arXiv:2601.00858v1 [physics.class-ph] 30 Dec 2025

有限厚度导电圆柱壳的静电学：耦合椭圆核积分方程

J. Ricardo de Sousa，亚马逊联邦大学
物理系，F´ısica，3000，雅皮姆，
69077-000，巴西马瑙斯-AM。

摘要

我们为一个有限长度、有限厚度的导电圆柱壳建立了精确的静电学表述，该壳层分隔两种介电常数对比任意的介电介质。我们将边值问题化简为一组耦合奇异积分方程，其椭圆核描述内外表面上感生的表面电荷密度。我们将高精度数值解与系统的渐近分析相结合，阐明几何形状、厚度与介电对比之间的相互作用。我们重现了所有经典极限区域，包括细长体极限、短圆柱（环状）渐近情形，以及由外表面主导的厚壳区域。我们证明，零厚度模型中短圆柱的对数行为是一种奇异特征；任何有限厚度都会使其正则化，转而形成有限的电容平台。耦合方程的渐近结构解释了厚壳极限下内腔的静电解耦，以及电荷在两个表面之间的重新分布。这些结果为有限圆柱导体提供了精确基准，衔接了经典解析处理与现代数值方法，并为轴对称静电求解器的验证提供了高精度参考解。

1 引言

有限导体的静电学长期以来一直是位势理论解析方法和高精度数值求解器的典型基准。在这类几何形状中，有限长直圆柱导体尤为重要。它在两个奇异极限之间连续过渡：在细长体区域，除端部附近外，面电荷密度沿轴向变化较弱；而在短圆柱或环状区域，半径固定而长度趋于零，行为则由边缘效应主导。轴对称性与尖锐边缘并存，使有限圆柱成为严苛的测试对象，可检验任何旨在同时解析整体电场和局部边缘奇异性的方法。

有限长度圆柱体的电容和表面电荷分布构成一个经典静电问题，无法用初等函数表示为闭式解，因此长期以来一直通过数值和半解析方法进行广泛研究。早期实验和理论研究可追溯至 Cavendish 和 Maxwell 传统下的经典电容测量与界限估计 [1, 2]。此后，有限圆柱体几何始终是一个标准基准，它兼具轴对称性的相对简单性和非平凡的边缘奇异性，对分析和计算都构成挑战 [3]。

因此，有限空心圆柱体长期以来一直受到应用电磁学和静电学领域的关注。20世纪中期的研究采用边界积分和矩阵方法，在广泛的长宽比范围内生成数值数据并建立实用近似。在此背景下，Vainshtein 的工作以及 Kapitsa、Fock 等人的相关贡献 [4–6] 被广泛视为有限圆柱导体系统数值分析的里程碑 [7]。

后续发展包括对偶积分方程表述（通常通过 Neumann级数构造化简为线性系统）、矩量法实现，以及面向工程应用的半经验参数化方法。Verolino 尤其在对偶积分方程框架下建立了空心金属圆柱体的表面电荷密度问题，并对经典近似方法进行了详尽评估 [8]。

与此同时，研究者也投入了大量精力研究开口圆柱体的电容这一全局可观测量。早期便有经典工程公式和数值比较结果发表，后续研究则进一步完善了这些近似，并列出了涵盖管状极限和环极限的高精度数值。Scharstein 对“管的电容”的分析在这一领域经常被引用，现代综述也常将其与更早的解析和数值结果并列讨论 [9]。近期研究提出了结合显式奇异项与快速收敛展开的解析和半解析表示，例如 Legendre级数构造，从而得到了与既有基准一致的闭式或近似闭式形式 [10–18]。

许多解析处理采用的一种方便理想化模型，是将零厚度导电圆柱壳保持在固定电势下。在这一极限下，问题归结为确定壳层上的单一轴向表面电荷密度。轴向电势可通过一维奇异积分算子表示，其核包含完全椭圆积分，这些积分由对环与环之间库仑相互作用进行方位角积分得到。结合显式纳入边缘处普适平方根发散的求积方案，该表述能够在广泛的长宽比范围内快速收敛地求得表面电荷密度和电容；近期，这一表述也在严格的实空间积分方程框架中得到了澄清和拓展 [19]。从数学角度看，主要难点不在于求解拉普拉斯方程本身，而在于处理与具有尖锐边缘且边缘奇异性不均匀的开放表面相关的混合边界特征。

然而，在许多实际情况下，导电圆柱具有有限厚度，并将两种介电常数不同的介质隔开。例如，高压装置中充有油或气体的有限长度同轴电容器和屏蔽管、束流线和探测器中包围介电部件的金属衬层，以及精密电容

计量学中的屏蔽圆柱体。在这些情况下，感应电荷不再局限于单一的理想化表面，而是在内、外圆柱面之间重新分布，其分布对几何形状（长度、半径、厚度）以及内外介质之间的介电常数十分敏感。两个耦合表面的存在还会改变相关积分方程的结构，使单壳层问题转变为真正的耦合系统。

本工作的目的是为这一有限厚度圆柱壳建立并分析一套系统的积分方程表述，弥合零厚度模型与具有介电对比度的真实圆柱导体之间的差距。从圆柱坐标下的电势环积分表示出发，我们推导出一对耦合的一维奇异积分方程，用于描述内半径为 a、外半径为 $b = a + t$（其中 t 表示圆柱的侧向（壁）厚度）、长度为 L，且保持均匀电势 V_0 、分隔介电常数分别为 ε_{in} 和 ε_{out}的介质的导电壳内外表面上的感应表面电荷密度。这些积分方程的核以完全椭圆积分表示；当观测点接近圆柱边缘时，核会呈现可积的平方根奇异性。随后，我们构建了一种切比雪夫加权配置方法，通过构造方式消除边缘处的奇异行为，从而在较宽的长宽比、厚度和介电对比度范围内，快速收敛地求得轴向电荷分布和电容的数值解。

除了作为一个非平凡静电边值问题本身具有研究价值外，本文所研究的几何形状还为轴对称静电求解器提供了一个多用途基准，也是文献 [19]中零厚度壳层的自然有限厚度推广。我们的结果阐明了有限厚度和材料对比度如何支配内外表面之间的电荷重新分布，以及这种重新分布如何进而控制真实有限圆柱导体中的场屏蔽、边缘增强和有效电容。

从边界元法的角度看，本文的方法对应于轴对称边界元约化：对方位角进行解析积分，将三维表面积分化为定义在轴向母线上的一维边界积分方程，其核函数以椭圆积分表示。主要数值挑战在于同时处理**弱奇异自相互作用**（源点与场点近乎重合）以及由开放边缘引起的几何端点奇异性 。我们采用**Nystr¨om 离散化**处理这两者，其中切比雪夫权函数明确嵌入了普适的边缘行为，从而以相对较少的自由度实现高阶精度。

本文建立的公式应被视为连续介质静电问题的精确积分方程表述，而非数值边界元法方案。因此，它能够提供基准解，用于系统验证轴对称边界元法及相关面板方法。

本文结构安排如下。第 2 节介绍几何形状、控制方程以及相关的无量纲参数。第 3 节推导环积分表示及其相关的椭圆核，并介绍切比雪夫加权的 Nystr¨om/配点法离散化，以及收敛诊断。第 4 节报告内外侧电荷分布、屏蔽特性和电容随长宽比、壳层厚度及介电对比度变化的数值结果，并讨论相关的渐近区域

及极限行为。第 5 节总结主要结论，并概述可能的扩展方向。

2 物理模型与方法

我们考虑一个与 z–轴同轴的有限厚度导电圆柱壳，其内半径为 a，外半径为 b，长度为 L，延伸范围从 $z=-L/2$ 到 $z=+L/2$。金属壳层的内、外圆柱面均维持在均匀的静电势 V_0（图 1），并将介电常数为 $\varepsilon_{\mathrm{in}}$ 的内侧介质与介电常数为 $\varepsilon_{\mathrm{out}}$的外侧介质分隔开。在不存在外场时，该构型严格轴对称，因此感生表面电荷密度与方位角 φ 无关，可以仅表示为轴向坐标的函数：内表面 $\rho=a$ 上的 $\sigma_{\mathrm{in}}(z)$，以及外表面 $\rho=b$上的 $\sigma_{\mathrm{out}}(z)$，其中 $-L/2<z<L/2$。

本研究旨在确定有限厚度导电圆柱壳上的感生表面电荷密度 $\sigma_{\mathrm{in}}(z)$ 和$\sigma_{\mathrm{out}}(z)$。该圆柱壳保持恒定静电势，并嵌置于两种介电介质之间。尽管有限圆柱是静电学中的经典构型，但两个耦合表面的存在以及非平凡的边缘奇异性，使这一问题在数学上颇为微妙，值得重新探讨。

我们的主要工具是实空间表述，其中内外介电区域的势表示为作用于 $\sigma_{\mathrm{in}}(z)$ 和 $\sigma_{\mathrm{out}}(z)$ 的非局域积分算子。这些算子源于对环到点相互作用进行方位角平均，并以完全椭圆积分表示。由此得到的内外表面电荷密度耦合积分方程构成了该问题的解析核心。

在圆柱坐标中，介电常数为 ε 的介质内任意点 $(\rho,\ \varphi,\ z)$ 处的静电势，由分布在侧表面 $\rho'=R$ 上的轴对称表面电荷密度 $\sigma_R(z')$ 产生，可写为

$$\Phi_\varepsilon(\rho,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-L/2}^{L/2}\int_{0}^{2\pi}\frac{\sigma_R(z')R\,dz'd\varphi'}{\sqrt{\rho^2+R^2+(z-z')^2-2R\rho\cos(\varphi-\varphi')}},\tag{1}$$

