约性并不强制幺元性）。 存在一个完全正次幺映射 T：$M_d \to M_d$ 满足：

(i) 半群 $\{T^n : n \ge 1\}$ 是有限的（事实上 $T^d = 0$）；

(ii) T 在次调和投影意义下不可约：若 p 是一个投影，且满足 $0 < p \le I$ 和$T(p) \ge p$，则 $p = 0$;

(iii) T 不是幺正。

因此，“不存在非平凡次调和投影”意义下的不可约性加上有限半群稳定化，并不意味着幺正性。

证明。 令 T 为例 8.33中的幂零移位信道：它是 CP 且次幺，并且$T^d(d(T)) = 0$以及 $n_T = d$，其轨道角为 $Q = I$。特别地， $\{T^n\}$是有限的，因为$T^d = 0$。该映射不是幺正的，因为 $d(T) = I - T(I) \ne 0$。

现在假设 p 是一个投影，满足 $T(p) \ge p$。由正性和单调性，迭代可得$T^k(p) \ge p$，对所有 $k \ge 1$均成立。但 $T^d = 0$推出 $T^d(p) = 0$，因此 $0 \ge p$，所以 $p = 0$。因此不存在非平凡的次调和投影，但 T 并非幺正。 □

备注 9.11。 关键论证是：次调和 $T(p) \ge p$蕴含 $T^k(p) \ge p$，但幂零性蕴含$T^k(p) = 0$ 对足够大的 k成立。因此，这种不可约性概念过于薄弱，无法取代角忠实性。命题 9.12 表明，添加“忠实稳定化”（稳定化单位具有全支撑）即可恢复幺元性。

命题 9.12（具有忠实稳定化的角不可约性蕴含幺元性）。 设 $\alpha\colon M_s \to M_s$ 是完全正次幺映射。假设：

(i)（不可约）不存在非平凡的次调和投影 $0 < p < I$，使得 $\alpha(p) \geq p$；

(ii)（单位稳定化）存在 n，使得 $\alpha^{n+1}(I) = \alpha^n(I) =: v$；

(iii)（忠实稳定化） $v > 0$ （即 v 具有全支撑）。

那么 α 是幺正的： $\alpha(I) = I$。

证明。 令 $v := \alpha^n(I) > 0$。由 (ii) 可知 $\alpha(v) = v$，因此 1 是一个特征值，从而 $r(\alpha) \geq 1$。由于 α 是次幺的，对于 M_s上的正映射有 $\|\alpha\| = \|\alpha(I)\| \leq 1$，因此 $r(\alpha) \leq 1$。所以 $r(\alpha) = 1$。

根据矩阵代数上不可约正映射的佩龙–弗罗贝尼乌斯理论 [7, 6], ，存在一个忠实正线性泛函 ω 定义在 M_s 上，使得 $\omega \circ \alpha = \omega$。

将 ω 应用于正元素 $I - \alpha(I) \geq 0$，得到 $\omega(I - \alpha(I)) = \omega(I) - \omega(\alpha(I)) = 0$。 ω 的忠实性迫使 $I - \alpha(I) = 0$，因此 $\alpha(I) = I$。 □

参考文献

[1] B. V. Rajarama Bhat 和 N. Mallick，幂零完全正映射，正性 **18**(3) (2014), 567–577；arXiv:1310.0591.[2] K.Cho 和B. Jacobs，通过字符串图进行析取和贝叶斯反演，*MathematicalStructures in Computer Science* **29**(7) (2019), 938–971.[3] K. Cho 和 A. Westerbaan，冯·诺依曼代数构成量子 λ 演算的一个模型，arXiv:1603.02133 (2016).[4] K. Cho、B. Jacobs、B. Westerbaan 和 A. Westerbaan，effectus 理论导论，arXiv:1512.05813 (2015).[5] M.-D. Choi，复矩阵上的完全正线性映射，*Linear Algebra and itsApplications* **10** (1975), 285–290.[6] D. E. Evans 和 R. Høegh-Krohn， C^*-代数上正映射的谱性质，*J.London Math. Soc.* (2) **17** (1978), 345–355.[7] D. R. Farenick，算子代数上的不可约正线性映射，*Proc. Amer. Math. Soc.***124** (1996), 3381–3390.[8] S. Gudder 和 R. Greechie，效应代数上的序贯积，*Reports on MathematicalPhysics* **49**(1) (2002), 87–111.[9] J. M. Howie，半群理论基础，伦敦数学会专著新编第 12 卷，牛津大学出版社，1995.[10] B. Jacobs，范畴逻辑的新方向：经典、概率和量子逻辑，*Logical Methods in Computer Science* **11**(3) (2015), 1–76.[11] B. Jacobs 和 J. Mandemaker，量子基础中的期望单子，*Informationand Computation* **250** (2016), 87–114.

[12] K. Kraus，量子理论中的一般状态变化，《物理学年鉴》**64** (1971), 311–335.[13] S. Sakai，C^*-代数与 W^*>-代数，数学及其边界领域成果第 60 卷，施普林格出版社，1971.[14] P. Selinger，高阶量子计算语义研究，*QPL 2004* 会议论文集，TUCS 通用出版物 **33** (2004),127–143.[15] W. F. Stinespring，-代数上的正函数，*Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955), 211–216.[16] J. Watrous，量子信息论，剑桥大学出版社，2018.[17]M.M. Wolf，量子信道与量子操作：导览，讲义 (2012)，网址：

h

t

t

ps://www-m5.ma.tum.de/foswiki/pub/M5/Allgemeines/MichaelWolf/QChannelLecture.pdf。