从边界元视角来看，这是针对狄利克雷导体的单层（电荷）边界积分表述：在内外圆柱面上施加给定电势，即可得到关于表面电荷密度的耦合第一类方程组。

由于 $\sigma_R(z')$ 与方位角无关，因此对 φ'的积分可以用第一类完全椭圆积分 $K(m)$ 解析地求出，从而得到

$$\Phi_\varepsilon(\rho,z)=\frac{R}{\pi\varepsilon}\int_{-L/2}^{L/2}\sigma_R(z')\frac{K[m(z')]}{\sqrt{(\rho+R)^2+(z-z')^2}}dz',\tag{2}$$

with

$$K[m(z')]=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-m(z')\sin^2(\theta)}},\tag{3}$$

以及椭圆参数

$$m(z') = \frac{4R\rho}{(\rho+R)^2 + (z-z')^2}. \tag{4}$$

在当前问题中，将使用这一通用核与 $R = a$ 和 $R = b$ 构造耦合积分方程，用于求解有限圆柱壳内、外表面的表面电荷密度。

我们的公式遵循狄利克雷静电学的标准边界元方法。经过解析方位角积分后，三维算子可化为沿母线方向的一维积分，其核以完全椭圆积分表示。电势写作作用于内、外圆柱面上未知表面电荷密度的单层算子，再加上一个常数参考电势。在每个表面施加导体条件 $\Phi = \text{const}$ 后，可得到耦合的第一类单层边界积分方程，随后通过解析方位角积分将其约化为一维形式（轴对称单层约化及其以完全椭圆积分表示的闭式核函数见式 (5) 和式 (6)）。

2.1 边界积分公式

在内侧介质 ($\varepsilon = \varepsilon_{\text{in}}$) 中的 $\rho = a$ 处对式 (2) 求值，并分离内、外圆柱面的贡献，可得

$$\Phi_{\text{in}}(a,z) = \frac{a}{\pi\varepsilon_{\text{in}}} \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_{\text{in}}(z')\mathcal{G}_{aa}(z-z')dz' + \frac{b}{\pi\varepsilon_{\text{in}}} \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_{\text{out}}(z')\mathcal{G}_{ab}(z-z')dz', \tag{5}$$

其中，核函数 $\mathcal{G}_{\alpha\beta}(q)$ 描述半径为 β 的源环与半径为 α 的观测点之间的环到点相互作用。具体而言，可得

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(q) = \frac{K\left[\frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2+q^2}\right]}{\sqrt{(\alpha+\beta)^2+q^2}}. \tag{6}$$

其中，$K(m)$ 的定义见式 (3)，此处 $m_{\alpha\beta}(q) = 4\alpha\beta/\left[(\alpha+\beta)^2+q^2\right]$。当 $z \to z'$ 时，核函数呈弱奇异（对数奇异）；开放边缘则会在 $\sigma_{\text{in/out}}$ 处引入普适的端点奇异性。这两种特征均通过第 4 节所述的切比雪夫加权 Nystr¨om 配点法处理。

将狄利克雷条件 $\Phi(a,\ z) = V_0$ 施加于方程 (5) 中的 $|z| < L/2$，并将两边乘以 $\pi\varepsilon_{\text{in}}/a$，得到

$$\int_{-L/2}^{L/2} \sigma_{\text{in}}(z')\mathcal{G}_{aa}(z-z')dz' + \frac{b}{a}\int_{-L/2}^{L/2} \sigma_{\text{out}}(z')\mathcal{G}_{ab}(z-z')dz' = \frac{\pi\varepsilon_{\text{in}}}{a}V_0. \tag{7}$$

在外部区域进行完全类似的推导，此时在 $\rho = b$ 处取 $\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{out}}$，并将其代入方程 (2)，得到

$$\Phi_{\mathrm{out}}(b,z) = \frac{a}{\pi\varepsilon_{\mathrm{out}}} \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_{\mathrm{in}}(z')\mathcal{G}_{ba}(z-z')dz' + \frac{b}{\pi\varepsilon_{\mathrm{out}}} \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_{\mathrm{out}}(z')\mathcal{G}_{bb}(z-z')dz'. \tag{8}$$

施加狄利克雷条件 $\Phi(b,\ z) = V_0$ for $|z| < L/2$ in Eq. (8) 并将等式两边乘以 $\pi\varepsilon_{\mathrm{out}}/b$，得到

$$\frac{a}{b} \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_{\mathrm{in}}(z')\mathcal{G}_{ba}(z-z')dz' + \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_{\mathrm{out}}(z')\mathcal{G}_{bb}(z-z')dz' = \frac{\pi\varepsilon_{\mathrm{out}}}{b}V_0, \tag{9}$$

在薄壳极限 $a = b$ 下，核函数 $\mathcal{G}_{\alpha\beta}(q)$ 化为零厚度圆柱中所用的单半径核，从而得到

$$\mathcal{G}(q) = \frac{K\left(\frac{4a^2}{4a^2+q^2}\right)}{\sqrt{4a^2+q^2}} \tag{10}$$

因此，方程（7）和（9）化为薄圆柱问题 [19] 的单个积分方程。对于 $a \neq b$，方程（7）和（9）构成了一个关于未知内表面和外表面电荷密度 $\sigma_{\mathrm{in}}(z')$ 与 $\sigma_{\mathrm{out}}(z')$ 的耦合 2×2 奇异积分方程组，其核函数完全由方程（6）中的椭圆积分表达式确定，而右端项则是与 V_0 成正比的简单几何相关项。

2.2 切比雪夫加权 Nystr¨om 离散化

由于边缘发散很强但仍可积，对方程（7）和（9）进行朴素离散化时收敛缓慢，并且可能变得数值病态。为稳定计算并通过构造强制满足正确的端点行为，我们引入切比雪夫加权参数化。使用无量纲坐标 $x = (2/L)z \in [-1,1]$，将表面电荷密度重写为

$$\begin{cases} \sigma_{\mathrm{in}}(z) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}p_{\mathrm{in}}(x) \\ \sigma_{\mathrm{out}}(z) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}p_{\mathrm{out}}(x) \end{cases}, \tag{11}$$

其中，权函数 $(1-x^2)^{-1/2}$ 刻画了在 $x = \pm 1$ 处预期的平方根发散，而$p_{\mathrm{in}}(x)$ 和 $p_{\mathrm{out}}(x)$ 在 $[-1,1]$ 上保持光滑。为方便起见，我们用第一类多项式的截断切比雪夫展开 $T_n(x)$ [21–23]表示 $p(x)$

$$\begin{cases} p_{\mathrm{in}}(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n T_n(x) \\ p_{\mathrm{out}}(x) = \sum_{n=0}^{N} d_n T_n(x) \end{cases}, \tag{12}$$

其中 N 是**谱截断阶数**。系数 $\{c_n, d_n\}$ 通过在 $[-1,1]$ 上以 N_c 个高斯–切比雪夫节点构建的配点系统进行数值求解，具体如第 3 节所述。

所得积分方程采用配点法结合高斯–切比雪夫求积求解，遵循针对弱奇异核的标准谱离散策略 [24–26]。至此，实空间积分形式和数值方法已全部建立。下一节将讨论切比雪夫格式的收敛性质，将所得电荷密度与薄壳极限进行比较，并分析电容随长宽比和壳层厚度的变化关系。

3 数值实现与收敛性

本节详细介绍切比雪夫配置格式的数值实现，并评估其收敛性质。首先讨论核函数 $\mathcal{G}_{\alpha\beta}(q)$的计算，特别关注近奇异区域 $q \to 0$；在该区域，椭圆积分的精确、稳定计算至关重要。我们还将说明所得 $2N \times 2N$ 线性系统的数值稳定性如何随截断阶数 N、长宽比$\alpha = a/L$和厚度参数 $\delta = b/a$变化。

此处采用的离散化可理解为定义在母线上的轴对称边界元 Nystr¨om 方法。标准轴对称边界元法实现通常在轴向单元（“面板”）上，使用分片常数或分片线性形函数近似未知密度，并以 Galerkin 法或配点法的意义施加边界条件，这需要对近奇异自作用项进行特殊处理。相比之下，我们采用全局切比雪夫表示，并引入一个先验捕捉普适边缘端点行为的权函数；随后，在相应节点处直接通过高斯–切比雪夫求积对积分算子进行离散化（Nystr¨om 配点法）。这种“谱 Nystr¨om”视角将分辨率集中于所需位置（边缘附近），与低阶面板边界元法相比，可在每个自由度下实现更高精度，同时保留边界积分结构以及用于计算矩阵元素的闭式椭圆核函数求值。

通过几项互补测试验证了该方法的性能。在薄壳层极限 $\delta \to 1^+$ 下，结果表明，$\sigma_{\mathrm{in}}(z)$ 和 $\sigma_{\mathrm{out}}(z)$ 的数值解会收敛到零厚度圆柱 [19] 的单表面分布。在长圆柱区间和短圆柱区间，我们将计算得到的电容与已知的渐近表达式进行比较，并记录了远离边缘处电荷密度的谱收敛。这些基准为当前离散化能够以高精度捕捉普适的边缘行为和整体几何依赖性提供了定量证据。

经过变换 (11)，即 $x = (2/L)z$，方程 (7) 和 (9) 变为关于 $x \in [-1,1]$ 的耦合积分方程

$$\int_{-1}^{1} \frac{p_{\mathrm{in}}(x')}{\sqrt{1-x'^2}} \mathcal{G}_{aa}(x-x')dx' + \delta \int_{-1}^{1} \frac{p_{\mathrm{out}}(x')}{\sqrt{1-x'^2}} \mathcal{G}_{ab}(x-x')dx' = \overline{V}_0, \tag{13}$$

and

$$\frac{1}{\delta}\int_{-1}^{1}\frac{p_{\rm in}(x')}{\sqrt{1-x'^2}}\mathcal{G}_{ab}(x-x')dx'+\int_{-1}^{1}\frac{p_{\rm out}(x')}{\sqrt{1-x'^2}}\mathcal{G}_{bb}(x-x')dx'=\frac{k}{\delta}\overline{V}_0, \tag{14}$$

其中， $k=\varepsilon_{\rm out}/\varepsilon_{\rm in}$ 是相对介电常数， $V_0=\frac{\pi\varepsilon_{\rm in}}{a}\overline{V_0}$ 是无量纲势振幅。为简化符号，下面仍使用符号 V_0 ，并将其理解为重新缩放后的量。无量纲核 $\mathcal{G}_{\alpha\beta}(q)$由方程 (6) 经变量代换得到，写作

$$\begin{cases}\mathcal{G}_{aa}(x-x')=\frac{K\left[\frac{16\alpha^2}{16\alpha^2+(x-x')^2}\right]}{\sqrt{16\alpha^2+(x-x')^2}}\\ \mathcal{G}_{ab}(x-x')=\frac{K\left[\frac{16\alpha^2\delta}{4\alpha^2(1+\delta)^2+(x-x')^2}\right]}{\sqrt{4\alpha^2(1+\delta)^2+(x-x')^2}}\\ \mathcal{G}_{bb}(x-x')=\frac{K\left[\frac{16\alpha^2\delta^2}{16\alpha^2\delta^2+(x-x')^2}\right]}{\sqrt{16\alpha^2\delta^2+(x-x')^2}}\end{cases}. \tag{15}$$

在薄壳极限下， $\delta\to 1$ $\mathcal{G}_{aa}$， $\mathcal{G}_{ab}$ 和 $\mathcal{G}_{bb}$ 都化为单半径核 $\mathcal{G}(x-x')$，对应于零厚度圆柱 [19]。

我们通过在 $[-1,1]$ 上采用 Nystr¨om/配点法离散化，并结合针对权函数 $(1-x^2)^{-1/2}$ 定制的高斯–切比雪夫求积，求解方程 (13) 和 (14)。具体如下：

1. 配置网格。我们选取一组 N_c 配置点 $\{x_j, j=1,2,..N_c\}$，取为高斯–切比雪夫节点

$$x_j=\cos\left[\frac{(2j-1)\,\pi}{2N_c}\right] \tag{16}$$

这样，切比雪夫权函数 $(1-x^2)^{-1/2}$ 就自然地纳入了相应的求积公式。原则上，可以将求积节点数与配置点数分开，并采用较小的高斯网格；但在当前的 Nystr¨om 实现中，我们对这两种用途都采用相同的节点。

2. 求积。在每个配点 x_j 处，对 x' 上的积分采用高斯–切比雪夫求积和近似，

$$\int_{-1}^{1}\frac{p(x')}{\sqrt{1-x'^2}}\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x_i-x')dx'\approx\sum_{j=1}^{N_g}w_j\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x_i-\xi_j)p(\xi_j), \tag{17}$$

其中 $\{\xi_j,\ j=1,2,..N_g\}$ 为高斯–切比雪夫求积节点， w_j 为相应的高斯–切比雪夫权重， p 表示 $p_{\rm in}$ 或 $p_{\rm out}$。由此可得到耦合积分方程的完全离散表示。

3. 线性系统。离散化后得到一个稠密的 $2N_c\times 2N_c$ 块线性方程组，用于求解未知节点值 $\{p_{\rm in}(x_j)$、 $p_{\rm out}(x_j)$、 $j=1$， 2， $...N_c\}$，

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{N_c}A_{ij}^{(\rm in,in)}p_{\rm in}(x_j)+\sum_{j=1}^{N_c}A_{ij}^{(\rm in,out)}p_{\rm out}(x_j)=B_i^{\rm in}\\ \sum_{j=1}^{N_c}A_{ij}^{(\rm out,in)}p_{\rm in}(x_j)+\sum_{j=1}^{N_c}A_{ij}^{(\rm out,out)}p_{\rm out}(x_j)=B_i^{\rm out}\end{cases}, \tag{18}$$

其中，矩阵元素 $A_{ij}^{(\mathrm{s,p})}$ 汇集了在节点对$(x_i,\ x_j)$处计算得到的椭圆积分核，以及相应的高斯–切比雪夫权重；向量 B_i^{in}、 B_i^{out}表示内外表面上的恒定电势。使用标准稠密线性代数算法求解所得系统。

在计算中，我们通常取 N_c 为 N 量级（例如 $N_c = N$ 或 $N_c = N+1$），这足以观察到远离边缘处重构电荷密度的谱收敛。

4. 无量纲归一化。为便于展示，我们报告无量纲表面电荷密度： $\widetilde{\sigma}_{\mathrm{in}}(z) = a\sigma_{\mathrm{in}}(z)/(\varepsilon_{\mathrm{in}}V_0)$ 和 $\widetilde{\sigma}_{\mathrm{out}}(z) = b\sigma_{\mathrm{out}}(z)/(\varepsilon_{\mathrm{out}}V_0)$，这消除了对 V_0 和 ε_0 的平凡依赖，并通过参数 $\alpha = a/L$、 $\delta = b/a$ 和 $\kappa = \varepsilon_{\mathrm{out}}/\varepsilon_{\mathrm{in}}$. 隔离出几何依赖性

由 $p_{\mathrm{in}}(x)$ 和 $p_{\mathrm{out}}(x)$ 重构节点值 $\sigma_{\mathrm{in}}(z)$ 和 $\sigma_{\mathrm{out}}(z)$ 后，内外电荷可由下式得到

$$\begin{cases} Q_{\mathrm{in}} = 2\pi a \int\limits_{-L/2}^{L/2} \sigma_{\mathrm{in}}(z)dz \\ Q_{\mathrm{out}} = 2\pi b \int\limits_{-L/2}^{L/2} \sigma_{\mathrm{out}}(z)dz \end{cases} \tag{19}$$

总电容则为

$$C = \frac{(Q_{\mathrm{in}} + Q_{\mathrm{out}})}{V_0}. \tag{20}$$

因此，耦合积分方程采用基于高斯–切比雪夫求积的 Nystr¨om 配点法求解，该方法遵循弱奇异核的标准谱离散策略 [24–26]。这为计算有限厚度圆柱壳的表面电荷密度和电容提供了一种数值稳定且快速收敛的方法。

切比雪夫加权的 Nystr¨om 公式通过在解析上纳入普适的边缘奇异性，使辅助未知量在 $[-1,1]$ 上保持光滑，从而实现快速收敛。在实际计算中，我们通过监测整体观测量的稳定性 ˜来评估离散化误差，尤其是在增加高斯–切比雪夫节点 N_c 的数量时，重点关注无量纲电容 $C = C/(2\pi\varepsilon_{\mathrm{in}}a)$。对于本文考察的参数范围， C随 N_c单调收敛，与结果部分中讨论的物理变化相比，剩余的数值不确定性可以变得微不足道。˜(N_c) 的代表性收敛表见第 4.4 节末尾，其中对电容进行了详细分析。

4 数值结果

本节给出有限厚度导体圆柱的定量结果，该结果由实空间椭圆核公式求得，并采用切比雪夫权函数加权的

Nystr¨om 方案进行离散。除非另有说明，介电对比度设为 $\kappa = \varepsilon_{\text{out}}/\varepsilon_{\text{in}}$。将切比雪夫权函数 $(1-x^2)^{-1/2}$ 纳入未知量 $p_{\text{in/out}}(z)$ 后，离散解会随配点数量 N_c的增加而呈指数收敛。实际中，$N_c \approx 80-140$可确保电容 C 和远离最末几块边缘面板的点态密度具有 $6-8$ 位有效数字。对角项采用局部近场平均处理（通过阶数为 $10^{-12}-10^{-10}$的对角修正实现），从而稳定 Nystr¨om 矩阵，同时不影响报告的有效数字。极限情形检验：（i）当 $\delta \to 1^+$ 时，两侧面合并，得到零厚度圆柱；（ii）当 $\delta >> 1$时，外表面占主导，构型趋近于外侧介质中的单个半径为 b 的导电圆盘。

4.1 表面电荷密度：分布曲线与边缘奇异性

图 2 展示了无量纲表面电荷密度 $\widetilde{\sigma}_{\text{in}}(z) = a\sigma_{\text{in}}(z)/(\varepsilon_{\text{in}}V_0)$ 和 $\widetilde{\sigma}_{\text{out}}(z) = \delta a\sigma_{\text{out}}(z)/(k\varepsilon_{\text{in}}V_0)$ 随归一化轴向坐标 z/L 变化的曲线，长宽比$\alpha = 1/3$ 固定，厚度参数分别取两个具有代表性的值：$\delta = 1.0$ 和 4.0。图 2 中的曲线通过切比雪夫配置法求解耦合积分方程 (13) 和 (14) 得到，由此形成一个 2×2 块线性方程组，用于求解内部和外部表面密度。

文献 [19], 分析了特殊情形 $\delta = 1$；本文将其推广至任意长宽比δ，展示了该数值格式的稳健性。在这两种情况下，随着 $z \to \pm L/2$，电荷密度单调增加，反映了圆柱边缘处普遍存在的平方根发散。这一行为与式 (11) 所描述的解析端点结构完全一致，也证实该数值格式能够正确捕捉尖锐边缘处相关的非可积局部场增强。对于较薄的壳层（$\delta = 1$），即趋近于零厚度的极限，表面电荷密度在中央区域的大部分范围内近乎均匀，显著变化仅限于端部附近狭窄的边界层。对于 $\alpha = 1/3$ 的中等长度圆柱，这表明边缘效应主要局限于局部，不会主导内部的静电学行为。

随着厚度参数增大至 $\delta = 4.0$，电荷分布会发生定性变化。尽管端点发散的函数形式保持不变，但整个圆柱上的表面电荷密度总体增大。在缩放坐标 z/L 中，随着壳层在半径固定的情况下变厚，两个边缘实际上彼此靠近，使边缘奇异性更强地相互重叠。因此，边缘效应会深入内部，甚至使中平面 $z = 0$ 附近的电荷密度也系统性增强。这体现了有限圆柱静电学固有的非局域性：增加径向厚度会改变边缘增强与体屏蔽之间的整体平衡，而非仅仅造成局部变化。

图 2 的插图通过展示中平面无量纲密度$\widetilde{\sigma}_{\text{in/out}}(z=0)$ 随 δ 的变化，清楚地呈现了这一趋势。对于 $\delta = 1$，两种密度在 $\widetilde{\sigma}_{\text{in/out}}(z=0) \simeq 0.26$ 处相等，因此薄圆柱在中平面的总表面电荷密度等于 $\widetilde{\sigma}_{\text{tot}}(z=0) = 2\widetilde{\sigma}_{\text{in}}(z=0) \simeq 0.52$。随着 δ 增大，两种中平面值逐渐分离：内部密度显著降低，而 $\widetilde{\sigma}_{\text{out}}(z=0)$ 则随 δ 近似线性增加。重要的是，这种增长并不意味着物理外表面电荷密度发散。相反，它

反映了所选的无量纲标度，该标度以由内侧长度尺度 a 设定的单位衡量外侧密度（等价地说，它包含了几何力臂 $b = \delta a$）。

这种渐近解耦源于厚壳极限 $\delta >> 1$ 下耦合积分方程 (13) 和 (14) 的结构。对于固定的长宽比 $\alpha = a/L$，涉及外半径的核函数包含大参数 $\alpha\delta = b/L$。远离边缘时，$|x - x'| = \mathcal{O}$ (1)，外侧自相互作用核具有如下形式

$$\mathcal{G}_{bb}(x - x') = \frac{K\left(m_{bb}\right)}{\sqrt{16\alpha^2\delta^2 + (x - x')^2}} \simeq \mathcal{O}\left(\frac{\ln \delta}{\delta}\right),$$

其中，对数项源于 $K(m)$，当 $m \to 1^+$ 时出现。内外表面之间的交叉耦合核满足

$$\mathcal{G}_{ab}(x - x') = \frac{K\left(m_{ab}\right)}{\sqrt{4\alpha^2\left(1 + \delta\right)^2 + (x - x')^2}} \simeq \mathcal{O}\left(\frac{1}{\delta}\right),$$

同样，至多只差对数修正。因此，内表面对外侧方程的贡献受到 $1/\delta$ 的抑制，而外侧密度渐近地由一个有效单表面问题决定。用物理单位表示，这给出了有限的极限中平面密度，

$$\sigma_{\text{out}}(z = 0) \simeq A(\alpha, \kappa) + \mathcal{O}(\delta^{-1}), \delta >> 1 \tag{21}$$

其中 $A(\alpha,\ \kappa)$ 仅取决于 α 和介电对比度 k。然而，若用图 2 中采用的无量纲形式表示，则得到

$$\widetilde{\sigma}_{\text{out}}(z = 0) = \frac{b\sigma_{\text{out}}(z = 0)}{\varepsilon_{\text{out}}V_0} \simeq \left[\frac{aA(\alpha, \kappa)}{\kappa\varepsilon_{\text{in}}V_0}\right]\delta + \mathcal{O}(1), \tag{22}$$

因此，插图自然显示出随 δ近似线性增长。

相比之下，内侧方程 (13) 变为一个受驱动问题，其中外表面产生的电场只有通过交叉耦合尺度 $\mathcal{G}_{ab} \approx \mathcal{O}\left(\frac{1}{\delta}\right)$ 才能传递到空腔。因此，内侧中平面密度逐渐受到屏蔽，并按代数规律衰减，

$$\sigma_{\text{in}}(z = 0) \simeq \frac{B(\alpha, \kappa)}{\delta} + \mathcal{O}(\delta^{-2}), \tag{23}$$

因此，$\widetilde{\sigma}_{\text{in}}(z) = a\sigma(z)/(\varepsilon_{\text{in}}V_0)$ 随 $1/\delta$ 减小。从物理上看，厚壳极限对应于空腔的静电屏蔽：感应电荷主要分布在外表面，而内表面则实际上变为被动表面。插图数据证实了这种解耦，显示 $1/\delta$ 衰减时 $\widetilde{\sigma}_{\text{in}}(z = 0)$ 受到抑制，以及 $\widetilde{\sigma}_{\text{out}}(z = 0)$ 随 δ 线性增长；后者源于所选归一化中的显式因子 $b = \delta a$。

为完整起见，我们还考察了介电对比度 $k = \varepsilon_{\text{out}}/\varepsilon_{\text{in}}$ 的影响。采用自然的外部归一化 $\widetilde{\sigma}_{\text{out}}(0) = \delta a\sigma_{\text{out}}(0)/(\varepsilon_{\text{out}}V_0)$ 后，$\kappa = 1$ 显然不受前因子中选择 ε_{in} 还是 ε_{out} 的影响。对于 $\kappa \neq 1$，在本文考察的范围 δ 内，$\delta \in [1, 4]$ 对其的依赖在定性上保持不变：外表面仍持续承载主要的感应电荷，而内侧中平面密度则随着

壳层变厚而受到抑制。定量而言，改变 κ 的主要作用是重新缩放 $\widetilde{\sigma}_{\mathrm{out}}(0)$ 的整体幅度，这与外边界条件（14）中出现的 κ一致。在此区间内， $\delta-$ 依赖性的任何残余畸变都相对较弱，反映了两个表面通过核 $\mathcal{G}_{ab}$ 之间的有限耦合；对于 $\delta \leq 4$ 而言，这种耦合尚未完全可以忽略。

在渐近厚壳层区域 $\delta >> 1$ 中，内外耦合在参数上受到抑制，而介电对比度的影响则简化为对外部解进行简单缩放；此时，中平面行为完全由半径为 b 的有效单表面问题决定。

尽管电荷在两个表面之间发生了如此显著的重新分布，边缘行为仍具有普适性。在所有情况下，重建得到的密度在边缘 $[3],$ 处都呈现相同的平方根发散

$$\widetilde{\sigma}_{\mathrm{in/out}}(z) \simeq \frac{A_{\mathrm{in/out}}}{\sqrt{(L/2)^2 - z^2}} \left[1 + \mathcal{O}(L/2 - |z|)\right] \tag{24}$$

数值提取的局部指数为 0.500 ± 0.005 ，在所考察的整个参数范围内均如此（α， δ， κ）。用加权变量表示时，这种发散对应于光滑函数$p_{\mathrm{in/out}}(x)$，这也是观测到谱精度的基础。

前因子 A_{in} 和 A_{out} 量化了感应电荷在两个表面之间的分配情况。当 $\delta \approx 1$ 时，两者大小相当，表明壳层两侧存在强耦合。随着 δ 增大， A_{out} 增大而 A_{in} 减小，这与积分电荷满足 $|Q_{\mathrm{in}}| >> |Q_{\mathrm{out}}|$ 的情况一致：当长宽比进入短圆柱区域（ α 较大）时， $\delta >> 1$，且 $Q_{\mathrm{in}}/Q_{\mathrm{out}} = \mathcal{O}(a/b)$。从物理上说，电场线更倾向于终止于面积较大、边缘电场扩展更显著的外表面。对于固定的（δ， κ），增大 α 主要使电荷集中到更靠近边缘的位置，而不会改变普适指数；随着 $\alpha \to \infty$，边缘振幅趋于确定的极限值，这与第 4.3 节讨论的电容饱和现象一致。

除了这些物理趋势之外，本文的主要贡献在于方法论。精确的边界积分公式 (7) 和 (9) 涉及以完全椭圆积分表示的核函数，其弱对数奇异性会使朴素的离散化变得病态。通过加权表示 $\sigma_{\mathrm{in/out}}(z) = (1 - x^2)^{-1/2}\, p_{\mathrm{in/out}}(x)$ 对端点行为进行解析提取，剩余的未知函数在 $[-1, 1]$ 上变得光滑，并可通过结合高斯 – 切比雪夫求积的配点法准确求得。由此得到的数值格式稳定且快速收敛，能够求解边缘主导的静电学问题：边缘奇异性经过解析处理，而弱核奇异性只需采用标准的对角修正。这为保持固定电势的有限圆柱形导体提供了高精度参考解。

4.2 有限尺寸标度

为量化残余离散化误差并获得圆柱中心密度的连续极限估计，我们对切比雪夫–Nystr¨om 格式进行有限尺寸标度分析。对于每一组几何和材料参数（α， δ， κ），我们计算中平面值

$\widetilde{\sigma}_{\text{in}}(0)$ 和 $\widetilde{\sigma}_{\text{out}}(0)$，这些值来自一系列逐步加密的配置网格，其中 N_c Gauss–Chebyshev 节点位于 $[-1,1]$ 上。在整个标度研究中，我们固定 Nystr¨om 离散化中隐含的求积公式（即配置网格配点处的高斯–切比雪夫权重），因此唯一的控制参数是轴向节点数 N_c。中心值通过对 $z=0$ 附近的数值解进行局部插值得到；这种方法稳健可靠，因为密度在中平面处平滑，所有非解析行为都局限于端点$z=\pm L/2$，并已由 $(1-x^2)^{-1/2}$ 权函数捕捉。

在渐近区间内，观察到离散化误差可由一个主导 $1/N_c$ 修正项很好地描述，

$$\widetilde{\sigma}(0)=\widetilde{\sigma}_{\infty}(0)+\frac{A}{N_c}+\mathcal{O}(N_c^{-2}), \tag{25}$$

s因此，可以通过对 $\widetilde{\sigma}(0)$ 与 $1/N$ 的关系进行线性回归，提取出 $\widetilde{\sigma}_{\infty}(0)$ $_{c}$.

实际上，将拟合限制在最大的网格上（例如 $N_c\geq 220$）可以抑制渐近前曲率，并得到稳定的截距。我们将这些截距用作连续极限估计，并验证一旦进入渐近区间，它们对具体拟合窗口的选择仅有微弱敏感性。需要指出的是，$\widetilde{\sigma}(0)$ 相对于 $1/N_c$ 的表观斜率可能会改变符号，这取决于面板内求积阶数是保持固定还是与 N_c 挂钩；然而，在所有情况下，$1/N_c\to 0$ 截距都保持稳定，并提供等效的连续极限估计。

图 3 展示了固定长宽比 $\alpha=1/3$ 和两个具有代表性的厚度值 $\delta=1$ 和 $\delta=4$ 下的这一过程。当 $\delta=1$ 时，两个圆柱面重合；通过结合内外部解，可以得到物理上相关的薄壳结果。因此，面板 (a) 报告了薄壳极限下的总中平面密度。对于真正具有有限厚度的壳层（$\delta=4$），面板 (b) 和 (c) 显示，内侧和外侧的中平面密度分别独立收敛，并呈现相近的线性依赖$-1/N_c$ 的行为。近似线性的趋势和较小的离散程度证实，在这一参数范围内，配点系统仍然具有良好的条件数，且中平面可观测量未受到边缘奇异性的影响。

固定长宽比 α =1/3 时圆柱中心表面电荷密度 $\widetilde{\sigma}(0)$ 的有限尺寸标度，结果由耦合积分方程的切比雪夫–Nystr¨om 离散化得到。图中展示了两种代表性厚度 $\delta=1$ 和 $\delta=4$ 的结果。

更广泛地说，在本研究考察的全部参数范围内，我们都发现了相同的收敛模式。改变长宽比 $\alpha=a/L$ 主要会改变$\widetilde{\sigma}(0)$的整体尺度和端部增强程度，但将端点权重纳入后，并不会改变其主导 $1/N_c$ 标度。同样，改变厚度参数 $\delta=b/a$ 会改变 2×2 积分系统中自相互作用块与交叉耦合块的相对重要性，但从薄壳极限 $\delta\to 1^{+}$ 到中等厚度的壳层，Nystr¨om 离散化始终保持稳定，其收敛速率由 N_c 控制，而非取决于临时正则化。最后，介电对比度仅通过右端项和归一化进入；对于固定的 (α,δ)，它会使外侧密度平滑缩放，并在 $\widetilde{\sigma}_{\text{in}}$ 与 $\widetilde{\sigma}_{\text{out}}$之间引起轻微的定量再分布，同时不会损害数值条件性或收敛性。换言之，该方法对几何变化（α,δ）和材料对比度 k均具有鲁棒性，而外推 $\widetilde{\sigma}_{\infty}(0)$为耦合壳层问题提供了一个受控的基准。

这些收敛性检验具有物理意义，因为表面密度通过 $E_n(z) = \sigma(z)/\varepsilon$决定局部法向场，因此，计算剖面既量化了边缘附近的峰值场增强，也量化了壳层增厚时电荷在内外表面之间重新分布的程度。从计算角度看，将精确的椭圆积分核与考虑端点的切比雪夫参数化相结合，可得到可迁移的数值模板：同一离散化策略可直接推广至非均匀边界电势、分段电极或耦合导体组件；在这些情形下，控制边缘奇异性并提取连续极限可观测量至关重要。

对于 $\delta = 1$，文献 [19], a 中考察的薄壳极限采用基于面板的实现进行了相关收敛性分析，其中配点数 N_c 与面板内高斯–切比雪夫求积阶数 N_g 被视为独立参数（例如，$N_g = 16$ 和 $N_c = 220$）。本文采用基于高斯–切比雪夫节点的纯 Nyström 离散化，实际上令 $N_g = N_c$，这简化了实现方式，也符合加权形式的特点。两种方法在连续极限截距 $\tilde{\sigma}_\infty(0)$ 层面完全一致：虽然有限 $-N_c$ 趋势在以 $1/N_c$ 为横轴绘图时可能呈现相反的斜率，但这仅反映了主导离散化系数 A 的符号和大小（实际应用中还取决于 $1/N_c$ 轴所采用的绘图约定），而非极限值发生了变化。无论采用哪种方法，外推 $N_c \to \infty$ 估计值都在预期的次阶修正范围内一致，这证实了本文报告的 $\delta > 1$ 收敛性质与文献 [19] 中经过验证的基准 $\delta = 1$ 平滑衔接。

4.3 电容

从表面电荷密度 $\sigma_{\mathrm{in}}(z)$ 和 $\sigma_{\mathrm{out}}(z)$ 的数值解中，可以直接得到另一个值得关注的量，即有限圆柱导体的自电容。对于保持在均匀电势 V_0下的孤立导体，电容能够简洁地表征其整体静电响应，特别适合用于与经典结果及渐近极限进行比较。

我们通过圆柱侧表面上的总电荷定义与几何形状相关的电容系数 $C_{11} \equiv C(\alpha)$，即

$$C(\alpha) = \frac{2\pi a}{V_0}\left[\int_{-L/2}^{L/2} \sigma_{\mathrm{in}}(z)dz + \delta \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_{\mathrm{out}}(z)dz\right], \tag{26}$$

其中，$\delta = b/a$ 表示圆柱壳的径向厚度比。

为方便起见，我们引入无量纲电容

$$\widetilde{C}(\alpha) = \frac{C(\alpha)}{2\pi\varepsilon_{\mathrm{in}}a}. \tag{27}$$

由于电容涉及对整个表面电荷分布的积分，因此对主体区域的行为以及边缘附近的边缘奇异性都很敏感，因而可作为

该解数值精度的严格检验。此外，电容对长宽比 $\alpha = a/L$ and 和厚度参数 $\delta = b/a$ 的依赖关系，使我们能够直接评估从长圆柱区间到短圆柱区间的过渡，从而便于与已知渐近结果和先前报道的基准值进行定量比较。

4.3.1 渐近区域

在转向方程 (13) 和 (14) 的完整数值解之前，先总结决定空心圆柱壳静电学性质的渐近极限是有益的。关于零厚度开口圆柱 ($\delta = 1$) 的相应极限分析，包括细长体区域 $\alpha << 1$ 和短圆柱（环状）区域 $\alpha >> 1$，以及基准比较和收敛诊断，已在文献 [19]中给出，此处不再赘述。相反，我们将重点讨论有限壳厚度 $\delta = b/a > 1$带来的真正新特征，以及 $\delta \to 1^{+1}$ 极限如何与文献 [19]中的结果相衔接。

细长圆柱区间（$\alpha << 1$）：主导机制不变 对于 $\alpha = a/L <<1$，静电学性质仍由细长体机制支配。远离边缘处，表面电荷密度沿轴向 z的变化十分缓慢，而静电势主要取决于大长宽比 L/a 的对数。由此，无量纲电容随 $1/\alpha$ 呈现与文献 [19] 讨论的薄壳问题相同的主导增长，并受到缓慢变化的对数修正调制。有限厚度主要使电荷在圆柱的内外表面之间重新分布，但不会改变主导的 $\alpha \to 0$ 发散。在 ***Maxwell*** 的经典形式 [2], 中，这一渐近行为写作

$$\widetilde{C}(\alpha) \simeq \frac{(1/\alpha)}{\ln(2/\alpha) - 1}, \; \alpha << 1. \tag{28}$$

这一结果凸显了细长体区域的稳健性：即使导体具有有限的径向厚度，库仑相互作用的长程特性仍确保静电学由轴向尺度 L 决定，而非由横截面的微观细节决定。特别是，对数因子 $\ln(2/\alpha)$ 源于对近乎均匀的轴向电荷密度沿圆柱全长范围内的距离进行积分，因此不受电荷在内外表面之间重新分布的影响。有限厚度只通过与几何形状有关的有效线电荷密度修正，在次领先阶出现；而电容在 $\alpha \to 0$ 时的主导发散则具有普适性。

短圆柱区间（$\alpha >> 1$）：有限厚度正则化与平台 在相反的短圆柱极限 $\alpha \to \infty$ 下，会出现一种截然不同的静电区间。在零厚度模型（$\delta = 1$）中，侧表面实际上塌缩成环状几何形状-

形状，，电容呈现出众所周知的缓慢对数依赖

$$\widetilde{C}(\alpha) \sim \frac{2\pi}{\ln(32\alpha)}, (\alpha \to \infty, \delta = 1), \tag{29}$$

如参考文献 [19] 所述。这一渐近形式最初由 Lebedev和Skal'skaya[11] 使用对偶积分方程方法推导得出，此后便成为短空心圆柱静电理论中的经典结果。从物理角度来看，这种行为反映了维度交叉：当轴向长度 L 远小于半径a时，导体会从真正的三维物体转变为有效的一维带电圆环。

这一对数定律 与电容文献中广泛报道的标准短管到圆环近似一致。具体而言，多项独立分析预测，在极限 $\alpha = a/L >> 1$下，主导行为为 $1/\ln(\alpha)$ 阶。针对空心圆柱开展的高精度数值研究明确考察了 L/a的极小值，证实电容在短长度区域 [11–18]内衰减极其缓慢。

当圆柱具有有限的径向厚度时，情况便发生了根本变化。对于任意固定的 $\delta > 1$，当 $L \to 0$时，几何形状不再收缩为一维物体：半径为 $b = \delta a$ 的外表面引入了一个额外的横向长度尺度，该尺度在短圆柱极限下仍保持有限。因此，电容不再按对数规律衰减，而是趋近于一个有限平台，

$$\widetilde{C}(\alpha, \delta, \kappa) \simeq \widetilde{C}_\infty(\delta, \kappa) + \frac{c(\delta, \kappa)}{\alpha^2} + \mathcal{O}(\alpha^{-4}), (\alpha \to \infty, \delta > 1), \tag{30}$$

并伴随由短圆柱参数 $L/b = 1/(\alpha\delta)$ 控制的代数修正。实际上，数值上通过对足够大的 α 范围内的 C 与 $1/\alpha^2$ 进行线性回归，提取平台值 $C_\infty(\delta,\ \kappa)$，从而在所有考察的情形下得到稳定的截距和较小的残差。

重要的是，薄壳模型方程（29）的对数行为仅在奇异极限 $\delta \to 1^+$ 下才能恢复；在该极限下，内外表面合并，耦合积分方程形式退化为文献 [19] 中分析的单表面方程。因此，环状短圆柱渐近行为是理想化零厚度模型特有的现象，而任何固定的有限厚度 $\delta > 1$ 都会使 $\alpha \to \infty$ 响应趋于规整，并以明确的电容平台取代对数衰减。

厚壳极限（$\delta >> 1$）：圆盘控制的渐近值 A 另一种简化的渐近情形出现在厚壳极限 $\delta = b/a >> 1$ 下，此时内半径 a 和长度 L 保持不变。在这一情形下，空腔区域逐渐受到静电屏蔽：外表面电荷产生的电场在很大程度上屏蔽内部，而内表面上的感应电荷则受到强烈抑制。耦合积分方程（13）和（14）已经预示了这一行为：内外表面之间的交叉耦合核按 b 的负次幂标度，因此在 $\delta \to \infty$ 趋于极限时渐近消失。

因此，静电学主要由外圆柱表面决定，而该构型趋近于半径为 b 、嵌入外部

介电介质中的单个孤立导体。在此极限下，空腔的详细结构无关紧要，电容完全由外部几何形状决定。因此，相应的短圆柱平台值趋近于圆盘控制的渐近值。

通过引用基尔霍夫关于薄导电圆盘电容的经典结果，可以明确写出这一极限行为。在对静电边界值问题的开创性分析中，基尔霍夫证明，在介电常数为 $\varepsilon_{\mathrm{out}}$ 的均匀介质中，半径为 b 的孤立导电圆盘的电容为

$$C_{\mathrm{disk}} = 8\varepsilon_{\mathrm{out}} b, \tag{31}$$

这一结果最早于19世纪在位势理论的背景下推导得出 [20]。

采用本文的无量纲归一化后，可立即得到厚壳渐近值

$$\widetilde{C}_{\infty}(\delta, \kappa) \sim \left(\frac{4\kappa}{\pi}\right) \delta,\ \delta \to \infty, \tag{32}$$

其中， $\kappa = \varepsilon_{\mathrm{out}}/\varepsilon_{\mathrm{in}}$ 表示介电对比度。有限$-\delta$ 修正使电容偏离线性增长，其来源是内表面的残余影响和轴向有限尺寸效应，并由较小的几何比值 $a/b = 1/\delta$ 和 L/b决定。

4.3.2 不同长宽比下的电容行为

~图 4 汇总了多个代表性厚度 $\delta > 1$下，不同长宽比 $\alpha = a/L$ 范围内的无量纲电容 C(α, δ, $\kappa = 1$)。这组曲线简洁地展现了耦合表面解的整体特征，并按照上述渐近区域清晰地排列（对于奇异的薄壳情形 $\delta = 1$，参见文献 [19]）。在细长圆柱区间 $\alpha << 1$，所有曲线都快速上升，且彼此较为接近，这反映出主导机制仍由轴向尺度L 及其相应的库仑对数控制；有限壁厚主要使电荷在两个表面之间重新分布，而不改变普适的主导增长规律。

在中等长宽比下，各曲线按照 δ呈现出清晰的排序：在固定 α时，较厚的壳层系统性地表现出更大的 C 。这是确实存在有限厚度效应的首个明确标志。一旦 α 不再是参数意义下的小量，位于 $b = \delta a$处的外表面对电荷储存的贡献会更加有效，而空腔在设定等势条件方面的影响则逐渐减弱，从而使达到给定V_0所需的总电荷增加。

与零厚度问题最显著的不同出现在短圆柱~~区域 $\alpha >> 1$。对于每个固定的 $\delta > 1$, C(α) 在 $\alpha \to \infty$ 时趋近于有限平台 C_{∞}(δ, κ)，其饱和过程可由关于 $1/\alpha^2$ 的代数修正很好地描述，这与短圆柱参数 $L/b = 1/(\alpha\delta)$ 的展开一致。这个平台是相较于 $\delta = 1$ 的核心定性差异：理想薄壳在 $\alpha \to \infty$ 极限下是奇异的，并呈现文献 [19], 中讨论的典型类环对数行为；而任何有限厚度都会保留一个横向长度尺度，阻止系统塌缩成一个有效的一维物体。

图4的插图展示了提取出的饱和值 $C_\infty(\delta,\ \kappa = 1)$ 随 δ 的变化，涵盖所考察的薄至中等厚度范围。其单调上升印证了随着空腔逐渐被屏蔽，外表面的主导作用不断增强。向上的曲率与上文讨论的厚壳趋势初现相符：随着 δ 增大，内表面在静电学上变得无关紧要，平台逐渐弯向基尔霍夫极限所预示的圆盘控制标度。

4.4 电容的收敛性检验

为进一步验证上述电容平台的数值可靠性，我们通过有限尺寸标度分析来量化无量纲电容 $C(N_c)$的收敛性。与此前用于中心密度的标度方法（式（25））相同，我们假设其大$-N_c$ 渐近形式为

$$\widetilde{C}(N_c) = \widetilde{C}_\infty + \frac{B}{N_c} + \mathcal{O}(N_c^{-2}), \tag{33}$$

因此，可以通过对 $C(N_c)$与 $1/N_c$进行线性回归来估算 C_∞。

图5显示，在范围$N_c \geq 200$内，计算值基本落在一条直线上；对于具有代表性的参数组（α，δ，κ）=（1/3，4，1），这直接表明，主导离散化误差可由 $1/N_c$ 修正项准确描述。外推得到 $C_\infty = 6.870944116657182$，我们将其作为该代表性参数组的连续体估计。这种单调衰减趋势以及图5中的线性行为共同证实，本节其余部分报告的电容值不受残余离散化效应影响，至少在本文所讨论的物理趋势相关的精度范围内如此。

表1记录了无量纲电容的收敛情况。

表1：无量纲电容的收敛性

表1：无量纲电容的收敛性（α，δ，κ）=（1/3，4，1）图5中每个表面的高斯–切比雪夫配点数 N_c。连续体估计为 $C_\infty = 6.870944116657182$，由有限尺寸标度拟合 $\widetilde{C}(N_c) = \widetilde{C}_\infty + B/N_c$得到。相对偏差为 $\epsilon_c(N_c) = \left|\widetilde{C}(N_c) - \widetilde{C}_\infty\right| / \widetilde{C}_\infty$。数值总体呈 $\mathcal{O}(1/N_c)$趋势，并在 $N_c = 300$处出现一个小的非单调凸起。

N_c	$\widetilde{C}(N_c)$	$\epsilon_c(N_c)$
100	6.8709441166571	2.080 × 10^{-3}
200	6.8709441166571	1.044 × 10^{-3}
300	6.8709441166571	8.348 × 10^{-4}
400	6.8709441166571	6.953 × 10^{-4}
500	6.8709441166571	5.958 × 10^{-4}
600	6.8709441166571	5.213 × 10^{-4}

表1：无量纲电容的收敛性

图5显示，在范围$N_c \geq 200$内，计算值基本落在一条直线上；对于具有代表性的参数组（α，δ，κ）=（1/3，4，1），这直接表明，主导离散化误差可由 $1/N_c$ 修正项准确描述。外推得到 $C_\infty = 6.870944116657182$，我们将其作为该代表性参数组的连续体估计。这种单调衰减趋势以及图5中的线性行为共同证实，本节其余部分报告的电容值不受残余离散化效应影响，至少在本文所讨论的物理趋势相关的精度范围内如此。

表1记录了无量纲电容的收敛情况。

表1：无量纲电容的收敛性（α，δ，κ）=（1/3，4，1）图5中每个表面的高斯–切比雪夫配点数 N_c。连续体估计为 $C_\infty = 6.870944116657182$，由有限尺寸标度拟合 $\widetilde{C}(N_c) = \widetilde{C}_\infty + B/N_c$得到。相对偏差为 $\epsilon_c(N_c) = \left|\widetilde{C}(N_c) - \widetilde{C}_\infty\right| / \widetilde{C}_\infty$。数值总体呈 $\mathcal{O}(1/N_c)$趋势，并在 $N_c = 300$处出现一个小的非单调凸起。

N_c	$\widetilde{C}(N_c)$	$\epsilon_c(N_c)$
100	6.8709441166571	2.080 × 10^{-3}
200	6.8709441166571	1.044 × 10^{-3}
300	6.8709441166571	8.348 × 10^{-4}
400	6.8709441166571	6.953 × 10^{-4}
500	6.8709441166571	5.958 × 10^{-4}
600	6.8709441166571	5.213 × 10^{-4}

N_c	$\widetilde{C}(N_c)$	$\epsilon_c(N_c) \times 10^{-3}$
200	6.88523245917	1.390
300	6.88049614458	2.080
400	6.87811478665	1.044
500	6.87668018018	0.8348
600	6.87572129792	0.6953

总之，本节的电容结果在几何形状和材料方面呈现出一致的图景。纳入边缘奇异性后，公式（33）$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$中的有限尺寸标度产生了严格单调的序列 $C(N_c)$和稳健的连续体估计 C_∞；在$N_c = 400 - 500$ 时，离散化误差已远低于 10^{-3} （参见表1）。在**细长$\widetilde{\ }$区域**（$\alpha >> 1$）中，厚度的作用较弱， C 遵循零厚度模型的经典对数趋势。相比之下，对于**短圆柱**（$\alpha << 1$），任何**有限厚度**（$\delta > 1$）都会使响应规整为由外半径 b控制的有限平台。该平台随 δ 单调增加，并在外表面占主导时趋于基尔霍夫圆盘极限。改变介电对比度 $\kappa = \varepsilon_{\text{out}}/\varepsilon_{\text{in}}$ 主要通过重新缩放幅值，同时保留这些定性趋势。

表2汇总了细长区间、中间区间和短圆柱区间内无量纲电容 $C(N_c)$ 的连续体 Nystr¨om–切比雪夫估计值。数值通过采用 $N_c = 300$,400 的两点有限尺寸拟合得到。这些数据提供了简明的基准，并将作为后续参数研究的参考数据集。

表2. $\widetilde{C}(N_c)$无量纲电容方式与图4–5相同）。所有数值均为 Nystr¨om–切比雪夫连续体估计值，通过 $N_c = 300, 400$ 的两点有限尺寸拟合获得。最后两列报告了拟合中使用的原始数值。

情形	$\alpha = L/a$	$\delta = b/a$	$\kappa = \varepsilon_{\text{out}}/\varepsilon_{\text{in}}$	$\widetilde{C}(N_c \to \infty)$	$\widetilde{C}(N_c = 300)$	$\widetilde{C}(N_c = 400)$
A	6.00	1.05	1.0	1.30733541009	1.30815492632	1.30795004727
B	1.00	1.30	1.0	2.27300133001	2.27547689078	2.27485800059
C	0.25	1.50	2.0	7.31426851348	7.35108007254	7.34187718278
D	0.25	4.00	2.0	14.12877818098	14.15433989536	14.14794946676

对于 $k = 2$情形（C–D），介电对比效应十分明显：在 $\alpha = 0.25$固定时，将 κ 从 1 提高到 2，连续体电容（$\sim 1.9\times$）几乎翻倍，这与短圆柱区间内由外部区域控制的情况相符。对于 $\kappa = 2$ 和 $\alpha = 0.25$，将厚度从$\delta = 1.5$ 增加到 4。0，会带来额外的 $\sim 1.9\times$ 增幅，进一步支持圆盘控制的平台这一图景。相比之下，细长／中等 $\kappa = 1$ 情形（A–B）的变化较小，这表明介电对比主要改变量值，而几何形状（α， δ）决定所处区间。对于短圆柱$\widetilde{\ }$几何形状，C 的外表面主导平台以及随 $\kappa = \varepsilon_{\text{out}}/\varepsilon_{\text{in}}$近线性标度关系，为在轴向占用空间受限时调节电容目标提供了可靠手段。潜在应用的简要讨论留待结论部分。

5 结论

本研究对嵌于双介质环境中的有限长度、开口、具有有限径向厚度 $\delta = b/a$ 的空心导电圆柱的静电学进行了可控数值处理。通过将边值问题改写为针对内外表面的耦合切比雪夫加权积分方程，我们构建了一种离散化方案，能够在统一框架下同时解析全局非局部耦合和局部边缘增强。

在所研究的整个参数范围内，计算得到的表面电荷密度在 $z \to \pm L/2$ 处均呈现普适平方根边缘发散，而切比雪夫加权未知量的相应光滑性则是观测到谱精度的基础。有限厚度主要影响感应电荷在两个表面之间的分配：对于 $\delta \approx 1$，内部密度和外部密度仍然强烈耦合；随着 δ 增大，电荷逐渐转移至外表面，内部响应受到抑制，这与空腔的静电屏蔽相符。中平面数据清楚地展示了这种分离，并支持厚壳解耦图景：外部解趋近于有效单表面问题，而内部密度则随 δ代数衰减。

尽管局部电荷发生了显著重新分布，电容仍提供了一种简洁的整体表征，能够清晰衔接相关的不同区间。在细长体极限 $\alpha << 1$ 下，主导发散仍由轴向尺度控制，受厚度影响很小；而在中间 α，在几何形状固定时，较厚的壳层会产生系统性更大的电容。最重要的是，任意有限厚度 $\delta > 1$ 都会使短圆柱响应正则化：当 $\alpha \to \infty$ 时，电容趋近于有限平台 $\tilde{C}_\infty(\delta,\ k)$，并伴随代数修正，取代理想薄壳 $\delta = 1$ (参考文献 [19])所特有的奇异类环对数行为。提取的平台值随 δ 单调增加，并呈现出随厚度增大而趋向圆盘控制标度的预期趋势，这与外表面主导极限的出现相符。

最后，我们考察了介电对比度 $k = \varepsilon_{\text{out}}/\varepsilon_{\text{in}}$ 的作用。在所研究的范围内，定性趋势依然成立：厚度决定空腔屏蔽效应和外表面占主导的现象，而改变 k 主要通过边界条件重新缩放外侧密度，在中等 δ 下仅产生微弱的残余畸变。这些结果表明，耦合核切比雪夫–Nyström 框架可作为有限厚度圆柱壳的稳健基准工具，并为广泛的几何与材料参数范围内的局部场增强（通过 $\tilde{\sigma}(z)$）和整体响应（通过 $\tilde{C}$）提供准确的参考数据。

本文建立的框架无需进行概念上的修改，即可向多个方向扩展，包括非均匀边界电势（分段电极或偏置电极）、耦合多导体构型，以及与带护环电容测量和高压电极设计相关的几何构型；在这些应用中，有限厚度效应与边缘电场增强相互竞争。在这一更广泛的背景下，本研究不仅为有限圆柱壳提供了定量基准数据，还提供了一个可重复使用的边界元计算模板，用于处理轴对称导体问题中的端部主导静电学问题。特别是，耦合椭圆核公式及其具有谱精度的 Nystr¨om 离散化，为基于

面板离散化可以通过系统性验证。

除当前验证之外，$(\alpha,\ \delta,\ k)$ 映射和快速轴对称 Nystr¨om– 边界元法求解器还可用于：确定有限长度同轴电容器、射频/高压馈通装置和超高真空/低温屏蔽罩的尺寸，其中短圆柱平台值可提高对几何变化的容差；利用外表面控制来稳定$\backsim C$的紧凑型电容单元/传感器；气体/半导体探测器中的电场整形和保护环设计（减轻小像素效应）；以及多壳层电容矩阵的逆向设计，用于代码验证和计量学，其中基尔霍夫圆盘极限可作为边缘修正的校准参考。

利益冲突声明

作者声明，不存在已知的可能影响本文所报告工作的竞争性财务利益或个人关系。

致谢

作者感谢使用基于人工智能的语言模型（ChatGPT、OpenAI）协助改进本稿部分内容的英语表达和清晰度。所有科学内容、结果和解释均由作者独自负责。

参考文献

[1] H. Caven dish，《电学研究》，Henry Cavendish（大学出版社，1879） .

[2] J.C. Maxwell，论长而细的圆柱及具有可观厚度的圆盘的电容量，《伦敦数学学会会刊》。**9**，94（1877）。

[3] J. Lekner，导电圆柱与球体的静电学，AIP 出版社，纽约州梅尔维尔（2021）。[4] L. Kapitsa、V. A.Fock 和 L.A.Vainshtein，有限长度空心圆柱的静态边界问题，《苏联物理学—技术物理》**4**，1077（1960）。[5] L. A. Vainshtein，有限长度空心圆柱的静态边界问题。*II.* 数值结果，《苏联物理学—技术物理》**7**，855（1963）。[6] L. A.Vainshtein，有限长度空心圆柱的静态边界问题。*III.* 近似公式，《苏联物理学—技术物理》**7**，861（1963）。[7] J. D. Jackson，重新探讨细直导线上的电荷密度，《美国物理学杂志》。**68**，789（2000）。[8] L. Verolino，空心圆柱的电容，《电气工程》（柏林）**78**，201（1995）。[9

] R. W. Scharstein，管的电容，《静电学》**65**，21（2007).

[10] *E. Romashets*、*M. Vandas* 和 *C. S.en*，《导电空心圆柱壳电容的闭式解》，《静电学》*126*，*103866*（*2013*）。[11] *N. N. Lebedev* 和 *I. P. Skal'skaya*，《对偶积分方程在有限长空心导电圆柱静电问题中的应用》，《苏联物理学-技术物理学》*18*，*28*（*1973*）。[12] *H. Gu*、*L. Huang*、*P. Yang* 和 *T. Luo*，《立方体和空心圆柱的电容》，*arXiv:2505.13148*（*2025*）。[13] *G. Paffuti*，《圆柱系统中的电容与力研究结果》，*arXiv:1801.08202*（*2018*）。[14] *C. M. Butler*，《有限长导电圆柱管的电容》，《应用物理学杂志》*51*，*5607*（*1980*）。[15] *J. Lekner*，《开口导电圆柱的内外表面电荷密度与四极矩》，《静电学》*136*，*104124*（*2025*）。[16] *W. R. Smythe*，《带电直圆柱》，《应用物理学杂志》*27*，*917*（*1956*）。[17] *J. Lekner*，《开口导电圆柱电容的插值公式》，《静电学》*136*，*104132*（*2025*）。[18] *A. D. Arun*、*S. Chandra*、*S. Thirunavukkarasu*、*M. P. Rajiniganth*、*N. Malathi* 和 *M. Sivaramakrishna*，《一种基于新型代数拓扑方法的储存静电能与三维麦克斯韦电容评估方法》，《静电学》*135*，*104065*（*2025*）。[19] *J. Ricardo de Sousa*，《有限长导电圆柱的静电学：椭圆核积分方程与电容渐近性》，稿件已提交（*2025*）。[20] *G. R. Kirchhoff*，《论电容器理论》，《柏林普鲁士皇家科学院月报》*1877*，*144*（*1877*）。[21] *L. N. Trefethen*，《*MATLAB*中的谱方法》，工业与应用数学学会（*2000*）。[22] *J. P. Boyd*，《切比雪夫与傅里叶谱方法》，多佛出版社，多佛数学丛书，米尼奥拉，纽约（*2001*）。[23] *C. Canuto*、*M. Y. Hussaini*、*A. Quarteroni* 和 *T. A. Zang*，《谱方法：单域中的基础》，科学计算，第*1*卷，柏林-海德堡，施普林格（*2006*）。[24] *Rainer Kress*，《线性积分方程》，第*3*版，应用数学科学，第*82*卷，施普林格，查姆（瑞士），*2014*年。[25] *K. Atkinson*，《第二类积分方程的数值解》，剑桥大学出版社，剑桥（*1997*）。

[26] J. Helsing 和 R. Ojala，关于拉普拉斯方程中边界附近层势的计算，《计算物理学杂志》**227**，2899（2008年）。

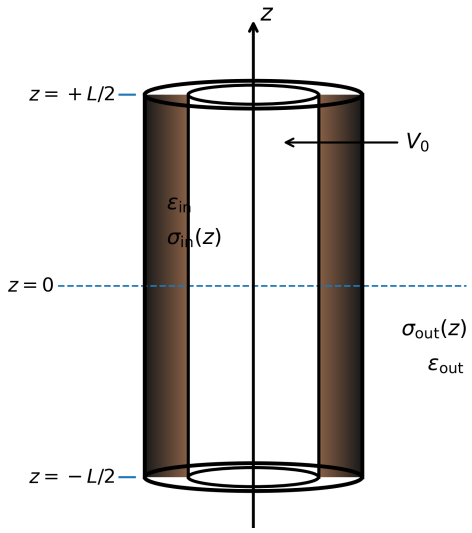


图 1：有限导电圆柱壳的示意几何形状。壳层的内半径为 a、外半径为 b，长度为 L，从 $z = -L/2$ 延伸至 $z = +L/2$。内外圆柱面均保持在相同的固定电势 V_0，将介电常数为 ε_{in} 的内侧介质与介电常数为 ε_{out}的外侧介质分隔开。内外表面上的感应表面电荷密度分别记为 $\sigma_{\text{in}}(z)$ 和 $\sigma_{\text{out}}(z)$。圆柱坐标 $(\rho,\ z)$ 相对于对称轴测量。

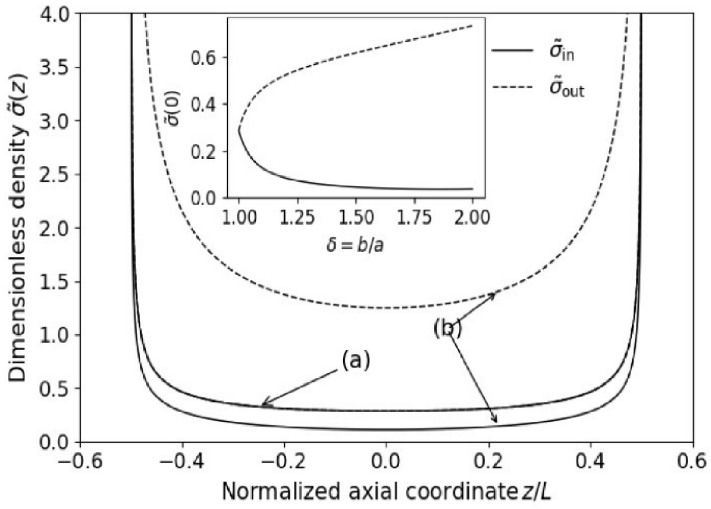


图 2：对于 $\alpha = 1/3$、 $\kappa = 1$，以及 (a) $\delta = 1$ 和 (b) $\delta = 4$，无量纲表面电荷密度 $\tilde{\sigma}_{\mathrm{in}}(z) = a\,\sigma_{\mathrm{in}}(z)/(\varepsilon_{\mathrm{in}}V_0)$（实线）和 $\tilde{\sigma}_{\mathrm{out}}(z) = b\,\sigma_{\mathrm{out}}(z)/(\varepsilon_{\mathrm{out}}V_0)$（虚线）随 z/L 的变化。向 $z = \pm L/2$ 单调增加，反映了普适平方根边缘发散。插图显示中平面值 $\tilde{\sigma}(0)$ 随 δ 的变化：外侧密度趋于饱和，而内部密度按代数规律衰减，表明在厚壳极限下发生静电解耦。

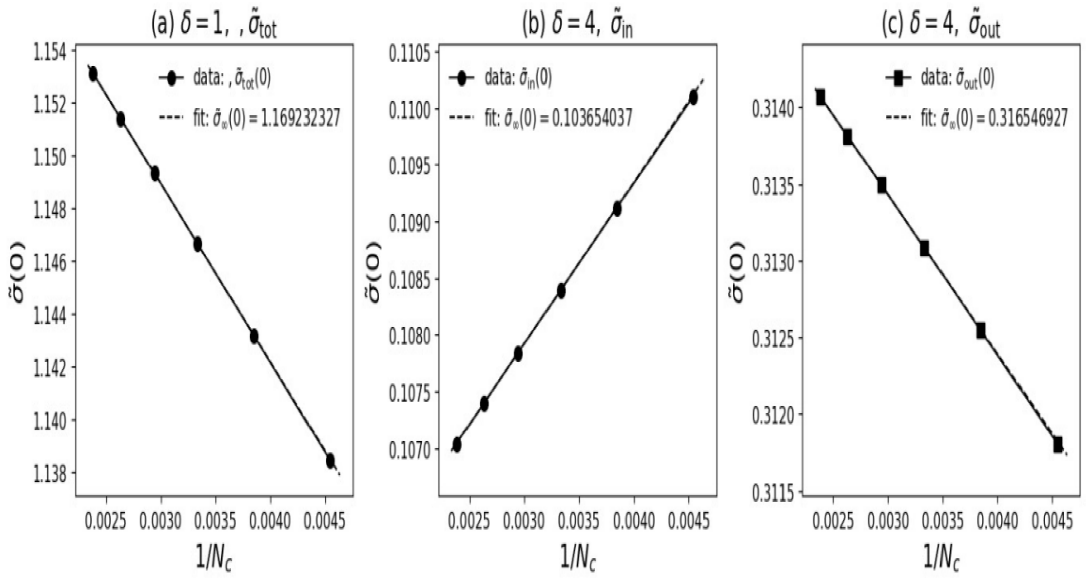
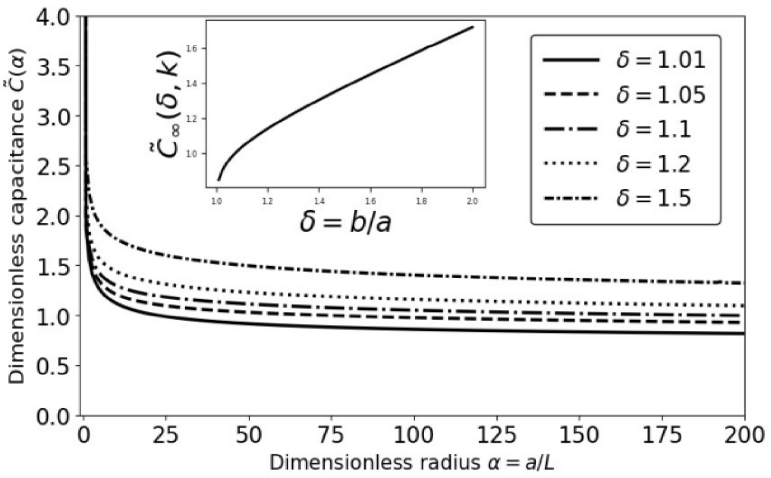
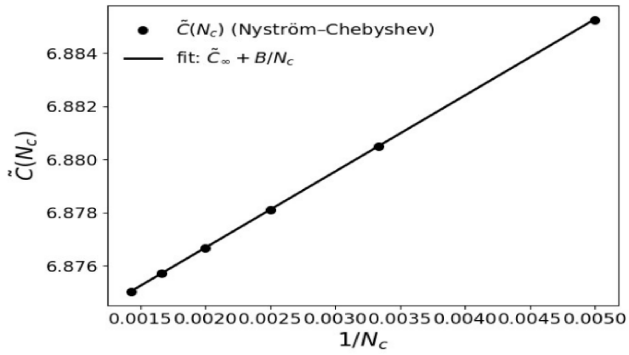


图 3：在固定长宽比 $\alpha = 1/3$ 下，采用耦合积分方程的切比雪夫–Nystr¨om 离散化得到的圆柱中心表面电荷密度 $\tilde{\sigma}(0)$ 的有限尺寸标度。结果展示了两个具有代表性的厚度，$\delta = 1$ 和 $\delta = 4$。



˜图 4：在介电对比度 $\kappa = \varepsilon_{\text{out}}/\varepsilon_{\text{in}} = 1$ 固定时，有限圆柱导体的无量纲电容 $C(\alpha) = C$ $(\alpha)/(2\pi\varepsilon_{\text{in}}a)$ 随长宽比 $\alpha = a/L$ 的变化，其中展示了若干厚度参数 $\delta = b/a$ 对应的结果。当 $\alpha \ll 1$ 时，所有曲线均趋于由普适对数增长所支配的细长体区域。相反，在短圆柱极限 $\alpha \gg 1$ 下，电容饱和于一个取决于 δ 的平台，这反映了有限厚度对薄壳模型中环状奇异性的正则化。插图展示了渐近平台值 ˜ $C_\infty(\delta,\ \kappa)$ 随 δ 的变化，凸显其单调增大并趋向圆盘控制极限。



˜图5：使用 Nystr¨om–切比雪夫离散化中每个表面的 N_c Gauss–切比雪夫节点计算得到的无量纲电容 $C(N_c)$ 的有限尺寸标度。关于 $1/N_c$ 的线性依赖关系˜ ˜支持渐近形式 $C(N_c) = C_\infty + B/N_c$，从而得到外推的连续˜统估计值 $C_\infty = 6.870944116657182$。